Prueba low

Tesista: David Gustavo Merinos Sosa
Directora de tesis: María Dolores Lara Cuevas

Teorema 1. *Para* $n > 4$, $\mathsf{at}(K_n) > 2$.

Demostración. Supongamos $\mathsf{at}(K_n) = 2$ con $n > 4$. Esto implica que existen dos thrackles T_1, T_2 tales que $|T_1 \cup T_2| \geq \binom{n}{2}$. En el mejor caso T_1 y T_2 son thrackles maximos y solo comparten una arista a pares. Entonces $|T_1 \cup T_2| \leq 2n - 1$, luego para $n > 4$ tenemos que $\binom{n}{2} > 6$.

$$\begin{aligned} 2n - 1 &\geq 6 \\ 2n &\geq 7 \\ n &\geq 3{,}5 < 4 \ \lightning \end{aligned}$$

De esta contradicción decimos que para K_n con $n > 4$ su antithickness es mayor a 2. $\square$

1. Encontrar el anti-thickness geométrico de K_n

Sea K_n^i el dibujo de K_n equivalente al tipo de orden i para n puntos. Supongamos que $\mathsf{at}(K_n^i) = \lambda_i$. Y que para este tipo de orden existen M thrackles máximos. Sea Λ_j con $j = 1 \ldots \binom{M}{\lambda}$ una conjunto de tamaño λ de thrackles máximos. Definimos $m_i = |\bigcup \Lambda_j|$

Si sucede que $m_i > \binom{n}{2}$, podemos decir que el tipo de orden i tiene anti-thickness a lo sumo λ. El anti-thickness del tipo de orden i es el λ más pequeño para el cual se cumple la condición anterior.

Si repetimos este análisis para cada dibujo de K_n, es decir, para cada tipo de orden, podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_n es el λ más pequeño resultante de todos los tipos de orden.

2. Saber si $\mathsf{at}(K_n) > k$ para $n > 6$

Supongamos $\mathsf{at}(K_n) = k$ con $n > 6$. Esto implica que existen k thrackles $T_1, T_2, \ldots T_k$ tales que $|T_1 \cup T_2 \cup \ldots T_k| \geq \binom{n}{2}$. En general, $|T_1 \cup T_2 \cup \ldots T_k| \leq$

$kn - m$ donde m es el total de aristas repetidas entre thrackles. Luego para $n > 6$, $\binom{n}{2} > 15$ tenemos que $\binom{n}{2} > 6$. Esto nos da la siguiente desigualdad:

$$kn - m \geq 15$$

Lo que implica que $\mathsf{at}(K_n) = k$ cuando $m \leq kn - 15$ para $n > 6$.

Por ejemplo, digamos que $k = 3, n = 7$ la anterior condición nos dice que el anti-thickness de K_7 será 3 si $m \leq 6$. Basta con examinar cada pareja de thrackles cuya intersección es de tamaño 1, y compararla con cada uno de los otros thrackles de su complemento, contar las aristas repetidas y observar que en todos los casos se repiten mas de 6 aristas, es decir $m > 6$. Por lo que podemos decir que $\mathsf{at}^{\mathsf{g}}(K_7) > 3$. Y luego, como $\mathsf{cat}(K_7) = 4$, $\mathsf{at}^{\mathsf{g}}(K_7) = 4$.

3. Estadísticas de repeticiones

n	**OT**	**Dec. size**	*min_rep*	*max_rep*
6	0	3	3	3
7	0	4	7	7
8	0	5	10	12
8	12	5	12	12
8	54	5	12	12
9	12	6	15	18
9	52	6	17	17
9	54	6	16	18
9	80	6	14	14
9	696	6	18	18
9	1080	6	16	16
9	1287	6	15	17

4. Lema

Teorema 2. *Dados dos thrackles máximos T_1 y T_2, su intersección en aristas es no vacía.*

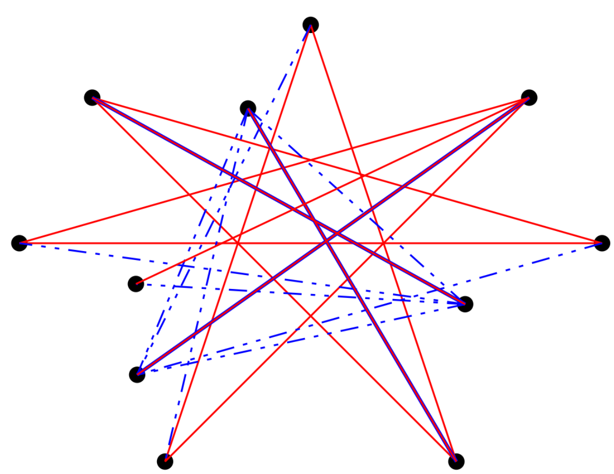
Demostración. Sea T_1 un thrackle máximo con $C_1 = V(C(T_1))$, seleccionamos k vértices tales que no estén en C_1 y con k impar para formar un ciclo impar C_2, cuyas cuñas contengan a $P - \{C_2\} = C_1$ y que además $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Necesariamente todo $v \in C_2$ es un vértice de grado 1 de T_1.

Entonces existen aristas de T_1 tales que inciden en vértices de C_2, o lo que es igual, aristas salientes de C_1 que acaban en C_2. Como las cuñas generadas por vértices de C_2 contienen a todo C_1 y las cuñas generadas por vértices de C_1 contienen a todo C_2, entonces existe una arista $e \in T_1$ tal que $e \in W_{T_1}(u) \cap W_{T_2}(v)$ con $u \in C_1, v \in C_2$. Notese que esta arista equivalentemente sale de algún vértice $v \in C_2$ y acaba en algún vértice $u \in C_2$.

Finalmente si decimos que $T_2 = C_2$ y luego agregamos todas las aristas que salgan de cuñas generadas por vértices de C_2 y acaban en vértices de C_1, lo cual es posible por construcción, tenemos que

$$T_2 \ni e, \Rightarrow T_2 \cap T_1 \ni e \Rightarrow T_2 \cap T_1 \neq \emptyset$$

$\square$



5. Doble contención

Caso en el que C_2 está contenido en la unión de exactamente 2 cuñas de C_1.
Sean u, u' vértices de C_1 cuyos ápices cubren a todo C_2:

$$\exists! v \in C_2 : v \text{ ve a } u$$

$$\exists! v' \in C_2 : v' \text{ ve a } u'$$

Si $v = v'$ entonces v ve a u y v ve a u', luego u ve a v o u' ve a v y hay doble contención.
Si $v \neq v$ entonces u ve a v' y u' ve a v, obviando la doble contención tenemos que suponer además que u no ve a v y u' no ve a v'.