Определения по Теории Информации

Колесников Алексей

29 сентября 2021 г.

Определение 1. Дискретной случайной величиной A называется определенное на вероятностном пространстве (Ω, F, P) и принимающим значения из множества a, называется произвольное измеримое отображение $A : \Omega \to a$, т.е.

$$\forall a_i \in a : A^{-1}(a_i) = \{\omega : A(\omega) = a_i\} \in F.$$

Определение 2. Вероятностная схема:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots \end{pmatrix}$$

или

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} = (p_1, p_2, \dots, p_n).$$

$$\forall i \in \overline{1, n} : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

$$B \sim \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots \\ p(b_1) & p(b_2) & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix} = (q_1, q_2, \dots, q_m).$$

$$\forall i \in \overline{1, m} : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} q_i = 1.$$

Определение 3. Обхединенная вероятностная схема AB с множеством исходов $a_i b_j$:

$$AB \sim \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_n b_m \\ p(a_1 b_1) & p(a_1 b_2) & \dots & p(a_n b_m) \end{pmatrix}.$$

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p(a_i b_j) = q_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} p(a_i b_j) = p_j$.

Если $\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} p(a_i b_j) = 1$, то события A и B независимы.

Определение 4. Собственная информация, содержащаяся в исходе $a_i \in A$:

$$I(a_i) = \log_2 \frac{1}{p(a_i)}.$$

Определение 5. Энтропия вероятностной схемы A(средняя собственная информация)(усреднение собственной информации $I(a_i)$ по вероятностной схеме A):

$$H(A) = E_A I(a_i) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i) \cdot I(a_i) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(a_i)}$$

Итого,

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} p(a_i) \cdot \log_2 p(a_i).$$

Определение 6. Собственная информация, содержащаяся в исходе $a_j b_j \in AB$:

$$I(a_i b_j) = \log_2 \frac{1}{p(a_i b_j)}.$$

Определение 7. Энтропия объединенной вероятностной схемы AB(усреднение $I(a_i b_j)$ по вероятностной схеме AB):

$$H(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(a_i b_j) \cdot \log_2 \frac{1}{p(a_i b_j)}.$$

Итого,

$$H(AB) = -\sum_{(i,j)} p(a_i b_j) \cdot \log_2 p(a_i b_j).$$

Определение 8. Условная собственная информация, содержащаяся в исходе $a_i \in A$ при условии реализации исхода $b_j \in B$:

$$I(a_i / b_j) = \log_2 \frac{1}{p(a_i / b_j)}, \text{ где } p(a_i / b_j) = \frac{p(a_i b_j)}{p(b_j)}.$$

Определение 9. Условная энтропия вероятностной схемы A относительно исхода $b_j \in B$(усреднение $I(a_i / b_j)$ по вероятностной схеме A / b_j):

$$H(A / b_j) = E_{A / b_j} I(a_i / b_j) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i / b_j) \cdot I(a_i / b_j).$$

Итого,

$$H(A / b_j) = -\sum_{i=1}^{n} p(a_i / b_j) \log_2 p(a_i / b_j).$$

Определение 10. Условная энтропия вероятностной схемы A относительно вероятностной схемы B (усреднение $I(a_i / b_j)$ по вероятностной схеме AB):

$$H(A / B) = E_{AB} I(a_i / b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(a_i b_j) I(a_i / b_j).$$

Итого,

$$H(A / B) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(a_i b_j) \log_2 (p(a_i / b_j)).$$