И.У.

$$\phi(\vec r,t)=\int\frac{\rho(\vec r,t')}{4\pi\varepsilon_0\vec r}dV$$

$$\vec A(\vec r,t)=\int\frac{\vec j(\vec r,t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2\vec r}dV$$

Выведем отдельно скалярный потенциал

$$\phi(\vec r,t)=\int\frac{\rho(\vec r,\%t')}{4\pi\varepsilon_0\vec r}dV \quad ,$$

где $\vec r=|\vec r-\vec r_0(t')|$

$$\phi(\vec r,t)=\int\frac{\rho(\vec r,t')}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r_0(t')|}dV$$

$$\phi(\vec r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec r,t')}{|\vec r-\vec r_0(t')|}dV$$

отбросим на время конст – часть.

$$\phi(\vec r,t)=\int\frac{\rho(\vec r,t')}{|\vec r-\vec r_0(t')|}dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\phi(\vec r,t)=\int\int\frac{\rho(\vec r,t')}{|\vec r-\vec r_0(t')|}\delta(t'-\tau)d\tau dV \quad ,$$

где $\tau=t-\frac{1}{c}|\vec r-\vec r_0(t')|$, $\rho(\vec r,t)=q\delta(\vec r-\vec r_0(t'))$

$$\phi(\vec r,t)=\int\int\frac{q\delta(r'-\vec r(t'))}{|\vec r-\vec r_0(t')|}\delta(t'-\tau)d\tau dV$$

Поменяем порядок интегрирования и вынесем заряд, т.к. он конст.

$$\phi(\vec r,t)=q\int\frac{\delta(t'-\tau)}{|\vec r-\vec r_0(t')|}d\tau$$

Воспользуемся правилом $\int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}$, $f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec r-\vec r_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec r-\vec r_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec n\vec\beta}$$, где $\vec\beta=\vec v(t')$

Переходим во время $t'=\tau$

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\phi(\vec r,t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(t')|(1-\vec n\vec\beta)}$$

Найдём теперь решение уравнения для векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\frac{\vec{j}(\vec{r},\%t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2\vec{r}}dV \quad ,$$

где $\quad \vec{r}=|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{4\pi\varepsilon_0 c^2|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{\vec{j}(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

отбросим на время конст – часть.

$$\phi(\vec{r},t)=\int\frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}dV$$

Приведём к интегралу по 4 переменным

$$\phi(\vec{r},t)=\int\int\frac{\rho(\vec{r},t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\,dV \quad ,$$

где $\quad \tau=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')| \quad , \quad \vec{j}(\vec{r},t)=q\vec{v}(t')\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int\int\frac{q\vec{v}(t')\delta(r'-\vec{r}(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\delta(t'-\tau)\,d\tau\,dV$$

Поменяем порядок интегрирования и вынесем заряд, т.к. он конст.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=q\int\frac{\vec{v}(t')\delta(t'-\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}d\tau$$

Воспользуемся правилом $\quad \int g(x)\delta(f(x)-\alpha)dx=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)} \quad , \qquad f(x_0)=\alpha$

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}(t'-(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|))}=\frac{\delta(t'-\tau)}{\frac{\partial}{\partial t'}t'-\frac{\partial}{\partial t'}t+\frac{1}{c}(\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|)}$$

Исходя из прил.1, имеем:

$$\delta(t'-\tau)=\frac{\delta(t'-\tau)}{1-\vec{n}\vec{\beta}} \quad \text{, где} \quad \vec{\beta}=\vec{v}(t')$$

Переходим во время $\quad t'=\tau$

Тогда скалярный потенциал примет вид:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\dot{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

Используя прил.2 и прил.4, убеждаемся в правильности данных формул, найдя калибровку Лоренца $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{4\pi}+c^2\nabla\vec{A}\right)=0 \quad :$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c\vec{n}\vec{\beta}-c\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$$

$$\nabla\vec{A}=\nabla\left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{\beta}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\right)=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$$

Как можем заметить, равенство выполняется.

Перейдём к нахождению электрического поля.

Воспользуемся формулой $\quad -\nabla\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}$

Для нахождения поля обратимся к вспомогательным уравнениям 3 и 5.

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[\vec{n}\left(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{c}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}x$$

$$x\left[\vec{\beta}\left(\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\beta}{c}\right)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]=$$

вынесем за скобки $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|)^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}$, тогда записаное выше уравнение примет вид:

$$=\left[\vec{n}\left(1-\beta^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\beta(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]-\left[\dot{\vec{\beta}}\left(\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]=$$

$$=\vec{n}\left(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)-\vec{\beta}+\vec{n}\vec{\beta}^2-\vec{n}\vec{\beta}^2+\vec{\beta}^3-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{\beta}-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=\vec{n}-\vec{\beta}^2\vec{n}+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}-\vec{\beta}+\vec{\beta}^3-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{\beta}-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})\left((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+\vec{n}(1-\vec{\beta}^2)-\vec{\beta}(1-\vec{\beta}^2)-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})\left((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})=$$

$$=(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}-\vec{\beta})-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}(\vec{n}-\vec{\beta}))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}=$$

Возвращаясь к константам, получим:

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\vec{\beta}^2)+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\left(\vec{n}\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)(\vec{n}-\vec{\beta})-|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(\vec{n}(\vec{n}-\vec{\beta}))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right]$$

Прил. 1.

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left|\vec{r}-\vec{r}_0(t')\right|=\frac{\partial}{\partial t'}\sqrt{\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')}=\frac{\partial}{\partial t'}\left(\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{\partial}{\partial t'}\left(\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')\right)}{\left(\vec{r}^2-2\vec{r}\,\vec{r}_0(t')+\vec{r}_0^{\,2}(t')\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\left(\vec{r}_0(t')-\vec{r}\right)\dot{\vec{r}}_0(\tau)}{2\left|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)\right|}=-\vec{n}\,\vec{v}(t')$$

Прил. 2.

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}=\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]=\left(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}(\tau))\vec{\beta}\right)=\frac{d}{d\tau}|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-\frac{d}{d\tau}((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})=$$
$$=-\vec{n}\vec{v}(\tau)-((\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta}+\dot{\vec{\beta}}(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)))=-\vec{n}\vec{v}c-(\vec{r}-\vec{r}(\tau))\dot{\vec{\beta}}+c\vec{\beta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}=\frac{d}{dt}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}(\vec{n}\vec{\beta}c-c\beta^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}})$$

Прил.3

$$\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}=\frac{\partial}{\partial\vec r}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)\nabla\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec r}\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}=\frac{\frac{\partial}{\partial\vec r}(|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta))}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^2}=\frac{\frac{\partial}{\partial\vec r}(|\vec r-\vec r_0(\tau)|-(\vec r-\vec r_0(\tau))\vec\beta)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec r}|\vec r-\vec r_0(\tau)|=\frac{\partial}{\partial\vec r}\sqrt{\vec r^2-2\vec r\,\vec r_0(\tau)+\vec r_0^{\,2}(\tau)}=\frac{\frac{\partial}{\partial\vec r}(\vec r^2-2\vec r\,\vec r_0(\tau)+\vec r_0^{\,2}(\tau))}{2|\vec r-\vec r_0(\tau)|}=\frac{2(\vec r-\vec r_0(\tau))}{2|\vec r-\vec r_0(\tau)|}=\vec n$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec r}((\vec r-\vec r_0(\tau))\vec\beta)=\vec\beta\left(\frac{\partial}{\partial\vec r}(\vec r-\vec r_0(\tau))\right)+(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\partial}{\partial\vec r}\vec\beta=\vec\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec r}\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}=\frac{\vec n-\vec\beta}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^2}=\frac{(\vec n-\vec\beta)(1-\vec n\vec\beta)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\nabla\tau=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\right)^{-1}\nabla\tau=\frac{-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\right)}{\left(|\vec r-\vec r_0(\tau)^2|(1-\vec n\vec\beta)\right)^2}\nabla\tau=$$

$$=\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}(|\vec r-\vec r_0(\tau)|-(\vec r-\vec r_0(\tau))\vec\beta)\nabla\tau}{\left(|\vec r-\vec r_0(\tau)^2|(1-\vec n\vec\beta)\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|\vec r-\vec r_0(\tau)|=-\vec n\vec v$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}((\vec r-\vec r_0(\tau))\vec\beta)=\vec\beta\frac{\partial}{\partial\tau}(\vec r-\vec r_0(\tau))+(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\partial\vec\beta}{\partial\tau}=-\vec\beta\vec v+(\vec r-\vec r_0(\tau))\dot{\vec\beta}$$

$$\nabla\tau=\frac{\frac{-\vec n}{c}}{(1-\vec n\vec\beta)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\nabla\tau=\frac{\vec n\vec\beta c+c\vec\beta^2-(\vec r-\vec r_0(\tau))\dot{\vec\beta}}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^2}\,\frac{\frac{-\vec n}{c}}{(1-\vec n\vec\beta)}=$$

$$=\frac{\vec\beta-\vec n\vec\beta^2+(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^3}=\frac{\vec\beta+\vec n\vec\beta^2-(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^3}=\frac{-\vec\beta+\vec n\vec\beta^2-(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^3}$$

$$\frac{(\vec{\beta}-\vec{n})(1-\vec{n}\vec{\beta})}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}+\frac{-\vec{\beta}+\vec{n}\vec{\beta}^2-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left((\vec{\beta}-\vec{n})(1-\vec{n}\vec{\beta})-\vec{\beta}+\vec{n}\vec{\beta}^2-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left(\vec{\beta}-\vec{n}-\vec{n}\vec{\beta}^2+\vec{n}^2\vec{\beta}-\vec{\beta}+\vec{n}\vec{\beta}^2-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left(\vec{\beta}-\vec{n}-\vec{n}\vec{\beta}^2+\vec{\beta}-\vec{\beta}+\vec{n}\vec{\beta}^2-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left(-\vec{n}+\vec{n}\vec{\beta}^2-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}+\vec{\beta}-\vec{n}\vec{\beta}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left(\vec{n}\left(2-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right)+\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right)$$

Прил.4

$$\nabla\left(\frac{\vec{\beta}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^2}\,x$$

$$x(\vec{\beta}\,\nabla(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})-(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})\,\nabla\vec{\beta})$$

$$\nabla(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})=\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}\left[\vec{n}(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c})-\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]$$

$$\nabla\vec{\beta}=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{\beta}+\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{\beta}\,\nabla\tau=0-\dot{\vec{\beta}}\frac{\frac{\vec{n}}{c}}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}=-\dot{\vec{\beta}}\frac{\frac{\vec{n}}{c}}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

$$(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})\,\nabla\vec{\beta}=\frac{-1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}\left[\vec{n}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})\right]\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}=$$

$$=\frac{-1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}\left[(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta}\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}\right]$$

$$\nabla\left(\frac{\vec{\beta}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\,x$$

$$x\left[\vec{n}(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c})-\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]\vec{\beta}-\left(-\left[(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta}\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\vec{n}\right]\right)=$$

$$=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right]$$

Прил.5

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=$$

$$=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)^2|(1-\vec{n}\vec{\beta})^2}\frac{d\tau}{dt}\left[\frac{d}{d\tau}\vec{\beta}|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})-\vec{\beta}\frac{d}{d\tau}|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]$$

$$\frac{d}{d\tau}\vec{\beta}=\dot{\vec{\beta}}$$

$$(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})\dot{\vec{\beta}})=(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})\dot{\vec{\beta}}$$

$$\frac{d}{d\tau}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))=\frac{d}{d\tau}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})=[-\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}]\vec{\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)^2|(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}x$$

$$x\left((|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})\dot{\vec{\beta}}-(-\vec{n}\vec{\beta}^2c+\vec{\beta}^2-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}\vec{\beta})\right)=$$

$$=\frac{d}{d\tau}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))=\frac{d}{d\tau}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})=[-\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}]\vec{\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{c}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)^2|(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}x$$

$$x\left(\vec{\beta}(\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c})+|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right)$$

Прил.6

$$\frac{d}{dt}\frac{q(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}=\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}\frac{q(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}=$$

$$=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)^2|(1-\vec{n}\vec{\beta})^2}\frac{d\tau}{dt}\left((|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))\frac{d}{d\tau}q(\tau)-q(\tau)\frac{d}{d\tau}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))\right)$$

$$\frac{d}{dt}q(\tau)=\dot{q}(\tau)$$

$$\dot{q}(\tau)(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))=\dot{q}(\tau)(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})$$

$$\frac{d}{d\tau}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))=[-\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}]$$

$$\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)^2|(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left(\dot{q}(\tau)[|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})]-q(\tau)[-\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}]\right)$$

Прил 7

$$\nabla\left(\frac{q(\tau)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)=\frac{\partial}{\partial\vec r}\left(\frac{q(\tau)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{q(\tau)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)\nabla\tau$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec r}\left(\frac{q(\tau)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)=\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^2}[0-q(\tau)(\vec n-\vec\beta)]=$$

$$=\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^3}[-q(\tau)(\vec n-\vec\beta)](1-\vec n\vec\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{q(\tau)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)=\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^2}x$$

$$x\left[|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\frac{\partial}{\partial\tau}q(\tau)-q(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\right]=$$

$$=\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^2}\left[|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\dot q(\tau)-q(\tau)[-\vec n\vec v+\vec\beta\vec v-(\vec r-\vec r_0(\tau))\dot{\vec\beta}]\right]$$

$$\nabla\left(\frac{q(\tau)}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)}\right)=\frac{1}{|\vec r-\vec r_0(\tau)|^2(1-\vec n\vec\beta)^3}x$$

$$x\left[-q(\tau)(\vec n-\vec\beta)(1-\vec n\vec\beta)-(\vec r-\vec r_0(\tau))(1-\vec n\vec\beta)\frac{\dot q(\tau)}{c}+q(\tau)[-\vec\beta+\vec n\vec\beta^2-(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n]\right]=$$

отбросим на время общий множитель

$$=-q(\tau)(\vec n-\vec\beta)(1-\vec n\vec\beta)-|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\dot q(\tau)\frac{\vec n}{c}+q(\tau)[-\vec\beta+\vec n\vec\beta^2-(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n]=$$

$$=-q(\tau)(\vec n-\vec\beta-\vec\beta+\vec n\vec\beta^2)-(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot q(\tau)}{c}+(\vec r-\vec r_0(\tau))\vec n\vec\beta\frac{\dot q(\tau)}{c}-q(\tau)\vec\beta+q(\tau)\vec\beta^2\vec n-$$

$$-q(\tau)(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n=-|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\dot q(\tau)\frac{\vec n}{c}-q(\tau)\vec n+2q(\tau)\vec\beta-\vec n\vec\beta^2q(\tau)-q(\tau)\vec\beta+$$

$$+q(\tau)\vec\beta^2\vec n-q(\tau)(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n=-|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec n\vec\beta)\dot q(\tau)\frac{\vec n}{c}-q(\tau)\vec n+q(\tau)\vec\beta-$$

$$-q(\tau)(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n=\frac{-\dot q(\tau)}{c}\vec n|\vec r-\vec r_0(\tau)|(1-\vec\beta\vec n)-q(\tau)(\vec n+\vec\beta-(\vec r-\vec r_0(\tau))\frac{\dot{\vec\beta}}{c}\vec n)$$

Прил. 8

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q(\tau)\vec{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^2}\, x$$

$$x\left[(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))\frac{d}{dt}(q(\tau)\vec{\beta})-(q(\tau)\vec{\beta})\frac{d}{dt}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))\right]$$

$$\frac{d}{dt}(q(\tau)\vec{\beta})=\vec{\beta}\frac{d}{dt}q(\tau)+q(\tau)\frac{d}{dt}\vec{\beta}=[\vec{\beta}\dot{q}(\tau)+\dot{\vec{\beta}}q(\tau)]\left(\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}[(\vec{\beta}\dot{q}(\tau))+\dot{\vec{\beta}}q(\tau)](|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\left[\vec{\beta}\dot{q}(\tau)(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})+\dot{\vec{\beta}}q(\tau)(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})\right]$$

$$\frac{d}{dt}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))=\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})=$$

$$=\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}[\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}}]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q(\tau)\vec{\beta}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}\, x$$

$$x[\vec{\beta}\dot{q}(\tau)(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})+\dot{\vec{\beta}}q(\tau)(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta}))-q(\tau)\vec{\beta}(\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}})]=$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}[(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})(\vec{\beta}\dot{q}(\tau)+\dot{\vec{\beta}}q(\tau)))-q(\tau)\vec{\beta}(\vec{n}\vec{\beta}c+\vec{\beta}^2c-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\dot{\vec{\beta}})]$$

Прил.9

$$\nabla\left(\frac{q(\tau)\vec{\beta}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^2}\,x$$

$$x(q(\tau)\vec{\beta}\,\nabla(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})-(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})\,\nabla q(\tau)\vec{\beta})$$

$$\nabla(|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|-(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\vec{\beta})=\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}\left[\vec{n}(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c})-\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]$$

$$\nabla\vec{q}(\tau)\vec{\beta}=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(q(\tau)\vec{\beta})+\frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{\beta}q(\tau))\nabla\tau=0-\frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{\beta}q(\tau))\nabla\tau=-(\dot{q}(\tau)\vec{\beta}+\dot{\vec{\beta}}q(\tau))\frac{\frac{\vec{n}}{c}}{(1-\vec{n}\vec{\beta})}$$

$$\nabla\left(\frac{q(\tau)\vec{\beta}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})}\right)=$$

отбросив общую дробную часть

$$=\left[\vec{n}(1-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c})-\vec{\beta}(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]q(\tau)\vec{\beta}-\frac{\vec{n}}{c}\left(-(\dot{q}(\tau)\vec{\beta}+q(\tau)\dot{\vec{\beta}})\left[|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]\right)=$$

$$=q(\tau)\left[\vec{n}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2+(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\right]+\dot{q}(\tau)\frac{\vec{\beta}}{c}\vec{n}\left[|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|(1-\vec{n}\vec{\beta})\right]$$