И.У.

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 \vec{r}}dV$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int \frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \vec{r}}dV$$

Выведем отдельно скалярный потенциал

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},\%t')}{4\pi\varepsilon_0 \vec{r}}dV \quad ,$$

где $\vec{r}=|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

отбросим на время конст – часть.

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)d\tau dV \quad ,$$

где $\tau=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$, $\rho(\vec{r},t)=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))$

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int \frac{q\delta(r'-\vec{r}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)d\tau dV$$

Поменяем порядок интегрирования и вынесем заряд, т.к. он конст.

$$\phi(\vec{r},t)=q\int \frac{\delta(t'-\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}d\tau$$

Воспользуемся правилом $\int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}$, $f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec{n}\vec{\beta}}$$, где $\vec{\beta}=\vec{v}(t')$

Переходим во время $t'=\tau$

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

Найдём теперь решение уравнения для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int \frac{\vec{j}(\vec{r},\%t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2 \vec{r}}dV \quad ,$$

где $\vec{r}=|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int \frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

отбросим на время конст – часть.

$$\phi(\vec{r},t)=\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int \frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\, dV \quad ,$$

где $\tau=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$, $\vec{j}(\vec{r},t)=q\vec{v}(t')\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\int \frac{q\vec{v}(t')\delta(r'-\vec{r}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\, dV$$

Поменяем порядок интегрирования и вынесем заряд, т.к. он конст.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=q\int \frac{\vec{v}(t')\delta(t'-\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}d\tau$$

Воспользуемся правилом $\int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}$, $f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec{n}\vec{\beta}}$$, где $\vec{\beta}=\vec{v}(t')$

Переходим во время $t'=\tau$

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

Используя прил.2 и прил.4, убеждаемся в правильности данных формул, найдя калибровку Лоренца $\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{4\pi}+c^2\nabla\vec{A}\right)=0$:

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c\vec{n}\vec{\beta}-c\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$$

$$\nabla\vec{A}=\nabla\left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{\beta}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\right)=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$$

Как можем заметить, равенство выполняется.

Перейдём к нахождению электрического поля.

Воспользуемся формулой $-\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}$

Для нахождения поля обратимся к вспомогательным уравнениям 3 и 5.

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[\vec{n}\left(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{c}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}x$$

$$x\left[\vec{\beta}\left(\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\beta}{c}\right)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]=$$

вынесем за скобки $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$, тогда записаное выше уравнение примет вид:

$$=\left[\vec{n}\left(1-\beta^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\beta(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]-\left[\dot{\vec{\beta}}\left(\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]=$$

$$=\vec{n}\left(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\vec{\beta}+\vec{n}\vec{\beta}^2-\vec{n}\vec{\beta}^2+\vec{\beta}^3-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{\beta}-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=\vec{n}-\vec{\beta}^2\vec{n}+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}-\vec{\beta}+\vec{\beta}^3-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{\beta}-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})\left((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+\vec{n}(1-\vec{\beta}^2)-\vec{\beta}(1-\vec{\beta}^2)-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})\left((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}-\vec{\beta})-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}(\vec{n}-\vec{\beta}))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}=$$

Возвращаясь к константам, получим:

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\left(\vec{n}\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)(\vec{n}-\vec{\beta})-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}(\vec{n}-\vec{\beta}))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right]$$

Прил. 1.

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left|\vec{r}-\vec{r}_0(t')\right|=\frac{\partial}{\partial t'}\sqrt{\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')}=\frac{\partial}{\partial t'}\left(\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{\partial}{\partial t'}\left(\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')\right)}{\left(\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\left(\vec{r}_0(t')-\vec{r}\right)\dot{\vec{r}}_0(\tau)}{2\left|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)\right|}=-\vec{n}\,\vec{v}(t')$$

Прил. 2.

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)\right|(1-\vec{n}\vec{\beta})}=\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=¿$$