

Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year

# Abstract

# Resumen

# Dedicación

# Agradecimientos

# Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>                                  | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>Antecedentes</b>                                  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Gráfica . . . . .                                    | 7         |
| 2.2      | Gráfica geométrica . . . . .                         | 7         |
| 2.3      | Thrackles . . . . .                                  | 7         |
| 2.4      | Tipo de Orden . . . . .                              | 7         |
| 2.5      | Anti-thickness y anti-thickness geométrico . . . . . | 7         |
| <b>3</b> | <b>Estado del arte</b>                               | <b>8</b>  |
| <b>4</b> | <b>Resultados</b>                                    | <b>11</b> |
| <b>5</b> | <b>Conclusiones y trabajo futuro</b>                 | <b>12</b> |

# Chapter 1

## Introducción

# Chapter 2

## Antecedentes

2.1 Gráfica

2.2 Gráfica geométrica

2.3 Thrackles

2.4 Tipo de Orden

2.5 Anti-thickness y anti-thickness geométrico



## Chapter 3

### Estado del arte

Antes de hablar del anti-thickness y los resultados, es sensato hablar de otro concepto llamado **thickness** pues su definición está estrechamente relacionada con el anti-thickness. En el artículo de Eppstein y otros [2] se recupera la definición de thickness teórico y thickness geométrico, además proporciona cotas para éste último. Podemos definir el thickness de una gráfica en términos del índice crómico de una gráfica y mantenerlo coherente con la definición de Eppstein:  $\theta(G)$  : Mínimo  $k$  tal que existe una partición de las aristas de  $G$ , de tamaño  $k$  en gráficas planares.

Por otro lado el thickness geométrico  $\bar{\theta}(G)$ : Mínimo  $k$  tal que existe un dibujo geométrico  $G$  de  $G$  cuyas aristas pueden ser particionadas en  $k$  gráficas planas. Eppstein prueba que:

$$\bar{\theta}(G) \in [\lceil n/5.646 + 0.342 \rceil, \lceil \frac{n}{4} \rceil]$$

y encuentra el valor exacto para  $K_n$  con  $n \leq 12$  y  $n \in \{15, 16\}$ . También estudia el anti-thickness geométrico para gráficas completas bipartitas y demuestra:

$$\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \lceil \frac{\min(a,b)}{2} \rceil$$

Es natural pensar que si una gráfica puede ser descompuesta en sub-gráficas donde no existe ningún cruce entre dos aristas, es quizás posible descomponer la gráfica en sub-gráficas donde siempre ocurran cruces entre dos aristas, es decir en thrackles; este concepto es conocido como el anti-thickness.

Antes de examinar los resultados del anti-thickness, resulta interesante verificar el trabajo de Araujo y Urrutia [1]; aquí se define la gráfica de

disyunción  $D(S)$  de un conjunto  $S$  de puntos en el plano, donde considerando todos los segmentos de recta entre pares de vértices de  $S$  como los vértices de  $D(S)$ , existe una arista entre dos vértices si los dos segmentos de recta correspondientes se cruzan o comparten un vértice.

Si asignamos un color a cada vértices de  $D(S)$  de tal manera que dos vértices adyacentes no compartan color y además minimizamos el número de colores usados, obtenemos el número cromático de  $\chi(D(S))$ . Es fácil ver que una clase cromática de  $D(S)$  es un conjunto independiente y además un thrackle. Si ahora consideramos todos los posibles encajes de  $S$  en el plano y para cada uno encontramos  $\chi(D(S))$ , tendremos una lista de enteros que representa el tamaño mínimo de la descomposición en thrackles de una gráfica completa cuyos vértices están dados por  $S$  en el plano. Si de esta lista consideramos ahora el valor mínimo encontraremos el anti-thickness para la gráfica completa geométrica de  $n$  vértices. Sin embargo, en este trabajo se considera el máximo valor de dicha lista; definiendo entonces :

$$d(n) = \max\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbf{R}^2 \text{ en posición general , } |S| = n\}$$

De manera concreta, el trabajo presenta cotas para  $d(n)$ , y  $d_c(n)$  que se define de manera similar pero con  $S$  en posición convexa.

La diferencia entre  $d(n)$  y el anti-thickness reside en que el último nos quedamos con el mínimo de la lista de números cromáticos de  $D(S)$ , podríamos definir el anti-thickness geométrico de la gráfica completa de  $n$  vértices  $at(n)$  como sigue :

$$at(n) = \min\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbf{R}^2 \text{ en posición general , } |S| = n\}$$

Sin embargo, debido a que cuando  $K_n$  es encajado en el plano en posición convexa los dibujos posibles no presentan diferencias combinatorias, se tiene que el anti-thickness geométrico convexo de la gráfica completa de  $n$  vértices ( $cat(n)$ ) :

$$d_c(n) = cat(n)$$

Como se mencionó anteriormente el anti-thickness está relacionado con la descomposición de una gráfica en sub-gráficas donde siempre ocurren cruces, podemos verlo como el lado opuesto del thickness. Dujmovic y Wood [3] presentan resultados para casos especiales del anti-thickness. Por ejemplo, en árboles, 2-tracks, books, gráficas outerplanar, k-queues, entre otros haciendo observaciones de resultados anteriores. Además se prueba la relación entre

thickness y anti-thickness, concretamente prueban que para toda gráfica con anti-thickness  $k$  y thickness  $t$  :

$$k \leq t \leq \lceil \frac{3k}{2} \rceil$$

Los resultados presentados en ese trabajo que tienen que ver con el anti-thickness se enfocan en el caso específico de puntos en posición convexa. El principal resultado para posición convexa lo presenta Wood y Fabila [4]. Aquí se prueba que cuando los puntos están en posición convexa dos thrackles máximos comparten al menos una arista y por lo tanto la unión de  $k$  thrackles máximos tiene a lo más  $kn - \binom{k}{2}$  aristas. Luego, como una gráfica completa de  $n$  vértices tiene  $\binom{n}{2}$  aristas la resolución de la desigualdad

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}$$

otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness geométrico convexo que es

$$n - \lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rfloor$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica de disyunción  $D(S)$ . La coloración es lograda consiguiendo trazar caminos en una estructura conocida como polyomino en la que los vértices de  $D(S)$  son las filas y las columnas de dicha estructura. En este trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en  $D(S)$  y por lo tanto un thrackle. Concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el polyomino, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness geométrico convexo ( $cat(n)$ ) es:

$$n - \lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rfloor$$

Es importante notar que el anti-thickness geométrico convexo es acotado examinando el número mínimo y máximo de aristas aportadas por una colección de thrackles máximos, dicho de otra manera se basa en descomponer la gráfica completa convexa en thrackles máximos. Esta idea fue retomada en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.

## Chapter 4

## Resultados

## Chapter 5

### Conclusiones y trabajo futuro

# Bibliography

- [1] Gabriela Araujo, Adrian Dumitrescu, Ferran Hurtado, Marc Noy, and Jorge Urrutia. On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, 32(1):59–69, 2005.
- [2] Michael B Dillencourt, David Eppstein, and Daniel S Hirschberg. Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, pages 39–51. World Scientific, 2004.
- [3] Vida Dujmovic and David R. Wood. Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, abs/1708.04773, 2017.
- [4] Ruy Fabila-Monroy, Jakob Jonsson, Pavel Valtr, and David R Wood. The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*, 2018.