

---

# Interaction de deux tourbillons de surface proche d'une marche topographique dans un océan stratifié

---

**Résumé :** L'interaction de deux tourbillons de surface est étudiée dans un modèle quasi-géostrophique deux couches avec topographie. Les deux vortex sont initialisés comme des disques de vorticité potentielle constante dans la couche supérieure.

De nouveaux régimes non linéaires ont été observés, au cours desquels la topographie modifie la distance critique pour fusion et l'efficacité de fusion. Les ondes et les vortex topographiques advectent les tourbillons sur le talus (pour des cyclones) et au large (pour des anticyclones). Dans certains cas, les ondes séparent les tourbillons, il y a alors diminution de la distance critique de fusion. Les tourbillons peuvent également être advectés l'un vers l'autre, provoquant leur fusion et l'augmentation de la distance critique de fusion. L'analyse détaillée de ces nouveaux régimes est présentée dans ce rapport.

**Mots clefs :** *Interaction de vortex, modèle quasi-géostrophique, topographie.*

Stage encadré par :

**Xavier Carton**

[xcarton@univ-brest.fr](mailto:xcarton@univ-brest.fr)

Laboratoire d'Océanographie Physique et Spatiale

*Rue Dumont d'Urville*

*29280 Plouzané*

<http://www.umr-lops.fr/>



## Remerciements

Avant de commencer la présentation du travail que j'ai effectué durant ce stage, je tiens à remercier l'ensemble des personnes avec qui j'ai échangé, partagé et appris.

Tout d'abord je remercie l'ensemble de l'équipe pédagogique du Master Sciences de la Matière pour les connaissances théoriques et pratiques qu'ils m'ont transmis au cours de l'année. J'aimerais également remercier le personnel du LOPS pour son accueil pendant ces trois mois.

En particulier, mes remerciements s'adressent à mon encadrant, M. Xavier Carton, pour sa patience, sa grande pédagogie et pour tout le temps qu'il a accordé à ce projet.

Je tiens également à remercier Mathieu Morvan pour le regard avisé qu'il a porté sur mon travail et pour ses nombreux conseils tout au long de ce stage.

## Table des matières

<b>0 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Une introduction à l'océanographie physique</b>	<b>2</b>
1.0 Grandeur importantes . . . . .	2
1.1 Des équations de Navier-Stokes à la conservation de la vorticité potentielle . . . . .	2
1.2 L'équilibre géostrophique . . . . .	3
1.3 Le modèle quasi-géostrophique à deux couches . . . . .	4
1.4 Le modèle des points vortex . . . . .	5
1.5 Interaction de deux vortex . . . . .	6
<b>2 Problématique du stage</b>	<b>7</b>
2.1 Cadre de l'étude . . . . .	7
2.2 Etude théorique . . . . .	8
2.3 Modèle numérique . . . . .	10
<b>3 Résultats</b>	<b>10</b>
3.1 Sur la fusion de tourbillons sans topographie . . . . .	11
3.2 Impact d'un talus sur la fusion . . . . .	13
3.2.1 Cas des cyclones . . . . .	14
3.2.2 Cas des anticyclones . . . . .	18
3.2.3 Advection de particules . . . . .	20
<b>4 Conclusion et perspectives</b>	<b>22</b>
<b>A Simplification des équations de Navier-Stokes</b>	<b>23</b>
<b>B Ondes de Rossby topographiques libres</b>	<b>24</b>
<b>C Ondes de Rossby forcées</b>	<b>25</b>
<b>D Bilan</b>	<b>26</b>
<b>E Observation des ondes de Rossby topographiques</b>	<b>27</b>
<b>F Données supplémentaires</b>	<b>28</b>

## 0 Introduction

L'océan et l'atmosphère forment un système dynamique et thermodynamique couplé, forcé principalement par le rayonnement solaire incident, et moins par les forces de marée ou par l'énergie géothermique (environ 1000 à 10000 fois moins importantes). Les flux de chaleur activent des mouvements de grande échelle dans l'atmosphère et des différences de température et d'humidité. Ces différences forcent thermiquement et mécaniquement les courants océaniques. Le forçage thermique s'effectue à partir des différences de température et de salinité, qui, créant des variations de densité horizontale et verticale, induisent des gradients de pression et donc un champ de vitesses.

Le système océan, couplé à l'atmosphère, est fortement non linéaire dynamiquement (Navier-Stokes + Thermodynamique) : les échelles interagissent et le spectre de mouvement est continu. Il existe globalement quatre échelles.

L'échelle planétaire (bassin,  $L \geq 250$  km) avec les grands courants forcés par le vent ( le Gulf Stream en Atlantique, le Kuroshio dans le Pacifique Nord...). A cette échelle les mouvements sont lents et dominés par la rotation terrestre et la stratification. Le fluide se déplace principalement horizontalement, à l'exception des plongées de masses d'eau aux pôles et des remontées à l'équateur. C'est l'équation de la densité qui pilote la dynamique, ainsi que les équations géostrophiques<sup>1</sup>.

La moyenne échelle ou meso-échelle ( $20 \leq L \leq 250$  km) décrit les tourbillons et jets issus de la circulation de bassin, soit par intensification locale soit par instabilités. Les mouvements sont plus rapides qu'à grande échelle, mais toujours dominés par la rotation planétaire et la stratification thermoaline. A cette échelle les équations non linéaires de quantité de mouvement sont importantes.

La sous-meso échelle ( $250\text{ m} \leq L \leq 20\text{ km}$ ) comporte les filaments et petits tourbillons issus de la brisure ou des interactions de grande échelle. La rotation de la Terre ne pilote plus le mouvement et la dynamique est 3D stratifiée. Enfin les fines échelles allant jusqu'aux échelles de dissipation où la dynamique est essentiellement 3D isotrope car la stratification perd son influence sur les mouvements.

Les tourbillons océaniques qui existent à méso et à sous-meso échelle sont prévalents dans la dynamique de l'océan. Ils jouent un rôle clé dans le transport de quantité de mouvement, de chaleur, de salinité, de traceurs chimiques et d'espèces biologiques à travers les bassins. Les vortex peuvent être générés (avec un faible rayon à sous-meso échelle), puis fusionner et grossir jusqu'à meso-échelle. Le processus de fusion, par lequel deux vortex de même signe et de même profondeur fusionnent pour ne former qu'un plus grand vortex contribue ainsi à la dynamique et au temps de vie des tourbillons océaniques. La fusion de vortex a été observée dans l'océan pour différents types de vortex, par exemple pour les tourbillons de surface comme les "Gulf Stream rings". Le processus de fusion a fait l'objet de nombreuses études depuis 1982 (Overman et Zabusky). Dans ces études les vortex sont placés dans des courants, des fluides en rotation, différentes stratifications... mais au dessus d'un *fond plat*. Bien que l'interaction d'un seul vortex avec une marche topographique ait déjà été étudiée auparavant (McDonald 1998, Dunn et al. 2001), le processus de fusion de tourbillons proche d'une marche topographique dans un océan stratifié n'a jamais été étudié.

*Ce problème soulève plusieurs questions :* 1) Sous quelles conditions les tourbillons placés proche d'un talus fusionnent ? 2) Quels sont les régimes non-linéaires qui apparaissent et pourquoi ? 3) Quelles sont les conséquences de ces interactions sur le transport à travers le talus.

La première partie de ce rapport présente une introduction à l'océanographie physique afin de donner au lecteur les outils pour comprendre les différents concepts physiques. Une présentation plus précise du problème étudié au cours du stage est ensuite faite. Enfin sont présentés les résultats de simulations décrivant l'interaction de deux tourbillons proches d'un talus continental.

Le projet de recherche dans lequel s'inscrit ce stage portant sur l'étude de la mer d'Arabie, quelques exemples et des applications numériques seront présentés dans ce contexte.

---

1. voir partie 1.2

# 1 Une introduction à l'océanographie physique

Dans cette partie, les principaux outils servant à décrire la dynamique de l'océan sont présentés, ils constituent le socle de l'océanographie physique. Différents points spécifiques au sujet traité au cours du stage seront ensuite discutés, notamment le modèle quasi-géostrophique et la fusion de vortex. Cette partie a pour but de décrire brièvement les connaissances actuelles concernant les vortex océaniques utilisées pendant ce stage, mais également celui d'introduire l'océanographie physique aux physiciens généralistes, potentiels lecteurs de ce rapport.

## 1.0 Grandes importances

Au cours de ce rapport, différentes grandeurs et nombres adimensionnés propres à l'océanographie sont utilisés. Le paramètre de Coriolis est la projection du taux de rotation de la Terre sur la verticale locale. Il s'écrit donc  $f = 2\Omega \sin(\theta)$  où  $\theta$  est la latitude et  $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  le taux de rotation terrestre. Le paramètre de Coriolis peut se développer sur un plan tangent à la terre (*plan β*) comme  $f = f_0 + \beta y$  où  $y$  est la coordonnée méridionale (i.e orientée Sud-Nord),  $f_0 = \Omega \sin(\theta_0)$  et  $\beta = 2\Omega \frac{\cos(\theta_0)}{R_T}$ , avec  $R_T$  le rayon terrestre. Dans notre cas (la mer d'Arabie),  $f_0 \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Des échelles de longueurs horizontales et verticales,  $L$  et  $H$ , une échelle temporelle  $T$  et une échelle de vitesse horizontale  $U$ , sont introduites pour caractériser les mouvements que nous considérons (ici les tourbillons). Le nombre de Rossby est défini comme  $R_o = U/f_0 L$ , le nombre de Rossby temporel comme  $R_{ot} = 1/f_0 T$  et l'extension méridienne du mouvement comme  $\beta L/f_0$ . Un cyclone est un tourbillon au sein duquel les particules fluides tournent dans le sens trigonométrique, dans l'hémisphère Nord (i.e  $f > 0$ ). Un anticyclone tourne dans le sens opposé.

## 1.1 Des équations de Navier-Stokes à la conservation de la vorticité potentielle

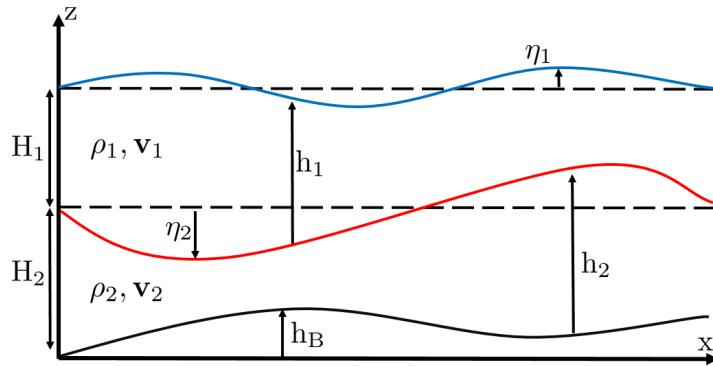


FIGURE 1 – Situation décrite par les équations *Shallow water* pour un fluide bicouche.

Pour l'étude de l'océan, deux paramètres sont essentiels : la stratification ambiante (couche supérieure, thermocline<sup>2</sup>, couche profonde), et la rotation terrestre. En toute généralité, l'océan peut donc être décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles en repère tournant, par l'équation d'état  $\rho = \rho(T, S, P)$ , avec  $T$  la température,  $S$  la salinité et  $P$  la pression et par les équations d'advection-diffusion-forçage de  $T$  et  $S$ . Ce problème étant très complexe et analytiquement insoluble, plusieurs approximations sont effectuées.

Tout d'abord, considérant la variation de densité avec la profondeur dans l'océan,(voir figure 31) nous approximons celui-ci par une superposition de couches de fluides de masses volumiques constantes mais différentes. En première approximation, un modèle de deux couches de fluides, avec  $\rho_1 < \rho_2$  est donc satisfaisant pour représenter l'océan au dessus et en dessous de la thermocline.

Dans le cas de l'océan, l'extension horizontale et verticale des mouvements que nous considérons valent  $L \sim 10^4$  km et  $H \sim 4$  km, ces proportions sont équivalentes à celle d'une feuille de papier. Considérant donc que l'océan est très plat, (i.e  $H/L \ll 1$ ) en utilisant l'approximation de Boussinesq, l'équilibre hydrostatique et en négligeant

2. voir figure 31 de l'annexe F

les termes visqueux, les équations de NS peuvent être simplifiées (voir annexe A). Les équations qui gouvernent la situation décrivant la dynamique d'un fluide bicouche en repère tournant (figure 1) sont alors :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt}\mathbf{u}_j + \mathbf{e}_z \wedge f\mathbf{u}_j = -\frac{1}{\rho_j} \nabla_h p'_j & (a) \\ \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} h_j + h_j \cdot \nabla_h \cdot \mathbf{u}_j = 0 & (b) \end{cases} \quad (1)$$

avec  $j = 1, 2$  correspondant aux deux couches du fluide.  $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j, w_j)$  est le vecteur vitesse de la couche  $j$ ,  $h_j$  la hauteur d'eau dans la couche  $j$ ,  $\frac{d\mathbf{u}_j}{dt} = \partial_t + u_j \partial_x + v_j \partial_y$  est la dérivée particulaire horizontale dans la couche  $j$ ,  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unitaire vertical,  $\nabla_h$  est le gradient horizontal.  $p'_j$  est l'anomalie dynamique de pression : la différence entre la pression locale instantanée et la pression statique de l'océan au repos. A méso-échelle  $p'_j$  est hydrostatique :

$$\begin{cases} p'_1 = \rho_1 g \eta_1 \\ p'_2 = \rho_1 g \eta_1 + (\rho_2 - \rho_1) g \eta_2 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\eta_j$  est la différence de hauteur de la surface ou de la thermocline par rapport à sa hauteur moyenne. Les équations (1) décrivent alors un équilibre entre les termes inertIELS, de Coriolis et le gradient de pression horizontal (terme de droite dans (1)(a)). Notons que l'advection verticale a disparu en raison de l'indépendance de  $\mathbf{u}_j$  par rapport à la verticale à l'intérieur de chaque couche (Théorème de Taylor-Proudman-Poincaré).

Ce système d'équation (appelé équations *Shallow Water*) décrit la dynamique d'un océan bicouche. En prenant le rotationnel de (1)(a) et en utilisant (1)(b), on obtient l'équation de conservation de la *vorticité potentiel*e notée  $q_j$  dans la couche  $j$ , qui est un des résultat fondamental de l'océanographie physique :

$$\frac{d}{dt} q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\zeta_j + f}{h_j} \right) = 0 \quad (3)$$

où  $\zeta_j = \nabla_h \wedge \mathbf{u}_j$  est la vorticité relative dans le fluide. Ce résultat a des implications importantes dans la compréhension de la plupart des phénomènes océaniques à grande et à meso-échelle. En effet il est équivalent à la conservation du moment angulaire en mécanique, et il sera la base de nombreux raisonnements dans ce rapport. La dynamique de la vorticité potentielle contraint l'évolution des phénomènes de basse fréquence dans l'océan. Les mouvements de haute fréquence sont eux décrits par la divergence de la vitesse et l'équation de la hauteur (1)(b).

## 1.2 L'équilibre géostrophique

Si des phénomènes longs par rapport à la rotation terrestre sont considérés (i.e  $R_o < 1$  ou  $R_{ot} < 1$ ), par exemple des phénomènes ayant lieu sur plusieurs jours, on peut négliger le terme temporel du système (1). Il y a alors équilibre entre la force de Coriolis et la force créée par le gradient de pression horizontale. Le système obtenu (appelé *équilibre géostrophique*) est alors dans la couche 1 :

$$\begin{cases} f_0 \cdot u_1 = -g \cdot \partial_y \eta_1 & (a) \\ f_0 \cdot v_1 = g \cdot \partial_x \eta_1 & (b) \\ \partial_x u_1 + \partial_y v_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad (4)$$

Sur la figure 2(a), la carte des anomalies de hauteur d'eau en mer d'Arabie est présentée ( $\eta_1$ ). Les données sont issues de la base de données AVISO, et les hauteurs sont calculées à partir de l'écart entre la hauteur d'eau à un instant donné et la moyenne temporelle de la hauteur sur 20 ans. A partir de ces données, le champ de vitesse géostrophique du fluide est calculé à l'aide du système 4, et est présenté sur la figure 2(b). La vitesse géostrophique est dirigée le long des lignes de hauteur égale. La vorticité relative du fluide  $\zeta_1$  et le nombre de Rossby  $R_o$  sont présentés respectivement sur les figures 2(c) et (d). Globalement, le long de la péninsule Arabique,  $R_o < 1$ , et les approximations évoquées plus haut sont respectées, ce qui permet de dire que le fluide est proche de l'équilibre géostrophique. Ainsi, on peut diagnostiquer à partir des anomalies de hauteur que le spot situé en (16°N, 54°E) est un anticyclone de vorticité  $\zeta_1 \sim -2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , de rayon  $R \sim 100 \text{ km}$  en équilibre géostrophique.

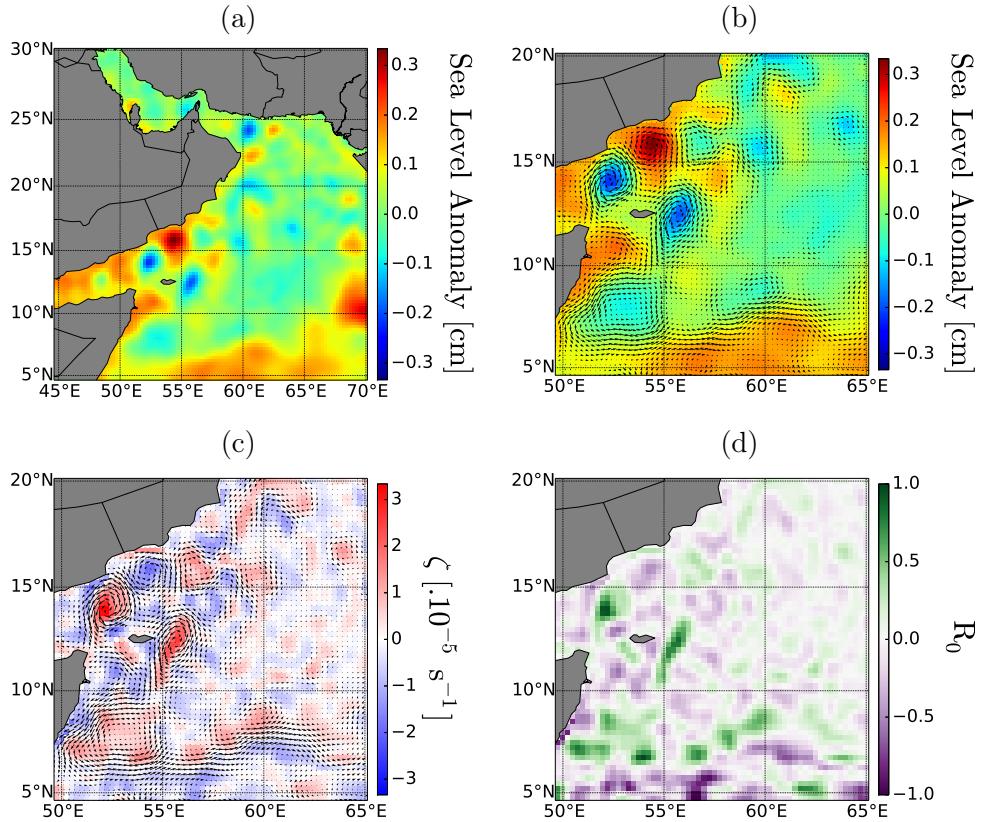


FIGURE 2 – Données satellites AVISO du 28 Février 2014. (a) Anomalie de hauteur de Mer  $\eta_1$  en mer d'Arabie. (b) Détail de l'anomalie de hauteur de mer, et champ de vitesse géostrophique. (c) Vorticité relative  $\zeta$  et champ de vitesse géostrophique. (d) Nombre de Rossby  $R_0 = \zeta/f$ .

La carte 2(d) permet aussi de discuter de l'importance de la latitude sur les phénomènes océaniques. En effet, plus la zone considérée est proche de l'équateur, plus  $R_0$  est important (car  $f \rightarrow 0$ ), ainsi le fluide ne pourra pas être considéré comme étant à l'équilibre géostrophique s'il est situé proche de l'équateur.

L'approximation géostrophique permet un diagnostic fiable et rapide des mouvements de fluide en surface à partir des anomalies de hauteur d'eau. Cependant, il n'est pas possible avec ce système d'équations de prédire la dynamique du fluide dans le temps.

### 1.3 Le modèle quasi-géostrophique à deux couches

Pour passer du diagnostic à la dynamique, le modèle le plus simple est le *modèle quasi-géostrophique*. C'est ce modèle (dans sa version 2 couches) qui a été utilisé pour les différentes études et simulations réalisées au cours de ce stage. Pour utiliser ce modèle, plusieurs conditions doivent être respectées :

$$R_{oT} \ll 1 \quad R_o \ll 1 \quad \frac{\beta y}{f} \ll 1 \quad (5)$$

ce qui implique respectivement que l'évolution des phénomènes (p.ex le mouvement d'un tourbillon) doit être lente par rapport au temps de rotation terrestre, que les phénomènes dus à l'accélération de Coriolis dominent sur les phénomènes inertiels et que la zone observée doit être limitée en latitude (typiquement environ 1000km). Ces conditions sont respectées à méso-échelle.

Ce modèle repose principalement sur la conservation de la vorticité potentielle, et suppose que le système évolue d'un état géostrophique à un autre par une perturbation agéostrophique de l'ordre  $\varepsilon$ . La vitesse du fluide s'exprime alors  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \varepsilon \mathbf{u}_{ag}$ . Pour le fluide bicouche décrit dans la partie 1.1, il est alors possible de réécrire

l'équation de conservation de la vorticité potentielle (3) en négligeant les termes d'ordre  $\varepsilon^2$  pour les deux couches comme :

$$\begin{cases} \frac{d_{gj}}{dt} \left( \zeta_j + \beta y - f_0 \left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{H_1} \right) \right) = 0 & (a) \\ \frac{d_{g2}}{dt} \left( \zeta_2 + \beta y - f_0 \left( \frac{\eta_2 - h_B}{H_2} \right) \right) = 0 & (b) \end{cases} \quad (6)$$

où  $\frac{d_{gj}}{dt}$  est la dérivée particulaire horizontale ne prenant en compte que la vitesse géostrophique dans la  $j$ -ième couche. A ce stade, on introduit la fonction courant du fluide définie par  $(u_j, v_j) = (-\partial_y \Psi_j, \partial_x \Psi_j)$ . La vorticité potentielle devient ainsi :

$$\begin{cases} q_1 = \Delta_h \Psi_1 + \beta y - \frac{f_0^2 \Psi_1}{g H_1} + F_1 (\Psi_2 - \Psi_1) & (a) \\ q_2 = \Delta_h \Psi_2 + \beta y + \frac{f_0 h_B}{H_2} + F_2 (\Psi_1 - \Psi_2) & (b) \end{cases} \quad (7)$$

où  $\Delta_h$  est le Laplacien horizontal,  $F_j = \frac{f_0^2}{g' H_j}$  et  $g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g$  la gravité réduite. On suppose que  $g' \ll g$ , le terme  $f_0^2 \Psi_1 / g H_1$  est alors négligé par rapport au terme de couplage (dépendant de  $F_1$ ). Dans ce cadre, la vorticité relative du fluide peut être écrite :

$$\zeta_j = \Delta_h \Psi_j \quad (8)$$

Ce système de deux équations à deux inconnues permet ainsi de connaître la vitesse du fluide dans les deux couches. En diagonalisant ce système d'équations, il peut se décomposer en deux modes appelés *mode barotrope* et *mode barocline*. Le premier représente la moyenne de la vitesse pondérée par les hauteurs de couches et le second la différence entre les couches. La décomposition de la vorticité potentielle et de la fonction de courant pour ces deux modes est la suivante :

$$\begin{cases} q_{bt} = \frac{h_1 q_1 + h_2 q_2}{h_1 + h_2} & \Psi_{bt} = \frac{h_1 \Psi_1 + h_2 \Psi_2}{h_1 + h_2} \\ q_{bc} = q_1 - q_2 & \Psi_{bc} = \Psi_1 - \Psi_2 \end{cases} \quad (9)$$

Le système d'équation à résoudre s'exprime alors en fonction de ces deux modes comme :

$$\begin{cases} \Delta \Psi_{bt} = q_{bt} - \beta y & (a) \\ \Delta \Psi_{bc} = q_{bc} - \frac{\Psi_{bc}}{R_d^2} & (b) \end{cases} \quad (10)$$

où  $R_d$  est le rayon interne de déformation défini comme :

$$R_d^2 = \frac{g' H_1 H_2}{f_0^2 (H_1 + H_2)} \quad (11)$$

Ce paramètre décrit l'importance de la stratification, plus  $R_d$  est grand à  $f_0$  fixé, plus la différence de densité sera importante. Afin de calculer la vitesse du fluide, les composantes barotropes et baroclines peuvent donc être calculées avec le système (10), puis les vitesses de chacune des couches sont déterminées à partir de (9). Cette décomposition sera utile dans la suite pour l'étude du cas particulier des points vortex.

## 1.4 Le modèle des points vortex

Le stage portant sur l'étude de l'interaction entre deux tourbillons proches d'un talus continental, cette partie présente un modèle théorique permettant d'étudier analytiquement le comportement des tourbillons océaniques : le modèle des *points vortex*. Bien qu'il ne permette pas de discuter des déformations des tourbillons, ce modèle est utile pour étudier le déplacement des vortex et la dynamique du fluide induite par ces derniers.

Ce modèle consiste à supposer que la vorticité (potentielle ou relative) est localisée en un point, soit  $q = q^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , où  $\mathbf{x}_0$  est la position du vortex.

Pour un point vortex de surface,  $q_1 = q_1^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  et  $q_2 = 0$ , la vorticité potentielle peut alors être exprimée en termes des composantes barotropes et baroclines. Pour simplifier, les deux couches sont prises de même hauteur ( $H_1 = H_2$ ), et on a alors  $q_{bt} = q_{bc} = q_1$ . En résolvant le système d'équation (10) (en négligeant le terme  $\beta y$ ) qui consiste en une équation d'Helmholtz et une équation de Poisson, on trouve les fonctions de courant barotropes et baroclines créées par le point vortex :

$$\Psi_{bt} = \frac{q^0}{2\pi} \ln(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad \Psi_{bc} = -\frac{q^0}{2\pi} K_0\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{R_d}\right) \quad (12)$$

où  $K_0$  est une fonction de Bessel modifiée de second espèce et d'ordre 0. Sachant que  $\mathbf{u}_{bc/bt} \propto \partial_i \Psi_{bc/bt}$ , les composantes du champ de vitesses seront de la forme :

$$\mathbf{u}_{bt} \propto \frac{1}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} \quad \mathbf{u}_{bc} \propto K_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (13)$$

Loin du point  $\mathbf{x}_0$ , la composante barotope est dominante. Ainsi, bien que notre système ne soit à deux couches, il est possible (à grande distance des tourbillons) de ne considérer que la composante barotope de la fonction courant et de se ramener à un problème plan avec  $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_{bt}$ . Le champ de vitesse est alors identique dans les deux couches et s'exprime comme :

$$(u, v) = \frac{q^0}{2\pi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)} (- (y - y_0), x - x_0) \quad (14)$$

Ce modèle permet ainsi de réduire (en champ lointain) le système de deux couches à un système 2D. Il devient alors possible d'effectuer des calculs analytiques plus facilement sur différentes situations, notamment le cas de plusieurs vortex en co-rotation.

## 1.5 Interaction de deux vortex

Dans cette partie l'étude d'un système de deux vortex cycloniques est présentée, ceci afin de décrire le comportement théorique de deux vortex lorsqu'il n'y a pas de bathymétrie (i.e  $h_B = 0$ ).

**Système de deux points vortex** Considérons premièrement un système simpliste de 2 points vortex cycloniques (A et B) dans un fluide bi couche ( $h_1 = h_2$ ) avec  $q_1^A = q^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^A)$ ,  $q_1^B = q^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^B)$  et  $q_2^A = q_2^B = 0$ . Les vortex sont séparés d'une distance  $d$ , avec initialement  $\mathbf{x}_0^A = (-d/2, 0)$  et  $\mathbf{x}_0^B = (d/2, 0)$ . En reprenant les calculs de la partie 1.4 et en écrivant  $\Psi_1 = \Psi_1^A + \Psi_1^B$ , on obtient une fonction de courant totale (à grande distance) :

$$\Psi_1 = 2\Psi_1^{A/B} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{x^2}\right) \quad (15)$$

où  $\Psi_1^{A/B}$  est la fonction de courant décrivant un point vortex de même vorticité que A et B, centré en (0,0). Au premier ordre, à grande distance de la paire de points vortex, le champ de vitesse est alors celui d'un vortex centré en (0,0) de vorticité double, de la forme (14). Le système des 2 vortex est dans un état de *co-rotation* où les deux vortex tournent l'un autour de l'autre à une vitesse  $\Omega = \frac{q^0}{2\pi d^2}$ . La fonction de courant des deux vortex en co-rotation dans le repère tournant est ainsi  $\Psi_1 = \Psi_1^A + \Psi_1^B - \frac{1}{2}\Omega \mathbf{x}^2$ . A plus courte distance il faut réintroduire le terme en  $K_0(\mathbf{x}/R_d)$  dans la fonction de courant.

Pour le modèle des points vortex, deux vortex cycloniques tournent l'un autour de l'autre quelle que soit leur séparation  $d$ , et peuvent être vus au premier ordre (loin du centre) comme un seul point vortex de vorticité double.

**Vortex de taille finie** Si la même situation est considérée, avec des tourbillons de taille finie, par exemple un couple de vortex de Rankine (vortex circulaire à vorticité uniforme) de rayon  $R$ , le comportement du système est différent. En effet chaque tourbillon se déforme sous l'influence du champ de vitesse créé par l'autre, et il apparaît une distance critique  $d/R \sim 3.3$  séparant deux régimes distincts [7] :

- $d/R > 3.3$  : Déformation des tourbillons et co-rotation ;
- $d/R < 3.3$  : Fusion des tourbillons avec éjection de bras de vorticité (appelés filaments).

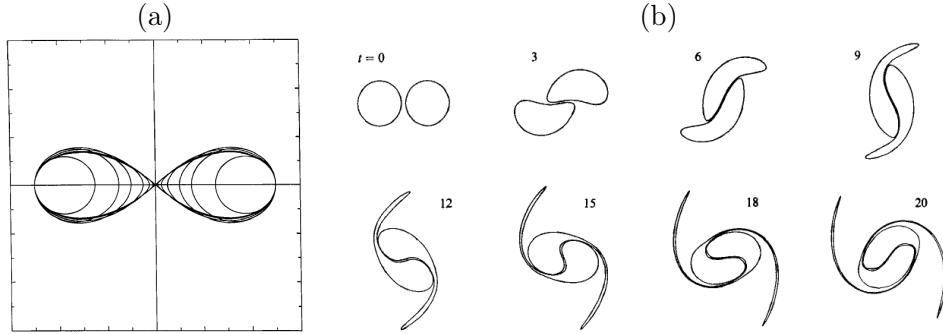


FIGURE 3 – Résultats de simulations (modèle quasi géostrophique 2 couches) présentés dans [7]. (a) Contour des tourbillons en co-rotation s'ils ne fusionnent pas. Chaque contour correspond à la forme obtenue en faisant varier la distance qui les sépare. Ces états sont appelés *V-states*. (b) Fusion de deux vortex cycloniques (absence d'état stationnaire en co-rotation).

Sans bathymétrie, le comportement d'un couple de tourbillons se résume donc aux deux régimes présentés sur la figure 3. Les mécanismes physiques provoquant la fusion de deux tourbillons seront présentés dans la suite du rapport, en s'appuyant sur les résultats des différentes simulations effectuées.

## 2 Problématique du stage

Les différents concepts théoriques ayant été introduits, cette partie présente le problème étudié au cours de ce stage. Elle précisera dans un premier temps le cadre de l'étude, puis l'étude théorique préliminaire effectuée en début du stage, et enfin le modèle numérique utilisé.

### 2.1 Cadre de l'étude

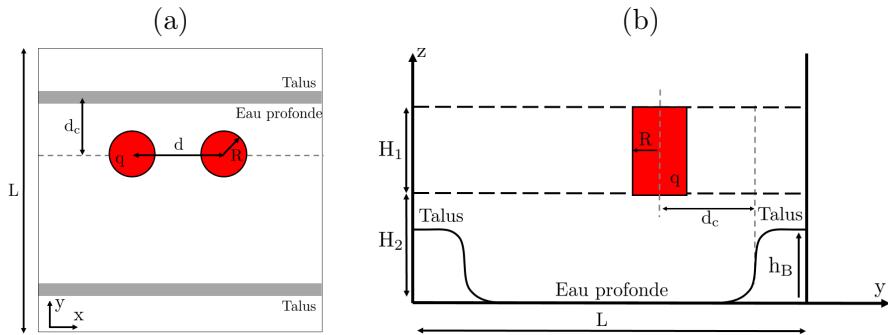


FIGURE 4 – Situation de l'étude (schéma) : 2 tourbillons de surfaces de rayon  $R$ , séparés d'une distance  $d$  et espacés d'une marche topographique d'une distance  $d_c$ . (a) Vue de dessus. (b) Vue de côté.

Pour étudier les phénomènes physiques en jeu lorsque deux tourbillons interagissent dans l'océan, le nombre de paramètres à prendre en compte est très important : forçage du vent, bathymétrie complexe, effet  $\beta$  planétaire, effet  $\beta$  topographique, stratification... Afin de gérer au mieux les différents paramètres, et de restreindre l'étude, la situation a été idéalisée. L'étude se centre donc sur le comportement de deux tourbillons de surface de vorticité égale, dans un fluide bicouche. La bathymétrie est une pente de largeur  $L_t$  située en  $y_t$  au Nord et au Sud du

domaine (dans les  $y$  positifs et négatifs) de la forme :

$$h_b = h_{b0}[1 + 0.5\tanh((y - yt)/L_t) - 0.5\tanh((y + yt)/L_t)]$$

Deux talus (Nord et Sud) ont été introduits en raison de la bipériodicité du domaine. L'effet  $\beta$ -planétaire est négligé (i.e  $f = f_0 = \text{constante}$ ), et il n'y a pas de forçage extérieur. La situation étudiée est présentée sur la figure 4. Dans la suite le tourbillon initialement à gauche du domaine sera appelé tourbillon Ouest, et son partenaire tourbillon Est.

## 2.2 Etude théorique

L'interaction des tourbillons va être modifiée par la présence de la marche topographique, et certains phénomènes peuvent être étudiés analytiquement. Une étude théorique préliminaire des différents phénomènes en jeu a donc été réalisée.

La plupart des effets qui vont apparaître résultent du fait que le talus crée un *front de vorticité potentielle*. En effet, au repos, d'après 7(b), la vorticité potentielle dans la couche 2 suit les variations de  $h_B$ . Pour une marche topographique, un front localisé en  $y = y_t$  est alors créé (figure 5(a)), avec  $q_2^{\text{talus}} = q_2(y > y_t) > q_2(y < y_t)$ .

Dans l'océan, on montre (voir annexe B) qu'une perturbation initiale d'un front de vorticité déclenche une *onde de Rossby topographique libre*. Ces ondes se propagent le long de la topographie, et pour le cas présenté sur la figure (figure 5(a)) vers les  $x < 0$ . On appelle alors de manière générique *dérive  $\beta$  topographique* la tendance du fluide à se déplacer le long de la topographie en raison des transferts de fluide à travers cette dernière.

Lorsqu'un tourbillon est placé proche d'un front de vorticité, ce dernier va mettre en mouvement le fluide dans les deux couches et donc à travers la marche topographique. Il y a alors création d'*ondes de Rossby topographique forcées*. Pour étudier cet effet dans la situation de la figure 4(a), les tourbillons ont été considérés comme des points vortex. Nous avons vu dans la partie 1.5 qu'un système de deux points vortex de vorticité égale pouvait être considéré au premier ordre comme un seul point vortex de vorticité double. En champ lointain, il suffit alors d'étudier le comportement d'un point vortex cyclonique situé à une distance  $d_c$  du talus (figure 5(b)).

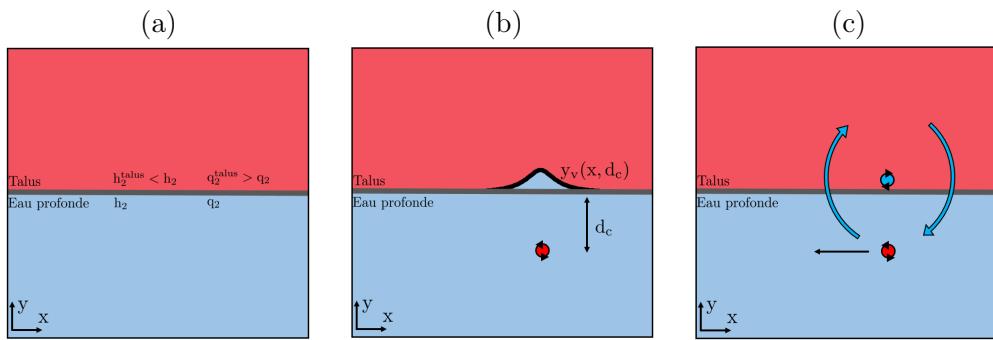


FIGURE 5 – Schéma des ondes de Rossby topographiques forcées. (a) Le talus crée un front de vorticité potentielle. (b) Lorsqu'un point vortex est placé à une distance  $d_c$  du talus, le front de vorticité se déforme et prend la forme théorique  $y_v$ . (c) L'excès de vorticité potentielle créé sur le talus, peut être vu comme point vortex de signe opposé induisant un champ de vitesse qui va déplacer le tourbillon.

Le processus est le suivant : le champ de vitesse créé par le point vortex dans la couche 1 (de la forme (14)) va mettre en mouvement le fluide dans la couche 1. Ce mouvement va ensuite advecter les masses d'eau de la couche 2 qui vont à leur tour se mettre en mouvement. Cette advection s'effectue à travers le couplage des couches à l'interface de densité. Le mouvement en couche 2 va alors déformer le front de vorticité. Cette déformation va advecter du fluide de la couche 2 à travers la topographie, générer des anomalies de vorticité potentielle en couche

2, donc un mouvement dans la couche 2 qui va ensuite rétro-agir sur la couche 1 et déplacer le point vortex. Analytiquement, ce problème peut être résolu de deux manières différentes.

La plus complète, présentées dans l'annexe C, permet de déterminer la forme du front de vorticité perturbé  $y_v$  par le point vortex. En linéarisant les équations, on montre que celui-ci est de la forme :

$$y_v(x, d_c) \propto \frac{d_c}{x^2 + d_c^2}$$

A partir de cette déformation (représentée schématiquement sur la figure 5(b)), on peut montrer (à grande distance) que le point vortex est animé d'un déplacement vers les  $x < 0$ , avec une vitesse constante  $c \propto -1/d_c$ .

La deuxième résolution consiste à intégrer la vorticité potentielle dans la couche 2, et à utiliser le théorème de Gauss. On considère que le point vortex dans la couche 1 crée une anomalie de vorticité potentielle dans la couche 2. En intégrant, on montre d'après le théorème de Gauss que la vorticité potentielle créée par la déformation du front de vorticité est la même qu'un point vortex de signe opposé placé au centre de la déformation (figure 5(c)). Dans l'approximation du champ lointain (voir partie 1.4), ce point vortex va alors créer un champ de vitesse (de la forme (14)) qui va advecter le tourbillon de la couche 1. En prenant ce champ en  $y = d_c$ , on aboutit alors comme dans [9] à une vitesse de déplacement selon  $x$  du point vortex  $c \propto -1/d_c$ . On peut également montrer que le front de vorticité déformé (i.e l'onde de Rossby) se propagera vers les  $x < 0$ .

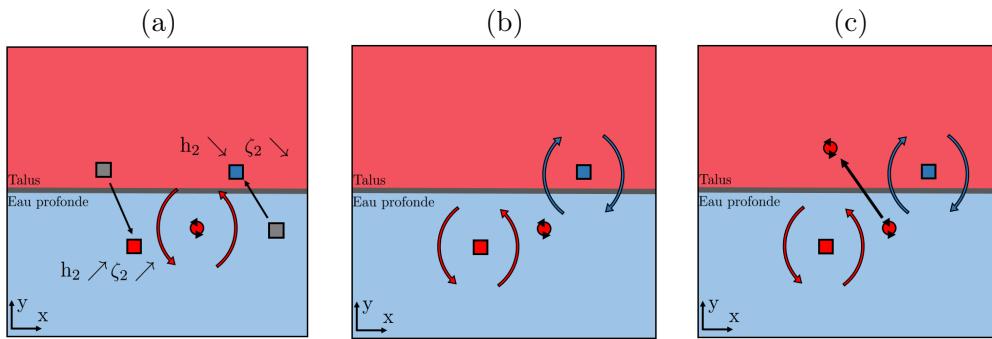


FIGURE 6 – Schéma de la montée d'un tourbillon cyclonique sur un talus. (a) Les particules fluides qui montent sur le talus gagnent de la vorticité négative, et celles qui descendent gagnent de la vorticité positive. (b) Les deux spots de vorticité créent un mouvement dipolaire. (c) Le vortex dans la couche 1 est advecté par ce mouvement et monte sur le talus.

A plus courte distance vortex-topographie ( $d_c$ ), il se produit une amplification des ondes de Rossby qui déferlent en *tourbillons topographiques*. Ces tourbillons induisent un mouvement en  $y$  de la paire de tourbillons initiaux. Ainsi, en plus du déplacement vers les  $x < 0$ , un ou deux vortex cyclonique subissent également un déplacement vers les  $y > 0$  (i.e ils montent sur le talus). Ce déplacement peut être expliqué qualitativement en utilisant le même raisonnement que dans l'annexe B où cette fois c'est le fluide de la couche 2 qui est mis en mouvement par le tourbillon placé dans la couche 1.

Il y a ainsi création de vorticité négative au Nord-Est du tourbillon et de vorticité positive au Sud-Ouest (6)(a). Le *dipôle de vorticité* va alors mettre en mouvement le fluide dans la couche 2 (6)(b), advecter le tourbillon vers le Nord-Ouest, et le faire monter sur le talus (6)(c). Dans le cas d'un anticyclone, le phénomène inverse se produit et le tourbillon sera repoussé du talus, vers le Sud-Ouest.

Ce phénomène dipolaire a également été observé au cours de simulations et sera présenté dans la suite de ce rapport.

Ces différents processus physiques, créés par l'interaction entre talus et les tourbillons vont donc avoir un impact sur la fusion de ces derniers. Les calculs analytiques étant vite très complexes, et le stage ne portant pas prioritairement sur un aspect théorique, l'étape suivante et principale, a été d'étudier cette situation à l'aide d'une simulation numérique.

## 2.3 Modèle numérique

Les équations de conservation de la vorticité potentielle pour un modèle quasi-géostrophique à 2 couches peuvent être écrites en termes uniquement de la fonction de courant des deux couches :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\partial_t + J(\Psi_1, \bullet)] (\Delta_h \Psi_1 + \beta y + F_1(\Psi_2 - \Psi_1)) = 0 \\ [\partial_t + J(\Psi_2, \bullet)] (\Delta_h \Psi_2 + \beta y + \frac{f_0 h_B}{H_2} + F_2(\Psi_1 - \Psi_2)) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (16)$$

où  $J$  désigne le déterminant de la matrice Jacobienne,  $J(f, g) = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g$ . Ces équations ont été implémentées numériquement dans un domaine carré, biperiodique, en utilisant une résolution pseudo-spectrale spatialement et un schéma mixte Euler-Leapfrog temporellement.<sup>3</sup> Le pas de temps a été choisi borné par la condition de Courant-Friedrich-Levy. La taille du domaine a été choisie comme  $L = 4\pi$  (avec  $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$ ), et la grille de résolution avec 512 points. Afin de conserver la dynamique non-visqueuse et non-linéaire du problème, la viscosité du fluide a été mise à zéro, et une viscosité tri-harmonique sélective en échelle a été ajoutée ( $\nu_3 = 5.10^{-8}$  en unité modèle). Cette viscosité n'altère pas la physique du problème, mais évite l'accumulation d'énergie aux petites échelles lors de la simulation. Dans le modèle des grandeurs adimensionnées sont utilisées, les différents tracés seront alors présentés en unités arbitraires. On définit également  $h_j = H_j / H$  et  $R_d^2 = g' h_1 h_2 H / f_0^2$ .

L'initialisation du modèle permet de placer deux tourbillons circulaires de Raynke de rayon  $R$ , de vorticité uniforme  $q_1$ , distant l'un de l'autre d'une distance  $d$  et à une distance  $d_c$  de la topographie. Aux autres endroits, la vorticité potentielle est initialisée à  $q_1 = q_2 = 0$ . On définit le terme de vorticité topographique :

$$q_{topo} = f_0 h_B / H_2 \quad (17)$$

qui fixe l'intensité du front de vorticité créée par le talus. Des observations de tourbillons faites en mer d'Arabie donnent un pic de vitesse  $U \sim 0.5 \text{ m/s}$  à un rayon  $R \sim 50 \text{ km}$ . En utilisant une estimation de la vorticité  $q \sim 2\zeta \sim 4U/R = 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , les longueur et le temps modèle peuvent être convertis via  $L = 10^5 \text{ m}$  et  $T = 2.5 \cdot 10^4 \text{ s}$ . En mer d'Arabie,  $f_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , et  $R_o = 0.2$ . La valeur adimensionnée de  $f_0$  dans le modèle est ainsi 1.25, et permet de définir  $q_{topo}$ . La hauteur totale du fluide est fixée à  $H = 1$ . Un temps adimensionné  $\tau$  sera utilisé dans la suite pour décrire l'avancement de la simulation, avec  $\tau = t/T_0$ , où  $T_0$  est le temps de retournement du tourbillon (i.e le temps que met une particule fluide advectée par le tourbillon à en faire le tour).

Le modèle est implémenté en Fortran, et donne à chaque instant  $\Psi_1(t, x, y)$  et  $\Psi_2(t, x, y)$ . A partir de ces données, des scripts Python et Fortran ont été réalisés pour traiter les résultats.

## 3 Résultats

Dans cette partie, les résultats de simulations effectuées avec le modèle présenté en 2.3 sont analysés. Tout d'abord, l'étude de la fusion de deux tourbillons, sans topographie, puis, l'étude de l'impact d'un talus sur la fusion des tourbillons sont présentés. Ce rapport se devant d'être succinct, seule une petite partie des études menées et des résultats seront détaillés ici. (L'étude complète fait l'objet de la soumission d'un article dans la revue *Fluids* : C. de Marez, X. Carton, M. Morvan and J.N. Reinaud. The interaction of two surface vortices near a topographic slope in a stratified ocean.) Pour permettre au lecteur de visualiser le mouvement des tourbillons, une vidéo est disponible en ligne à partir de [ce lien](#), ou en scannant le QR code ci-joint.



Afin d'avoir une taille suffisante des tourbillons, tout en minimisant l'impact des conditions aux limites périodiques, des tourbillons de rayon  $R = 0.5$  (unité modèle) sont choisis. L'initialisation de ces derniers est faite en définissant une région de vorticité potentielle  $q_1 = 1$  pour des cyclones, et  $q_1 = -1$  pour des anticyclones. Sauf cas particulier, des couches de fluides d'épaisseurs égales ont été choisies,  $h_1 = h_2$ .

3. Programmeur : M. William Dewar (FSU).

### 3.1 Sur la fusion de tourbillons sans topographie

De par la symétrie du problème sans topographie, la polarité des tourbillons (i.e cyclones ou anticyclones) n'influencera pas les régimes de fusion. Ainsi, le choix de vortex cycloniques pour cette partie a été fait arbitrairement.

Un des paramètres primordiaux lorsqu'un modèle quasi-géostrophique bicoche est considéré, est le Rayon de déformation  $R_d$  (11). Ce dernier va représenter la taille caractéristique horizontale que vont prendre les courants ou tourbillons qui s'ajustent de manière géostrophique. Une telle situation se produit lorsque champ de vitesse et champ de pression ne sont pas initialement en équilibre géostrophique. Ce paramètre va également définir l'importance de la stratification du fluide et ainsi déterminer l'intensité des échanges entre les couches. En effet, on peut montrer que dans la définition de la vorticité potentielle quasi-géostrophique (7), les facteurs  $F_j$  peuvent s'écrire (en utilisant les définitions de  $h_j$  de la partie 2.3) :

$$F_1 = h_2 \gamma^2 \quad \text{et} \quad F_2 = h_1 \gamma^2$$

où  $\gamma = R_d^{-1}$ . Dans la suite, nous parlerons de  $\gamma$  plutôt que de  $R_d$ . Ainsi, dans les équations (7), on peut voir que plus  $\gamma$  est important, plus le terme de couplage (faisant agir les mouvements de la couche 1 dans la couche 2 et inversement) sera lui aussi important. Nous verrons dans la suite que ce phénomène est déterminant lorsqu'une topographie est placée dans la couche 2.

Dans le cas de la mer d'Arabie, on peut déterminer à partir de la définition du rayon de déformation (11) et des relevés de densité (voir figure 31) que  $R_d \sim 50\text{km}$ . Aux vues de la taille caractéristique des tourbillons présents dans cette région (voir partie 2.3,  $R \sim 50\text{km}$ ), il est intéressant de considérer le cas  $\gamma R = 1$ . En faisant varier la distance initiale entre les vortex,  $d/R = [2.8, 3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8]$ , différents régimes ont pu être observés pour un système de deux tourbillons cycloniques. Les différents régimes sont présentés sur les figures 7 et 8.

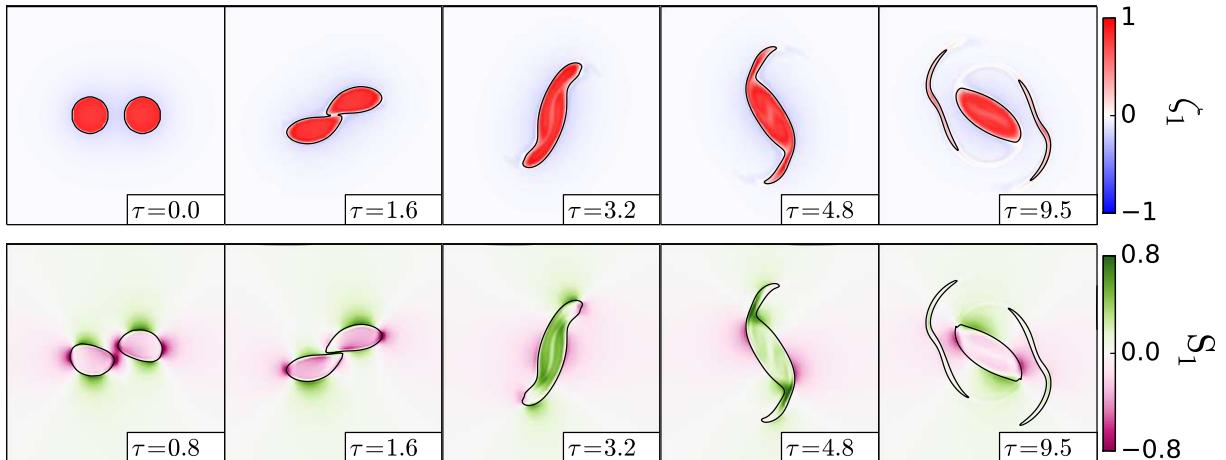


FIGURE 7 – Vorticité relative dans la couche 1 ( $\zeta_1$ ) et cisaillement dans la couche 1 ( $S_1$ ) : fusion de deux tourbillons cycloniques de rayon  $R = 0.5$  avec  $\gamma R = 1$  et  $d/R = 3.0$ .

Pour  $d/R = [2.8, 3.0, 3.2]$ , une *fusion symétrique* est obtenue. Afin de visualiser le mécanisme de fusion, le cisaillement (*shear*) dans la couche 1 est présenté sur la figure 7, où le cisaillement dans la couche  $j$  est défini par :

$$S_j = \partial_x v_j + \partial_y u_j$$

Aux premiers instants ( $\tau = 0.8$ ), une zone de cisaillement intense très localisée entre les deux tourbillons va être créée par les champs de vitesse de chacun des tourbillons. En  $\tau = 1.6$ , on voit que le cisaillement a provoqué une déformation importante des tourbillons qui, puisqu'ils sont assez proches, vont alors se toucher, et échanger de la vorticité. Il s'en suit une période de transition où la vorticité va se concentrer au centre de co-rotation, pour au final à  $\tau \sim 9$  donner un vortex unique.

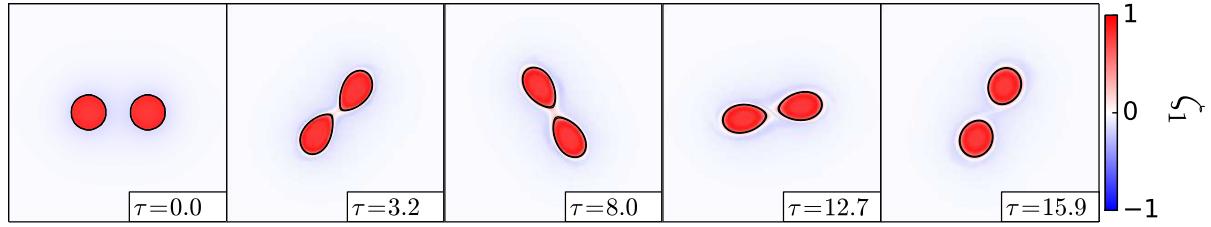


FIGURE 8 – Vorticité relative dans la couche 1 ( $\zeta_1$ ) : co-rotation de deux tourbillons cycloniques de rayon  $R = 0.5$  avec  $\gamma R = 1$  et  $d/R = 3.4$ .

Pour  $d/R = [3.4, 3.6, 3.8]$  un régime de *co-rotation* est obtenu. En effet, on peut observer les deux tourbillons se tourner autour et se stabiliser avec un contour correspondant aux prédictions de [7] (voir figure 3(a)), même à temps long.

La même distance critique de fusion  $d^{\text{crit}}/R$  que dans [7] est donc obtenue : pour  $d/R < 3.3$  une fusion est observée, et pour  $d/R > 3.3$  un régime de co-rotation.

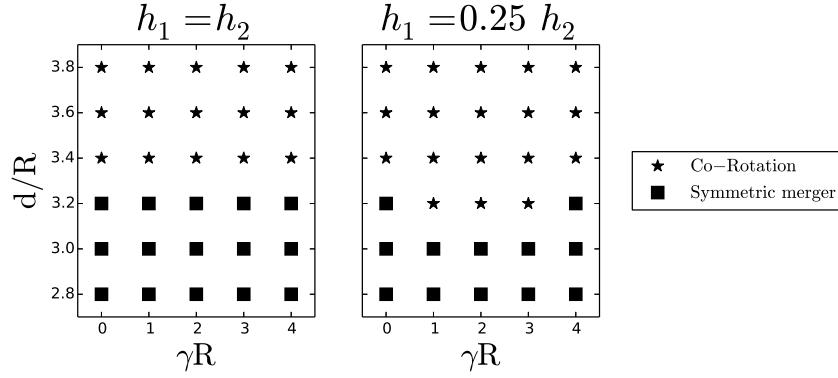


FIGURE 9 – Diagramme des régimes de deux tourbillons cycloniques de rayon  $R = 0.5$  pour  $h_1 = h_2$  et  $h_1 = 0.25 h_2$ .

Le rayon de déformation a également été modifié,  $\gamma R = [0.001, 1, 2, 3, 4]$ . Cela a permis de tracer un diagramme des régimes sur lequel le régime observé est indiqué pour chaque couple de paramètres  $(d/R, \gamma R)$ . A noter que les différents paramètres que nous avons fait varier ont été normalisés par le rayon des tourbillons  $R$  (analyse d'échelle).

Ce type de diagramme est représentatif du comportement du système et sera très utilisé dans la suite de ce rapport. Le diagramme obtenu est présenté sur la figure 9. Quel que soit  $\gamma R$ ,  $d^{\text{crit}}/R = 3.3$ , ce qui confirme une nouvelle fois les prédictions de [7].

Théoriquement, on montre que l'influence d'un tourbillon sur l'autre pendant la co-rotation, et donc la *force* du tourbillon, est proportionnelle à l'intégrale volumique de sa vorticité potentielle  $\Gamma$ . Cette dernière peut être écrite d'après la conservation de la vorticité potentielle (3) :

$$\Gamma = \int_S h q(x, y) \, ds \quad (18)$$

La fusion dépendant de l'action des tourbillons entre eux, plus  $\Gamma$  est grand, plus la fusion doit être facilitée. Afin de confirmer cette hypothèse, des simulations identiques à précédemment, en fixant  $h_1 = 0.25 h_2$ , sont effectués (le diagramme des régimes est présenté sur la figure 9). Les tourbillons étant moins épais que précédemment, leur circulation est inférieure, et  $d^{\text{crit}}(h_1 = 0.25 h_2) \sim 3.1 < d^{\text{crit}}(h_1 = h_2)$ .

Dans cette partie, les résultats obtenus concernant la fusion de deux tourbillons sans topographie ont été présentés, et correspondent aux attentes théoriques et bibliographiques de ce type de système. Dans la suite l'impact d'un talus continental sur cette fusion est étudié.

### 3.2 Impact d'un talus sur la fusion

Afin de comprendre au mieux le comportement d'une paire de tourbillons proche d'une topographie (situation de la figure 4), environ 500 simulations ont été effectuées en faisant varier la distance initiale entre les vortex ( $d$ ), leur distance du talus ( $d_c$ ) et la stratification ( $\gamma$ ). Comme dit précédemment, ces grandeurs ont été normalisées par le rayon des tourbillons  $R$ . Pour cette partie, les couches ont été prises d'épaisseurs égales. Dans un premier temps la vorticité topographique a été fixée  $q_{\text{topo}} = 0.3$ , ce qui correspond à  $h_B/H_B = 0.15$ .

Nous verrons dans la suite qu'un des paramètres les plus importants est la polarité des tourbillons, car celle-ci va déterminer le mouvement de ces derniers vis-à-vis de la topographie (voir partie 2.2 et figure 6). Ainsi, cette partie a été divisée en deux, la première traitant du cas des cyclones et la deuxième du cas des anticyclones. Pour chaque partie, le diagramme des régimes condensant les résultats de toutes les simulations sera présenté, suivi de l'étude de cas particuliers représentatifs du comportement du système.

**Définition des régimes** Au cours des simulations, un nombre important de nouveaux régimes a été observés, complexifiant ainsi la distinction fusion/co-rotation du cas sans topographie.

Ces régimes sont les suivants :

- *Fusion asymétrique/partielle* : Les deux tourbillons se rencontrent et échangent de la vorticité de manière asymétrique, résultant ainsi en un tourbillon de grande taille et un tourbillon satellite.
- *Fusion asymétrique et division* : A la suite d'une fusion asymétrique, le tourbillon principal est soumis à un cisaillement important et se divise en plusieurs petits tourbillons.
- *Dérive* : Les vortex sont advectés par l'onde de Rossby topographique et se déplacent sans effectuer de co-rotation. Cette dérive peut être vers le Nord ( $y > 0$ ) menant ainsi à la montée des tourbillons sur le talus, le long du talus, ou au loin vers le Sud.
- *Co-rotation et dérive* : Les tourbillons tournent l'un autour de l'autre, mais leur centre de rotation dérive vers l'Ouest.

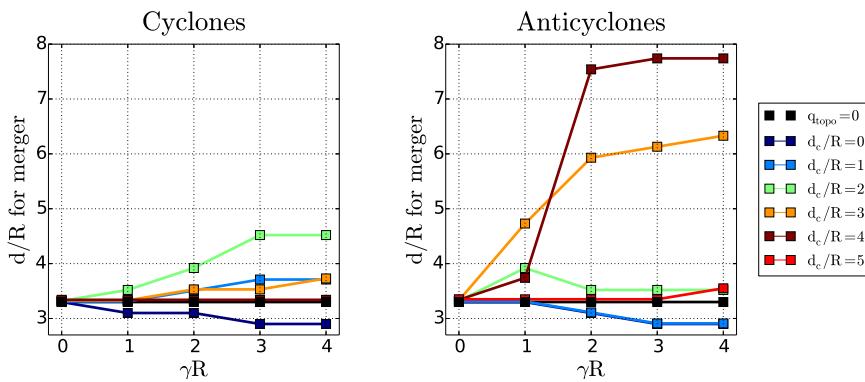


FIGURE 10 – Distance initiale critique entre les tourbillons menant à la fusion, en fonction de la stratification ( $\gamma$ ) pour différentes distances entre la paire de vortex et la topographie ( $d_c$ ) et pour  $q_{\text{topo}} = 0.3$ . À gauche le cas des cyclones et à droite celui des anticyclones.

Dans la partie 3.1, nous avons vu (voir figure 9) que la distance initiale critique entre les deux vortex menant à la fusion de deux tourbillons était d'environ 3.3. En présence d'une topographie, cette distance est modifiée. Celle-ci est présentée sur la figure 10, pour différentes stratifications et différentes distances initiales au talus. Premièrement, la différence entre cyclones et anticyclones est nette, puisque leur dépendance aux différents paramètres est très différente. Le détail de cette dépendance sera présenté dans la suite, mais on peut déjà dire que la présence

de la topographie a deux effets principaux sur le couple de tourbillons : forcer la fusion et augmenter la distance critique, ou au contraire séparer les tourbillons et diminuer cette distance critique.

Dans la suite, sur les figures présentant l'évolution des simulations les traits noirs horizontaux représentent les iso-hauteurs de la bathymétrie. Le talus se situe donc au Nord de celles-ci. Les contours noirs indiquent les contours des tourbillons dans la couche 1 (obtenus en prenant des lignes d'iso- $q_1$ ). La fenêtre d'observation est la moitié supérieure du domaine ( $x \in [-2\pi, 2\pi]$  et  $y \in [0, 2\pi]$ ).

### 3.2.1 Cas des cyclones

La figure 11 résume les différents régimes observés dans l'espace des paramètres.

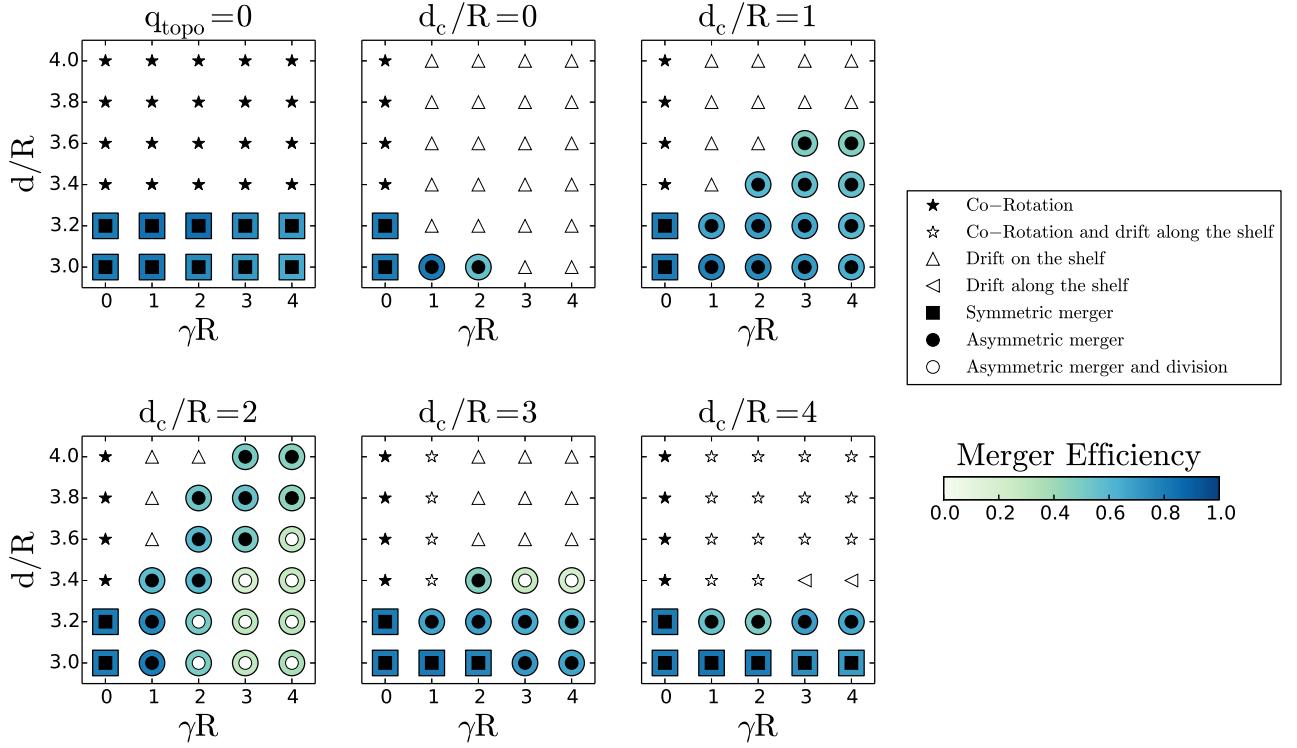


FIGURE 11 – Diagramme des régimes pour l'interaction de deux cyclones de surface, pour  $d_c/R$  fixé (voir au dessus de chaque diagramme) dans le plan  $(\gamma R, d/R)$ , pour  $q_{topo} = 0.3$ . Le diagramme de gauche reprend les résultats sans topographie de la figure 9. Les étoiles noires indiquent une co-rotation, les étoiles blanches une co-rotation et une dérive le long du talus, les carrés noirs une fusion symétrique, les cercles noirs une fusion asymétrique, les cercles blancs une fusion asymétrique suivie d'une division du tourbillon et les triangles une dérive des tourbillons (sur le talus ou le long du talus). Les nuances de bleu indiquent l'efficacité de fusion (pour les cas où il y a eu fusion).

Quand une topographie est ajoutée, des résultats similaires à un fond plat sont obtenus lorsque les cyclones sont initialement loin du talus (i.e  $d_c/R \geq 4$ ). En effet, la fusion se produit pour  $d/R < 3.3$  avec une influence faible des ondes topographiques menant à une asymétrisation de la fusion. Pour deux cyclones initialement plus éloignés l'un de l'autre, le système est en co-rotation et dérive le long du talus vers l'Ouest. Dans la limite  $d_c/R$  grand, un état de dérive constante en co-rotation des deux tourbillon est donc obtenu, comme prédit par la théorie des points vortex (voir partie 2.2).

Lorsque les deux tourbillons sont initialement placés très proches de la topographie ( $d_c/R = 0$ , le centre des tourbillons est placé au centre du gradient de la pente), la distance critique de fusion diminue car les ondes topographiques advectent les tourbillons sur le talus.

Pour une distance entre les tourbillons et la pente intermédiaire, la fusion asymétrique des tourbillons est

observées pour  $d/R > 3.3$ , car de la vorticité topographique négative advecte les tourbillons l'un vers l'autre leur permettant un échange de vorticité asymétrique.

Afin de caractériser l'efficacité de cette fusion, l'*efficacité de fusion* ME est définie comme étant le ratio entre l'intégrale surfacique de vorticité potentielle (couche 1) du vortex fusionné et l'intégrale de vorticité potentielle des vortex initiaux :

$$ME = \frac{\iint dS q_1^{\text{final}}}{\iint dS q_1^{\text{initial}}} \quad (19)$$

Pour déterminer la surface des tourbillons, les zones de vorticité potentielle  $q_1 > 0.2$  ont été considérées. A  $\gamma R$  et  $d_c/R$  fixé, ME diminue lorsque  $d/R$  augmente. En effet, plus les tourbillons sont proches initialement, plus l'échange de vorticité entre eux sera important et le vortex final important.

Lorsque  $\gamma R$  est grand (i.e la différence de masse volumique entre les deux couches est faible), après une fusion partielle, le vortex final peut subir un cisaillement très intense créé par son partenaire cyclonique et par les tourbillons topographiques, causant ainsi son étirement et sa division. Le système est alors finalement constitué d'une assemblée de petits vortex de faible rayon, et ME est très faible.

Enfin, globalement pour  $d_c/R < 4$  lorsque la fusion ne se produit pas, il n'y a pas d'état de co-rotation. Cela est dû au fait que le champ de vitesse dans la couche 1 est perturbé par le champ de vitesse dans la couche 2, et ne permet donc pas aux tourbillons de tourner autour de leur barycentre de manière stationnaire.

Le nombre de régimes différents étant important, deux seulement seront présentés pour le cas des cyclones. Ces deux cas sont significatifs puisqu'ils permettent de discuter de l'impact des effets topographiques sur la distance critique de fusion. Les régimes présentés dans la suite sont des cas où la stratification est comparable à celle de la mer d'Arabie (i.e  $\gamma R = 1$ ).

**Diminution de la distance critique de fusion, dérive sur le talus** La figure 12 présente l'évolution temporelle d'une simulation où deux tourbillons cycloniques initialement placés le long de la pente ( $d_c/R = 0$ ) se séparent et ne fusionnent pas alors que leur distance initiale  $d/R = 3.2 < 3.3$ .

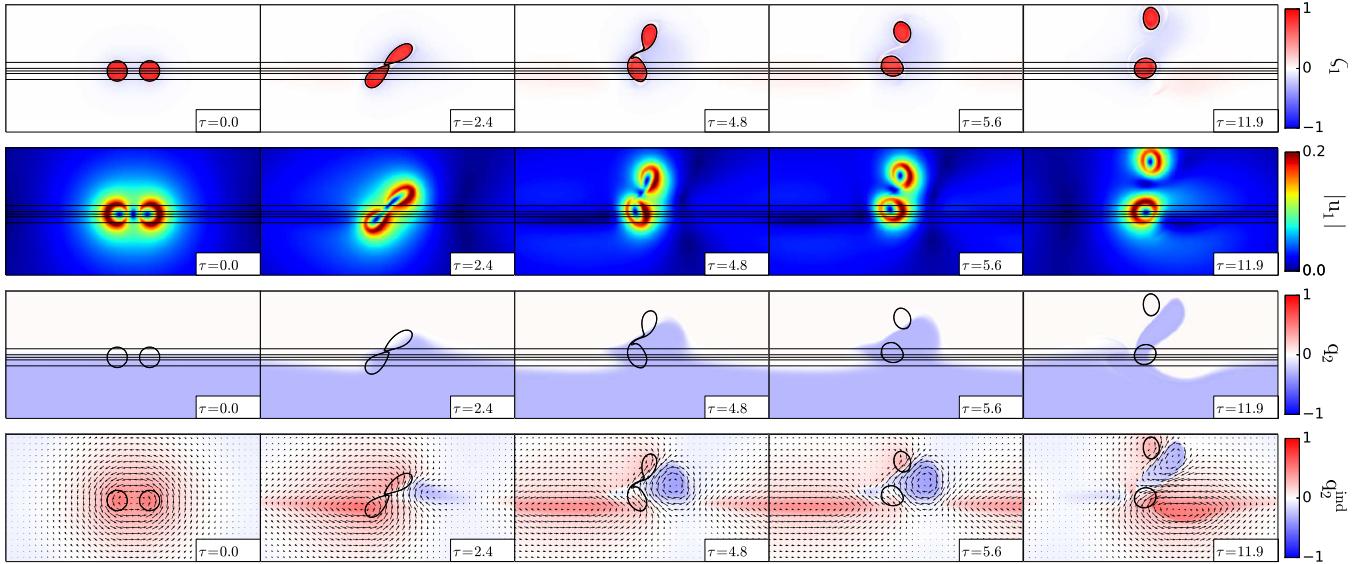


FIGURE 12 – Dérive des tourbillons cycloniques sur le talus :  $d/R = 3.2$ ,  $d_c/R = 0$  et  $\gamma R = 1$ . De haut en bas, la vorticité relative dans la couche 1 ( $\zeta_1$ ), la norme de la vitesse dans la couche 1 ( $|u_1|$ ), la vorticité potentielle dans la couche 2 ( $q_2$ ) et la vorticité potentielle induite dans la couche 2 ( $q_2^{\text{ind}}$ ) sur laquelle est superposé le champ de vitesse dans la couche 2.

Aux premiers instants de la simulation, les tourbillons se tournent autour, et se touchent comme ils le feraien sur fond plat. Le vortex Est se trouve alors sur le talus. La rotation du système va ensuite s'arrêter quand l'un des

deux vortex monte vers le Nord, et se sépare de son compagnon qui reste stationnaire à une position proche de sa position initiale.

En traçant la norme de la vitesse dans la couche 1 ( $|\mathbf{u}_1|$ ), on s'aperçoit que le champ de vitesse n'est pas symétrique dès les premiers instants. En effet, les bords Est des tourbillons subissent une vitesse plus importante.

En regardant l'évolution temporelle de la vorticité potentielle dans la couche 2 ( $q_2$ ), on peut voir le front de vorticité se déformer, puis la déformation croître tout en se propageant vers l'Ouest : ce sont les ondes de Rossby topographiques.<sup>4</sup> Au cours du temps cette onde croît et un panache de vorticité négative se propage sur le talus. Ce panache semble accompagner le mouvement du tourbillon, et se trouve précisément au lieu où le champ de vitesse dans la couche 1 est plus intense.

Afin de visualiser plus en détails le phénomène, on décompose la vorticité potentielle dans la couche 2 de la manière suivante :

$$q_2 = \underbrace{\zeta_2 - F_2 \Psi_2}_{q_2^{\text{ind}}} + F_2 \Psi_1 + \frac{f_0 h_B}{H_2} q_{\text{topo}} \quad (20)$$

La vorticité potentielle induite  $q_2^{\text{ind}}$  permet d'isoler le terme responsable des mouvements dans la couche 2. En traçant  $q_2^{\text{ind}}$ , on repère une anomalie de vorticité sur le talus, c'est l'anticyclone topographique créé par les ondes de Rossby. Lorsque le champ de vitesse dans la couche 2  $\mathbf{u}_2$  est superposé à  $q_2^{\text{ind}}$ , on s'aperçoit bien que la vitesse dans la couche 2 est principalement gouvernée par l'évolution de cette vorticité induite. Le champ de vitesse dans la couche 2 créé par l'anomalie de vorticité va alors se coupler au champ de vitesse dans la couche 1, créant ainsi l'asymétrie mentionnée plus haut. Les tourbillons vont alors voir leur trajectoire modifiée par l'advection créée par l'anticyclone topographique, et se séparer, empêchant donc la fusion de se produire. Le résultat est une distance critique menant à la fusion  $d^{\text{crit}} \sim 3.1 < 3.3$ .

**Augmentation de la distance critique de fusion, fusion asymétrique/partielle** La figure 13 présente l'évolution temporelle d'un cas où la fusion est forcée par la présence de l'anticyclone topographique.

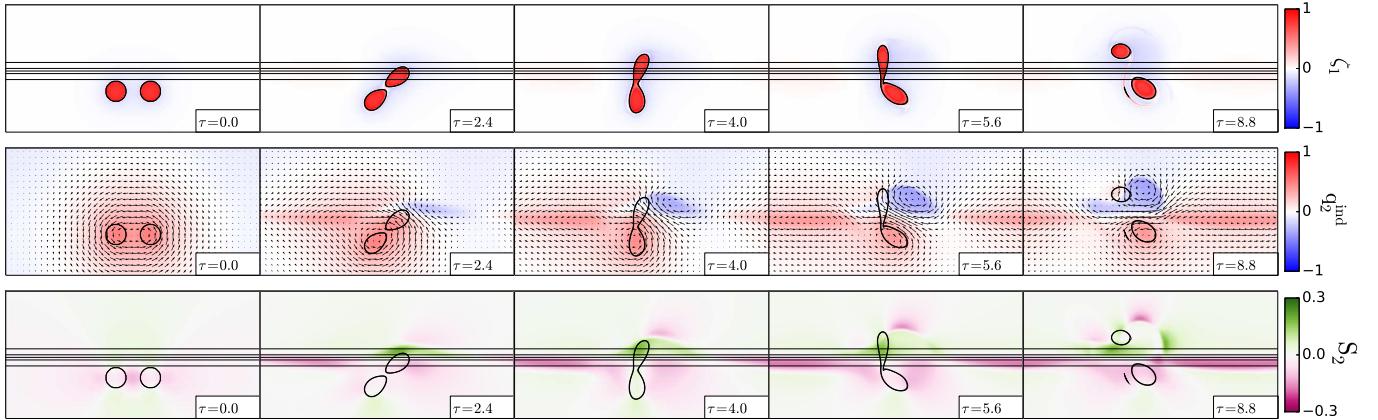


FIGURE 13 – Fusion asymétrique des tourbillons :  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 2$  et  $\gamma R = 1$ . De haut en bas,  $\zeta_1$ ,  $q_2^{\text{ind}}$ , et le cisaillement dans la couche 2 ( $S_2$ ).

En effet dans ce cas alors qu'aux premiers instants les tourbillons entament une co-rotation, un transfert de vorticité du tourbillon Est vers son compagnon va se produire. Le résultat au final est une fusion asymétrique/partielle car il subsiste un tourbillon satellite de plus petite taille que le tourbillon fusionné (la ME est donc faible, de l'ordre de 60%).

A partir du champ de vitesse dans la couche 2, le cisaillement dans la couche 2 ( $S_2$ ) est tracé. Une zone de cisaillement intense le long de la topographie et autour du tourbillon topographique est alors visible. Ce cisaillement va être transmis au fluide de la couche 1, et intensifier le cisaillement entre les tourbillons dans la couche 1 qui vont alors fusionner plus facilement (par le même mécanisme que celui présenté sur la figure 7). Pour cette valeur de stratification et de distance au talus la distance critique de fusion est augmentée  $d^{\text{crit}} \sim 3.5 > 3.3$ .

4. Une étude plus approfondie de l'onde topographique est présentée dans l'annexe E pour un cas où l'onde est moins perturbée.

La présentation de ces deux cas permet ainsi de mettre en évidence l'importance de la distance au talus  $d_c/R$ . Aux premiers instants les tourbillons ont un mouvement de rotation similaire à celui qu'ils auraient sur fond plat. Cependant, lorsque le tourbillon Est va être monté sur le talus, sa position par rapport à l'onde topographique va dépendre de  $d_c/R$ . Dans un cas le tourbillon sera monté complètement sur le talus, et le tourbillon topographique va l'entraîner au Nord, séparant alors le système et diminuant la distance critique de fusion. Dans l'autre cas (i.e  $d_c/R$  plus grand), le tourbillon va se trouver dans la zone où le cisaillement ambiant causé par la vorticité topographique est très important. Cela va favoriser la fusion des tourbillons et augmenter la distance critique de fusion.

**Impact de la hauteur du talus sur l'interaction entre les tourbillons** Afin de discuter de l'importance de la hauteur du talus, les diagrammes de régimes pour différentes valeurs de vorticité topographique  $q_{topo}$  sont présentés sur la figure 14. Ces diagrammes ont été réalisés pour  $\gamma R = 1$  dans le plan  $(d/R, d_c/R)$ .

Pour  $q_{topo} \leq 0.2$  la distance critique de fusion est de 3.3, quelle que soit la distance au talus. Les effets topographiques n'ont donc pas d'effets sur l'interaction entre les deux tourbillons. Lorsque  $q_{topo} \geq 0.3$  la distance de fusion est modifiée (de la même manière que présentée plus haut).

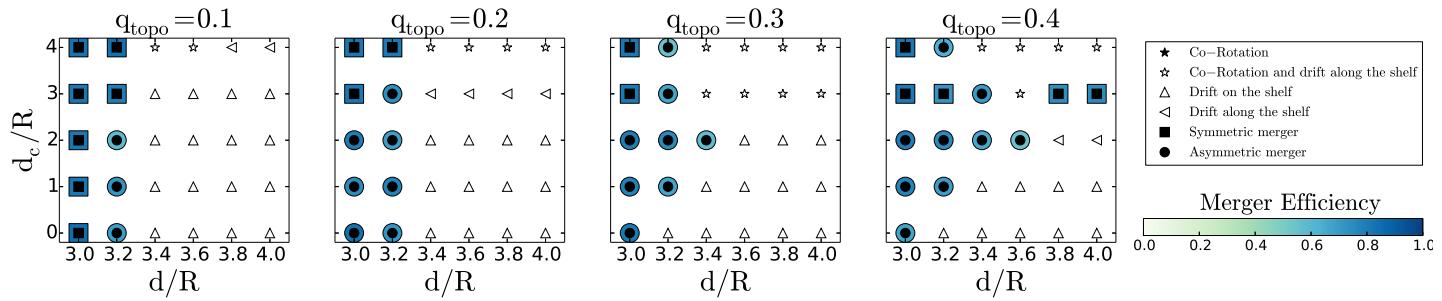


FIGURE 14 – Diagramme des régimes pour l'interaction de deux cyclones de surface, pour  $q_{topo}$  fixé (voir au dessus de chaque diagramme) dans le plan  $(d/R, d_c/R)$ , pour  $\gamma R = 1$ .

Dans le cas où  $d_c/R = 0$ , nous avons vu que le facteur important est la présence du tourbillon topographique qui advecte le tourbillon Est lorsque celui-ci est monté sur le talus après un quart de rotation autour de son partenaire. L'intensité de l'anticyclone topographique  $I_{at}$  a été mesurée en calculant l'intégrale sur sa surface<sup>5</sup> de la vorticité potentielle induite  $q_2^{ind} < -0.1$ . Les résultats sont présentés sur la figure 15(a) pour différentes valeurs de  $q_{topo}$  dans la configuration de la figure 12. L'intensité du tourbillon croît au cours du temps (dans le domaine négatif car c'est un anticyclone). Lorsque  $q_{topo}$  augmente, la vitesse de croissance du tourbillon topographique augmente. C'est la rapidité de cette croissance qui détermine si le tourbillon topographique va être capable de séparer les tourbillons lorsque celui de droite sera monté sur le talus. Le temps correspondant à un quart de rotation du système lorsqu'il n'y a pas de talus  $\tau_{1/4}$  est indiqué sur la figure. Ainsi, on peut déterminer qu'à  $\tau = \tau_{1/4}$ , si  $I_{at} \lesssim -1.10^3$  le tourbillon topographique de la couche 2 n'est pas assez intense pour perturber le champ de vitesse et empêcher la fusion des tourbillons.

Lorsque  $d_c/R = 2$ , ce sont les déformations engendrées par le champ de vitesse dans la couche 2 qui vont provoquer la fusion des tourbillons. Lorsque la hauteur du talus augmente, le cisaillement le long du talus dans la couche 2  $S_2$  augmente également<sup>6</sup>. Pour le cas de la figure 13 l'intégrale de  $S_2^2 + T_2^2$ , appelée  $I_{S2T2}$ , est calculée pour les différentes valeurs de  $q_{topo}$  (figure 15(b)), où  $T_2 = \partial_x u_2 - \partial_y v_2$  est le *strain* dans la couche 2 qui décrit la tendance du fluide à converger ou à diverger. Lorsque la topographie augmente, la vitesse de croissance de l'intégrale est plus importante. Avec le même raisonnement que précédemment, on voit que lorsque le tourbillon Est a fait un quart de tour, la valeur de l'intégrale est plus faible dans les cas où il n'y a pas de fusion (i.e  $q_{topo} = [0.1, 0.2]$ ). Pour  $I_{S2T2} \lesssim 3.10^2$ , les déformations du fluide induites par les ondes topographiques ne sont pas assez importantes pour déformer les tourbillons au point de les faire fusionner.

5. voir annexe F figure 25 où le domaine d'intégration est présenté

6. voir figure 27 dans l'annexe F

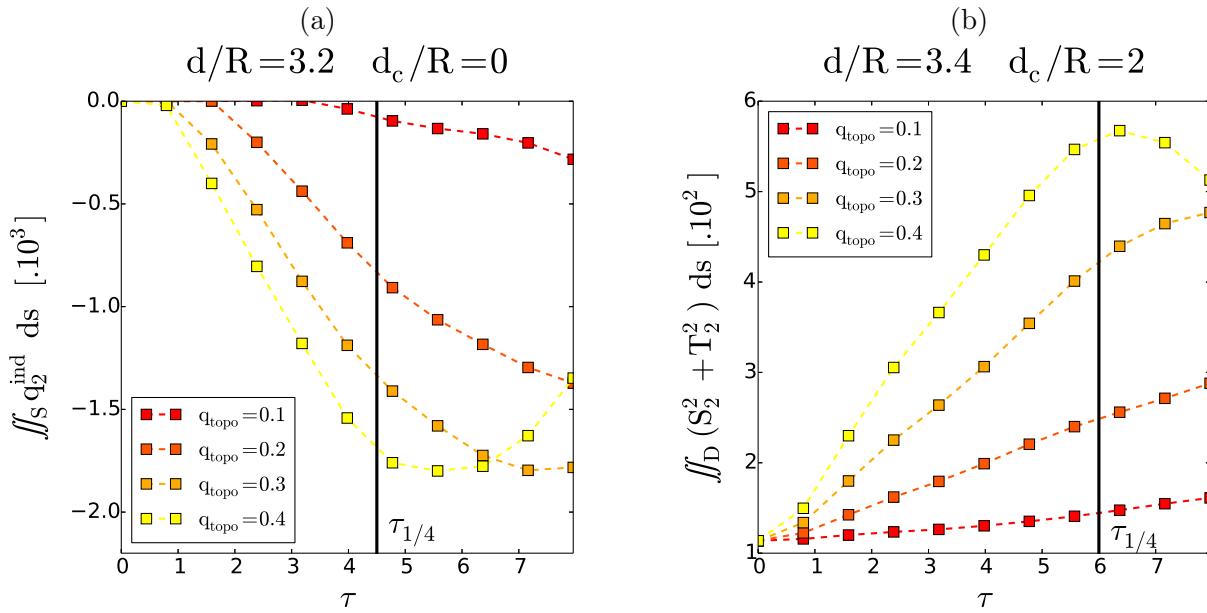


FIGURE 15 – Impact de l'intensité de  $q_{\text{topo}}$  sur : (a) la séparation des tourbillons,  $d/R = 3.2$ ,  $d_c/R = 0$  et  $\gamma R = 1$ , tracé de l'intensité du tourbillon topographique : intégrale de  $q_2^{\text{ind}}$ ; (b) la fusion asymétrique des tourbillons  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 2$  et  $\gamma R = 1$ , tracé de l'intégrale de  $(S_2^2 + T_2^2)$  sur tout le domaine :  $(x, y) \in [-2\pi, 2\pi]^2$ . Le temps que met le système pour faire un quart de co-rotation est indiqué par  $\tau_{1/4}$

### 3.2.2 Cas des anticyclones

Le même type d'étude a été réalisé concernant des anticyclones. La figure 16 présente les différents régimes obtenus dans l'espace des paramètres.

Comme précédemment la distance de fusion est diminuée lorsque les tourbillons sont proches du talus et augmentée lorsqu'ils sont plus éloignés. La paire de tourbillons a un comportement proche de celui sur fond plat pour  $d_c/R$  grand. La distance d'action de la topographie va cependant être augmentée par rapport au cas des cyclones (l'effet de séparation est efficace jusqu'à  $d_c/R = 2$  et la fusion forcée jusqu'à  $d_c/R = 4$ ). La distance critique entre les tourbillons menant à la fusion va être augmentée jusqu'à plus de deux fois la valeur sur fond plat.<sup>7</sup> Une autre différence notable avec les cyclones est la direction de dérive des tourbillons lorsque ceux-ci ne fusionnent pas. En effet, par couplage dipolaire avec le cyclone topographique, les anticyclones ne vont pas monter sur le talus, mais dériver au large (i.e vers le Sud). Pour le cas des anticyclones, seul ce régime sera présenté, car il permet de discuter des effets dipolaires dans les fluides.

**Dérive des tourbillons au large, effet dipolaire** La figure 17 présente l'évolution temporelle d'une simulation où les tourbillons sont advectés par l'onde topographique, et entraînés au large du talus. Aux premiers instants les masses d'eaux du talus sont entraînées sur la plaine abyssale et gagne de la vorticité positive (voir partie 2.2).

Lorsque le tourbillon topographique va être formé (à  $\tau \sim 4.8$ ) le champ de vitesse créé par les tourbillons dans la couche 1 (de direction opposée à la direction de propagation des ondes topographiques) va advecter le cyclone topographique vers le Sud et il va alors se détacher du talus.

Par effet de couplage entre les deux couches, un anticyclone de faible intensité est créé par l'anticyclone de surface. Ce tourbillon et le cyclone topographique se trouvent alors côté à côté dans la couche 2. La présence de deux pôles de vorticités opposées produit un *effet dipolaire*. Cet effet est mis en évidence sur la figure 18. Sur cette figure la fonction de courant dans la couche 2 est tracée ainsi que le champ de vitesse dans la couche 2. Le dipôle est clairement visible, et on peut voir au centre de celui-ci la vitesse dirigée vers le Sud. En superposant le contour du tourbillon dans la couche 1 on s'aperçoit que celui-ci se dirige vers le Sud, suivant le champ de vitesse de la

7. voir distance critique sur figure 10

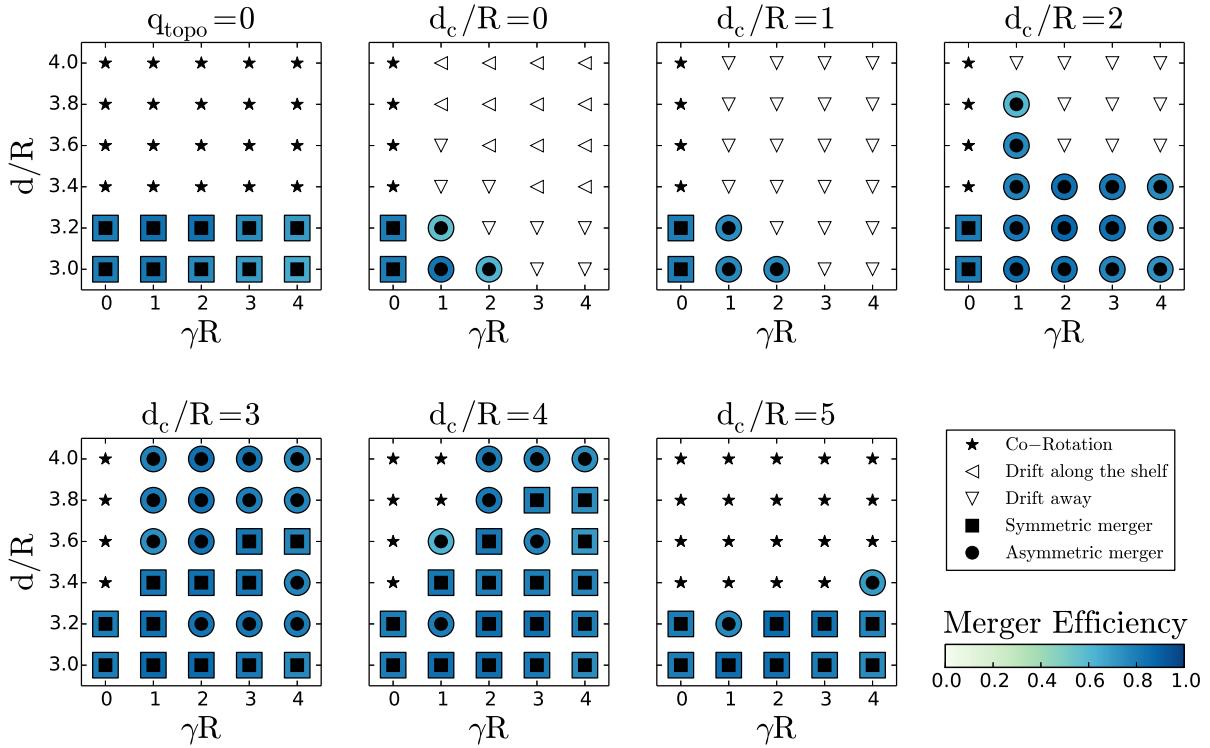


FIGURE 16 – Diagramme des régimes pour l’interaction de deux anticyclones de surface, pour  $d_c/R$  fixé (voir au dessus de chaque diagramme) dans le plan  $(\gamma R, d/R)$ , pour  $q_{topo} = 0.3$ . Le diagramme de gauche reprend les résultats sans topographie de la figure 9. Les étoiles noires indiquent une co-rotation, les carrés noirs une fusion symétrique, les cercles noirs une fusion asymétrique, et les triangles une dérive des tourbillons (loin du talus ou le long du talus). Les nuances de bleu indiquent l’efficacité de fusion (pour les cas où il y a eu fusion).

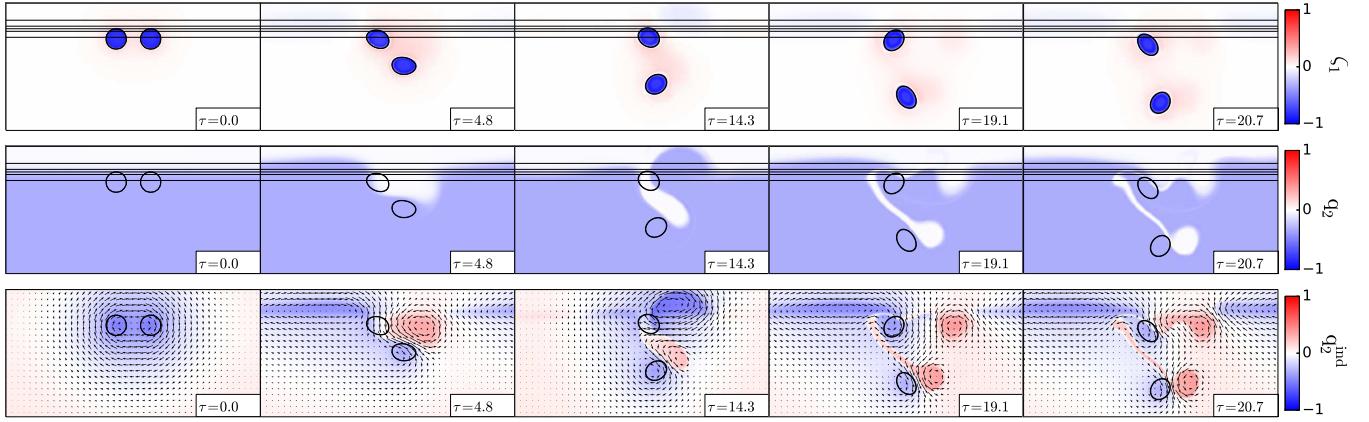


FIGURE 17 – Dérive des tourbillons anticycloniques loin du talus :  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 1$  et  $\gamma R = 1$ . De haut en bas  $\zeta_1$ ,  $q_2$  et  $q_2^{ind}$ .

couche 2. Le tourbillon est advecté par ce champ de vitesse et se déplace avec le dipôle vers le Sud. Il y a donc bien un couplage entre le dipôle de la couche 2 et le tourbillon dans la couche 1, créant une dérive du tourbillon de surface au large du talus.

Pour le cas des anticyclones, l’impact de la hauteur du talus et d’autres régimes ont également été étudiés, mais ils ne seront pas détaillés ici. Le diagramme des régimes pour différentes valeurs de  $q_{topo}$  et l’évolution temporelle

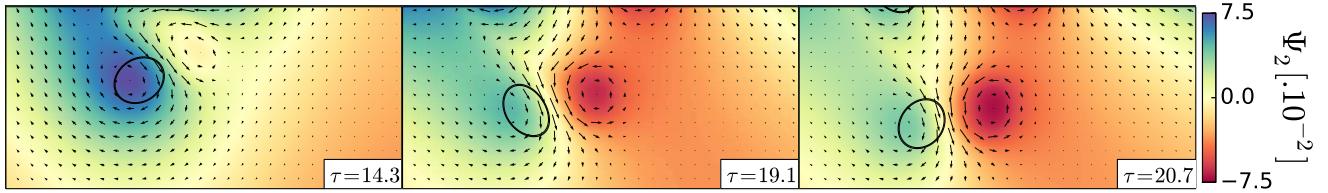


FIGURE 18 – Effet dipolaire, zoom sur une partie du domaine :  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 1$ ,  $\gamma R = 1$  et  $q_{\text{topo}} = 0.3$ . Fonction de courant dans la couche 2 ( $\Psi_2$ ), sur laquelle est superposé le champ de vitesse dans la couche 2 (contrairement à la vorticité, une fonction de courant négative indique un cyclone). Le contour noir indique le tourbillon de surface dans la couche 1 qui est advecté par le champ de vitesse créé par le dipôle.

d'autres simulations sont cependant présentées dans l'annexe F.

### 3.2.3 Advection de particules

En océanographie la compréhension du transport des masses d'eau est primordiale, car il peut avoir des enjeux climatiques (à grande échelle), biologique, chimique... Afin d'étudier plus en détails les transferts de fluide à travers le talus dans notre cas, l'advection de particules dans le champ de vitesse a été implémentée.

L'intégration du mouvement s'effectue via un schéma d'Euler implémenté directement dans la simulation. Les pas de temps et d'espace sont donc identiques à ceux utilisés dans les simulations présentées précédemment. Le champ de vitesse utilisé est calculé spectralement à partir de la fonction de courant à chaque pas de temps. Dix mille particules ont été initialement placées dans la moitié supérieure du domaine pour chacune des deux couches. A  $\tau = 0$ , chaque particule est indexée en fonction de sa position initiale : sur le talus, au dessus de la plaine abyssale, dans le tourbillon Ouest ou dans le tourbillon Est. Sur la figure 19, l'évolution temporelle du mouvement des particules est présentée pour le cas d'anticyclones fusionnant partiellement. Sur les figures les couleurs des particules indiquent leur position initiale.

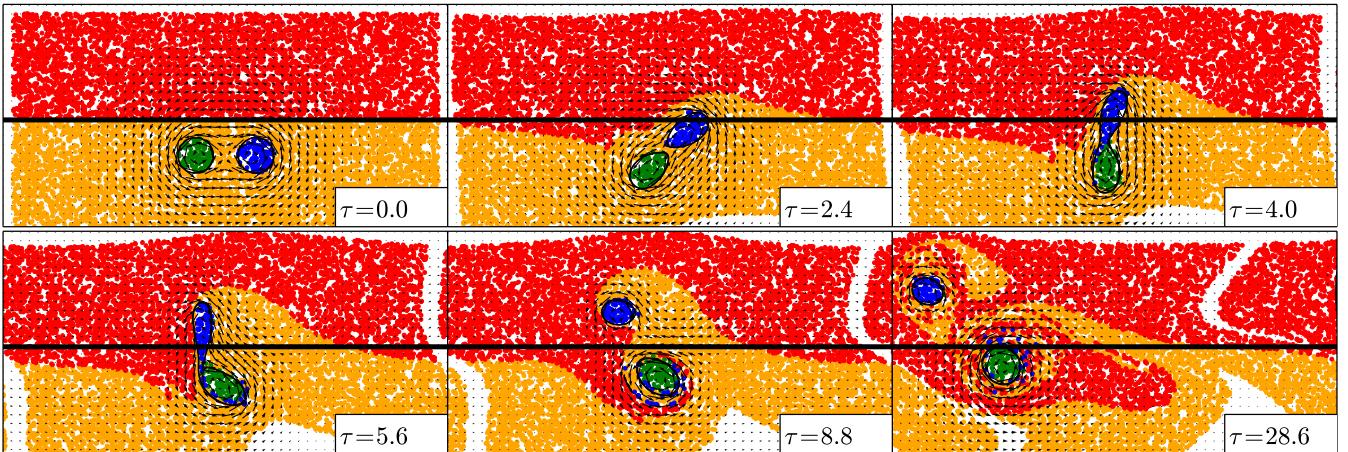


FIGURE 19 – Transport de particules dans la couche 1. La couleur des particules indique leur position initiale, rouge : sur le talus, orange : dans la plaine, vert : dans le tourbillon Ouest, bleu : dans le tourbillon Est. Paramètres : cyclones,  $q_{\text{topo}} = 0.3$ ,  $d_c/R = 2$ ,  $d/R = 3.4$  et  $\gamma R = 1$ .

On peut voir que les particules initialement dans les tourbillons restent piégées à l'intérieur tant que ceux-ci ne sont pas déformés. Au cours de la fusion partielle quelques particules du tourbillon Est sont transférées à son compagnon, d'autres sont éjectées, mais une grande partie reste piégée dans le petit tourbillon qui monte sur le talus. Ce tourbillon entraîne donc avec lui les particules piégées en son cœur, créant un transfert de particules du large vers le talus. Un transfert important de particules à travers le talus s'opère également quand celles-ci se font advecter par les ondes topographiques.

Afin de quantifier ce transfert, le nombre de particules montant (ou descendant) du talus a été mesuré au cours du temps (pas de temps de mesure  $d\tau = 0.8$ ). Les résultats sont présentés sur la figure 20. Au premiers instants le flux est assez variable, puis il se stabilise. A temps long, ce flux résultant est celui créé par le champ de vitesse du tourbillon fusionné qui reste positionné le long de la topographie. Le bilan à travers le talus est donc nul.

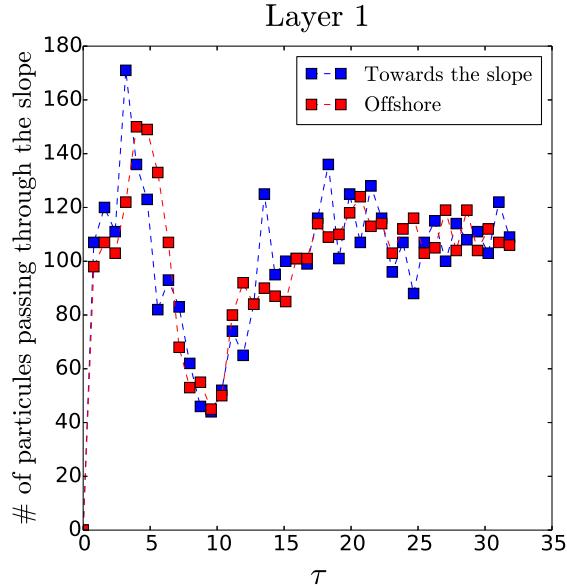


FIGURE 20 – Nombre de particules traversant le talus entre chaque pas de temps dans la couche supérieure, tourbillons cycloniques,  $q_{topo} = 0.3$ ,  $d_c/R = 2$ ,  $d/R = 3.4$  et  $\gamma R = 1$ .

Finalement, les particules qui seront transférées "définitivement" sur le talus sont celles présentes au cœur du tourbillon qui monte vers le Nord. Cette étude justifie donc l'étude du comportement des tourbillons. En effet lorsque ceux-ci se déplacent, ils vont permettre le transfert de masses d'eaux et donc de température, salinité, nutriments... entre différents milieux, par exemple dans notre contexte entre le large et les eaux côtières.

## 4 Conclusion et perspectives

Au cours de ce stage, par l'utilisation d'un modèle quasi-géostrophique à deux couches, nous avons pu étudier de manière approfondie l'interaction de deux tourbillons à proximité d'un talus continental.

Après une première partie consistant à étudier les différents aspects théoriques, le stage a tout d'abord permis de retrouver des résultats connus concernant la fusion de deux tourbillons sur fond plat, en particulier la distance initiale entre les tourbillons menant à la fusion.

La deuxième et majeure partie du stage a consisté à étudier les nouveaux régimes apparaissant lorsqu'un talus est ajouté. Les diagrammes des régimes non linéaires ainsi que les nouvelles distances critiques pour la fusion ont entre autres pu être déterminés.

Pour aller plus loin dans l'étude de ce problème, plusieurs voies sont envisageables.

La première consisterait à continuer de faire varier les différents paramètres, notamment la hauteur du talus ou la stratification. Mais également à étudier l'influence d'autres paramètres : la hauteur de couches, l'orientation des tourbillons par rapport au talus, l'inclinaison de la pente...

L'autre voie serait d'étudier le même problème, deux tourbillons de même signe proches d'un talus, avec un autre modèle. Par exemple dans un premier temps un modèle quasi-géostrophique trois couches, ou à stratification continue. La position et la déformation verticale des tourbillons pourraient alors être de nouveaux paramètres pertinents.

## Références

- [1] X. Carton. Hydrodynamical modeling of oceanic vortices. *Surveys in Geophysics*, 22 :179–263, 2001.
- [2] Benoit Cushman-Roisin and Jean-Marie Beckers. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Academic Press, 2009.
- [3] D.G. Dritschel. The stability and energetics of corotating uniform vortices. *J. Fluid. Mech.*, 157 :95–134, 1985.
- [4] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2012.
- [5] E.A Overman II and N.J. Zabusky. Evolution and merger of isolated vortex structures. *Phys. Fluids*, 25 :1297–1305, 1982.
- [6] N.R. McDonalds. The motion of an intense vortex near topography. *J. Fluid. Mech.*, 367 :359–377, 1998.
- [7] L.M. Polvani, N.J. Zabusky, and G.R. Flierl. Two-layer geostrophic vortex dynamics. *J. Fluid. Mech.*, 205 :215–242, 1989.
- [8] P.G. Saffman and R. Szeto. Equilibrium shapes of a pair of equal uniform vortices. *Phys. Fluids*, 23 :2339–2342, 1980.
- [9] M.E. Stern and G.R. Flierl. On the interaction of a vortex with a shear flow. *J. Geophysical Research*, 92 :10,733–10,744, 1987.
- [10] Achim Wirth. *A guided tour through Physical Oceanography*. 2015.

## A Simplification des équations de Navier-Stokes

Dans cette annexe, l'obtention des équations *Shallow water* à partir des équation de Navier-Stokes est présentée. Pour plus de clarté, le calcul est effectué ici pour un fluide homogène (i.e une seule couche). Les notations sont les mêmes que dans la partie 1.1.

On part des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible et tournant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u - fv = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p' + \nu \Delta u \\ \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v + fu = -\frac{1}{\rho_0} \partial_y p' + \nu \Delta v \\ \partial_t w + u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w = -\frac{1}{\rho_0} \partial_z p' + \nu \Delta w - \frac{\rho'}{\rho_0} g \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array} \quad (21)$$

où  $p'$  et  $\rho'$  sont les anomalies dynamiques de pression et de densité. La masse volumique est considérée comme variable simplement dans le terme de flottabilité (approximation de Boussinesq). Pour l'océan,  $\varepsilon = H/L \ll 1$ , donc d'après (21)(d), si  $W$  est l'échelle des vitesses verticales, on a  $W \sim \varepsilon U \ll 1$ . De plus, on peut montrer que dans des couches homogènes,  $\partial_z u = \partial_z v = 0$  (Théorème de Proudman-Taylor-Poincaré). Ainsi les termes  $w \partial_z u$  et  $w \partial_z v$  sont nuls. Les termes visqueux sont négligés ( $R_e \gg 1$ ). Le système devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - fv = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p' \\ \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + fu = -\frac{1}{\rho_0} \partial_y p' \\ 0 = -\frac{1}{\rho_0} \partial_z p' - \frac{\rho}{\rho_0} g \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array} \quad (22)$$

Ainsi d'après (22)(d) et le théorème de TPP,  $\partial_{zz} w = 0$ . De part l'impénétrabilité du fond marin ( $w(z=0) = 0$ ), cela permet d'obtenir que la vitesse verticale du fluide évolue linéairement, avec  $w = (\partial_z w)(z - z_0)$ . Pour obtenir une équation équivalente à l'incompressibilité, en terme de hauteur de couche, on utilise le fait que le mouvement d'une particule fluide sur la surface est décrit par

$$\frac{d}{dt} \eta = \partial_t \eta + u \partial_x \eta + v \partial_y \eta = w(z = H + \eta) = (\partial_z w)(z = H + \eta)$$

Avec (22)(d) et sachant que  $h = \eta + H$ , on obtient l'équation (23)(c). De plus en utilisant l'approximation hydrostatique (i.e  $p' = \rho_0 g \eta$ ), on a que  $\partial_k p' = \rho g \partial_k \eta$  avec  $k = x, y$  (vrai pour une couche, pour deux couches les termes de pression s'écrivent comme le système 2).

Au final on obtient le système d'équations *Shallow Water* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - f.v = -g \partial_x \eta \\ \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + f.u = -g \partial_y \eta \\ \partial_t h + u \partial_x h + v \partial_y h + h.(\partial_x u + \partial_y v) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \quad (23)$$

## B Ondes de Rossby topographiques libres

Le développement analytique est effectué ici pour un fluide non stratifié (une seule couche).

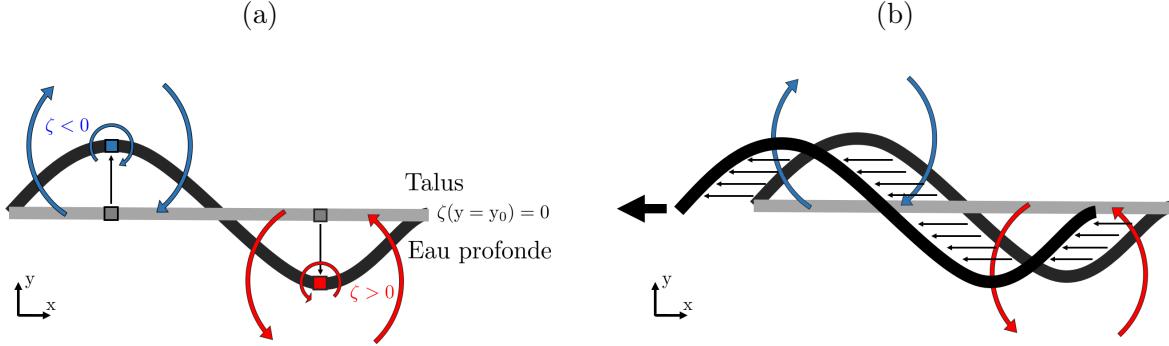


FIGURE 21 – Schéma des ondes de Rossby topographiques libres. (a) Une bande de particules fluides est perturbée sinusoïdalement, il y a alors création de pôles de vorticité induisant un mouvement du fluide. (b) Ce mouvement crée un déplacement global de la bande de particules fluides vers l'ouest.

La présence d'une marche topographique dans l'océan peut provoquer la propagation d'une onde appelée *onde de Rossby topographique*. Qualitativement, le phénomène peut être expliqué avec les schéma 21 et la conservation de la vorticité potentielle (3).

Une bande de particules fluides initialement au repos et de vorticité relative nulle  $\zeta(y = y_0) = 0$  placée sur le talus (sur le front de vorticité potentielle), est perturbée sinusoïdalement. Les particules fluides qui montent sur le talus vont subir une diminution de la hauteur de colonne d'eau  $h = H - h_B$ , or pour qu'il y ait conservation de la vorticité potentielle  $\zeta$ , le fluide doit voir sa vorticité relative  $\zeta$  diminuer également. Le raisonnement est similaire à celui que l'on utilise pour la conservation du moment angulaire : la colonne d'eau aplatie s'étale et à l'instar du patineur artistique qui tend les bras pour ralentir sa rotation, le fluide voit sa vorticité diminuer. Pour les particules qui descendent du talus, le raisonnement est inverse, et le fluide gagne de la vorticité positive.

Cette vorticité met alors le fluide en mouvement, et crée un déplacement global de la bande de particules fluides vers l'ouest (i.e vers les  $x < 0$ ), c'est l'onde de Rossby topographique qui se propage.

Analytiquement, la conservation de la vorticité potentielle (3) peut être écrite sur un *plan f* (i.e  $\beta = 0$ ) comme :

$$\frac{d}{dt} \left( \zeta + \frac{f_0}{H} h_B + \frac{\zeta}{H} h_B \right) = 0 \quad (24)$$

Le courant  $v'$  dans le fluide étant celui qui perturbe le front de particules fluides, en linéarisant 24 on obtient l'équation de propagation des ondes de Rossby topographique :

$$\partial_t \zeta' + \frac{f_0}{H} v' \partial_y h_B = 0 \quad (25)$$

en prenant  $\partial_y h_B = \text{cste}$ . Si la fonction de courant est de la forme

$$\Psi' = \Psi_0 e^{i(kx + ly - \omega t)}$$

sachant que  $\zeta' = \Delta\Psi'$ , on obtient une vitesse de phase  $c_x = \omega/k$  qui dépend explicitement de la forme de la bathymétrie :

$$c_x = -\frac{f_0}{H(k^2 + l^2)} \partial_y h_B \quad (26)$$

Ainsi dans les cas de la figure 21(a) ou 5(a),  $\partial_y h_B$  est positif, et les ondes se propagent alors vers les  $x < 0$ .

## C Ondes de Rossby forcées

Cette partie présente le calcul analytique permettant de calculer la vitesse de déplacement d'un point vortex lorsque celui-ci a provoqué une onde de Rossby topographique forcée. Ce calcul est effectué dans le cadre du modèle quasi-géostrophique deux couches, et est inspiré de [9]. La situation étudiée est celle de la figure 5(b) en approximation champ lointain et en découplant les couches. Seule la composante barotrope de la vorticité potentielle est alors considérée.

La position du front de vorticité est notée  $y_v(x, t)$ ,  $c$  est la vitesse du point vortex selon  $x$  et  $d_c(t)$  sa position selon  $y$ . Initialement, le point vortex est placé en  $x = 0$ . L'équation gouvernant la vorticité potentielle (de la forme (10)(a)) est :

$$\Delta\Psi = q + \overbrace{\mathcal{H}(y_v(x, t) - y)}^{\text{front de vorticité}} + \overbrace{\delta(x)\delta(y - d_c(t))}^{\text{point vortex}} \quad (27)$$

où  $\mathcal{H}(\xi) = 1$  si  $\xi > 0$ , 0 sinon. Cette équation peut être décomposée en trois termes décrivant respectivement le flot non perturbé  $\bar{\Psi}$ , la contribution du point vortex  $\Psi_{pv}$  et l'anomalie créée par le déplacement du front de vorticité  $\tilde{\Psi}$  :

$$\begin{cases} \Delta\bar{\Psi} = q + \mathcal{H}(-y) & (a) \\ \Delta\Psi_{pv} = \delta(x)\delta(y - d_c(t)) & (b) \\ \Delta\tilde{\Psi} = \mathcal{H}(y_v(x, t) - y) - \mathcal{H}(-y) & (c) \end{cases} \quad (28)$$

En champ lointain,  $y_v \ll y$ , et on peut écrire (28)(c) sous la forme :

$$\Delta\tilde{\Psi} = y_v(x, t)\delta(y) \quad (29)$$

En utilisant les fonctions de Green, la vitesse du fluide induite par la perturbation peut être exprimée comme :

$$\begin{cases} \tilde{u}(0, y = y_v) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{d_c y_v(\xi)}{(\xi^2 + d_c^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(\xi^2 + d_c^2)^{\frac{1}{2}}} & (a) \\ \tilde{v}(x, y = 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\partial y_v}{\partial \xi} \ln(x - \xi) & (b) \end{cases} \quad (30)$$

D'autre part, l'équation gouvernant le déplacement du front de vorticité  $y_v(x, t)$  est :

$$\frac{d}{dt} y_v(x, t) = v(x, y_v, t) = \partial_x \Psi(x, y_v, t) \quad (31)$$

En utilisant la même décomposition des vitesses que pour (28), (31) devient alors :

$$\left( \partial_t + (\bar{u}(y_v) - c)\partial_x + \tilde{u}(x, y_v, t)\partial_x + u_{pv}(x, y_v, t)\partial_x \right) y_v = \bar{v}(x, y_v, t) + \tilde{v}(x, y_v, t) + v_{pv}(x, y_v, t) \quad (32)$$

Toujours en champ lointain, en linéarisant, en négligeant  $\tilde{u}$  et  $u_{pv}$ , et en supposant qu'il n'y a pas de flot autre que celui provoqué par le point vortex (i.e.  $\bar{u} = 0$ ), dans le cas stationnaire (32) devient simplement :

$$\tilde{v}(x, y_v, t) = -v_{pv}(x, y_v, t) \quad (33)$$

En égalisant la solution de (28)(b) (donnée dans la partie 1.4, équation (14)), et l'équation (30)(b), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{y_v(\xi)}{x - \xi} = \frac{x}{x + d_c^2} \quad (34)$$

ce qui donne après résolution la forme du front de vorticité :

$$y_v(x, d_c) \propto \frac{d_c}{x^2 + d_c^2} \quad (35)$$

Sachant que la vitesse du tourbillon  $c$  est donné par

$$c = \bar{u}(d_c) + \tilde{u}(0, d_c, t) \quad (36)$$

en utilisant (30)(a), on obtient finalement que

$$c = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{d_c^2}{(\xi^2 + d_c^2)^2} \propto -\frac{1}{d_c} \quad (37)$$

Ce calcul recourant à de nombreuses approximations permet de déterminer que le point vortex se déplace vers les  $x < 0$ . On comprend également pourquoi l'étude analytique du problème posé s'arrête assez rapidement. En effet la résolution des intégrales est très rapidement impossible et le calcul numérique est alors nécessaire.

## D Bilan

Le mouvement du fluide dans la couche 2, et la vorticité potentielle jouant un rôle important dans le couplage entre la topographie et les tourbillons, une analyse plus approfondie a été menée sur l'évolution de  $q_2$ . Pour étudier ses variations, l'équation (16)(b) peut être décomposée de la manière suivante :

$$\partial_t q_2^{\text{ind}} = -J(\Psi_2, q_2^{\text{ind}}) - F_2 \partial_t \Psi_1 - J(\Psi_2, F_2 \Psi_1) - J(\Psi_2, q_{\text{topo}}) \quad (38)$$

Cette équation indique que la vorticité potentielle induite de la couche 2 (qui est liée directement au mouvement du fluide) varie selon : son advection dans la couche 2, les variations de la couche 1, l'advection barocline du flot barotrope (le troisième terme peut être réécrit en fonction de  $\Psi_{bt}$  et  $\Psi_{bc}$ ) et selon les interactions entre le mouvement dans la couche 2 et la topographie.

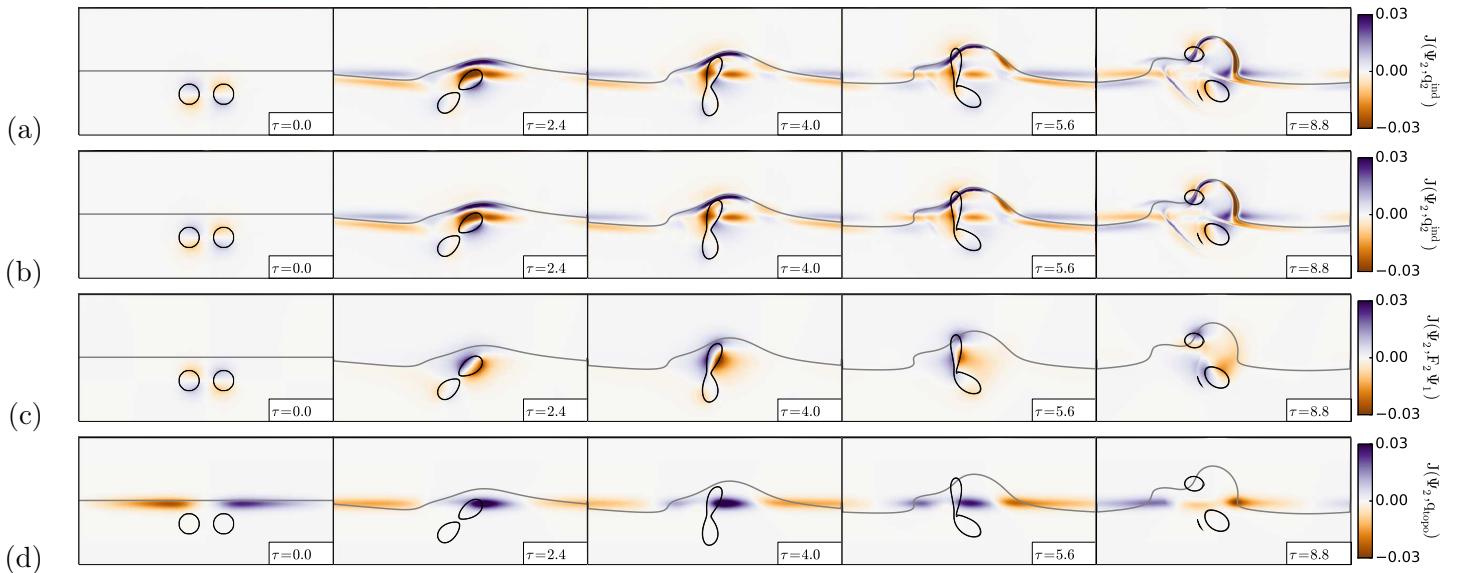


FIGURE 22 – Fusion asymétrique des cyclones :  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 2$ ,  $\gamma R = 1$  et  $q_{\text{topo}} = 0.3$ . Analyse des termes contribuant à l'évolution de la vorticité potentielle induite dans la couche 2,  $q_2^{\text{ind}}$ . De haut en bas sont présentés les différents termes de l'équation 38. Le front de vorticité potentielle dans la couche 2 est indiqué en gris.

En regardant 22(a), on peut voir que l'advection de la vorticité potentielle induite est orientée vers le Nord. Cela est indiqué par le dipôle présent au centre (très visible à  $\tau = 2.4$ ). Le second terme relate tout d'abord la rotation des tourbillons de la couche supérieure. A temps plus long un dipôle se forme, indiquant la tendance du tourbillon de surface à monter vers le Nord. Le troisième terme (deux fois moins intense que le précédent) indique les zones où le cisaillement est intense, et où le cyclone Est a tendance à se déformer. Enfin, le dernier terme représente les ondes topographiques, localisées le long de la topographie.

En résumé, les quatre termes contribuent au mouvement de la couche supérieure : déformation et échange de vorticité due au cisaillement, et dérive vers le Nord.

## E Observation des ondes de Rossby topographiques

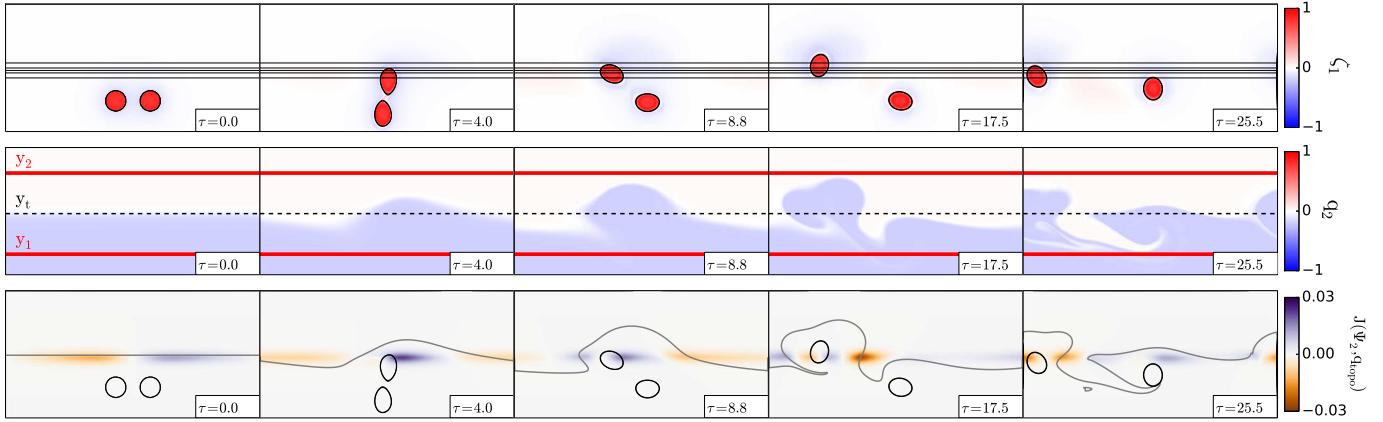


FIGURE 23 – Dérive des tourbillons le long du talus :  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 3$ ,  $\gamma R = 1$  et  $q_{\text{topo}} = 0.2$ . De haut en bas,  $\zeta_1$ ,  $q_2$  où est indiqué la zone prise en compte pour effectuer la décomposition en modes, et enfin  $J(\Psi_2, q_{\text{topo}})$  sur lequel est superposé en gris le front de vorticité potentielle dans la couche 2.

La figure 23 présente l'évolution temporelle d'une simulation où les tourbillons dérivent le long du talus vers l'Ouest. En effet le tourbillon initial à l'Est, en tournant autour de son partenaire, se retrouve sur la pente, et se fait advecter par l'onde topographique. À  $\tau = 4.0$ , les lobes de l'onde sont clairement visibles autour de la position du talus ( $y = y_t$ ). Afin de quantifier l'apparition de cette onde, une décomposition en modes a été menée sur la zone délimitée par les traits rouges sur la figure 23, soit pour  $y_1 < y < y_2$ . Pour un mode  $k$  donné, on calcul :

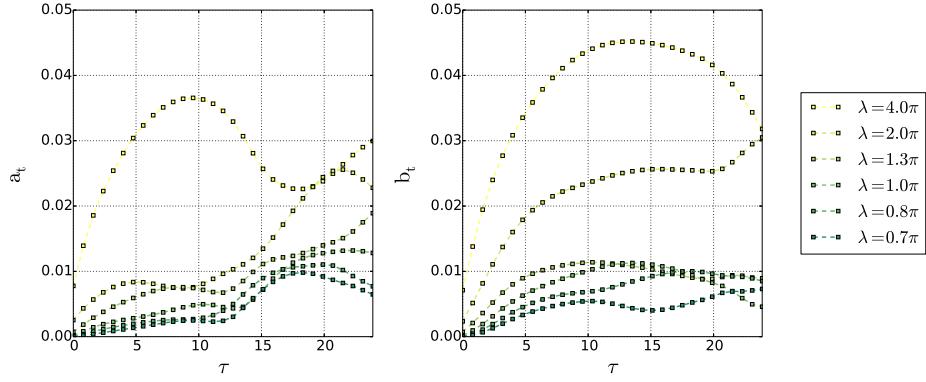
$$\begin{cases} a_t(k) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{y_1}^{y_t} \left( a_k^2(y) + b_k^2(y) \right) \right]^{1/2} \\ b_t(k) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{y_t}^{y_2} \left( c_k^2(y) + d_k^2(y) \right) \right]^{1/2} \end{cases} \quad (39)$$

où on définit  $a_k$  et  $b_k$  pour  $y_1 < y < y_t$

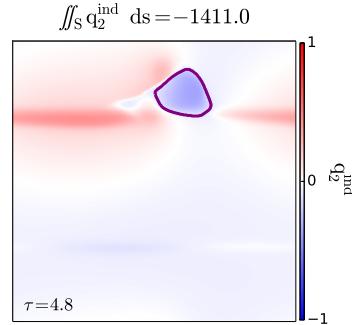
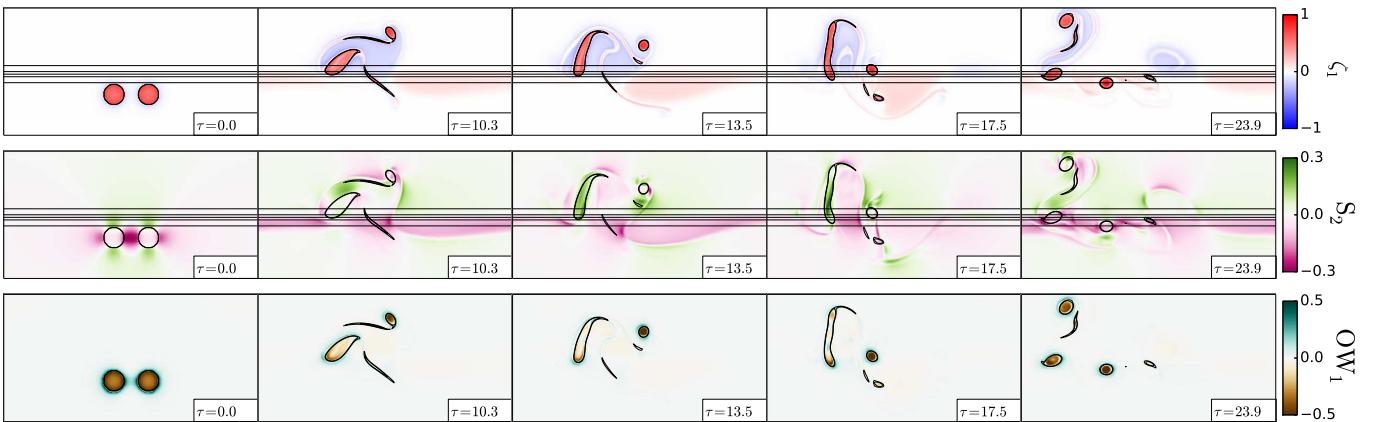
$$\begin{cases} a_k(k, y) = \frac{2}{L} \int_0^L dx q_2(x, y) \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) \\ b_k(k, y) = \frac{2}{L} \int_0^L dx q_2(x, y) \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) \end{cases} \quad (40)$$

ainsi que  $c_k$  et  $d_k$  avec la même définition pour  $y_t < y < y_2$ . La décomposition a été effectuée pour 6 modes, dont le premier correspond à une longueur d'onde  $\lambda = L = 4\pi$ , soit la taille du domaine.

Le résultat est présenté sur la figure 24. Le mode 1 croît en premier, c'est l'onde de Rossby que l'on voit à  $\tau = 4.0$ . Ensuite les modes suivants apparaissent, et le mode 1 diminue. Ce résultat est visible à l'instant  $\tau = 25.5$  par exemple, où on voit deux lobes au dessus de  $y_t$ , et le terme topographique du Jacobien divisé en plusieurs parties.

FIGURE 24 – Décomposition en modes de  $q_2$  entre  $y_1$  et  $y_2$ .

## F Données supplémentaires

FIGURE 25 – Exemple de contour détecté pour calculer l'intégrale de la vorticité potentielle induite du tourbillon topographique. Il s'agit de la zone du domaine où  $q_2^{\text{ind}} < 0.1$ . Cas où  $d_c/R = 0$ ,  $d/R = 3.2$ ,  $q_{\text{topo}} = 0.3$ ,  $\gamma R = 1$ .FIGURE 26 – Fusion asymétrique puis division des tourbillons cycloniques :  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 2$  et  $\gamma R = 3$ . De haut en bas,  $\zeta_1$ ,  $S_2$ , et le critère d'Okubo-Weiss dans la couche 1  $OW_1 = T_1^2 + S_1^2 - \zeta_1^2$ . Lors de l'étirement,  $OW_1 \sim 0$ , il y a une compétition importante entre l'étirement/cisaillement et la vorticité. Lorsque  $OW_1$  redevient négatif, des tourbillons se sont formés, car la vorticité domine dans des régions définies.

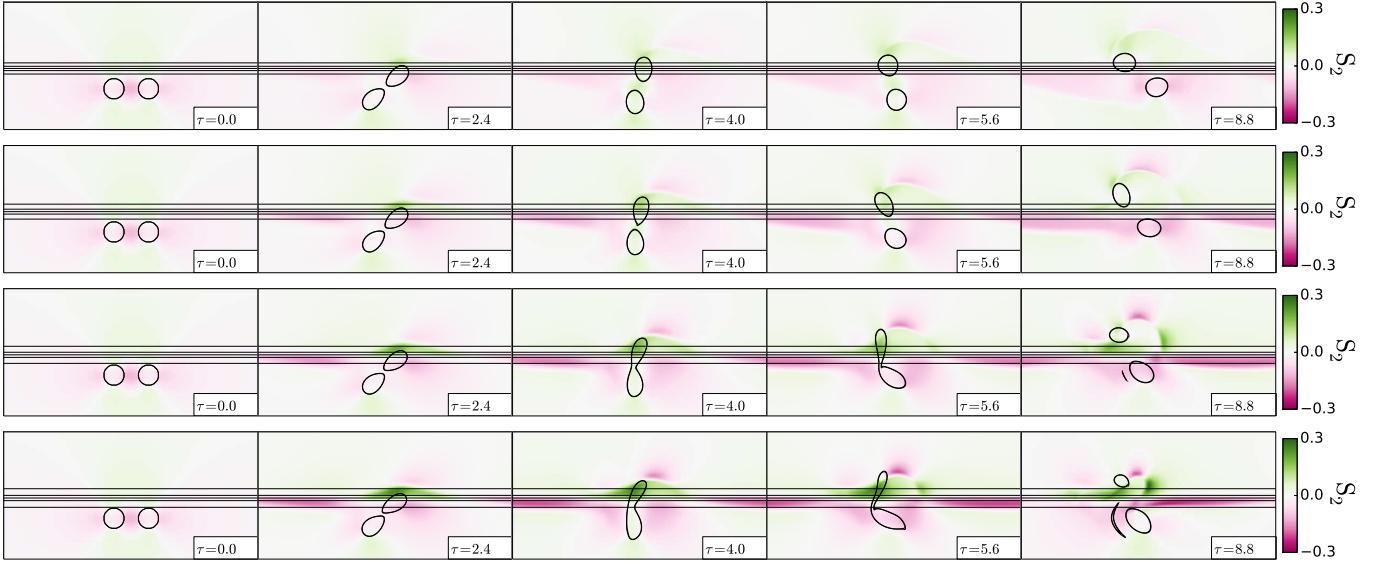


FIGURE 27 – Impact de l'intensité de  $q_{\text{topo}}$  sur la fusion asymétrique de tourbillons cycloniques :  $d/R = 3.4$ ,  $d_c/R = 2$  et  $\gamma R = 1$ . Cisaillement dans la couche 2 ( $S_2$ ) avec de haut en bas,  $q_{\text{topo}} = 0.1, 0.2, 0.3$  et  $0.4$ . Le cisaillement dans la couche 2 le long de la pente augmente avec  $q_{\text{topo}}$ .

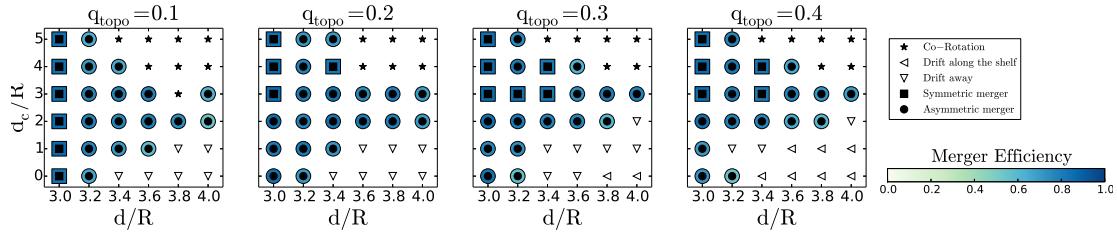


FIGURE 28 – Diagramme des régimes pour l'interaction de deux anticyclones de surface, pour  $q_{\text{topo}} = f_0 h_B / H_2$  fixé (voir au dessus de chaque diagramme) dans le plan  $(d/R, d_c/R)$ , pour  $\gamma R = 1$ .

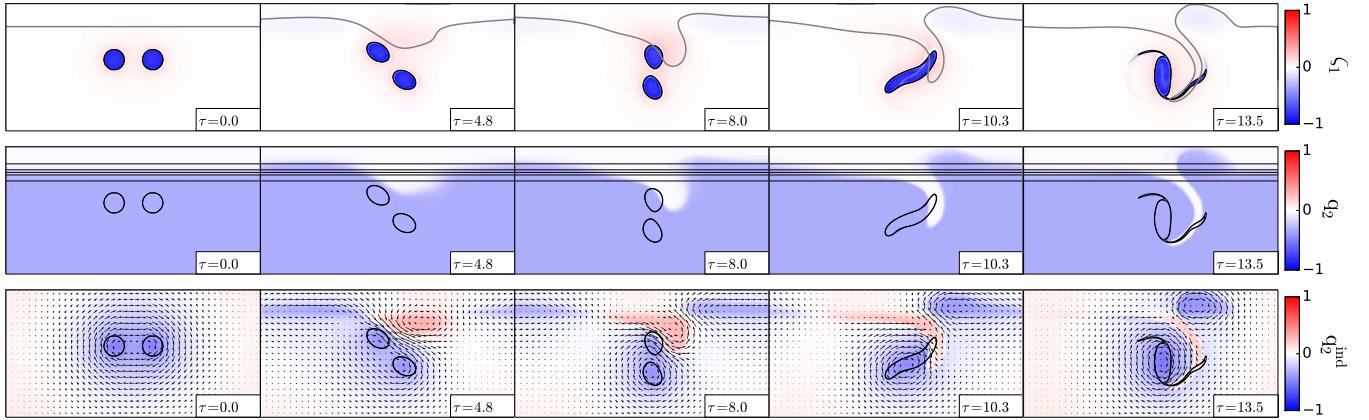


FIGURE 29 – Fusion des tourbillons anticycloniques causée par la présence de la topographie :  $d/R = 3.8$ ,  $d_c/R = 3$  et  $\gamma R = 1$ . De haut en bas  $\zeta_1$ ,  $q_2$  et  $q_2^{\text{ind}}$ .

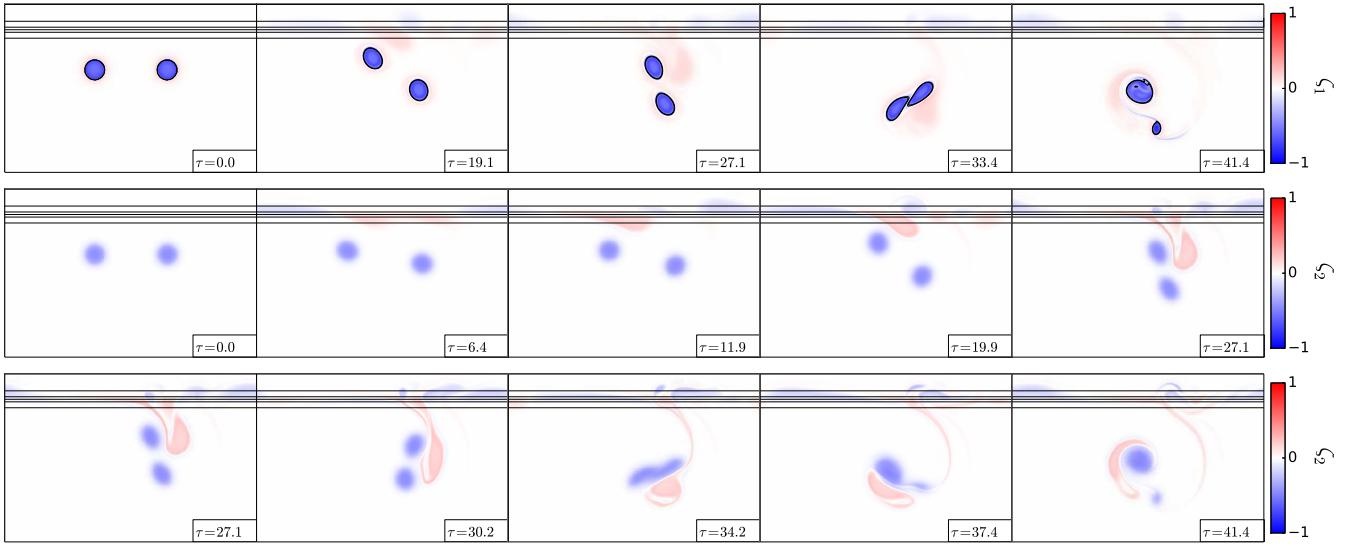


FIGURE 30 – Fusion des tourbillons anticycloniques à très grande distance :  $d/R = 7.2$ ,  $d_c/R = 4$  et  $\gamma R = 3$ . De haut en bas  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ . Au premiers instants l'onde de Rossby se forme, puis un cyclone topographique se détache du talus et par un effet dipolaire dans la couche 2 advecte le tourbillon Est dans la couche 1. Il s'en suit un rapprochement des tourbillons qui vont alors se trouver à une distance assez faible pour pouvoir fusionner.

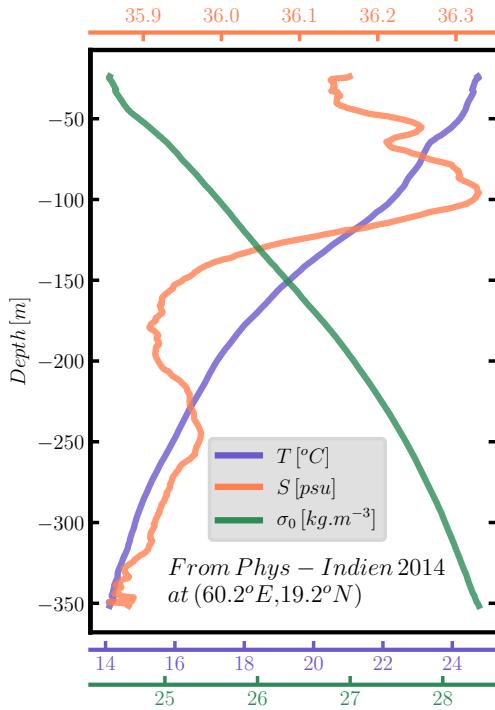


FIGURE 31 – Thermocline : zone de transition rapide entre les eaux de surfaces et les eaux profondes. Données de température (T), Salinité (S) et d'anomalie de densité potentielle  $\sigma_0 = \rho - 1000$ . Relevés effectués en mer d'Arabie avec un Seasoor par le SHOM (Service Hydrographique et Océanographique de la Marine) en 2014. La variation de température et de salinité étant rapide et localisée à une profondeur d'environ 200m, la zone considérée peut être considéré comme un fluide bicouche de masse volumiques différentes, dont la première couche est environ d'épaisseur 200m. (figure par M. Morvan)