Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный университет»

Физический факультет
Кафедра электроники

Исследование зарядовой модели излучения импульсных сигналов

Отчет по НИРС
Направление 03.04.03 «Радиофизика»
Специализация «Информационные системы»

Обучающийся		Д. В. Шаповалов
Руководитель		П. А. Кретов
Зав. кафедрой	д. ф.-м. н., профессор	А. М. Бобрешов

Воронеж
2019

Оглавление

Введение

К сожалению, в литературе крайне сложно найти четкое разделение антенн на импульсные и сверхширокополосные (СШП). Этот факт осложняет соотношение результатов теоретических к экспериментальных исследований, относящихся к СШП и импульсным антеннам и наоборот. Однако, любую импульсною антенну можно считать СШП, но не всякая СШП антенна может использоваться в качестве импульсной. Как пример можно привести интересную и насыщенную фактическим материалом монографию [1], в которой описываются вопросы, относящиеся как к СШП, так и импульсным антеннам без четкого разделения, вперемежку.

Важная роль в СШП импульсных сигналах играет измерение характеристик антенн импульсным методом [2]. В качестве основных преимуществ импульсного метода измерения перед частотным здесь, как и при измерении радиолокационных характеристик, а именно, измерение основных характеристик антенны (диаграммы направленности, коэффициента усиления, входного сопротивления и др.) в широкой полосе частот без использования безэховых камер. Так же, что не мало важно, данный метод позволяет измерять диаграмму направленности без вращения антенны, при небольшом числе датчиков. Здесь вместо движения в пространстве используется изменение сигналов во времени, а значит, вместо пространственных радиоголограмм, применяемых в антенной технике [3], можно использовать временные радиоголограммы.

Возможности сверхскоростной видеоимпульсной радиосвязи можно назвать наименее исследованными в настоящее время. Некоторые аспекты СШП связи описаны в [4]. Очевидно, для повышения скорости передачи информации следует увеличивать полосу пропускания канала.

Основные подходы к процессам излучения, рассеяния и приёма электромагнитных волн основаны на рассмотрении этих процессов во временной области. Ввиду [5], временной подход обладает наглядностью и допускает простую физическую интерпретацию происходящих процессов, которая позволила построить модель излучения и приема волн [6], названную зарядовой моделью.

Однако, из за больших объёмов данных, рассчитываемых во временном подходе, обсчёт антенны может занимать весьма длительное время, в отличии от зарядовой модели. В некоторых моментах, этот фактор может быть критичным. Зарядовая модель, в свою очередь занимает гораздо меньше времени, но, к сожалению, с меньшей точностью, что не мешает получить предварительные данные по конкретно выбранной антенне. Так же, на данный момент, этот метод является одним из наименее исследованных.

1 Зарядовая модель излучения импульсных сигналов

При подаче на вход антенны кратковременного импульса возникает возбуждение, сосредоточенное на одном или нескольких локальных участках антенны. Положение этих возбужденных участков изменяется во времени, в виду их движения вдоль проводников. Такие перемещающиеся в пространстве участки малых размеров удобно считать движущимися сосредоточенными зарядами. Сумму полей, создаваемых этими зарядами можно в данном случае считать полем излучения антенны.

Сформулированные выше положения можно описать исходя из рис. 1.1. На рис. 1.1,а показано условное расположение силовых линий вокруг провода в некоторый момент времени. Электрическое поле $\vec{E}$ отлично от нуля на небольшом участке проводника. По нормальной составляющей поля E_n можно подсчитать поверхностную плотность заряда $\sigma_{пов}$:

$$\sigma_{пов}(t)=\epsilon E_n(t)$$

Поверхностную плотность заряда также можно подсчитать через уравнение непрерывности, при условии, что известен ток в проводнике.

Зависимость поверхностной плотности заряда от поперечных координат может не учитываться при рассмотрении тонких проводников. Зависимость линейной плотности заряда p от продольной координаты l изображена на рис. 1.1,б. На рис. 1.1,в показан заменяющий этот распределенный заряд, сосредоточенный заряд q, движущийся вдоль проводника с некоторой скоростью v, зависящей от времени t. Полагается, что поле излучения этого сосредоточенного заряда близко к истинному полю $\vec{E}(\vec{r},t)$ на рис. 1.1,а.

Представление излучения проволочных антенн полями сосредоточенных движущихся зарядов составляет суть зарядовой модели. Потому как ток по определению представляет движение зарядов, переход при расчетах от токов к зарядам погрешности не вносит.

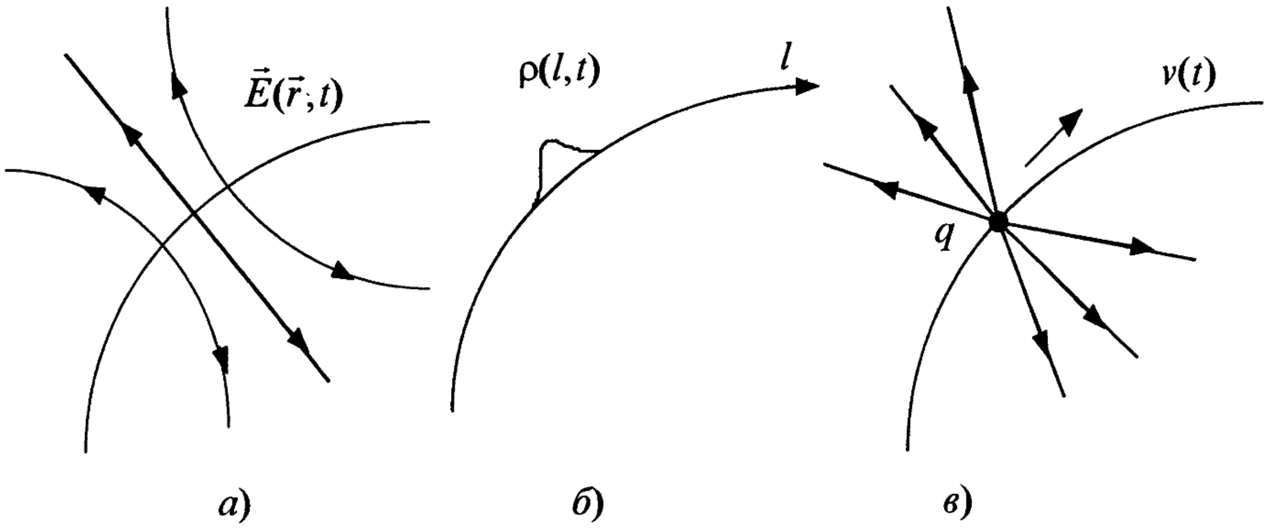

Рис.1.1. Зарядовая модель антенны:
а -силовые линии поля вблизи проводника, возбужденного импульсным сигналом; б - зависимость плотности заряда на проводнике от продольной координаты; в - поле сосредоточенного заряда, заменяющего распределенный.

Погрешность возникает при переходе от реальных движений к упрощенным и, следовательно, замене распределенных зарядов сосредоточенными.

Представим аргументы в пользу зарядовой модели. Приведем результаты эксперимента, численного анализа и на модели в частотной области, которые убедили бы в справедливости зарядовой модели.

Рассмотрим простейший асимметричный вибратор — штырь над идеально проводящей плоскостью, возбуждаемый у основания (рис.1.2,а). Известно [7], что характеристики такой антенны приближенно могут быть подсчитаны, если считать, что ток в штыре распределен так же, как в отрезке длинной линии, разомкнутой на конце, т.е. распределение тока имеет характер стоячей волны с узлом на конце.

Рассмотрим возбуждение антенны на рис. 1.2,а импульсным сигналом и будем полагать, что представление об антенне как об отрезке длинной линии, разомкнутой на конце, справедливо для всех частот в спектре возбуждающего импульса. Для анализа антенны при этом предположении следует определить ток или закон движения заряда в отрезке линии на рис. 1.2,б

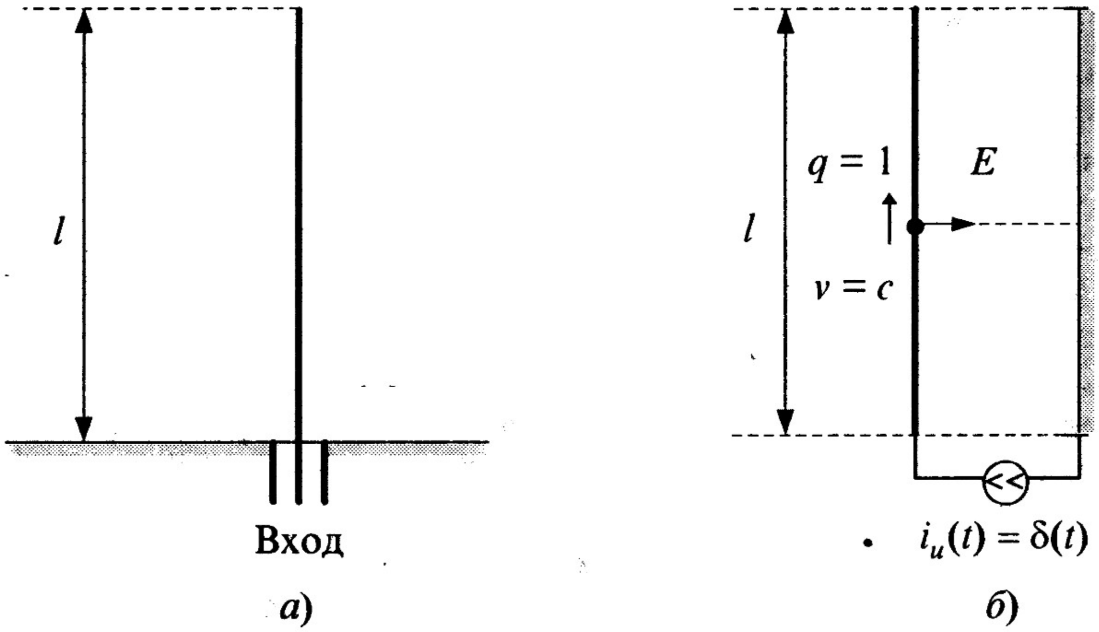

Рис.1.2. Модель вибраторной антенны:
а - несимметричный вибратор; б - отрезок длинной линии, заменяющий вибратор, возбуждаемый импульсным сигналом.

В воздушной длинной линии импульсный сигнал распространяется без искажений, и по достижении конца линии, возвращается обратно. Допустим, что линия и источник согласованы на всех частотах, тогда переотражений возникать не будет. Пространственные размеры возбужденного в линии участка Δl определяются длительностью импульса Δt ($\Delta l = c\Delta t$) и при δ - импульсном виде сигнала, равны нулю, т.е. этот заряд можно считать сосредоточенным. Величина заряда определяется интегралом от входного тока:

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \quad .$$

Если при подаче на штырь δ - импульсного тока в нем возникает единичный сосредоточенный заряд, частотный и временной подходы к физическим процессам в штыревой антенне окажутся не противоречащими друг другу. Этот заряд движется со скоростью света от основания штыря к вершине, отражается от нее и возвращается обратно ко входу. Если сопротивление на входе согласовано с волновым сопротивлением штыря, то этот заряд поглощается на входе, иначе возникают многократные переотражения. Для учета влияния идеально проводящей плоскости следует рассмотреть зеркальное движение противоположного по знаку заряда.

Таким образом, зарядовая модель соответствует представлению проволочной антенны в рассмотрении её как воздушная длинная линия с постоянным волновым сопротивлением. Далее, будем полагать, что в проволочных антеннах при импульсном возбуждении распространяются сосредоточенные заряды. Так же, траектории движения зарядов определяются формой проводников, а скорость движения равна скорости света. Это антенной и было названо зарядовой моделью проволочной антенны[6].

В качестве второй группы аргументов в пользу зарядовой модели суще- ствуют результаты экспериментов [8][9]. В указанных работах приведены экспериментальные результаты по возбуждению проволочных антенн импульсным сигналом. Отмечается, что результаты эксперимента получают качественное объяснение, если считать, что по антенне движется со скоростью света сосредоточенный заряд. Излучение возникает при изменении направления движения заряда (изменении скорости).

Приведённые в данной работе вычисления основаны на принципах, изложенных в [6], авторы которых утверждают то, что эта модель может быть использована не только для качественного объяснения физических процессов, но и при расчетах для анализа и синтеза антенн во временной области.

Для антенн, содержащих металлические поверхности и металлические тела, также можно применить зарядовую модель, хотя и не без некоторых трудностей. При подаче импульсного воздействия на такие антенны возникают возбужденные локальные участки, но они в некоторый момент времени сосредоточены около каких-либо линий на поверхности, т. е. приходится рассматривать движение заряженных линий на поверхности тела. Конечно, при этом указать априорно характер движения зарядов еще сложнее, чем для проволочных антенн. Вывод общих соотношений, связывающих характер движения зарядов на поверхности тела с геометрическими характеристиками поверхности, представляет важную задачу для дальнейшего развития импульсной электродинамики.

Основное достоинство зарядовой модели — это наглядность, причем не только в представлении физических процессов, но и при выполнении расчетов.

Мы также проверили данные [6] выкладки для случая треугольной антенны при помощи компьютерного вычисления [10] и соотнесли с данными полученными в CST Studio Suite. Полученные данные не противоречат друг другу.

2 Поле точечного заряда

В виду отсутствия полного вывода формул у авторов зарядовой теории [6], в данной работе был произведён их вывод из уравнений Максвелла.

Отдельно стоит так же отметить труды американского лауреата нобелевской премии по физике, Ричарда Фейнмана [11]. На основании полученных формул, а так же выводах Фейнмана для поля заряда постоянного во времени, можем расширить задачу поиска общего решения до нахождения поля, в котором заряд будет изменяться со временем.

2.1 Поле постоянного во времени точечного заряда

Представим вывод формулы для вычисления электрического поля заряда постоянного во времени на основании известных [12] из курса теоретической физики уравнений Максвелла:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$c^2\nabla\times\vec{B}=\frac{\vec{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad ,$$

а так же, их решений:

$$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \quad ,$$

при потенциалах:

$$\phi(1,t)=\int\frac{\rho\left(2,t-\frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}dV_2$$

$$\vec{A}(1,t)=\int\frac{\vec{j}\left(2,t-\frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}}dV_2 \quad .$$

Опираясь на вывод потенциалов Лиенара-Вихерта [12][13], найдём решения для представленных потенциалов:

Выведем отдельно скалярный потенциал.

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 \vec{r}}dV \quad ,$$

где $\vec{r}=|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Вынесем постоянную часть за скобку интегрирования.

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Отбросим на время постоянную часть, для упрощения записи и понимания дальнейших действий.

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)d\tau dV \quad ,$$

где $\tau=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$, и $\rho(\vec{r},t)=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))$,

тогда выражение скалярного потенциала принимает вид:

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int \frac{q\delta(r'-\vec{r}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)d\tau dV$$

После тривиальных действий с изменением порядка интегрирования, а так же выноса заряда, потому как мы приняли его постоянным по времени:

$$\phi(\vec{r},t)=q\int \frac{\delta(t'-\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}d\tau$$

Воспользуемся приведённым в [14] правилом интегрирования названным правилом параметризации Фейнмана $\int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}$, при $f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec{n}\vec{\beta}} \quad , \text{где} \quad \vec{\beta}=\vec{v}(t') \quad , \text{а} \quad \vec{n}=\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} \quad .$$

Переходим во время $t'=\tau$.

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

Найдём теперь решение уравнения для векторного потенциала. В ходе вывода будем руководствоваться схожими рассуждениями.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2\vec{r}}dV \quad ,$$

где $\vec{r}=|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Вынесем постоянную часть за скобку интегрирования.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Отбросим на время постоянную часть, для упрощения записи и понимания дальнейших действий

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\int\frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\,dV \quad ,$$

где $\tau=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$, и $\vec{j}(\vec{r},t)=q\vec{v}(t')\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))$,

тогда выражение скалярного потенциала принимает вид:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\int\frac{q\vec{v}(t')\delta(r'-\vec{r}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\,dV$$

После тривиальных действий с изменением порядка интегрирования, а также выноса заряда, потому как мы приняли его постоянным по времени.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=q\int\frac{\vec{v}(t')\delta(t'-\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}d\tau$$

Воспользуемся приведённым в [13] правилом интегрирования названным правилом параметризации Фейнмана $\int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}$, при $f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec{n}\vec{\beta}}$$, где $\vec{\beta}=\vec{v}(t')$, а $\vec{n}=\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}$.

Переходим во время $t'=\tau$.

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

Используя прил.2 и прил.4, убеждаемся в правильности данных формул, найдя калибровку Лоренца $\frac{d\phi}{dt}+c^2\nabla\vec{A}=0$:

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c\vec{n}\vec{\beta}-c\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$$

$$\nabla\vec{A}=\nabla\left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{\beta}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\right)=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$$

Как можем заметить, равенство выполняется. Сумма данных величин будет равна нулю.

Для нахождения поля обратимся к вспомогательным уравнениям 3 и 5.

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[\vec{n}\left(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]-$$
$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{c}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[\vec{\beta}\left(\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\beta}{c}\right)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]=$$

вынесем за скобки $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$, тогда записаное выше уравнение примет вид:

$$=\left[\vec{n}\left(1-\beta^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\beta(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]-\left[\dot{\vec{\beta}}\left(\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]=$$

$$=\vec{n}\left(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\vec{\beta}+\vec{n}\vec{\beta}^2-\vec{n}\vec{\beta}^2+\vec{\beta}^3-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{\beta}-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=\vec{n}-\vec{\beta}^2\vec{n}+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}-\vec{\beta}+\vec{\beta}^3-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{\beta}-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})\left((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+\vec{n}(1-\vec{\beta}^2)-\vec{\beta}(1-\vec{\beta}^2)-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})\left((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}-\vec{\beta})-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}(\vec{n}-\vec{\beta}))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}=$$

Возвращаясь к константам, получим:

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\times$$
$$\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\left(\vec{n}\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)(\vec{n}-\vec{\beta})-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}(\vec{n}-\vec{\beta}))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right]$$

Полученное выражение не противоречит идее о зарядовой модели, и наоборот, её подтверждает. В источниках [6] и [11] так же можно встретить её сокращённый вариант записи. Указывать его здесь не имеет особого смысла. Приведённый выше вариант является удобным для понимания происходящего процесса. Однако, здесь возникает проблема в случае необходимости обсчёта антенны, для которой заряд будет переменной величиной. Помимо излучения на местах смены траектории, ещё вклад будет вносить и тот факт, что на единичной площадке антенны заряд будет претерпевать некоторые изменения. Само же нахождение такой формулы не является столь же тривиальным. К примеру Фейнман в [11] указывает на сложность нахождения приведённой выше формулы, а в [6] авторы описывают попытки вывода формул для изменяющегося заряда и их не удачу в процессе.

2.2 Поле изменяемого точечного заряда

В попытках решения представленной ранее проблемы, был произведён вывод формулы для вычисления электрического поля изменяемого заряда. Опираясь на предыдущий вывод, на уже упомянутых [12] уравнений Максвелла, можем записать:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$c^2\nabla\times\vec{B}=\frac{\vec{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\quad ,$$

а так же, их решений:

$$\vec{E}=-\nabla\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\quad ,$$

при потенциалах:

$$\phi(1,t)=\int\frac{\rho\left(2,t-\frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}dV_2$$

$$\vec{A}(1,t)=\int\frac{\vec{j}\left(2,t-\frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}}dV_2\quad .$$

Так же, опираясь на вывод потенциалов Лиенара-Вихерта [12][13], найдём решения для представленных потенциалов:

Выведем отдельно скалярный потенциал.

$$\phi(\vec{r},t)=\int\frac{\rho(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0\vec{r}}dV\quad ,$$

где $\vec{r}=|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$

$$\phi(\vec{r},t)=\int\frac{\rho(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Вынесем постоянную часть за скобку интегрирования.

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Отбросим на время постоянную часть, для упрощения записи и понимания дальнейших действий.

$$\phi(\vec{r},t)=\int\frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int\frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\, dV \quad ,$$

где $\tau=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$, и $\rho(\vec{r},t)=q(t')\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))$,

тогда выражение скалярного потенциала принимает вид:

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int\frac{q(t')\delta(r'-\vec{r}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\, dV$$

После тривиальных действий с изменением порядка интегрирования.

$$\phi(\vec{r},t)=\int\frac{q(t')\delta(t'-\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}d\tau$$

Воспользуемся приведённым в [14] правилом интегрирования названным правилом параметризации Фейнмана $\int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}$, при $f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec{n}\vec{\beta}}$$, где $\vec{\beta}=\vec{v}(t')$, а $\vec{n}=\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}$.

Переходим во время $t'=\tau$.

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

Найдём теперь решение уравнения для векторного потенциала. В ходе вывода будем руководствоваться схожими рассуждениями.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int \frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \vec{r}} dV \quad ,$$

где $\vec{r}=|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int \frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} dV$$

Вынесем постоянную часть за скобку интегрирования.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} dV$$

Отбросим на время постоянную часть, для упрощения записи и понимания дальнейших действий

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\, dV \quad ,$$

где $\tau=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$, и $\vec{j}(\vec{r},t)=q(t')\vec{v}(t')\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))$,

тогда выражение скалярного потенциала принимает вид:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\int \frac{q\vec{v}(t')\delta(r'-\vec{r}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\, dV$$

После тривиальных действий с изменением порядка интегрирования.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int \frac{q(t')\vec{v}(t')\delta(t'-\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} d\tau$$

Воспользуемся приведённым в [13] правилом интегрирования названным правилом параметризации Фейнмана $\int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}$, при $f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec{n}\vec{\beta}} \text{ , где } \vec{\beta}=\vec{v}(t') \text{ , а } \vec{n}=\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|} \quad .$$

Переходим во время $t'=\tau$.

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{q(\tau)\vec{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

Используя прил.6 и прил.8, убеждаемся в правильности данных формул, найдя калибровку Лоренца $\frac{d\phi}{dt}+c^2\nabla\vec{A}=0$:

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)^2|(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\times$$
$$\times\left(\dot{q}(\tau)[|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})]-q(\tau)[-\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}]\right)$$

$$\nabla\vec{A}=\nabla\left(\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{q(\tau)\vec{\beta}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\right)=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\times$$
$$\times[(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})(\vec{\beta}\dot{q}(\tau)+\dot{\vec{\beta}}q(\tau)))-q(\tau)\vec{\beta}(\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}})]$$

Можно без особых ухищрений заметить факт не выполнения калибровки. Однако, если в данном случае предположить, что $q=const$, то условие выше выполняется. Этот факт можно объяснить нарушением закона сохранения энергии на антеннах подобного типа. Если на участке не происходит изменения заряда, то, следовательно, закон сохранения энергии выполняется. Иначе возникнут погрешности, что мы и наблюдаем в данном случае.

Для нахождения поля обратимся к вспомогательным уравнениям 7 и 9. Опустим тривиальные преобразования и перейдём сразу к искомой формуле:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}q(\tau)\times$$
$$\times\left[\vec{n}-\vec{\beta}(\vec{\beta}^2+(1-\vec{n}\vec{\beta}))+\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))(\vec{n}+\vec{\beta})\right]+$$
$$+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\dot{q}(\tau)(\vec{n}+\vec{\beta})\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})$$

Таким образом, получили выражение для вычисления электрического поля антенны с переменным зарядом. В целях подтверждения её, мы произвели расчёт частного случая антенны по этой формуле, а так же сравнили с результатами широко признанной в узких кругах программой моделирования антенн CST Studio Suit для всё той же антенны.

3. Частная антенна

Заключение

В предоставленной работе была исследована применимость зарядовой модели по отношению к треугольной антенне. Из полученных данных можно сделать вывод о том, что данный метод расчёта полей не противоречит методу конечных разностей.

Простота заложенных в неё понятий обеспечивает относительно лёгкое понимание процесса излучения импульсных сигналов, но в то же время, вывод необходимых формул занимает отдельное место среди тяжёлых, и в то же время весьма увлекательных задач.

Проблема подобного излучения не была исследована полностью в данной работе, и потому представляет особый интерес для дальнейшего изучения. Помимо нахождения общих формул, есть задача о представлении последних в численных методах для решения связанных с этим методом задач на программной основе, в связи с выдающейся трудоёмкостью данного процесса.

Листинг А

Файл math_func.h

```
#ifndef MATH_FUNC_H_INCLUDED
#define MATH_FUNC_H_INCLUDED
#pragma once
#include <iostream>
```

Список литературы

1: H. Schantz, Ultrawideland Antennas, Artech House, 2005
2: Пономарёв Д. М. и др., Способ определения диаграммы направленности антенны в диапазоне частот, Б. И., 1988
3: Бахрах Л. Д., Курочкин А. П., Голография в микроволновой технике, М.: Сов. радио, 1979
4: Милстайн Л. Б., Методы подавления помех в системах радиосвязи с широкополосными сигналами, ТИИЭР, 1988
5: Астанин Л. Ю., Костылев А. А., Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений, М.: Радио и связь, 1989
6: Ковалев И. П., Пономарев Д. М. , Анализ процессов излучения и приёма импульсных сигналов во временной области, М.: Радио и связь, 1996
7: Фрадин Ф. З., Антенно-фидерные устройства, М.: Связь, 1977
8: Ковалев И. П., Пономарев Д. М., Клюев Е. А., Нестационарные процессы в проволочных антеннах при импульсном возбуждении, Радиотехника и электроника, 1991
9: Небабин В. Г., Гришин В. К., Методы и техника радиолокационного распознавания: современное состояние, тенденции развития, преспективы, Зарубежная радиоэлектроника, 1992
10: , ,,,,
11: Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М., Фейнмановские лекции по физике, М., 2004
12: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля (Теоретическая физика, т. II), М.: Физматлит, 2003
13: Е.Ю. Петров, ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2019
14: Weinberg, Steven, The Quantum Theory of Fields, Volume I, Cambridge: Cambridge University Press, 2008