

Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year



# Abstract



# Resumen



# Dedicación





# Agradecimientos



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>15</b>
2.1. Gráficas . . . . .	15
2.1.1. Gráfica geométrica . . . . .	17
2.1.2. Thrackles . . . . .	19
2.1.3. Tipo de Orden . . . . .	21
2.2. Anti-thickness y anti-thickness geométrico . . . . .	25
2.3. Número cromático . . . . .	27
<b>3. Estado del arte</b>	<b>29</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>41</b>
4.1. Cota inferior del anti-thickness geométrico de $K_n$ . . . . .	41
4.2. Descomposiciones inducidas por thrackles máximos . . . . .	48
4.3. Intersección de thrackles de $K_n$ con $3 \leq n \leq 9$ . . . . .	52
4.4. Algoritmos . . . . .	55
4.4.1. Algoritmo para encontrar thrackles con $k$ aristas . . . . .	56
4.4.2. Algoritmo para la intersección de dos thrackles . . . . .	58
4.4.3. Algoritmo para encontrar colecciones de thrackles máxi- mos que inducen descomposiciones en thrackles de $K_n$ . . . . .	62
4.4.4. Algoritmo para verificar la optimalidad de una colec- ción de thrackles máximos . . . . .	65
4.4.5. Algoritmo para generar particiones válidas de un entero . . . . .	65
4.4.6. Algoritmo para encontrar descomposiciones por thrac- kles de $K_n$ usando particiones de enteros . . . . .	66
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>67</b>

A. Etiquetas de thrackles máximos
-----------------------------------

69

# Capítulo 1

## Introducción

Este trabajo está ubicado en el área de la geometría combinatoria y en el área de geometría computacional.

Una gráfica es un conjunto de vértices junto con un conjunto de aristas que unen pares de vértices. Cuando la gráfica tiene todas las aristas posibles decimos que es una gráfica completa. Cuando representamos la gráfica en el plano, es decir, cuando sus vértices son puntos en  $\mathbf{R}^2$  y sus aristas son curvas que unen dos puntos, decimos que tenemos un dibujo de la gráfica. Cuando las aristas son todas segmentos de recta, decimos que la gráfica es geométrica. Cuando las aristas del dibujo de la gráfica se intersectan a pares la gráfica es un thrackle.

En el área de geometría combinatoria existe un problema en el cual se busca obtener una descomposición de una gráfica completa con tamaño mínimo y en el que cada uno de los elementos de la partición sea un thrackle. En este trabajo exploramos una solución a este problema para gráficas completas de hasta diez vértices utilizando herramientas de la geometría computacional. Este problema, que recibe el nombre de anti-thickness de una gráfica completa  $K_n$  y se denota como  $At_g(K_n)$  ha sido estudiado con anterioridad para gráficas geométricas cuyos vértices están en posición convexa (Fabila-Monroy et al. (2018a)). A esta variación del problema la denotamos como  $At_c(K_n)$ . Se sabe que

$$At_c(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Dichos resultados fueron encontrados usando técnicas combinatorias y geométricas. Para el caso en el que los puntos de la gráfica completa están en posición

general existen las siguientes cotas:

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

La cota superior proviene del caso en el que los puntos están en posición convexa mientras que la cota inferior proviene del hecho de que un thrackle máximo tiene a lo más  $n$  aristas. Sin embargo, esto significaría que cuando los puntos están en posición general los thrackles máximos son disjuntos en aristas. Esto no es verdad en posición convexa, lo cual da lugar para cuestionarnos si en realidad esta cota es justa para posición general.

En esta tesis encontramos que en efecto  $At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  para  $n \leq 10$ . Nosotros usamos la información que proveen los tipos de orden para conjuntos de hasta diez puntos para inducir una gráfica completa y obtener descomposiciones en thrackles usando algoritmos exhaustivos. Además buscamos información acerca del número de cruce de las descomposiciones para tratar de explicar las características de los conjuntos de puntos en posición general que alcanzan el anti-thickness geométrico de la posición convexa.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el siguiente capítulo se explican a detalle y de manera más formal las definiciones que usamos en este trabajo y que son necesarias para entender el desarrollo de la tesis, después hacemos un recuento de los resultados obtenidos acerca del anti-thickness geométrico y tratamos de explicar el origen del concepto tomando en cuenta un problema propuesto con anterioridad, luego, en la sección de resultados, explicaremos los resultados del trabajo y cómo fueron obtenidos. En esta sección exponemos los algoritmos usados para las búsquedas exhaustivas. Finalmente mencionaremos las conclusiones y posible trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Antecedentes

En este capítulo damos algunas definiciones necesarias para presentar lo que se conoce como descomposición de gráficas completas en thrackles. Este es el principal problema que se trata en esta tesis. Empezamos estableciendo conceptos relacionados con gráficas abstractas y después hablaremos de gráficas en el plano, posteriormente explicamos el concepto de tipo de orden y cómo se utiliza en este trabajo, continuamos hablando del anti-thickness abstracto y del anti-thickness geométrico y finalmente explicamos el número cromático de una gráfica.

### 2.1. Gráficas

El concepto base del trabajo, del cual se desprenden otras definiciones, es el de gráfica. Todas las definiciones que presentamos en esta sección fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *gráfica*  $G$  está compuesta por un conjunto no vacío  $V$  de objetos a los que llamamos *vértices* y por un conjunto  $E$ , de parejas de elementos de  $V$ , a los que llamamos *aristas*. Denotamos a la arista  $e$  compuesta por los vértices  $u$  y  $v$  como  $(u, v)$ . Para describir a la gráfica  $G$  compuesta por el conjunto  $V$  de vértices y el conjunto  $E$  de aristas escribimos  $G = (V, E)$ . Para referirnos al conjunto de vértices de  $G$  escribimos  $V(G)$  y para referirnos al conjunto de aristas de  $G$  escribimos  $E(G)$ . En la figura 2.1 presentamos un ejemplo de una gráfica.

Decimos que *dos vértices*  $u, v \in V(G)$  *son adyacentes* si existe la arista  $(u, v) \in E(G)$ . Decimos que *dos aristas*  $e_1, e_2 \in E(G)$  *son adyacentes* si inci-



Figura 2.1: Una gráfica con cinco vértices y cuatro aristas. Los vértices  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes y las aristas  $(v_1, v_3)$  y  $(v_1, v_4)$  son adyacentes.

den en el mismo vértice. La figura 2.1 ilustra un ejemplo de estos conceptos. Una gráfica es *completa* si cada pareja de vértices en la gráfica es adyacente. Mostramos un ejemplo de adyacencia de aristas en la figura 2.1 y un ejemplo de una gráfica completa en la figura 2.2. Para denotar una gráfica completa con  $n$  vértices escribimos  $K_n$ . Una gráfica  $G$  es *bipartita* si es posible dar una partición<sup>1</sup> de  $V(G)$  en dos subconjuntos  $U$  y  $W$  de tal manera que cada arista de  $G$  tenga un extremo en  $U$  y otro extremo en  $W$ . Presentamos un ejemplo de gráfica bipartita en la figura 2.3.

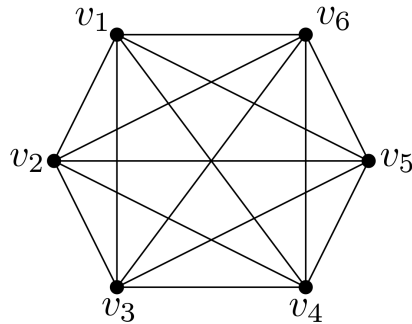


Figura 2.2: La gráfica completa con 6 vértices tiene una arista por cada par de vértices.

---

<sup>1</sup>Una partición  $P$  de un conjunto  $X$  es una colección de subconjuntos que cumplen lo siguiente:

- Ningún elemento de  $P$  es el conjunto vacío.
- La unión de todos los elementos de  $P$  es exactamente el conjunto  $X$ .
- La intersección de cualesquiera dos elementos de  $P$  es vacía.





Figura 2.3: Un ejemplo de una gráfica bipartita con bipartición  $U, W$ , ambos conjuntos son de tamaño tres.

Una *descomposición*  $\mathcal{D}$  de una gráfica  $G$  es una colección  $\mathcal{D} = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  de subgráficas de  $G$ , que cumple con dos condiciones:

1. Ninguna subgráfica  $G_i$  contiene vértices aislados.
2. Cada arista de  $G$  pertenece a exactamente una subgráfica  $G_i$  de  $\mathcal{D}$ .

En este trabajo decimos que una gráfica  $G$  cubre a una arista  $e$  si sucede que  $e \in E(G)$ .

Nótese que, en otras palabras, las subgráficas de la colección son disjuntas en aristas y su unión cubre a  $E(G)$ . La figura 2.4 ilustra un ejemplo de una descomposición de la gráfica  $K_4$ .

En este trabajo hacemos descomposiciones de dibujos de gráficas (abstractas) en gráficas geométricas que cumplen con cierta propiedad, que explicamos más adelante. En la siguiente sección exponemos el concepto de dibujo de una gráfica y de gráfica geométrica.

### 2.1.1. Gráfica geométrica

En esta sección abordamos uno de los conceptos clave de este trabajo, que son las gráficas geométricas. Empezamos explicando el concepto de un *dibujo* de una gráfica (abstracta), para continuar con la descripción de un dibujo de una gráfica, con características especiales, al que llamamos *gráfica geométrica*.

Los primeros dos párrafos de esta sección fueron tomados de Pach (2013a). El tercer párrafo fue extraído de Lara & Rubio-Montiel (2019). El cuarto párrafo fue tomado de Pach & Sterling (2011).



Figura 2.4: Un ejemplo de una descomposición  $\mathcal{D}$  de  $K_4$  en dos gráficas. Aquí  $\mathcal{D} = \{G_1, G_2\}$  donde  $G_1$  es la gráfica inducida por las aristas  $(v_1, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$  y  $G_2$  es la gráfica inducida por las aristas  $(v_1, v_3), (v_2, v_4)$ .

Un *dibujo*  $G = (V, E)$  de una gráfica  $G$  es una representación de la gráfica  $G$  en el plano tal que 1) cada vértice de  $G$  es representado por un punto en el plano y 2) cada arista de  $G$  es representada como una curva simple continua que conecta un par de puntos. El conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de aristas  $E$  de  $G$  son los puntos y las curvas, respectivamente. Sin pérdida de generalidad nos referimos al conjunto de puntos de  $G$  como  $V(G)$ , y les llamamos vértices, y nos referimos al conjunto de curvas de  $G$  como  $E(G)$ , y les llamamos aristas.

Cuando restringimos las curvas que representan a las aristas del dibujo de  $G$  a segmentos de recta, llamamos al dibujo de la gráfica *gráfica geométrica*. Una gráfica geométrica es completa si existe un segmento de recta entre cada par de vértices de  $V(G)$ . En la figura 2.5 mostramos un dibujo de  $K_5$  y una gráfica geométrica de  $K_5$ . Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano y sea  $G$  una gráfica geométrica de  $G$ . Decimos que  $G$  está definida sobre  $S$  si  $V(G) = S$ . Cualquier conjunto  $S$  de puntos en posición general induce una gráfica geométrica completa.

Todos los conceptos definidos para gráficas (abstractas) han sido heredados de manera natural para los dibujos de gráficas, sin embargo, como la gráfica geométrica está definida en el plano, es necesario redefinir el concepto de adyacencia de aristas. Decimos que dos aristas  $e_1, e_2 \in E(G)$  se *cruzan* si existe un punto  $p$ , en alguna de las aristas, tal que en  $p$  la arista  $e_1$  pasa de un lado de la arista  $e_2$  hacia el otro lado. Decimos que dos aristas  $e_1, e_2 \in E(G)$  son *adyacentes* si comparten un vértice. En este trabajo decimos que dos aris-



Figura 2.5: A la izquierda observamos un dibujo de  $K_5$  y a la derecha observamos una gráfica geométrica de  $K_5$ .

tas de una gráfica geométrica se *intersectan* si son adyacentes o si se cruzan. Mostramos un ejemplo de intersección de aristas en la figura 2.6.



Figura 2.6: En este ejemplo la arista  $(v_1, v_2)$  no se intersecta con la arista  $(v_3, v_4)$  (son disjuntas) pero sí se intersecta con la arista  $(v_2, v_5)$ . La arista  $(v_2, v_5)$  se cruza con la arista  $(v_3, v_4)$  y por lo tanto se intersectan.

El concepto que estudiamos en esta tesis está relacionado con gráficas geométricas donde cada par de aristas se intersectan una vez, estas gráficas geométricas reciben el nombre de *thrackles*. En la siguiente sección explicamos formalmente qué son los thrackles.

### 2.1.2. Thrackles

Sea  $G$  un dibujo de una gráfica  $G$ . Decimos que  $G$  es un *thrackle* si cada par de aristas se intersecta exactamente una vez. La figura 2.7 ilustra un ejemplo de thrackle. Los thrackles fueron definidos por John Conway en la década de 1960 (Pach (2013a)). Conway también conjeturó que el número de aristas en un thrackle no puede exceder el número de sus vértices (Fulek & Pach (2011)). Un thrackle de  $n$  vértices es *máximo* si tiene exactamente  $n$  aristas. La figura 2.7 muestra un thrackle máximo.



Figura 2.7: Un thrackle máximo sobre un conjunto de seis vértices.



(a) Un thrackle con cinco vértices.



(b) Un thrackle geométrico con cinco vértices.

Figura 2.8: Ambas figuras ilustran thrackles definidos sobre el mismo conjunto de puntos. En los dos casos el thrackle dibujado es máximo.

Una gráfica (abstracta)  $G$  es *thrackleable* si puede ser dibujada en el plano como un thrackle.

Una descomposición por thrackles  $D$ , de una gráfica geométrica  $G$ , es una colección  $D = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  de subgráficas geométricas que cumple con tres condiciones:

1. Cada subgráfica  $G_i$  es un thrackle.
2. Ninguna subgráfica  $G_i$  contiene vértices aislados.
3. Cada arista de  $G$  pertenece a exactamente una subgráfica  $G_i$  de  $D$ .

Un thrackle en el que todas sus aristas son segmentos de recta es conocido como *thrackle geométrico* (Schaefer (2018)). En la figura 2.8 presentamos un ejemplo de thrackle y un ejemplo de thrackle geométrico. En este trabajo nos

referimos a los thrackles geométricos como thrackles ya que solo estudiamos descomposiciones de gráficas con thrackles geométricos.

Además definimos la intersección entre dos thrackles como sigue:

**Definición 1.** *Intersección de dos thrackles.* Sea  $T_i$  y  $T_j$  dos thrackles con el mismo número de arista, definimos la intersección de  $T_i$  y  $T_j$  como la intersección de sus conjuntos de aristas correspondientes. En otras palabras:

$$T_i \cap T_j = E(T_i) \cap E(T_j).$$

Decimos que dos thrackles  $T_i$  y  $T_j$  son disjuntos cuando  $T_i \cap T_j = \emptyset$ .

Dada una gráfica completa (abstracta) esta puede ser dibujada en el plano de muchas maneras, solo basta con mover un punto en cualquier dirección para obtener diferentes dibujos de la misma gráfica completa, de hecho hay un número no finito de dibujos para una sola gráfica abstracta. Estudiarlos todos no es posible y por ello necesitamos discretizar el número de posibles dibujos geométricos para una sola gráfica. El tipo de orden es una herramienta que otorga un número finito de dibujos combinatoriamente diferentes para gráficas abstractas. Explicamos este concepto a continuación.

### 2.1.3. Tipo de Orden

Para entender cómo funciona el tipo de orden de un conjunto de puntos debemos definir la orientación de una tripleta de puntos.

Tres puntos  $(p, q, w)$  en el plano en posición general, pueden tener una orientación en sentido horario o una orientación en sentido anti-horario. Decimos que  $(p, q, w)$  está orientada en sentido horario si  $w$  está a la derecha del segmento dirigido  $\overrightarrow{pq}$ . Si  $w$  está a la izquierda de dicho segmento entonces  $(p, q, w)$  está orientada en sentido anti-horario. Si la tripleta está orientada en sentido horario asignamos a esa tripleta el valor  $-1$ . Si la tripleta está orientada en sentido anti-horario asignamos a esa tripleta el valor  $+1$ . En la figura 2.9 mostramos un ejemplo de cada orientación posible para una tripleta.

Las definiciones siguientes fueron tomadas de Aichholzer et al. (2002). El tipo de orden de un conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de puntos en posición general, es una función que asigna a cada tripleta ordenada  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  la orientación de la tripleta de puntos  $\{p_i, p_j, p_k\}$ .

Decimos que dos conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  son *combinatoriamente equivalentes* si tienen el mismo tipo de orden de otra forma, si no son equivalentes decimos que son *combinatoriamente distintos*. Si  $S_1$  y  $S_2$  son combinatoriamente



Figura 2.9: Esta figura muestra las posibles orientaciones de una tripleta de puntos. La tripleta  $\{p, q, w\}$  tiene asignado el valor de  $(-1)$  porque  $w$  está orientado en sentido horario con respecto del segmento  $\overline{pq}$ . La tripleta  $\{p, q, u\}$  tiene asignado el valor de  $(+1)$  porque  $u$  está orientado en sentido anti-horario con respecto del mismo segmento.

equivalentes dos segmentos en  $S_1$  se cruzan si y solo si los segmentos correspondientes en  $S_2$  se cruzan. Solo hay una manera (combinatoriamente equivalente) de acomodar tres puntos, dos maneras de acomodar cuatro puntos y tres maneras de acomodar cinco puntos. En la figura 2.10 ilustramos los diferentes tipos de orden para conjuntos de tres y cuatro puntos. En la figura 2.11 presentamos conjuntos combinatoriamente equivalentes de cinco puntos. En la figura 2.12 mostramos los diferentes tipos de orden para un conjunto de cinco puntos.

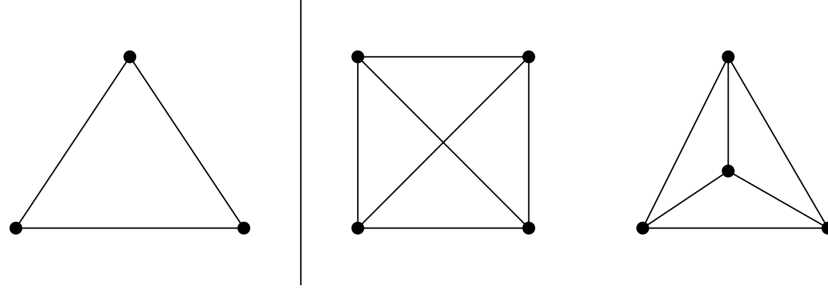


Figura 2.10: Las diferentes maneras combinatoriamente diferentes de acomodar 3 y 4 puntos.

No es trivial enumerar o contar los conjuntos combinatoriamente diferentes, por ejemplo, dados  $n$  puntos podemos colocarlos en posición convexa y obtener el primer tipo de orden para  $n$  puntos, luego podemos colocar  $n - 1$



Figura 2.11: Estos dos conjuntos de puntos tienen el mismo tipo de orden. Observe que el valor de cada una de las tripletas del dibujo que está a la izquierda es igual al valor de las tripletas del dibujo a la derecha.



Figura 2.12: Las tres maneras diferentes de distribuir 5 puntos en el plano. Cualquier otra configuración es equivalente a alguna de estas tres configuraciones.

puntos en posición convexa y un punto dentro del  $(n - 1)$ -ágono y evaluar de cuántas maneras combinatoriamente distintas es posible colocar un punto dentro del polígono. Posteriormente podemos ver que pasa con  $n - 2$  puntos en posición convexa y dos dentro del  $(n - 2)$ -ágono y así sucesivamente hasta que tengamos 3 puntos en posición convexa y  $n - (n - 3)$  dentro del triángulo. En la figura 2.13 explicamos una parte de este proceso. Usando una técnica parecida se sabe que para  $n = 10$  hay más de 14 millones de tipos de orden. En el trabajo de Aichholzer et al. (2002) se ofrece una base



Figura 2.13: La figura ilustra las diferentes maneras de colocar un punto dentro de un pentágono, para formar un conjunto de 6 puntos en total. Hay al menos 3 formas diferentes de colocar dicho punto, 1) es posible ponerlo dentro del pentágono pero fuera del polígono en forma de estrella inducido por las aristas del ciclo interior. 2) Es posible ponerlo dentro de uno de los "picos" del polígono en forma de estrella y 3) es posible ubicarlo en el área rellena. Los puntos de 1) están representados con un círculo sin rellenar, los puntos de 2) con un cuadrado y los puntos de 3) con una cruz. La razón por la que existe más de una ocurrencia de un mismo tipo de punto es porque existe una equivalencia en la etiquetación de los vértices tales que los cruces se preservan.

de datos que contiene los conjuntos combinatoriamente diferentes para toda  $3 \leq n \leq 10$ . En la tabla 2.1 se presenta el número de conjuntos diferentes para cada  $n$  y el tamaño en bytes de la base de datos.

En este trabajo buscamos descomposiciones de gráficas geométricas completas en thrackles. Como se mencionó antes, un conjunto de  $n$  puntos en posición general induce una gráfica completa de  $n$  vértices en el plano. No-



sotros analizamos cada tipo de orden para cada  $n \leq 10$  induciendo la gráfica completa de  $n$  vértices. Después examinamos sus thrackles y luego buscamos una descomposición. Cuando buscamos una descomposición que minimiza el número de thrackles utilizados estamos buscando el anti-thickness de la gráfica. Dicho concepto será explicado formalmente en seguida.

$n$	Número de tipos de orden	Tamaño (bytes)
3	1	6
4	2	16
5	3	30
6	16	192
7	135	1890
8	3315	53040
9	158817	5 717 412
10	14309547	572 381 880

Tabla 2.1: Tipos de orden para cada  $n \leq 10$ .

## 2.2. Anti-thickness y anti-thickness geométrico

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Dujmovic & Wood (2017).

**Definición 2.** *Anti-thickness de una gráfica.* El anti-thickness de una gráfica  $G$  es el entero  $k$  más pequeño tal que existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada elemento de la partición es una gráfica thrackable.

La figura 2.14 ilustra un ejemplo del anti-thickness de  $K_5$ .

Cuando deseamos que los thrackles usados en la descomposición de la gráfica sean geométricos, entonces podemos definir el anti-thickness geométrico como sigue.

**Definición 3.** *Anti-thickness geométrico de una gráfica.* El anti-thickness geométrico de una gráfica  $G$  es el entero  $k$  más pequeño tal que existe un dibujo  $\mathbf{G}$  de  $G$  para el cual hay una partición de  $E(\mathbf{G})$ , de tamaño  $k$ , en la que cada elemento de la partición induce un thrackle.



Figura 2.14: La figura muestra a  $K_5$  a la izquierda y a la derecha dos thrackles cuya unión es  $K_5$ . Consideremos las aristas de la gráfica completa inducida por los vértices 1, 2, 3, 4, estas aristas inducen un thrackle mientras que las aristas con un extremo en el vértice 5 inducen otro thrackle. El anti-thickness de  $K_5$  es precisamente igual a dos. Este resultado se discute en el capítulo de resultados.

Nótese que en la partición que realiza el anti-thickness de la gráfica, cada elemento de la partición tiene uno o más dibujos, mientras que en la partición que realiza el anti-thickness geométrico de la gráfica, cada elemento es una subgráfica geométrica del dibujo original.

En la figura 2.15 damos un ejemplo del anti-thickness geométrico de  $K_5$ .

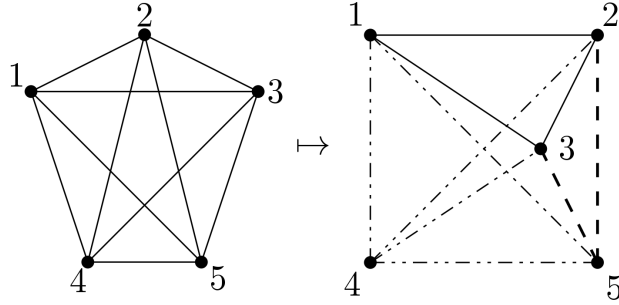


Figura 2.15: En esta figura podemos observar una descomposición de  $K_5$  en 3 thrackles geométricos. Esta descomposición se muestra en la figura del lado derecho, cada thrackle está dibujado con diferentes patrones de línea. El anti-thickness geométrico de  $K_5$  es exactamente tres, esto es demostrado en la sección de resultados.

Dar una descomposición de una gráfica en thrackles es equivalente a encontrar conjuntos independientes de aristas que comparten ciertas propiedades. A su vez, encontrar los conjuntos independientes de una gráfica está

relacionado a encontrar el *número cromático* de una gráfica (abstracta). Discutimnos esto en la siguiente sección.

## 2.3. Número cromático

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *coloración propia* de los vértices de una gráfica  $G$  es la asignación de colores a los vértices de  $G$  tal que cada vértice tiene un solo color asignado y dos vértices adyacentes tienen diferentes colores. Un color puede ser un color como rojo, verde, amarillo, etc. cuando el número de colores a usar es pequeño, de otra forma se usan enteros  $1, 2, \dots, k$  para algún entero positivo  $k$  para representar los colores. Si la coloración propia usa  $k$  colores diferentes decimos que tenemos una  *$k$ -coloración* de la gráfica  $G$ . Dada una  $k$ -coloración de una gráfica  $G$ , si  $V_i$  es el conjunto de vértices de  $G$  que tienen el color  $i$  asignado, llamamos a  $V_i$  una *clase cromática* de  $G$ . El conjunto  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  genera una partición en conjuntos independientes de los vértices de  $G$ .

Una gráfica  $G$  es  *$k$ -colorable* si existe una coloración propia de  $G$  de tamaño  $k$ . El entero positivo  $k$  más pequeño para el cual  $G$  es  $k$ -colorable recibe el nombre de *número cromático* de  $G$ . Lo denotamos como  $\chi(G)$ .

La figura 2.16 muestra un ejemplo de una coloración propia de una gráfica  $G$ . En este ejemplo ilustramos cada clase cromática dibujando los vértices con diferentes colores representados por una cruz, un círculo y un cuadrado. Si tenemos una descomposición en  $k$  thrackles de una gráfica geométrica y asignamos uno de  $k$  colores a cada thrackle de la descomposición de tal manera que no existan dos thrackles del mismo color y si además minimizamos el valor de  $k$  entonces  $k$  es el anti-thickness de la gráfica geométrica dada. Esta idea ha sido utilizada para encontrar el anti-thickness de una gráfica geométrica cuyos vértices están en posición covexa. Detallamos este concepto en la siguiente sección.

En este capítulo explicamos los conceptos necesarios para entender el trabajo realizado en esta tesis. Empezamos hablando de gráficas abstractas y después de su representación en el plano usando aristas que son curvas y usando aristas que son segmentos de recta a las cuales llamamos gráficas geométricas. Continuamos definiendo un tipo especial de gráfica geométrica en la cual cada par de aristas se intersecta, este tipo de gráfica geométrica recibe el nombre de thrackle. Luego explicamos el tipo de orden como herramienta para discretizar el número de dibujos posibles de una gráfica en el

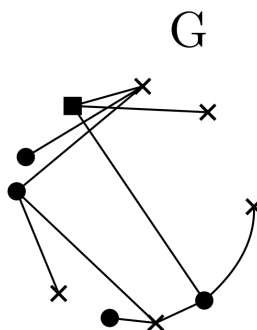


Figura 2.16: Una coloración propia de una gráfica  $G$ . Esta coloración es de tamaño 3, por lo tanto decimos que es una 3-coloración de  $G$ . Para esta gráfica en particular no existe una coloración más pequeña, por lo que su número cromático es 3. Nótese que los conjuntos independientes son formados por vértices que tienen el mismo color asignado y no son adyacentes entre sí.

plano. Después hablamos del anti-thickness geométrico de una gráfica como el mínimo número de thrackles que existen en una descomposición para todos los dibujos de una gráfica. Finalmente mencionamos el número cromático como el mínimo número de conjuntos independientes que existen en una partición de los vértices de una gráfica. Este último punto es de importancia para el siguiente capítulo pues explicamos cómo el problema de encontrar el anti-thickness geométrico de una gráfica puede ser visto como un problema de encontrar el número cromático. Además hablaremos de cuáles son los aportes más recientes acerca del problema del anti-thickness geométrico.

# Capítulo 3

## Estado del arte

Comenzamos este capítulo hablando del thickness de una gráfica, concepto que cronológicamente fue definido antes que el anti-thickness, y discutimos su relación con éste. Luego, mencionamos algunos resultados acerca del thickness. Después, explicaremos de qué manera el número cromático de una gráfica puede otorgar una descomposición de una gráfica geométrica. Finalmente discutimos los resultados actuales para el anti-thickness.

El thickness de una gráfica se define como sigue:

**Definición 4.** [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness.* Sea  $G$  una gráfica, el thickness  $\theta(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  para el cual existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada elemento de la partición induce una gráfica planar.

Este concepto también puede extenderse a gráficas geométricas, en este caso estaremos hablando del thickness de una gráfica geométrica:

**Definición 5.** *Thickness de una gráfica geométrica.* Sea  $G$  una gráfica geométrica, el thickness  $th(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  para el cual existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , donde cada elemento de la partición induce una gráfica (geométrica) plana.

Finalmente podemos definir el thickness geométrico de una gráfica  $G$ .

**Definición 6.** [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness geométrico.* Sea  $G$  una gráfica, el thickness geométrico  $\bar{\theta}(G)$  de  $G$  es :

$$\bar{\theta}(G) = \min\{th(G) : G \text{ es una gráfica geométrica de } G\}.$$



(a) Una descomposición de tamaño 2 de  $K_6$ .



(b) Un dibujo geométrico de  $K_6$  y su descomposición en dos gráficas geométricas planas.

Figura 3.1: La figura (a) muestra que el thickness de  $K_6$  es menor o igual a dos. La figura (b) muestra que el thickness geométrico de  $K_6$  es menor o igual a dos. Sin embargo, en general, estos parámetros no coinciden.

En la figura 3.1 ilustramos un ejemplo del thickness de la gráfica completa de 6 vértices.

Dillencourt et al. (2004) demuestran que el thickness geométrico está acotado por:

$$\left\lceil \frac{n}{5.646} + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil.$$

En el mismo artículo encuentran el valor exacto del thicknes geométrico de cada gráfica completa con  $n$  vértices, para  $n \leq 12$ , así como para  $K_{15}$  y  $K_{16}$ . También estudian el thickness geométrico para gráficas completas

bipartitas y demuestran la siguiente cota:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{\min(a, b)}{2} \right\rceil.$$

Para explicar la relación entre el thickness y el anti-thickness es necesario hablar de coloraciones de vértices de gráficas de adyacencia. Recordemos que dadas dos aristas de una gráfica geométrica  $G$ , decimos que estas se *intersectan* si comparten un vértice (son adyacentes) o si se cruzan, y que son *disjuntas* si no se intersectan. La *gráfica de adyacencia* de una gráfica geométrica  $G$  tiene como conjunto de vértices a todas las aristas de  $G$  y sus aristas se definen a partir del tipo de adyacencia que se considere; se puede definir cuatro diferentes gráficas de adyacencia, estas se listan a continuación y se ilustran en la figura 3.2:

1. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  se cruzan.
2. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  comparten un vértice o son disjuntas.
3. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  se intersectan.
4. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  son disjuntas.

Ahora definimos una gráfica a la que llamamos *gráfica de cruce*.

**Definición 7.** *Gráfica de cruce.* Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano y sea  $K_n(S)$  la gráfica completa asociada a  $S$ . La gráfica de cruce  $E_{pp}(S)$  de  $S$  es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de  $K_n(S)$  y una arista entre dos vértices de  $E_{pp}(S)$  si sus aristas correspondientes se cruzan en  $K_n(S)$ .

La gráfica  $E_{pp}(S)$  corresponde a la gráfica de adyacencia 1.

En la figura 3.2b aparece un ejemplo de la gráfica de cruce  $E_{pp}(S)$ . Podemos notar que dado que en el dibujo de  $K_5$  hay 3 cruces, en la gráfica  $E_{pp}(S)$  hay 3 aristas.

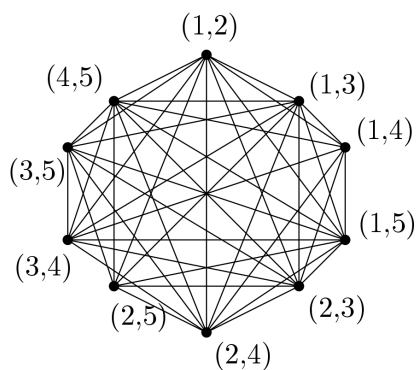
Los conjuntos independientes de  $E_{pp}(S)$  corresponden a conjuntos de aristas de  $K_n(S)$  que inducen gráficas planas. Luego, una coloración propia de los



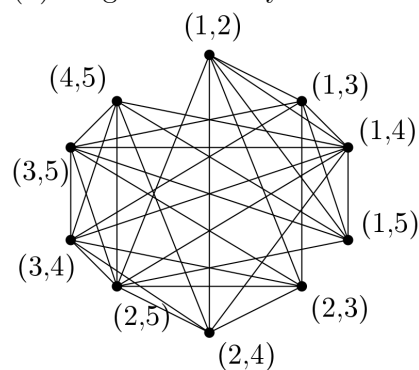
(a) Un dibujo geométrico de  $K_5$  cuyo conjunto de vértices es  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .



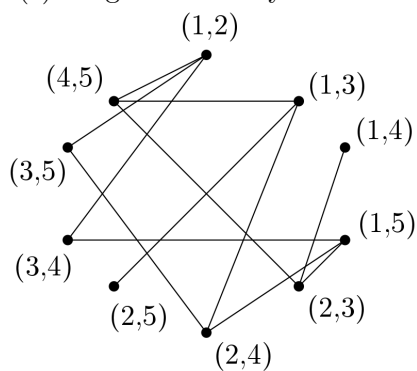
(b) La gráfica de adyacencia 1.



(c) La gráfica de adyacencia 2.



(d) La gráfica de adyacencia 3.



(e) La gráfica de adyacencia 4.

Figura 3.2: Una dibujo de  $K_5$  y sus respectivas gráficas de adyacencia.





Figura 3.3: De izquierda a derecha: Una coloración propia de los vértices de  $E_{pp}(S)$  con dos clases cromáticas indicadas como círculos y cuadros. Una descomposición de un dibujo de  $K_5$  en dos gráficas planas cuyas aristas corresponden a cada una de las clases cromáticas de la coloración de  $E_{pp}(S)$ .

vértices de  $E_{pp}(S)$  corresponde a una descomposición de  $K_n(S)$  en gráficas planas. Por lo tanto encontrar el número cromático de la gráfica  $E_{pp}(S)$  es equivalente a encontrar el thickness geométrico de  $K_n(S)$ . La figura 3.3 ilustra esta relación. El thickness geométrico de la gráfica completa de  $n$  vértices  $K_n$  se puede definir en estos términos como sigue:

**Definición 8.** *Thickness geométrico de una gráfica.*

$$\bar{\theta}(n) = \min\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}.$$

De la misma manera que definimos la gráfica de cruce podemos definir otras gráficas de adyacencia. Para esto basta con considerar alguno de los otros tipos de adyacencia. En este sentido, en el trabajo de Araujo et al. (2005) se definen las gráficas que se listan en seguida, cada una corresponde a una de las cuatro gráficas de adyacencia mencionadas anteriormente. Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general y  $K_n(S)$  la gráfica completa asociada a  $S$ :

- $W(S)$  : Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 2.
- $I(S)$  : Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 3.
- $D(S)$  Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 4.

Gráfica	Conjuntos independientes en $K_n(S)$
$W(S)$	<i>Crossing families</i>
$I(S)$	<i>Emparejamientos planos</i>
$D(S)$	<i>Thrackles</i>
$E_{pp}(S)$	<i>Gráficas planares</i>

Tabla 3.1: Esta tabla muestra qué representan los conjuntos independientes en  $K_n(S)$  para cada una de las gráficas definidas en Araujo et al. (2005) y para  $E_{pp}(S)$ . Una *crossing familie* es una colección de segmentos que se cruzan a pares Lara & Rubio-Montiel (2019).

A partir de aquí, nos referimos a las gráficas de adyacencia 1,2,3 y 4 como  $E_{pp}(S)$ ,  $W(S)$ ,  $I(S)$  y  $D(S)$ , respectivamente.

Es fácil darse cuenta que la condición de existencia de aristas de  $W(S)$  es complementaria a la condición en  $E_{pp}(S)$  y viceversa. De la misma forma, las condiciones de  $I(S)$  y  $D(S)$  son complementarias entre sí. En la tabla 3.1 mostramos esta relación y las estructuras geométricas que inducen, en  $K_n(S)$ , los conjuntos independientes para cada gráfica de adyacencia.

*Open problem garden* es un sitio web en el que investigadores de diferentes áreas de las matemáticas, como algebra, combinatoria, teoría de números o teoría de gráficas, publican problemas abiertos para que la comunidad pueda leerlos libremente. En este sitio web Hurtado (2009) presenta un problema en el que se requiere asignar un color a cada arista de una gráfica geométrica completa usando, de manera implícita, cada una de las cuatro gráficas de adyacencia mencionadas antes.

En el artículo de Araujo et al. (2005) buscan el número cromático de cada una de las gráficas de adyacencia mencionadas anteriormente, los autores estudian los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 w(n) &= \max\{\chi(W(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}. \\
 i(n) &= \max\{\chi(I(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}. \\
 d(n) &= \max\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}.
 \end{aligned}$$

Es usual estudiar el dibujo en posición convexa de una gráfica completa ya que se pueden explotar ciertas propiedades geométricas cuando se trabaja con un conjunto de puntos en posición convexa. Esta configuración es representada

por un solo tipo de orden para cada  $n$ . Para el caso en el que  $S$  está en posición convexa se denotan a estos valores como  $w_c(n)$ ,  $i_c(n)$  y  $d_c(n)$ . Es importante notar que, por consecuencia de la posición convexa, estos valores están definidos para un único tipo de orden. Nótese que  $d_c(n) = \chi(D(S))$  para el caso en el que  $S$  está en posición convexa.

Los autores demuestran las siguientes cotas:

- $w_c(n) = \Theta(n \log n)$ .
- $c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^2 \frac{\log \log n}{\log n}$ , para  $c_1, c_2 > 0$ .
- $i_c(n) = n$ .
- $n \leq i(n) \leq Cn^{3/2}$  para  $C > 0$ .
- $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \min\left(n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2}\right)$ .
- $5\lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \min\left(n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{n}\right)$ .

Ahora bien, como los conjuntos independientes de la gráfica  $D(S)$  son thrackles, es posible definir el anti-thickness geométrico usando la gráfica  $D(S)$  como sigue:

**Definición 9.** *Anti-thickness geométrico de una gráfica.*

$$At_g(n) = \min\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}.$$

De manera análoga si los puntos de  $S$  están en posición convexa definimos el anti-thickness convexo:

**Definición 10.** *Anti-thickness convexo de una gráfica.*

$$At_c(n) = \chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa, } |S| = n.$$

Como ya mencionamos antes, el anti-thickness convexo de la gráfica completa de  $n$  vértices es equivalente a  $d_c(n)$ . En otras palabras, sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa:

$$\begin{aligned} At_c(n) &= d_c(n) \\ \Rightarrow \chi(D(S)) &= \max\{\chi(D(S))\} \end{aligned}$$

Pero como solamente existe un solo dibujo cuando  $S$  está en posición convexa, entonces:

$$\text{máx}\{\chi(D(S))\} = \chi(D(S)).$$

A pesar de que en el trabajo de Araujo et al. (2005) se busca el número cromático de la gráfica  $D(S)$  y con ello, como mencionamos antes, se busca el anti-thickness de una gráfica geométrica asociada a  $S$ , es importante notar que la definición  $d(n)$  no es equivalente a la de anti-thickness. Dada una gráfica  $G$ : en  $d(n)$  se busca el máximo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de  $G$  mientras que en el anti-thickness se busca el mínimo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de  $G$ .

Los autores de Dujmovic & Wood (2017) presentan resultados respecto a el anti-thickness para familias específicas de gráficas como árboles, gráficas outerplanar, y algunos dibujos como 2-tracks, books, k-queues, entre otros.

En su trabajo definen en anti-thickness como sigue:

**Definición 11.** *Anti-thickness de una gráfica.* Sea  $G$  una gráfica el anti-thickness  $At(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  para el cual existe una partición de  $E(G)$  de tamaño  $k$  en la que cada elemento de la partición induce una gráfica thrackable.

Además dan una relación entre el thickness y anti-thickness de cualquier gráfica. Concretamente los autores prueban la siguiente cota para toda gráfica con anti-thickness  $k$  y thickness  $t$ :

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

Acerca del anti-thickness de gráficas completas en el mismo artículo prueban que

$$\frac{n}{3} \leq At(K_n) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente  $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ .

Respecto al anti-thickness geométrico, en los siguientes párrafos describimos cómo los autores de Fabila-Monroy et al. (2018a) encuentran el anti-thickness geométrico exacto para gráficas cuyo conjunto de vértices está en posición convexa.

Los autores prueban que cuando los vértices de la gráfica geométrica están en posición convexa dos thrackles máximos siempre comparten al menos una arista. Por lo anterior la unión de  $k$  thrackles máximos tiene a lo sumo  $kn - \binom{k}{2}$  aristas. Entonces, como una gráfica completa de  $n$  vértices tiene  $\binom{n}{2}$  aristas la resolución de la siguiente desigualdad otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness convexo.

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}.$$

Esta cota es:

$$At_c(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica  $D(S)$ . Puesto que como explicamos anteriormente este problema es equivalente a encontrar el número cromático de la gráfica. En el artículo logran la coloración trazando caminos en una estructura conocida como poliomínó Fabila-Monroy et al. (2018b) en la que los vértices de  $D(S)$  son las filas y las columnas de dicha estructura. En dicho trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en  $D(S)$  y por lo tanto representa un thrackle en  $K_n$ . Los autores concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el poliomínó, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness convexo tiene exactamente el siguiente valor:

$$At_c(n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

A continuación hablamos del trabajo de Fabila-Monroy et al. (2017) en donde encuentran el anti-thickness geométrico de una familia de conjuntos conocidos como doble cadena convexa. Una doble cadena convexa es la configuración de puntos conformada por una  $k$ -cup y una  $l$ -cap. Una  $k$ -cup es una cadena de  $k$  puntos en posición convexa donde la parte superior de su *cierre convexo*<sup>1</sup> está delimitado por un solo segmento. Una  $l$ -cap es una cadena de  $l$  puntos en posición convexa donde la parte inferior de su cierre convexo está delimitado por un solo segmento. La doble cadena convexa  $C_{k,l}$  tiene las siguientes propiedades:

---

<sup>1</sup>El cierre convexo de un conjunto de puntos es el polígono con área más pequeña que contenga a todos los puntos del conjunto.

- Para  $l \geq k$  la doble cadena convexa es la unión una  $k$ -cup  $U$  y una  $l$ -cap  $L$ .
- Cada punto de  $L$  está por debajo de cada segmento de recta definido por dos puntos de  $U$ .
- Cada punto de  $U$  está por arriba de cada segmento de recta definido por dos puntos de  $L$ .

La figura 3.4 muestra un ejemplo de una doble cadena convexa.



Figura 3.4: Una doble cadena convexa con 5 vértices en su  $k$ -cup y 5 vértices en su  $l$ -cap.

El resultado al que se llega en ese trabajo es el siguiente: el anti-thickness geométrico de la gráfica completa inducida por una doble cadena convexa con  $k$  puntos en la cadena convexa superior y  $l$  puntos en la cadena convexa inferior,  $K_{l,k}$ , es:

$$At_g(K_{l,k}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Dujmovic & Wood (2017) mencionan que encontrar el anti-thickness geométrico de gráficas completas en posición general es un problema abierto. En esta tesis abordamos este problema para  $n \leq 10$ .

Hasta ahora las mejores cotas conocidas para el anti-thickness geométrico son :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (3.1)$$

La cota superior se sigue del caso convexo y la cota inferior se sigue del hecho de que una gráfica con  $n$  vértices con anti-thickness geométrico  $k$  tiene a lo

sumo  $kn$  aristas. Discutimos estas ideas con más detalle en la sección 4.1 del capítulo 4.

Los trabajos mencionados en este capítulo muestran cómo el problema original del thickness está relacionado con problema del anti-thickness. Mostramos de qué manera un problema de descomposición de gráficas geométricas equivale a un problema de coloración de gráficas. Los artículos más recientes tratan al anti-thickness como un problema de coloración. En este trabajo no construimos la gráfica  $D(S)$  y no coloreamos ninguna gráfica, uestro enfoque es geométrico y computacional.

Es importante notar que en el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018a) las descomposiciones de la gráfica completa están conformadas por thrackles máximos. Esta es una de las ideas que usamos en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.





# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Cota inferior del anti-thickness geométrico de $K_n$

El principal resultado de este trabajo es que encontramos el valor exacto del anti-thickness geométrico para la gráfica completa con hasta diez vértices en posición general. Obtuvimos dicho valor mejorando la cota inferior y usando la cota superior actual, las cuales siguen a continuación:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (4.1)$$

De manera general, si se desea encontrar una cota superior para el anti-thickness geométrico de  $K_n$  es necesario encontrar una descomposición en thrackles, para cualquier dibujo de  $K_n$ . La cota superior trivial del anti-thickness geométrico de  $K_n$  es  $\binom{n}{2}$  ya que cada arista de  $K_n$  es un thrackle. Si se desea encontrar una cota inferior es necesario demostrar, para todo dibujo de  $K_n$ , cuántos thrackles son necesarios para dar una descomposición en thrackles.

Empezamos explicando la cota inferior conocida para el anti-thickness geométrico y después diremos cómo la mejoramos para  $n \leq 10$ .

Un conjunto de  $n$  puntos en el plano induce una gráfica completa con  $n$  vértices a la que denotamos como  $K_n$ . Como es completa  $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$ . Cuando se quiere encontrar una descomposición de tamaño mínimo en thrackles una idea que resulta intuitiva es buscar que los thrackles tengan el

mayor número posible de aristas. El siguiente teorema es útil para nosotros ya que establece el número máximo de aristas que puede tener un thrackle geométrico.

**Teorema 4.1.1.** (Pach (2013b)) Toda gráfica geométrica de  $n$  vértices en la que no existen dos aristas disjuntas tiene a lo más  $n$  aristas. Esto se cumple para toda  $n > 2$ .

Omitimos la demostración del teorema anterior ya que las ideas de la demostración no son retomadas en este trabajo.

Como mencionamos en el capítulo de antecedentes, un thrackle de  $n$  vértices con exactamente  $n$  aristas es un thrackle máximo. Por definición, toda descomposición de la gráfica completa cubre sus aristas. Si suponemos que existen  $k$  thrackles máximos en la descomposición, entonces la siguiente desigualdad expresa el número de thrackles máximos necesarios para cubrir las  $\binom{n}{2}$  aristas de la gráfica completa:

$$kn \geq \binom{n}{2}.$$

Como los thrackles de la descomposición son geométricos, si buscamos la  $k$  más pequeña para la cual se cumple la desigualdad anterior entonces  $k$  sería el anti-thickness geométrico de la gráfica completa. Resolviendo para  $k$  tenemos que al menos  $k \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos son necesarios para dar una descomposición de  $K_n$ . En otras palabras

$$At_g(K_n) \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil. \quad (4.2)$$

La tabla 4.1 ilustra el valor de la cota inferior del anti-thickness geométrico dada por la desigualdad 4.2 para  $n \leq 10$ . Esta cota es la más inmediata ya que usa el hecho de que cada thrackle máximo tiene a lo sumo tantas aristas como vértices. También es la cota actual para el anti-thickness geométrico (Dujmovic & Wood (2017)).

En el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018a) encuentran que, dados dos thrackles máximos en posición convexa, estos comparten una arista, y que esto se cumple para cada par de thrackles de la descomposición. En este trabajo verificamos que este resultado también es válido para conjuntos de hasta diez puntos en posición general (no convexa). Usando los tipos de orden de los conjuntos con hasta diez puntos inducimos la gráfica completa, luego

#### 4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE $K_N$ 43

$n$	$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$
3	1
4	2
5	2
6	3
7	3
8	4
9	4
10	5

Tabla 4.1: Valor de la cota inferior del anti-thickness geométrico usando la cota trivial.

buscamos, para cada uno de los tipos de orden, todos los thrackles máximos y finalmente comparamos dichos thrackles a pares y encontramos que:

- Para todo tipo de orden con al menos dos thrackles máximos, cada par de thrackles máximos tienen intersección no vacía en aristas.
- Existen tipos de orden con solo un thrackle máximo.
- Existen tipos de orden en los que no hay thrackles máximos.

En la tabla 4.2 mostramos cuántos tipos de orden tienen thrackles máximos, cuántos tienen solamente un thrackle máximo y cuántos no tienen ningún thrackle máximo. La figura 4.1 muestra un ejemplo de un tipo de orden, para  $n = 9$ , en el cual no existe ningún thrackle máximo. Una pregunta interesante es ¿cómo caracterizamos a los tipos de orden cuya gráfica completa no tiene thrackles máximos?

Los algoritmos que diseñamos para dar los resultados anteriores son descritos en la sección 4.4 para no romper con el flujo de esta sección. Para buscar los thrackles máximos usamos el algoritmo 1, para comparar los thrackles a pares utilizamos el algoritmo 2. La lista de tipos de orden con un solo thrackle máximo puede ser descargada de la siguiente liga: [http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos\\_tesis/withone\\_max.tar.gz](http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/withone_max.tar.gz). La lista de tipos de orden para los cuales no existe un thrackle máximo está en la siguiente liga: [http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos\\_tesis/without\\_max.tar.gz](http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/without_max.tar.gz).

Usando estos resultados podemos derivar el siguiente lema.

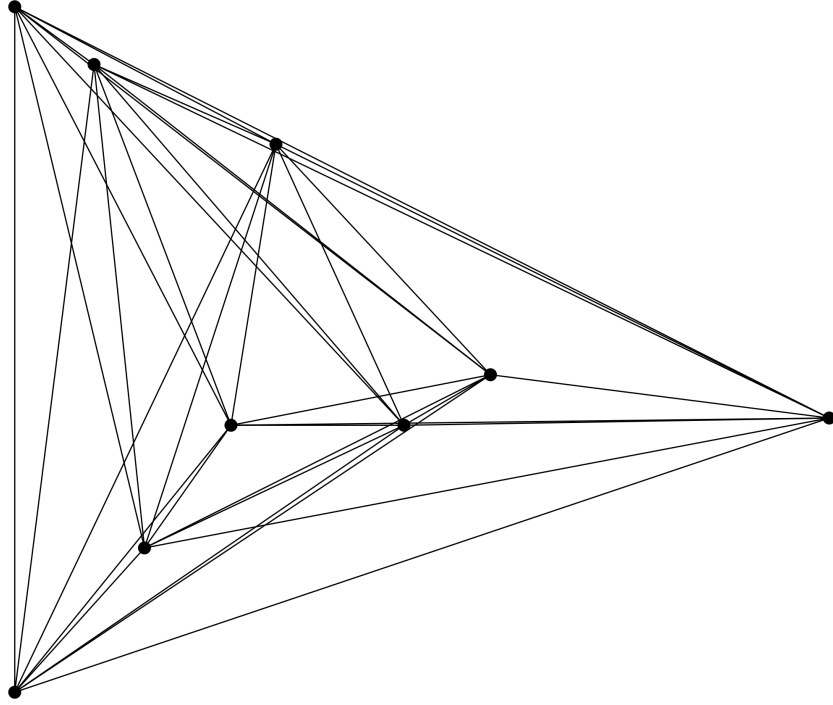


Figura 4.1: Este conjunto de puntos corresponde al tipo de orden 136764 de  $n = 9$ . La gráfica completa inducida por ellos no contiene ningún thrackle máximo.

$n$	Tipos de orden(T.O.)	T.O. con solo un thrackle máximo	T.O. sin thrackles máximos
3	1	1(33 %)	0(0 %)
4	2	0(0 %)	1(50 %)
5	3	0(0 %)	2(66 %)
6	16	1(6.25 %)	6(37.50 %)
7	135	7(5.18 %)	50(37.03 %)
8	3315	208(6 %)	1175(35.44 %)
9	158817	10547(6.64 %)	53758(33.84 %)
10	14309547	962517(6.72 %)	4654339(32.52 %)

Tabla 4.2: Mostramos, para cada  $3 \leq n \leq 10$ , la relación de los tipos de orden con solamente un thrackle máximo y los tipos de orden sin thrackles máximos.

#### 4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE $K_N$ 45

**Lema 4.1.2.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en posición general y sean  $T_1$  y  $T_2$  thrackles máximos en  $K_n(S)$  con  $|V(T_1)| \leq 10$  y  $|V(T_2)| \leq 10$ .  $T_1$  y  $T_2$  tienen al menos una arista en común.

*Demostración.* Para cada tipo de orden con hasta diez puntos, generamos todos los thrackles máximos inducidos. Usando este conjunto verificamos que para cada pareja la intersección en aristas es no vacía  $\square$

El lema anterior implica que para  $n \leq 10$  no es posible encontrar una descomposición en thrackles máximos de tamaño  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ , ya que, en dicha descomposición, los thrackles máximos no son disjuntos a pares pero esto infringiría las condiciones de una descomposición. En otras palabras una descomposición por thrackles solo podría contener un thrackle máximo. Sin embargo, es posible encontrar, a partir de una colección de thrackles máximos, una colección de thrackles que son disjuntos. Describimos este proceso en el siguiente lema:

**Lema 4.1.3.** Sea  $\mathcal{C} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  una colección de thrackles máximos de  $K_n$  con  $|E(T_i) \cap E(T_j)| = 1$  y  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Existe una colección de thrackles  $\mathcal{D}$  de  $K_n$  inducida por  $\mathcal{C}$  en la que cada par de thrackles tienen intersección vacía y que cubre el siguiente número de aristas:

$$\sum_{i=(n-m)+1}^n i.$$

*Demostración.* Sea  $T'_i$ , con  $1 \leq i \leq m$  un thrackle inducido por el siguiente conjunto de aristas:

$$E(T_i) - \bigcup_{k=1}^{i-1} E(T_i) \cap E(T_k).$$

Es decir,  $T'_i$  es el thrackle que tiene todas las aristas de  $T_i$  a excepción de aquellas que  $T_i$  comparte con el resto de los thrackles en la colección.

Sea  $\mathcal{D} = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_m\}$ . Por construcción, la intersección de cualesquiera dos thrackles de  $\mathcal{D}$  es vacía.

Nótese que si una arista  $e$  aparece en dos thrackles de  $\mathcal{C}$ , entonces en  $\mathcal{D}$ ,  $e$  aparecerá únicamente en el thrackle con menor etiqueta. De hecho  $T'_1$  tiene  $n$  aristas,  $T'_2$  tiene  $n - 1$  aristas,  $T'_3$  tiene  $n - 2$  aristas y, en general,  $T'_i$  tiene  $n - i + 1$  aristas. Como  $\mathcal{D}$  tiene  $m$  thrackles el número de aristas cubiertas por  $\mathcal{D}$  es

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + (n - m + 2) + (n - m + 1).$$

$n$	$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$	$\sum_{i=(n-\lceil \frac{n-1}{2} \rceil)+1}^n i$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	2	9	10
6	3	15	15
7	3	18	21
8	4	26	28
9	4	30	36
10	5	40	45

Tabla 4.3: Mostramos cuántas aristas son cubiertas con una colección de  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos disjuntos en aristas. Se rellenan los casos en los que la colección no cubre todas las aristas.

Podemos escribir esta suma como :

$$\sum_{i=(n-m)+1}^n i.$$

□

Es importante notar que este es el máximo número de aristas que una colección con  $m$  thrackles disjuntos puede cubrir.

Con los lemas anteriores es posible probar que la cota inferior del anti-thickness geométrico de  $K_n$ , mostrada en la ecuación, 4.1 no es justa para toda  $n$ . El siguiente teorema establece esta afirmación.

**Teorema 4.1.4.** Sea  $\mathcal{D} = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\}$  una colección de thrackles disjuntos en aristas inducida por una colección de  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos.  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos son suficientes para inducir una descomposición de  $K_n$  cuando  $n = 3, 4, 6$  y no son suficientes cuando  $n = 5, 7, 8, 9, 10$ .

*Demostración.* Se sigue del lema 4.1.3. El número de aristas cubiertas por  $\mathcal{D}$  para cada  $3 \leq n \leq 10$  se muestran en la tabla 4.3. Se marcan de gris los casos en los que no es posible cubrir todas las aristas de  $K_n$ . □

Como consecuencia del lema 4.1.3 y el teorema 4.1.4 podemos dar una cota inferior justa para el anti-thickness geométrico de  $K_n$  con  $3 \leq n \leq 10$ .

#### 4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE $K_N$ 47

**Teorema 4.1.5.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general con  $3 \leq n \leq 10$ , y sea  $K_n(S)$  la gráfica completa inducida por  $S$ . El anti-thickness de  $K_n(S)$ :

$$At_g(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Se sigue del teorema 4.1.3 que el número de aristas cubiertas por una colección  $\mathcal{D} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  de thrackles, con  $|E(T_i) \cap E(T_j)| = 1$ , es

$$-\frac{1}{2}m(m - 2n - 1).$$

Para saber cuántos thrackles como minimo son necesarios en la colección para cubrir las  $\binom{n}{2}$  aristas de  $K_n$ , es necesario resolver la siguiente desigualdad otorga el resultado.

$$-\frac{1}{2}m(m - 2n - 1) \geq \binom{n}{2}. \quad (4.4)$$

De aquí se tiene que  $m$  está en el siguiente intervalo:

$$\frac{1}{2} \left( 2n - \sqrt{8n + 1} + 1 \right) \leq m \leq \frac{1}{2} \left( 2n + \sqrt{8n + 1} + 1 \right).$$

Como nosotros estamos interesados en la  $m$  más pequeña para la cual se cumple la desigualdad 4.4, basta con tomar el término de la izquierda para obtener el resultado deseado.  $\square$

Presentamos los valores dados por la cota inferior del teorema 4.1.5 en la tabla 4.4.

Como consecuencia del teorema 4.1.5 es posible obtener un valor exacto para el anti-thickness geométrico de  $K_n$  en posición general.

**Teorema 4.1.6.** Sea  $K_n(S)$  la gráfica completa inducida por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos, con  $3 \leq n \leq 10$ , en posición general. El anti-thickness geométrico de  $K_n$  es:

$$At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

$n$	$k = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$	$\sum_{i=(n-k)+1}^n i$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	3	12	10
6	3	15	15
7	4	22	21
8	5	30	28
9	6	39	36
10	6	45	45

Tabla 4.4: En la tabla se muestra que la cota inferior del anti-thickness geométrico es justa para  $3 \leq n \leq 10$ . La segunda columna muestra el tamaño de la colección de thrackles, cuyo tamaño está dado por la cota inferior del anti-thickness geométrico del teorema 4.1.5 para cada  $n$ . La tercera columna muestra cuántas aristas cubre dicha colección. La cuarta columna muestra el número de aristas de  $K_n$ .

*Demostración.* Se sigue del resultado del teorema 4.1.5 y la cota superior del anti-thickness geométrico de  $K_n$ ,  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ , cuando  $K_n$  es inducida por un conjunto de puntos en posición convexa.  $\square$

Si desearamos dar un resultado similar para  $n > 10$ , bastaría con generalizar el lema 4.1.2. Esto es, demostrar que cada par de thrackles máximos se intersecta en al menos una arista y que esto sucede para toda  $n > 10$ . Nosotros conjeturamos que este lema también se cumple para  $n > 10$ .

Debido a que la cota superior del anti-thickness geométrico está dada por el dibujo en posición convexa, en este trabajo decidimos verificar si existen dibujos, diferentes al convexo, para los cuales se alcanza la cota inferior dada por el teorema 4.1.5.

## 4.2. Descomposiciones inducidas por thrackles máximos

La cota superior del anti-thickness geométrico está dada por el conjunto de puntos en posición convexa. Sea  $k = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ , en esta tesis



verificamos que existen tipos de orden, que no corresponden a la posición convexa, y que inducen una gráfica completa cuyo anti-thickness geométrico es a lo sumo  $k$ .

Para comprobar la existencia de tipos de orden con las características descritas anteriormente elegimos aquellos que tienen al menos  $k$  thrackles máximos. Luego, para cada uno, analizamos todas sus colecciones de thrackles máximos posibles de tamaño  $k$ . Finalmente, para cada colección, evaluamos si esta cubre o no a  $E(K_n)$ . Cuando una colección de thrackles máximos cubre al conjunto de aristas de la gráfica completa, es posible inducir una descomposición de  $K_n$  en thrackles (no necesariamente máximos) asignando cada arista de  $K_n$  a un único thrackle que la cubra. Detallamos el algoritmo para buscar colecciones de thrackles máximos que induzcan una descomposición en la sección 4.4.3. La tabla 4.5 muestra los resultados obtenidos de este análisis; observamos que para  $n \in \{8, 9, 10\}$  existen tipos de orden que tienen  $k$  thrackles máximos que pueden inducir una descomposición.

Verificamos la optimalidad de las colecciones de thrackles máximos y encontramos que ninguna colección, para los tipos de orden descritos anteriormente, es óptima ya que en cada una existe al menos un par de thrackles cuya intersección tiene tamaño mayor a uno. Para este proceso utilizamos el algoritmo XY descrito en la sección 4.4.4. Este resultado nos permite dar el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.1.** Sea  $K_n(S)$  una gráfica completa inducida por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos, con  $3 \leq n \leq 10$ , en posición general no convexa. No existen colecciones de thrackles máximos óptimas en  $K_n(S)$ .

*Demostración.* Se sigue de los algoritmos de la sección 4.2 y la sección 4.4.4. El primero busca todas las descomposiciones posibles inducidas por colecciones de thrackles máximos. El segundo verifica la optimalidad de cada una de las colecciones encontradas por el primer algoritmo. Encontramos que no existe ninguna colección de thrackles máximos óptima para ningún tipo de orden diferente del convexo para  $3 \leq n \leq 10$ .  $\square$

Las etiquetas de los thrackles máximos para las gráficas dadas por cada tipo de orden de los mostrados en la tabla 4.5, pueden ser consultados en el apéndice A.

La figura 4.2 muestra un ejemplo de una descomposición de  $K_9$ , en thrackles, inducida por seis thrackles máximos, cada thrackle es dibujado de un color diferente.

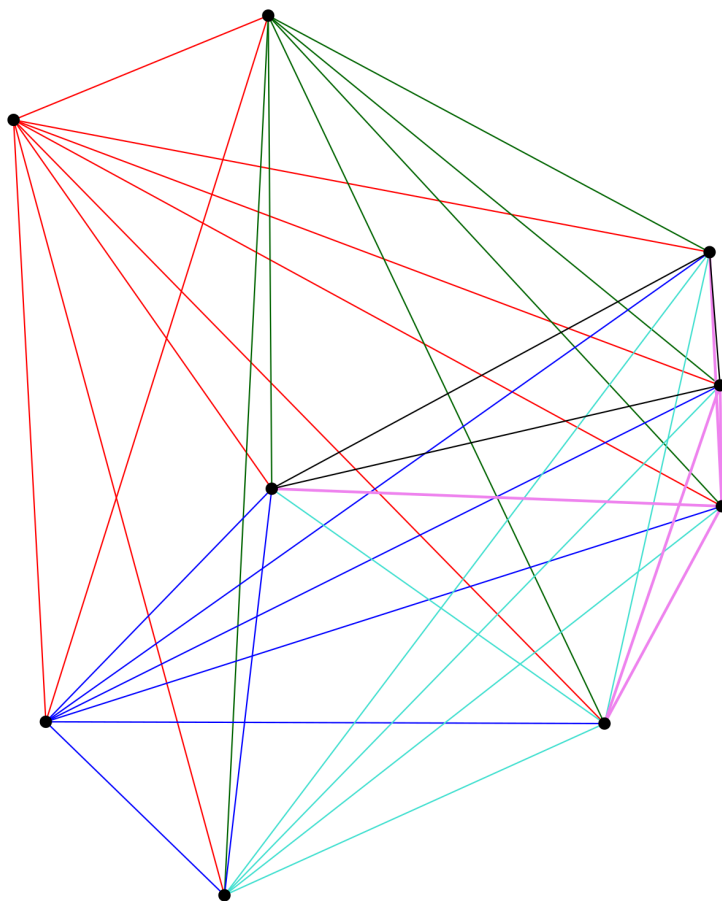


Figura 4.2: Una descomposición de  $K_9$  en seis thrackles, la configuración de puntos corresponde al tipo de orden 12 con respecto de la base de datos de Aichholzer & Krasser (2001). El anti-thickness geométrico de  $K_9$  es 6. Esta descomposición fue inducida por una colección de thrackles máximos que no es óptima, es sencillo ver esto observando que los thrackles tienen 9,7,6,6,5 y 3 aristas respectivamente. Una descomposición óptima de  $K_9$  tiene thrackles de tamaño 9,8,7,6,5 y 4.

$n$	Tipo de Orden	Tamaño de la colección $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$
8	12	5
8	54	5
9	12	6
9	52	6
9	54	6
9	80	6
9	696	6
9	1080	6
9	1287	6
10	81	6
10	1328	6
10	2243	6

Tabla 4.5: Tipos de orden para los que existe al menos una colección de  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  thrackles máximos que cubren a  $K_n$ .

Para los casos de  $n \in \{3, 4, \dots, 7\}$  no existe ninguna colección de  $k$  thrackles máximos que pueda inducir una descomposición de  $K_n$ . Esto es porque, para ninguno de los tipos de orden, en este rango de  $n$ , existe una colección de thrackles máximos que cubran las aristas de  $K_n$ . Para estos valores de  $n$  buscamos, de manera manual, una descomposición con ese número de thrackles (no necesariamente máximos). La figura 4.3 muestra para cada color de  $n$  con  $3 \leq n \leq 7$ , dibujos cuyo anti-thickness es igual a la cota inferior del teorema 4.1.5. De esto se sigue que el anti-thickness geométrico de  $K_n$ , con  $3 \leq n \leq 7$ , es a lo sumo  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ . Como resultado podemos decir que el anti-thickness geométrico de  $K_n$ , con  $3 \leq n \leq 10$  es exactamente  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ .

En la siguiente sección analizamos, para  $3 \leq n \leq 9$ , cómo se comporta la intersección de thrackles, no necesariamente máximos, de los dibujos de  $K_n$ .

### 4.3. Intersección de thrackles de $K_n$ con $3 \leq n \leq 9$ .

Debido al resultado del teorema 4.2.1 establecido en la sección 4.2 decidimos estudiar la existencia de colecciones de thrackles, no necesariamente máximos, cuya intersección a pares es vacía y que además puedan cubrir las aristas de  $K_n$ . Para explicar este proceso primero es necesario definir una *partición de un entero*.

**Definición 12.** *Partición de un entero.* (Knuth (2011b)) Una partición de un entero  $n$  es una colección de enteros no negativos  $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  tales que  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$  y  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ .

Es posible usar ciertas particiones de un entero como guía para buscar descomposiciones en thrackles de  $K_n$ . Por ejemplo, si deseamos obtener una descomposición en thrackles de  $K_4$ , entonces necesitamos cubrir seis aristas. El entero 6 tiene once particiones, tres de ellas son:  $\{4, 2\}$ ,  $\{2, 2, 2\}$ ,  $\{3, 1, 1, 1\}$ . Las cuales pueden traducirse a tres diferentes descomposiciones, la partición  $\{4, 2\}$  se traduce en una descomposición con un thrackle con cuatro aristas y uno de dos aristas, la partición  $\{2, 2, 2\}$  se traduce en una descomposición con 3 thrackles con dos aristas cada uno, la partición  $\{3, 1, 1, 1\}$  se traduce a una descomposición con un thrackle con tres aristas y tres thrackles con una arista. Debido a que nosotros estudiamos descomposiciones de tamaño

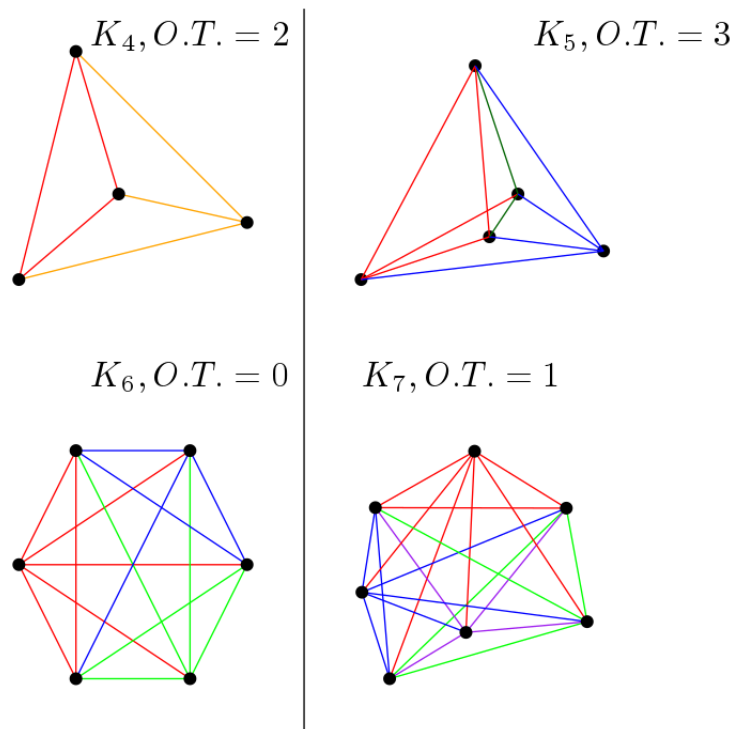


Figura 4.3: Mostramos posibles descomposiciones de la gráfica completa con hasta 7 vértices. Las descomposiciones tienen exáctamente el número de th-rackles establecido por la cota inferior del teorema 4.1.5. Estas configuraciones de puntos, a excepción de  $K_6$ , son diferentes de la posición convexa. Los tipos de orden correspondientes a cada dibujo están indicados en la figura como  $O.T.$

estrictamente menor a la cota superior del anti-thickness geométrico, que es:  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ , y como en una descomposición solamente puede existir un thrackle máximo, es posible imponer condiciones sobre las particiones de enteros para las particiones que usaremos. Nos referimos a estas como *particiones válidas de un entero*.

**Definición 13.** *Partición válida de un entero.* Sea  $K_n(S)$  la gráfica completa inducida por un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general. Una partición  $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  es válida si cumple con las siguientes condiciones:

- Si  $a_1$  es igual a  $n$  entonces solo existe una ocurrencia de  $a_1$  en  $P$ .
- La suma  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = \binom{n}{2}$ .
- $m < n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ .

No existe una formula cerrada para conocer el número de particiones de algún entero  $n$ . Sin embargo, si se considera a las composiciones de un entero  $n$  como las secuencias de enteros positivos en donde el orden importa, es decir, dos composiciones diferentes del entero 3 serían  $\{2, 1\}$  y  $\{1, 2\}$ , entonces podemos acotar el espacio de búsqueda de las particiones de un entero. Como el número de composiciones para un entero  $n$  es  $2^{n-1}$  podemos decir que existen a lo sumo  $O(2^{n-1})$  particiones para el mismo entero  $n$ .

Usando esta definición generamos las particiones válidas para todo entero  $x \in \left\{ \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{10}{2} \right\}$ . En Knuth (2011b) se ofrece un algoritmo para generar las particiones de algún entero  $n$ . Nosotros utilizamos dicho algoritmo en este trabajo modificandolo para que genere solamente particiones válidas de un entero. Discutimos con más detalle el algoritmo en la sección 4.4.5. La tabla 4.6 muestra las particiones generadas por el algoritmo; es posible observar que para  $x \in \left\{ \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{7}{2} \right\}$  no existen particiones válidas, esto reafirma, para  $3 \leq n \leq 7$  el resultado del teorema 4.1.5 que establece una cota inferior para el anti-thickness geométrico de  $K_n$ . Por otro lado, no generamos las particiones para  $K_{10}$  ya que debido al tamaño de los archivos binarios generados con el algoritmo de búsqueda de thrackles no fue posible diseñar un algoritmo durante el tiempo del desarrollo de este trabajo.

Usando las particiones de la tabla 4.6 diseñamos una serie de procedimientos que buscan thrackles disjuntos usando las particiones como guía. Como hay cerca de 14 procedimientos para realizar esta tarea, expondremos

$n$	Particiones de $\binom{n}{2}$
8	$\{8, 7, 7, 6\}$
	$\{7, 7, 7, 7\}$
9	$\{9, 8, 8, 8, 3\}$
	$\{9, 8, 8, 7, 4\}$
	$\{9, 8, 8, 6, 5\}$
	$\{9, 8, 7, 7, 5\}$
	$\{9, 8, 7, 6, 6\}$
	$\{9, 7, 7, 7, 6\}$
	$\{8, 8, 8, 8, 4\}$
	$\{8, 8, 8, 7, 5\}$
	$\{8, 8, 8, 6, 6\}$
	$\{8, 8, 7, 7, 6\}$
	$\{8, 7, 7, 7, 7\}$

Tabla 4.6: Particiones de enteros del número de aristas de  $K_8$  y de  $K_9$ .

solamente uno de ellos en el algoritmo YX de la sección 4.4.6, los otros algoritmos son similares a este. Como resultado de estos procedimientos podemos dar el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.1.** Sea  $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  una partición válida para  $K_8$  o para  $K_9$ . No existe, para ningún dibujo diferente del convexo, una colección  $\mathcal{D} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  de thrackles disjuntos tales que  $|E(T_1)| = a_1, |E(T_2)| = a_2, \dots, |E(T_m)| = a_m$ .

*Demostración.* Se sigue del resultado de la ejecución de los algoritmos para evaluar colecciones de thrackles. Los algoritmos encuentran que, para ninguna partición de la tabla 4.6, existe una colección de thrackles disjuntos cuyo número de aristas corresponde a las particiones válidas de  $K_8$  y  $K_9$ .  $\square$

## 4.4. Algoritmos

En esta sección presentamos los algoritmos usados en el trabajo. Empezamos describiendo el algoritmo para encontrar thrackles de cualquier tamaño dado un conjunto de puntos en posición general. Después hablamos del al-

goritmo usado para encontrar la intersección de dos thrackles con el mismo número de aristas. Luego...Finalmente...

#### 4.4.1. Algoritmo para encontrar thrackles con $k$ aristas

A continuación presentamos el algoritmo para encontrar thrackles de tamaño  $k$ , donde  $k$  es dada. Usando este algoritmo se resuelve el problema de encontrar todos los thrackles con  $k$  aristas para todos los tipos de orden de alguna  $n$ . El algoritmo recibe como entrada los valores de  $n$  y  $k$  donde  $1 \leq k \leq n$ . Como salida se entrega el número de thrackles con  $k$  aristas y se generan archivos binarios con los datos de los thrackles encontrados.

Este algoritmo fue implementado en el lenguaje C++; utilizamos una estructura de datos llamada vector. Un vector es un contenedor que representa a un arreglo que puede cambiar de tamaño. El vector puede ser accedido igual que un arreglo (usando el operador `[]`) con la misma eficiencia.

Este algoritmo requiere tres pasos de preparación para funcionar. Describimos estos pasos a continuación. Para cada tipo de orden  $S$ :

1. Leer y almacenar el archivo que contiene el tipo de orden  $S$ . Los puntos se almacenan en un vector de tamaño  $n$  donde cada elemento es un objeto que contiene las coordenadas  $x$  y  $y$  de cada uno de los puntos de  $S$ .
2. Generar y almacenar las aristas de la gráfica completa inducida por  $S$ . Para cada punto almacenado  $p_i$  creamos todas las aristas (no dirigidas) que tienen como punto inicial a  $p_i$  y como punto final a  $p_j$  donde  $i+1 \leq j \leq n$ . Las aristas son almacenadas en un vector de tamaño  $\binom{n}{2}$  y las etiquetamos con enteros desde 0 hasta  $\binom{n}{2} - 1$ .
3. Construir la *matriz de disyunción*. Construimos una matriz binaria de  $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ . La matriz es almacenada en un arreglo de arreglos convencional. Cada índice de las filas y de las columnas representa a cada una de las aristas de  $K_n(S)$  de manera tal que la fila  $i$  representa a la arista que tiene la etiqueta  $i$ , consideramos que la enumeración de las filas y columnas de la matriz empieza desde 0, por lo que  $i \in [0, \binom{n}{2} - 1]$ . Esto ocurre de la misma manera para las columnas.

La matriz de disyunción tiene un 0 en la entrada  $(i, j)$  si las aristas  $i$  y  $j$  se cruzan o comparten un vértice y tiene un 1 en la entrada  $(i, j)$



si las aristas  $i$  y  $j$  son totalmente disjuntas. Es decir, construimos la matriz de adyacencia de la gráfica  $D(S)$ .

A continuación describimos el algoritmo que usamos para encontrar thrackles de tamaño  $k$ , este algoritmo usa la matriz de disyunción construida en el paso 3. El pseudocódigo se encuentra en el algoritmo 1.

El algoritmo que diseñamos utiliza la técnica de *backtracking*, recordemos que se desea encontrar todos los thrackles de tamaño  $k$ . Para nosotros, un solo thrackle de tamaño  $k$  es una solución. Una solución es almacenada en un vector  $C$ . En cada entrada del vector se almacenan las etiquetas que conforman un thrackle con  $k$  aristas.

En cada iteración, el algoritmo verifica si ya se han encontrado  $k$  aristas que se intersectan a pares, para evaluar la intersección se usa la matriz de disyunción.

Supongamos que el vector  $C$  tiene entradas desde  $C[0]$  hasta  $C[j]$  y que  $j + 1 < k$ . Esto quiere decir que las aristas  $C[0], C[1], \dots, C[j]$  forman un thrackle con  $j + 1$  aristas. El algoritmo buscaría extender el tamaño de este thrackle en uno. Para esto hacemos  $C[j + 1] = C[j] + 1$  y verificamos que  $C[j + 1]$  interseque a  $C[0], C[1], C[2], \dots, C[j - 1], C[j]$ . Si lo hace, entonces  $C[j + 1]$  forma parte del thrackle y ahora el thrackle tiene  $j + 2$  aristas. En caso contrario hacemos  $C[j + 1] = C[j + 1] + 1$ , es decir, se descarta la arista que estaba en  $C[j + 1]$  y es reemplazada por la arista subsecuente en la etiquetación.

Si en algún momento la entrada  $C[j]$  tiene un valor mayor o igual a  $\binom{n}{2}$ , esto es, que ya agotó los valores posibles para representar alguna arista en  $K_n$ , entonces, se incrementa el valor de la entrada  $C[j - 1]$  en uno y se continua la verificación a partir de esta entrada. Esto permite que el algoritmo realice el proceso de *backtracking*.

Si el vector  $C$  tiene  $k$  entradas, es decir, encontró un thrackle con  $k$  aristas entonces almacenamos el contenido del vector  $C$  en una lista de vectores. Como ya se encontró una solución y esta ha sido procesada, para buscar la siguiente solución, le indicamos al algoritmo que el thrackle tiene actualmente tamaño  $k - 1$ , provocando así que en la siguiente iteración se busque incrementar el tamaño del thrackle en uno.

Es posible observar un ejemplo de cómo se llena el vector  $C$  en una ejecución del algoritmo en la figura 4.4.

En el inicio de la ejecución del algoritmo, el vector  $C$  está vacío, es decir, que todas sus entradas tienen un valor nulo a excepción de la primera entrada

$C[0]$  cuyo valor es 0. Esta inicialización es necesaria para poner en marcha el algoritmo. De esta manera, el algoritmo encuentra primero todos los thrackles que contengan a la arista con etiqueta 0. Una vez que la posición  $C[0]$  tenga un valor mayor o igual a  $\binom{n}{2}$ , el valor de  $C[0]$  será igual a 1. Esto hará que el algoritmo busque los thrackles que contengan a la arista con etiqueta 1. Este proceso se repite para todos los valores entre 0 y  $\binom{n}{2} - 1$ .

Este algoritmo solamente genera soluciones que son efectivamente thrackles. Puesto que en  $C$  solo se avanza a la siguiente posición cuando se encuentra que la arista de la posición actual intersecta a las aristas anteriormente establecidas. Además, el algoritmo genera todos los thrackles con  $k$  aristas. Si no lo hiciera significaría que no evaluó determinada combinación de aristas, lo cual no es posible. El algoritmo evalúa virtualmente todas las combinaciones posibles de aristas ya que, para cada entrada  $1 \leq j \leq k$ ,  $C[j]$  toma valores en el rango  $[C[j-1], \binom{n}{2}]$ . Para el caso particular de la entrada  $C[0]$ , se toman los valores en el rango  $[0, \binom{n}{2}]$ . Las combinaciones que no se evalúan son aquellas que no hace sentido evaluar, estas son las combinaciones que contienen al menos una arista disjunta de alguna de las otras aristas de la combinación.

Los datos de los thrackles máximos encontrados para cada  $3 \leq n \leq 9$  pueden ser descargados de la siguiente liga: [http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos\\_tesis/3to9.tar.gz](http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/3to9.tar.gz) el archivo para  $n = 10$ , separado debido a su tamaño, puede ser descargado de la siguiente liga: [http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos\\_tesis/10.tar.gz](http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/10.tar.gz)

#### 4.4.2. Algoritmo para la intersección de dos thrackles

Dados dos thrackles con el mismo número de aristas, codificados como cadenas de enteros, aprovechamos el ordenamiento lexicográfico para hacer la operación de intersección de thrackles en tiempo lineal. Sea  $A$  y  $B$  dos vectores que representan las aristas de dos thrackles, con  $|A| = |B| = k$ . El algoritmo 2 entrega la intersección de  $A$  y  $B$  y la almacena en un conjunto  $C$ . Este algoritmo es secuencial y visita en el peor caso todas las entradas de los dos vectores.

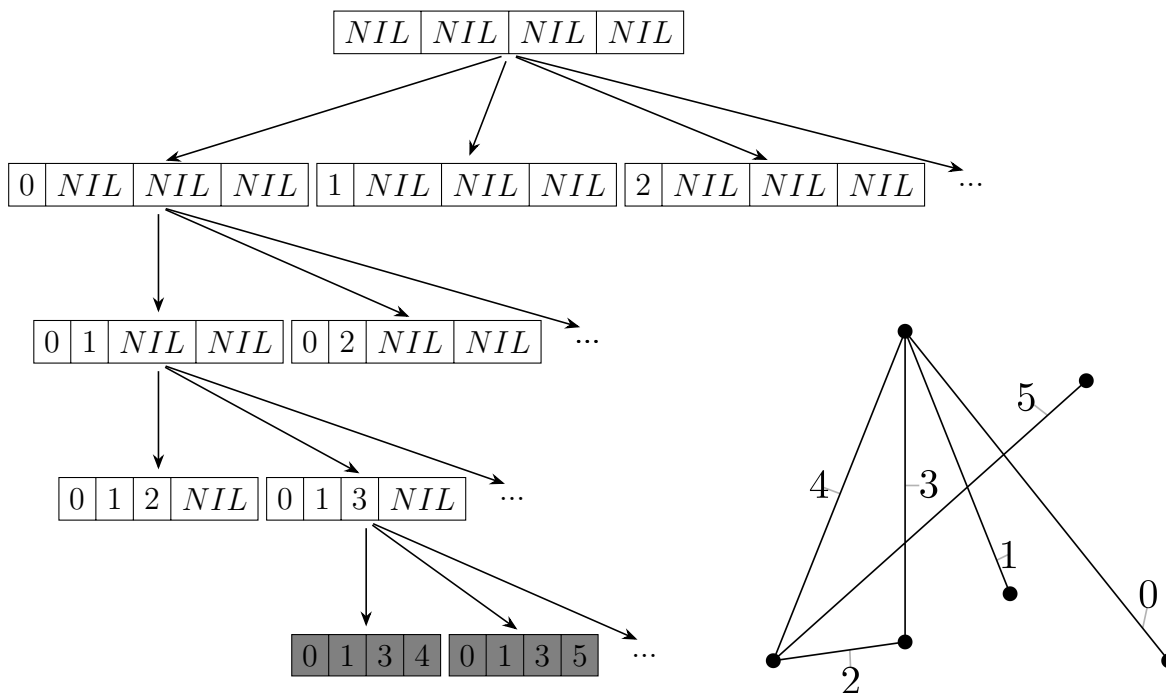


Figura 4.4: La figura muestra un ejemplo de cómo cambia el vector  $C$  cuando se busca un thrackle con 4 aristas para alguna  $n > 5$ . Solamente se representan algunas instancias del vector  $C$ . En este ejemplo suponemos que las aristas con etiqueta 1 y 2 no se intersectan. Es posible observar que cuando  $C = [0, 1, 2, NIL]$  no se generan, debajo de ese nivel, combinaciones con las etiquetas 1 y 2. Se marcan de fondo gris las soluciones encontradas. En el lado derecho presentamos un dibujo de una gráfica en la que se buscan los thrackles con 4 aristas.

---

**Algorithm 1** Algoritmo para encontrar todos los thrackles de tamaño  $k$ .

---

```

1: procedure ENCONTRARTHRACKLEK( $n, k$ )
2:   Sea  $C$  un vector de tamaño  $k + 1$ .
3:    $C[0] \leftarrow 0$ 
4:    $C[i] \leftarrow NIL$  para  $1 \leq i \leq k + 1$ 
5:   inters_flag  $\leftarrow$  true
6:   curr_size  $\leftarrow 0$ 
7:   while  $C[0] < \binom{n}{2}$  do
8:     while curr_size  $< k$  do
9:       inters_flag = true
10:      if  $C[curr\_size] \geq \binom{n}{2}$  then
11:        curr_size  $\leftarrow$  curr_size  $- 1$ 
12:        if curr_size  $< 0$  then
13:          return thrackle_counter
14:        end if
15:         $C[curr\_size] \leftarrow C[curr\_size] + 1$ 
16:        continue
17:      end if
18:      for  $i \leftarrow 0 \dots curr\_size - 1$  do
19:        inters_flag = inters_flag && matrix[ $C[i]$ ][ $C[curr\_size]$ ]
20:      end for
21:      if inters_flag == False then
22:         $C[curr\_size] \leftarrow C[curr\_size] + 1$ 
23:      else
24:        if curr_size + 1 ==  $k$  then
25:          thrackle_counter  $\leftarrow$  thrackle_counter + 1
26:          Almacenar  $C$  en una lista de vectores.
27:          continue
28:        end if
29:      end if
30:    end while
31:     $C[curr\_size + 1] \leftarrow C[curr\_size] + 1$ 
32:    curr_size  $\leftarrow$  curr_size + 1
33:  end while
34: end procedure

```

---

---

**Algorithm 2** Intersección de dos conjuntos ordenados en tiempo lineal.

---

```
1: procedure THRACKLEINTERSECTION( $A, B, C$ )  
2:    $i \leftarrow 0$   
3:    $j \leftarrow 0$   
4:   while  $i < k$  and  $j < k$  do  
5:     if  $A[i] < B[j]$  then  
6:        $i \leftarrow i + 1$   
7:       continue  
8:     end if  
9:     if  $A[i] == B[j]$  then  
10:       $C \leftarrow C \cup \{A[i]\}$   
11:       $i \leftarrow i + 1$   
12:       $j \leftarrow j + 1$   
13:      continue  
14:     end if  
15:     if  $A[i] > B[j]$  then  
16:        $j \leftarrow j + 1$   
17:       continue  
18:     end if  
19:   end while  
20: end procedure
```

---

#### 4.4.3. Algoritmo para encontrar colecciones de thrackles máximos que inducen descomposiciones en thrackles de $K_n$

El algoritmo que diseñamos para este resultado es exhaustivo y secuencial. Este algoritmo necesita un paso de preparación para funcionar:

- Seleccionar los tipos de orden válidos. Para cada tipo de orden, para  $3 \leq n \leq 10$ , examinamos cuáles tienen al menos  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  thrackles máximos. De los resultantes, examinamos cuáles tipos de orden cubren, con la unión de sus thrackles máximos, todas las aristas de  $K_n$ .

Después de la etapa de preparación, podemos empezar la búsqueda. Mostramos el pseudocódigo en el algoritmo 3. Una vez que sabemos cuáles son los tipos de orden que pueden tener una colección de thrackles máximos que inducen una descomposición, se buscan, de manera exhaustiva, todas las combinaciones posibles de colecciones de  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  thrackles máximos. Para cada una de las combinaciones verificamos si cubre o no a las aristas de  $K_n$ . Si la combinación cubre, almacenamos las etiquetas en una lista de soluciones y examinamos la siguiente combinación posible. En caso contrario se descarta esa combinación y se continúa examinando la siguiente combinación posible.

Las combinaciones fueron generadas usando el algoritmo descrito en Knuth (2011a). Dicho algoritmo tiene una complejidad de  $O\left(\frac{t}{n-t+1}\right)$  donde  $t$  es dada y es el tamaño de las combinaciones a generar. En nuestro caso,  $t = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ . De esta manera, para este problema, el algoritmo de generación de combinaciones tiene una complejidad de

$$O\left(\frac{n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor}{n - \left(n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor\right) + 1}\right) = O(n)$$

El costo computacional de este algoritmo depende de cuántos thrackles máximos exista en cada uno de los tipos de orden. Sea  $t = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  y sea  $k$  el número de thrackles en algún tipo de orden. El algoritmo examina

$n$	Número máximo de thrackles en un T.O.	Número de combinaciones
6	5	10
7	16	1,820
8	49	1,906,884
9	134	7,177,979,809
10	333	1,809,928,822,548

Tabla 4.7: Se cuantifica el número de combinaciones a examinar por el algoritmo para el tipo de orden válido con más thrackles de cada  $3 \leq n \leq 10$ . Para los casos de  $n = \{3, 4, 5\}$  no existen tipos de orden, diferentes al convexo, tal que la unión de thrackles máximos cubra las aristas de  $K_n$ .

las  $\binom{k}{t}$  combinaciones posibles. Si consideramos el mayor número de thrackles máximos, para cada  $n \leq 10$ , de entre todos los tipos de orden válidos podemos cuantificar el número de operaciones para ese caso en particular. Mostramos el número de combinaciones para cada caso en la tabla 4.7.

Para verificar si determinada colección de thrackles cubre a la gráfica completa se recorre cada una de las aristas de los thrackles de la colección. El costo computacional de este proceso en particular está dominado por el número de aristas de cada thrackle y el número de thrackles de la colección. En el mejor caso, en una colección de  $m$  thrackles, los thrackles tienen  $n, n-1, n-2, \dots, n-m+1$  aristas. Como se menciona en el teorema 4.1.5 esta suma es igual a  $-\frac{1}{2}m(m-2n-1)$  lo que asintóticamente equivale a  $O(mn)$ . En nuestro trabajo  $m$  es siempre igual a  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ , entonces, el costo de la verificación es  $O(n^2)$ .

Con el resultado anterior y el costo de calcular las combinaciones posibles podemos decir que el costo computacional del algoritmo es  $O(n^3)$ .

La implementación de este algoritmo fue ejecutada en el cluster. Presentamos el tiempo de ejecución en milisegundos para cada  $n$  con  $6 \leq n \leq 10$  en la tabla 4.8. Podemos notar que a pesar de que en el caso de  $K_{10}$  hay aproximadamente  $1.8E^{12}$  combinaciones posibles para uno de los tipos de orden de 10 puntos, el algoritmo termina en un tiempo considerable para nosotros.

---

**Algorithm 3** Búsqueda de colecciones de thrackles máximos que inducen una descomposición de  $K_n$

---

```

1: procedure SEARCHTHRACKLECOLLECTION(Lista  $L$  de tipos de orden
   válidos.)
2:    $t \leftarrow n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ 
3:   for  $i \in \{1, 2, \dots, |L|\}$  do
4:      $\mathcal{T} \leftarrow$  colección de thrackles máximos de  $L_i$ 
5:      $k \leftarrow |\mathcal{T}|$ 
6:      $C \leftarrow$  combinaciones de tamaño  $t$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ 
7:     for each  $c \in C$  do
8:        $solution \leftarrow \{T[c[1]], T[c[2]], \dots, T[c[k]]\}$ 
9:       if  $solution$  cubre las aristas de  $K_n$  then
10:        Almacenar  $solution$  en una lista de soluciones.
11:       end if
12:     end for
13:   end for
14: end procedure

```

---

$n$	Tiempo de ejecución
6	6 ms
7	6 ms
8	708 ms
9	25 minutos
10	—

Tabla 4.8: La tabla muestra cuánto tiempo tomó el algoritmo para calcular las colecciones de  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  thrackles que inducen una descomposición  $K_n$ .



#### 4.4.4. Algoritmo para verificar la optimalidad de una colección de thrackles máximos

#### 4.4.5. Algoritmo para generar particiones válidas de un entero

El algoritmo proporcionado en Knuth (2011b) genera las particiones de algún entero  $n$  con  $O(n^2)$  operaciones. De estas particiones, examinamos aquellas que tengan menos de  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  elementos y evaluamos si son válidas. Nuestro procedimiento para evaluar la validez de una partición tiene complejidad lineal. El pseudocódigo puede observarse en el algoritmo 4. En la evaluación recorreremos un arreglo de a lo sumo  $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  posiciones y verificamos que solamente exista una ocurrencia de  $n$ . De esta manera, el procedimiento de evaluación tiene una complejidad de  $O(n)$  lo que causa que la generación de particiones válidas tenga un costo total de  $O(n^3)$ .

---

**Algorithm 4** Algoritmo para evaluar si una partición dada es válida o no

---

```

1: procedure ISPARTITIONVALID(Entero  $n$ , Arreglo  $P$  de tamaño  $s$  )
2:    $c \leftarrow 0$ 
3:   for each  $i \in P$  do
4:     if  $i > n$  then
5:       Return false
6:     end if
7:     if  $i == n$  then
8:        $c \leftarrow c + 1$ 
9:     end if
10:    if  $c > 1$  then
11:      Return false
12:    end if
13:  end for
14:  Return true
15: end procedure

```

---

**4.4.6. Algoritmo para encontrar descomposiciones por thrackles de  $K_n$  usando particiones de enteros**

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

- Cómo caracterizamos los tipos de orden que no tienen thrackles máximos?
- Cómo caracterizamos los tipos de orden que tienen solo un thrackle máximo?





# Apéndice A

## Etiquetas de thrackles máximos

$n$	Tipo de Orden	Thrackles	$n$	Tipo de Orden	Thrackles
8	2	36 32 29 25 2	9	1287	62 56 39 35 24 3
		37 31 28 23 0			62 57 55 35 24 3
	54	32 29 26 16 2			62 57 56 35 24 3
9	12	101 96 93 68 33 2			63 56 35 20 6 0
	52	100 97 96 92 33 2			63 56 35 20 7 6
	54	82 78 75 52 33 2			63 56 35 21 20 0
	80	71 68 67 55 33 2			63 56 35 22 20 0
		72 68 67 55 33 2			63 56 35 24 3 0
		73 68 59 58 33 2			63 56 35 24 4 0
	696	79 76 73 40 22 2			63 56 35 24 5 0
	1080	37 33 32 29 15 2			63 56 35 24 6 0
	1287	57 55 44 35 24 3			63 56 35 24 7 3
		57 56 43 35 24 3			63 56 35 24 7 4
		57 55 50 35 24 3			63 56 35 24 7 5
		57 56 42 35 24 3			63 56 35 24 7 6
		57 56 44 35 24 3			63 56 35 24 12 0
		57 56 45 35 24 3			63 56 35 24 13 0
		57 56 48 35 24 3			63 56 35 24 14 0
		57 56 49 35 24 3			63 56 35 24 15 0
		57 56 50 35 24 3			63 56 35 24 17 0
		57 56 51 35 24 3			63 56 35 24 18 0
		60 56 39 35 24 3			63 56 35 24 21 0
		60 57 56 35 24 3			63 56 35 24 22 0
		61 56 39 35 24 3			63 56 39 35 24 3
		61 57 56 35 24 3			63 57 56 35 24 3
		62 55 39 35 24 3			

$n$	Tipo de Orden	Thrackles
10	81	176 168 156 125 38 0
	1328	150 142 113 100 39 0
	2243	121 119 85 67 42 3
		128 115 82 51 39 0





# Bibliografía

- Aichholzer, O., Aurenhammer, F., & Krasser, H. (2002). Enumerating order types for small point sets with applications. *Order*, 19(3), 265–281.
- Aichholzer, O., & Krasser, H. (2001). The point set order type data base: A collection of applications and results. In *CCCG*, vol. 1, (pp. 17–20).
- Araujo, G., Dumitrescu, A., Hurtado, F., Noy, M., & Urrutia, J. (2005). On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, 32(1), 59–69.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2008). *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, 1 ed.
- Dillencourt, M. B., Eppstein, D., & Hirschberg, D. S. (2004). Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, (pp. 39–51). World Scientific.
- Dujmovic, V., & Wood, D. R. (2017). Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, abs/1708.04773.
- Fabila-Monroy, R., Hidalgo-Toscano, C., Leaños, J., & Lomelí-Haro, M. (2017). The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*.
- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018a). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*.
- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018b). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*, (p. 6).

- Fulek, R., & Pach, J. (2011). A computational approach to conway's thrackle conjecture. *Computational Geometry*, 44(6-7), 345–355.
- Hurtado, F. (2009). Edge colouring geometric complete graphs. [http://www.openproblemgarden.org/op/edge\\_colouring\\_geometric\\_complete\\_graphs](http://www.openproblemgarden.org/op/edge_colouring_geometric_complete_graphs).
- Knuth, D. (2011a). *The art of computer programming: Volume 4A, Combinatorial Algorithms: Part 1, Fascicle 3A*. Addison-Wesley.  
URL <http://www.cs.utsa.edu/~wagner/knuth/fasc3b.pdf>
- Knuth, D. (2011b). *The art of computer programming: Volume 4A, Combinatorial Algorithms: Part 1, Fascicle 3B*. Addison-Wesley.  
URL <http://www.cs.utsa.edu/~wagner/knuth/fasc3b.pdf>
- Lara, D., & Rubio-Montiel, C. (2019). On crossing families of complete geometric graphs. *Acta Mathematica Hungarica*, 157(2), 301–311.
- Pach, J. (2013a). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (pp. 465–484). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.  
URL [https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17)
- Pach, J. (2013b). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (p. 471). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.  
URL [https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17)
- Pach, J., & Sterling, E. (2011). Conway's conjecture for monotone thrackles. *The American Mathematical Monthly*, 118(6), 544–548.  
URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.118.06.544>
- Schaefer, M. (2018). *Crossing numbers of graphs*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press.