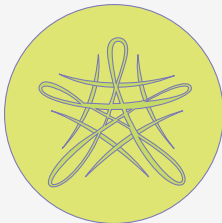


# Anti-thickness geométrico para gráficas completas con hasta diez vértices.

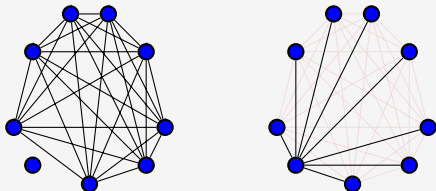


David Gustavo Merinos Sosa  
María Dolores Lara Cuevas (Ph. D)

1 de Noviembre de 2019



# Thickness, un problema opuesto



En 1961, Frank Harary propone un problema:

*Demuestre la siguiente conjetura: Para cualquier gráfica  $G$  con 9 vértices,  $G$  o su gráfica complemento  $\overline{G}$  es no planar.*

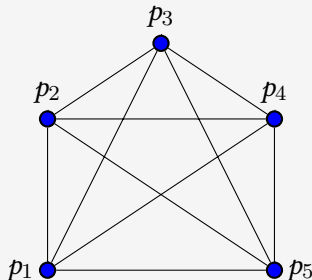
Harary, Battle y Kodoma y Tutte probaron, de manera independiente, que  $K_9$  no es la unión de dos *gráficas planares* (no es biplanar). En 1963, Tutte definió el *thickness* de una gráfica, generalizando el término de biplanaridad.

---

$\overline{G}$ : La gráfica inducida resultante de remover todas las aristas de  $G$  de  $K_n$

## Gráfica geométrica

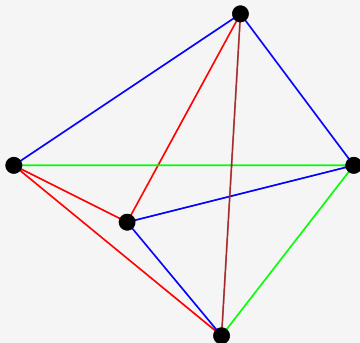
Una *gráfica geométrica*  $G = (V, E)$  es un par de conjuntos  $V$  de puntos en el plano y  $E$  de segmentos de recta que unen pares de puntos de  $V$ . Llamamos vértices y aristas a estos conjuntos, respectivamente. Una gráfica geométrica es *completa* si contiene a todas las aristas entre pares de vértices de  $V$ .



**Figura:** En esta gráfica geométrica  $V = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  y  $E = \{(p_1, p_2), (p_1, p_3), \dots, (p_4, p_5)\}$ . Esta gráfica geométrica es completa.

## Descomposición de una gráfica

Una descomposición de una gráfica  $G = (V, E)$  es una partición del conjunto de aristas  $E$  de  $G$ , denotado  $E(G)$ , en un conjunto  $\mathcal{D} = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  de subgráficas inducidas de  $G$  de tal manera que cada elemento de  $E(G)$  está en solamente un elemento de  $\mathcal{D}$ .

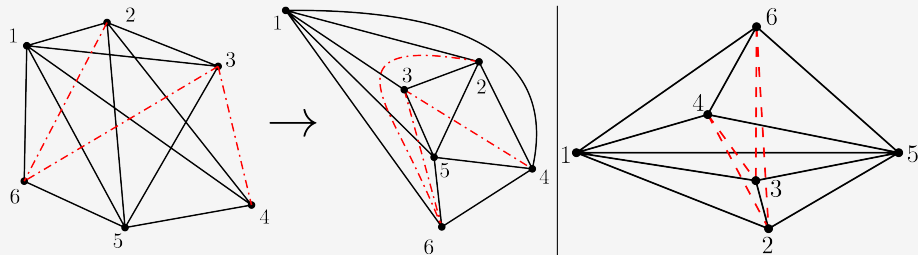


# Thickness Geométrico

Entonces podemos definir el thickness  $\theta(G)$  de una gráfica  $G$  como el mínimo número de gráficas planares en una descomposición de  $G$ .

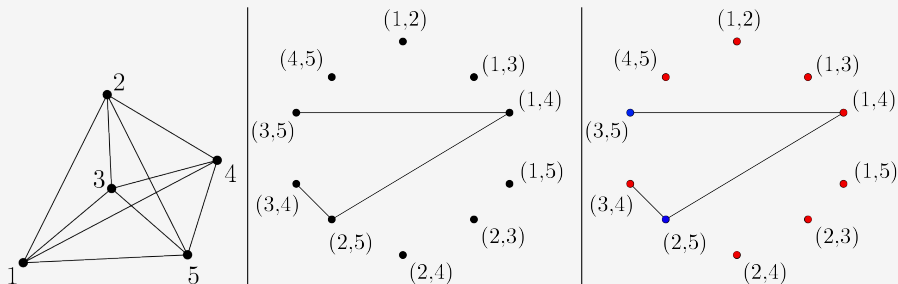
Y el thickness geométrico  $\bar{\theta}(G)$  como el número mínimo de gráficas *planas* que existen en una descomposición de  $G$ , para todos los *dibujos geométricos* de  $G$ .

En el año 2000, Dillencourt, Eppstein y Hirschberg dieron el valor exacto del *thickness geométrico* para gráficas completas.



## Gráfica de cruce

Nosotros llamamos gráfica de cruce  $C(S)$  a la gráfica cuyo conjunto de vértices es cada una de las aristas de  $K_n(S)$  y cuyo conjunto de aristas contiene la información de los cruces de  $K_n(S)$ . Es decir, existe una arista entre dos vértices cuando sus aristas correspondientes en  $K_n(S)$  se cruzan.



Si encontramos una coloración propia de  $C(S)$  las clases cromáticas representan gráficas planas. Luego, el número cromático  $\chi(C(S))$  nos dice el mínimo número de gráficas planas que hay en una descomposición de  $K_n(S)$ .

Por lo tanto:  $\bar{\theta}(K_n(S)) = \min\{\chi(C(S)) : S \subset \mathbb{R}^2, |S| = n\}$

---

El número cromático,  $\chi(G)$ , de  $G$  es el mínimo número de clases cromáticas en una coloración propia de  $G$ .



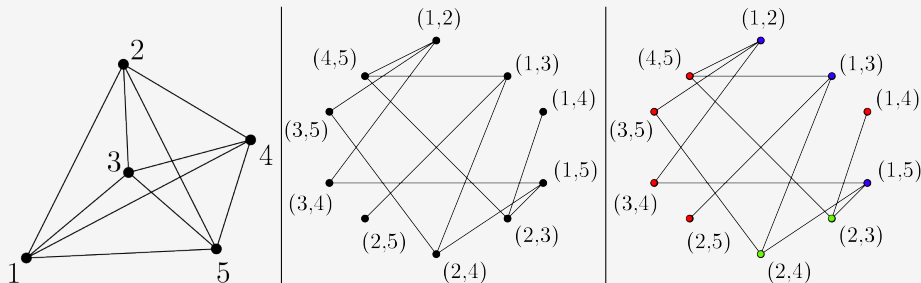
# Gráficas de adyacencia

Es posible codificar la información de los cruces de las aristas de una gráfica geométrica usando un tipo de gráficas a las que llamamos *gráficas de adyacencia*.

- Las gráficas de adyacencia tienen como conjunto de vértices a las aristas de la gráfica completa que es inducida por algún conjunto  $S$  de  $n$  puntos.

Existen otras gráficas de adyacencia a parte de  $C(S)$ , si consideramos otro criterio para definir las aristas de cada una podemos obtener diferente información.

# Gráficas de adyacencia



- $D(S)$ : Existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes son disjuntas. Las clases cromáticas son *thrackles*.

# Descomposiciones de gráficas

En 2000, Dillencourt *et al.* estudiaron:

$$\min\{\chi(C(S)) : S \subset \mathbb{R}^2, \text{ está en posición general, } |S| = n\}$$

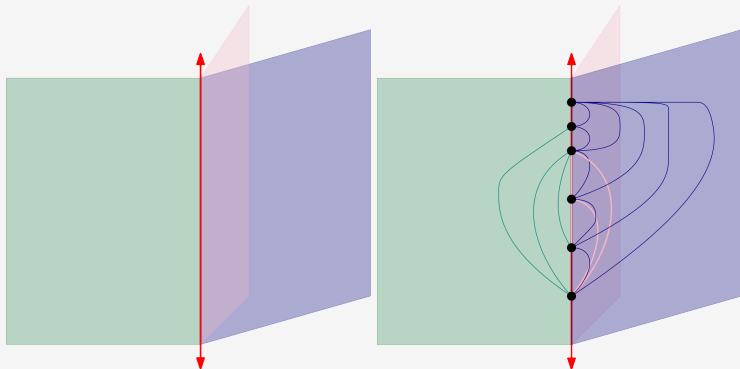
En 2005, Urrutia *et al.* estudiaron:

$$\max\{\chi(G(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S|=n\}$$

donde  $G(S)$  es cada una de las gráficas  $W(S), I(S), D(S)$ .

## Descomposiciones de gráficas (Book thickness)

Una variante del problema del thickness se basa en colocar los puntos de la gráfica completa sobre un espacio geométrico diferente del plano, específicamente sobre una recta que es compartida por un número finito de semiplanos.

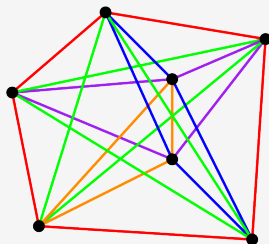
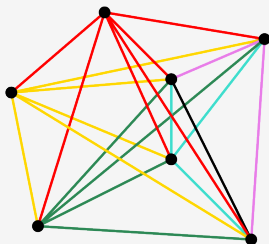
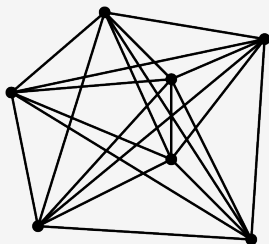


- El book-thickness es igual al thickness en posición convexa.

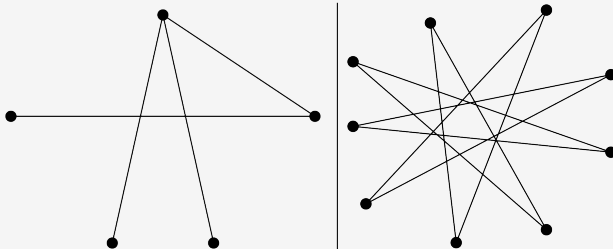
# Otras decomposiciones de gráficas

Solo en el plano:

- Bosques
  - Star arboricity
  - Linear arboricity
- Hamiltonian decomposition of complete graphs
- Cycle decomposition of complete graphs.
- *Thrackles*



# Anti-thickness geométrico



- Un *thrackle* es una gráfica geométrica en el que cada par de aristas se cruza o comparten un extremo.

Sea  $G$  una gráfica. El *anti-thickness geométrico* mide cuántos thrackles geométricos existen, como mínimo y para todos los dibujos de  $G$ , en una descomposición por thrackles geométricos de  $G$ .

## Anti-thickness geométrico y el número cromático

Recordemos que, si  $S$  es fijo,  $\chi(D(S))$  es el anti-thickness de una gráfica geométrica, inducida por  $S$ . Si tomamos todas las gráficas geométricas inducidas por diferentes conjuntos de puntos, y nos quedamos con el que tenga anti-thickness más pequeño, le llamamos anti-thickness geométrico.

$$\min\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}$$

## Anti-thickness geométrico y el número cromático

Recordemos que, si  $S$  es fijo,  $\chi(D(S))$  es el anti-thickness de una gráfica geométrica, inducida por  $S$ . Si tomamos todas las gráficas geométricas inducidas por diferentes conjuntos de puntos, y nos quedamos con el que tenga anti-thickness más pequeño, le llamamos anti-thickness geométrico.

$$\min\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}$$

Notación de anti-thickness geométrico de  $K_n$ :  $At_g(K_n)$ .

Observe que, si  $S$  está en posición convexa,

$$At_g(K_n) = \min\{\chi(D(S))\} = \max\{\chi(D(S))\} = d(n).$$



## Estado del arte

Para  $n \geq 3$ :

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Para encontrar alguna cota inferior es posible explotar alguna propiedad que se cumpla para todas las gráficas geométricas de  $K_n$ . Para encontrar una cota superior es posible ofrecer una descomposición de  $K_n$  en thrackles.

# Anti-thickness geométrico

Para  $3 \leq n \leq 10$ :

$$At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

## Estado del arte : cota inferior

Erdős *et al.*(1988) probaron que cada gráfica geométrica con  $n$  vértices en la cual no existen dos aristas disjuntas tiene a lo sumo  $n$  aristas.

Esto quiere decir que un thrackle con  $n$  vértices tiene a lo sumo  $n$  aristas.

## Estado del arte : cota inferior

En el trabajo de Wood & Dujmovic se menciona que para  $n \geq 3$ :

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n).$$

---

<sup>3</sup>En el mejor caso, una descomposición por thrackles es inducida por una colección de thrackles máximos.

## Estado del arte : cota inferior

En el trabajo de Wood & Dujmovic se menciona que para  $n \geq 3$ :

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n).$$

Esta cota inferior es la más sencilla, se basa en la noción del número máximo de aristas en un thrackle máximo.

Si la gráfica completa tiene  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  aristas, ¿cuántos thrackles máximos son necesarios para *cubrir* todas las aristas? Si suponemos que  $k$  thrackles máximos<sup>3</sup> son necesarios la siguiente desigualdad nos otorga el resultado si resolvemos para  $k$ :

$$k \cdot n \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

---

<sup>3</sup>En el mejor caso, una descomposición por thrackles es inducida por una colección de thrackles máximos.

## Estado del arte : cota inferior

En el trabajo de Wood & Dujmovic se menciona que para  $n \geq 3$ :

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n).$$

Esta cota inferior es la más sencilla, se basa en la noción del número máximo de aristas en un thrackle máximo.

Si la gráfica completa tiene  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  aristas, ¿cuántos thrackles máximos son necesarios para *cubrir* todas las aristas? Si suponemos que  $k$  thrackles máximos<sup>3</sup> son necesarios la siguiente desigualdad nos otorga el resultado si resolvemos para  $k$ :

$$k \cdot n \geq \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow k = \frac{n-1}{2}$$

---

<sup>3</sup>En el mejor caso, una descomposición por thrackles es inducida por una colección de thrackles máximos.

## Estado del arte : cota superior

Fabila-Monroy *et al.* encuentran el anti-thickness exacto para  $S$  en posición convexa. Para la cota inferior establecen el número mínimo de colores necesarios en una coloración propia de  $D(S)$  y para la cota superior dan una coloración propia para cualquier  $n$ , con  $n > 3$ .

## Estado del arte : cota superior

Fabila-Monroy *et al.* encuentran el anti-thickness exacto para  $S$  en posición convexa. Para la cota inferior establecen el número mínimo de colores necesarios en una coloración propia de  $D(S)$  y para la cota superior dan una coloración propia para cualquier  $n$ , con  $n > 3$ .

Ellos establecen que  $\chi(D(S)) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ , cuando  $S$  está en posición convexa.



## Estado del arte : cota superior

Fabila-Monroy *et al.* encuentran el anti-thickness exacto para  $S$  en posición convexa. Para la cota inferior establecen el número mínimo de colores necesarios en una coloración propia de  $D(S)$  y para la cota superior dan una coloración propia para cualquier  $n$ , con  $n > 3$ .

Ellos establecen que  $\chi(D(S)) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ , cuando  $S$  está en posición convexa.

Como la posición convexa es un dibujo de  $K_n$  tenemos:

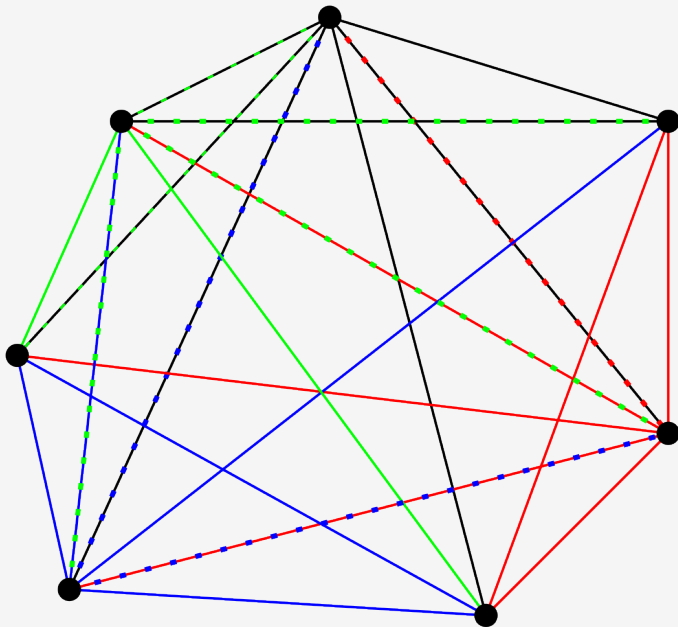
$$At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

## Estado del arte : thrackles máximos en posición convexa

Un resultado del trabajo de Fabila-Monroy *et al.* es que prueban que dos thrackles máximos en posición convexa siempre comparten al menos una arista. Esto significa que, en posición convexa y en el mejor caso, una colección de  $k$  thrackles máximos cubre a lo sumo  $kn - \binom{k}{2}$  aristas. Para obtener el valor más pequeño de  $k$  podemos resolver, para  $k$ , la siguiente desigualdad :

$$kn - \binom{k}{2} \geq \binom{n}{2}.$$

Usando la ecuación cuadrática encontramos que  $k = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ .



# Estado del arte : thrackles máximos en posición general

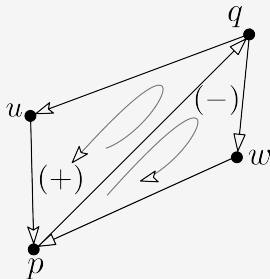
---

## Estado del arte : thrackles máximos en posición general

- En posición general es muy difícil dibujar thrackles máximos que sean disjuntos.
- La intuición nos dice que el resultado anterior es válido para posición general.
- ¿Cómo probamos *todas* las gráficas geométricas de  $K_n$ ?

## Tipo de orden

Aichholzer *et al.* definen el *tipo de orden* de un conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de puntos en posición general como una función que asigna a cada tripleta ordenada  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  la orientación de la tripleta de puntos  $\{p_i, p_j, p_k\}$ .



Decimos que dos conjuntos de puntos  $S_1$  y  $S_2$  son combinatoriamente equivalentes cuando tienen el mismo tipo de orden.

## Tipo de orden

Aichholzer *et al.* ofrecen una base de datos para los tipos de orden de  $3 \leq n \leq 10$ .

$n$	Número de tipos de orden	Tamaño (bytes)
3	1	6
4	2	16
5	3	30
6	16	192
7	135	1890
8	3315	53040
9	158817	5 717 412
10	14309547	572 381 880

**Cuadro:** Tipos de orden para cada  $n \leq 10$ .

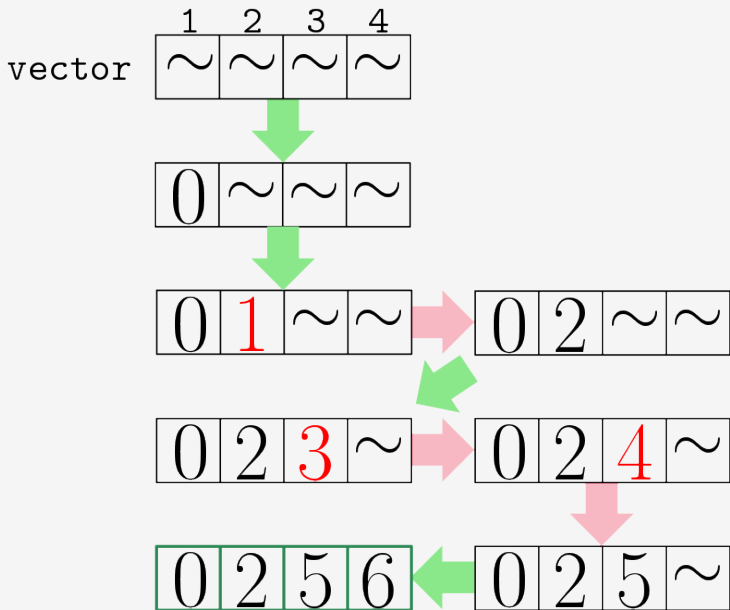
## Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

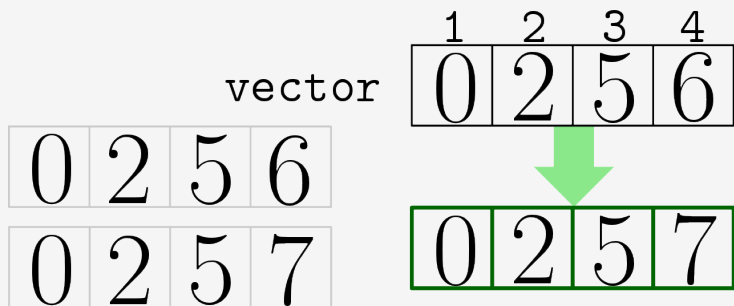
Para analizar cada par de thrackles máximos en algún dibujo de  $K_n$ , primero hay que encontrarlos. Por ello, construimos un algoritmo exhaustivo que usa *backtracking* para encontrar thrackles de cualquier tamaño. Nosotros llamamos  $k$ -thrackle a un thrackle de tamaño  $k$ .

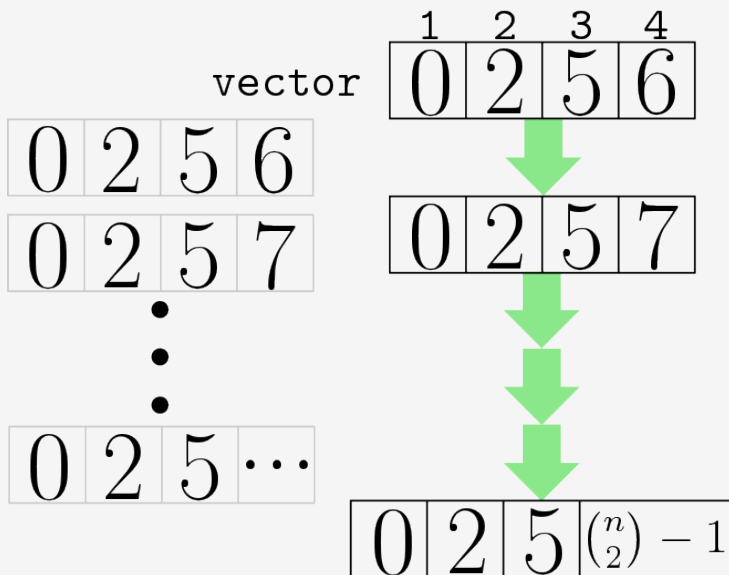


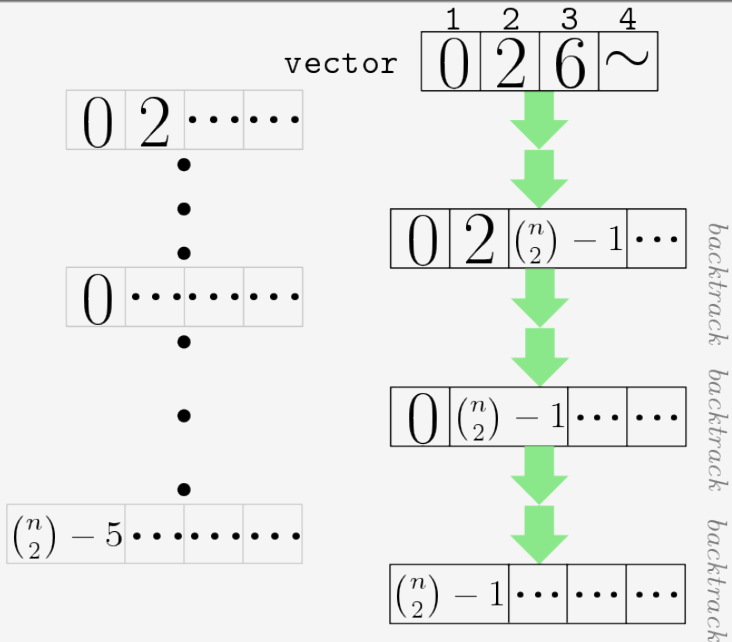
## Algoritmo de búsqueda de $k$ -thrackles

Nosotros representamos un thrackle con una tupla de aristas y cada arista está representada con un entero entre 0 y  $\binom{n}{2} - 1$ . Por ejemplo, si suponemos que las aristas 1, 2, 3 y 8 se intersectan a pares, entonces podemos definir un 4-thrackle,  $T = \{1, 2, 3, 8\}$ , compuesto por las aristas antes descritas.









## Costo computacional

El peor caso es aquel en el que evaluamos todas las combinaciones de tamaño  $t$  con  $t \leq k$ . Analizar una combinación de tamaño  $t$  toma  $O(t)$ .

Además existen  $\binom{\binom{n}{2}}{t}$  combinaciones de tamaño  $t$ . Entonces necesitamos

$t \binom{\binom{n}{2}}{t}$  operaciones para evaluar todas las combinaciones de tamaño  $t$ . En nuestro peor caso,  $t \in [1, 10]$ , por lo que el costo de nuestro algoritmo en el peor caso es:

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{t=1}^{10} t \binom{\binom{n}{2}}{t}\right) &= O\left(\binom{\binom{n}{2}}{1} + 2\binom{\binom{n}{2}}{2} + 3\binom{\binom{n}{2}}{3} + \cdots + 10\binom{\binom{n}{2}}{10}\right) = \\ &= O(n^2) + O(n^4) + O(n^6) + \cdots + O(n^{20}) = \\ &= O(n^{20}) \end{aligned}$$

## Costo computacional - tiempos de ejecución

En realidad, el algoritmo tomó mucho menos tiempo de lo calculado. Esto es porque el peor caso no ocurre. Características del cluster:

- Procesador de 8 núcleos con velocidad de 1.5 GHz.
- Memoria RAM de 64 GB.
- Almacenamiento en disco duro de 128 GB.

$n$	Tiempo teórico en cluster	Tiempo real en cluster
10	2113.99 años	3 días
9	257.01 años	12 minutos
8	24.36 años	6 segundos

## Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

Una vez que hicimos las intersecciones de cada par de thrackles máximos en todos los dibujos de  $K_n$ , con  $3 \leq n \leq 10$  encontramos los siguientes resultados:

- Para todo tipo de orden con al menos dos thrackles máximos, cada par de thrackles máximos tienen intersección no vacía en aristas.
- Existen tipos de orden con solo un thrackle máximo.
- Existen tipos de orden en los que no hay thrackles máximos.



## Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

Esto nos permite calcular el número exacto de aristas cubiertas, en el mejor caso, por una descomposición que es inducida por una colección de thrackles máximos.

Nosotros probamos que,  $m$  thrackles máximos pueden cubrir a lo sumo:

$$-\frac{1}{2}m(m - 2n - 1)$$

aristas de la gráfica completa.

## Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

Esto nos permite calcular el número exacto de aristas cubiertas, en el mejor caso, por una descomposición que es inducida por una colección de thrackles máximos.

Nosotros probamos que,  $m$  thrackles máximos pueden cubrir a lo sumo:

$$-\frac{1}{2}m(m - 2n - 1)$$

aristas de la gráfica completa.

$n$	$m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$	$-\frac{1}{2}m(m - 2n - 1)$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	2	9	10
6	3	15	15
7	3	18	21
8	4	26	28
9	4	30	36
10	5	40	45

## Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

De la misma manera, para saber cuántos thrackles son necesarios para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, debemos resolver la siguiente desigualdad para  $m$ :

$$-\frac{1}{2}m(m - 2n - 1) \geq \binom{n}{2}.$$

Usando la ecuación cuadrática encontramos que

$$m = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

# Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

$n$	$m = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$	$-\frac{1}{2}m(m-2n-1)$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	3	12	10
6	3	15	15
7	4	22	21
8	5	30	28
9	6	39	36
10	6	45	45

Tenemos una nueva cota inferior para  $3 \leq n \leq 10$ :

$$At_g(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

## Anti-thickness geométrico de $K_n$ para $3 \leq n \leq 10$

Con el resultado anterior y el resultado del estado del arte tenemos que, para  $3 \leq n \leq 10$ :

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

## Anti-thickness geométrico de $K_n$ para $3 \leq n \leq 10$

Con el resultado anterior y el resultado del estado del arte tenemos que, para  $3 \leq n \leq 10$ :

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

## Anti-thickness geométrico de $K_n$ para $3 \leq n \leq 10$

Recordemos que la cota superior fue obtenida encontrando el anti-thickness de un dibujo específico, el que está en posición convexa. Recordemos que si  $S$  es un conjunto de  $n$  vértices en posición convexa, entonces

$$At_g(K(S)) = \min\{D(S)\} = \max\{D(S)\} = d(n)$$

¿Qué pasa con el anti-thickness de dibujos en posición general no convexa?

## Anti-thickness de dibujos en posición general no convexa

Nosotros encontramos dibujos, en posición general no convexa, que tienen anti-thickness igual al anti-thickness del dibujo en posición convexa. Esto lo hicimos para cada  $n$  con  $3 \leq n \leq 10$ . Con esto podemos dar el anti-thickness geométrico exacto para  $K_n$ , con  $n$  en el rango antes mencionado.

Para encontrar estos resultados empleamos un algoritmo exhaustivo que busca descomposiciones por thrackles en la que cada elemento sea un thrackle máximo.



---

**Algoritmo 3:** Búsqueda de colecciones de thrackles máximos que inducen una descomposición de  $K_n$

---

1 función FindThrackleCollections ( $n, ot$ )

**Entrada:** Un entero  $n$ , un entero  $ot$  que representa algún tipo de orden válido de  $n$ .

**Salida :** Las combinaciones de  $At_g(K_n)$  thrackles máximos que pueden inducir una descomposición del dibujo de  $K_n$  inducido por el tipo de orden  $ot$ .

2  $c \leftarrow n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$

3  $\mathcal{T} \leftarrow$  colección de thrackles máximos del tipo de orden  $ot$

4  $k \leftarrow |\mathcal{T}|$

5  $C \leftarrow$  combinaciones de tamaño  $c$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$

6 **foreach**  $t \in C$  **do**

7      $solution \leftarrow \{T[t[1]], T[t[2]], \dots, T[t[k]]\}$

8     **if**  $solution$  cubre las aristas de  $K_n$  **then**

9         Almacenar  $solution$  en una lista de soluciones.

---

# Análisis de complejidad

$n$	Número máximo de thrackles en un T.O.	$At_g(K_n)$	Número de combinaciones
6	5	3	10
7	16	4	1,820
8	49	5	1,906,884
9	134	6	7,177,979,809
10	333	6	1,809,928,822,548

La complejidad de este algoritmo es alta, el análisis muestra que se necesitan

$$O(k^n n^3)$$

operaciones.

# Resultados de la ejecución

$n$	Tipo de Orden	Tamaño de la colección $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$	No. thrackles máximos
8	12	5	38
8	54	5	33
9	12	6	103
9	52	6	101
9	54	6	83
9	80	6	75
9	696	6	80
9	1080	6	40
9	1287	6	64
10	81	6	177
10	1328	6	151
10	2243	6	129

## Anti-thickness exacto para $K_n$ con $3 \leq n \leq 10$

Con estos dibujos cuyo anti-thickness es igual al anti-thickness de su respectivo dibujo convexo y la cota inferior descrita anteriormente, podemos dar el anti-thickness exacto para  $K_n$ , con  $3 \leq n \leq 10$ .

$n$	$At_g(K_n)$
3	1
4	2
5	3
6	3
7	4
8	5
9	6
10	6

# Conclusiones

- Encontramos el anti-thickness geométrico exacto para  $K_n$  con  $3 \leq n \leq 10$ .
- Conjeturamos que, en general, todos los thrackles máximos comparten al menos una arista a pares y que esto se cumple para  $n > 10$ .
- Sin embargo, no nos fue posible obtener la generalización del lema que probaría el punto anterior.
- ¿Cómo podemos caracterizar los conjuntos de puntos con y sin thrackles máximos?
- Analizamos otras propiedades geométricas como el número de cruce de cada conjunto de puntos y encontramos que hay una relación con el número de thrackles máximos de cada uno.

## Trabajo futuro

- Generalizar el teorema que indica que dos thrackles máximos en posición general comparten al menos una arista para toda  $n \geq 3$ .
- Usar algoritmos genéticos para aproximar una solución del anti-thickness usando la gráfica de disyunción  $D(S)$ .
- Analizar otras propiedades geométricas como la  $k$ -convexidad y reflexividad de un conjunto de puntos y encontrar una relación entre estos y el anti-thickness de un dibujo.
- Algoritmo o eurística para encontrar el anti-thickness de un dibujo geométrico.

# Thank You!