



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Anti-thickness geométrico de gráficas completas con hasta diez vértices.

TESIS QUE PRESENTA

David Gustavo Merinos Sosa

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias en Computación

DIRECTORA DE LA TESIS

Dra. María Dolores Lara Cuevas

México, Ciudad de México

Octubre 2019

Abstract

Resumen

En el campo de la geometría combinatoria y computacional una gráfica está definida por un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E de pares de elementos de V . Cuando la gráfica tiene todas las aristas entre pares de vértices decimos que la gráfica es completa. Una gráfica geométrica es un dibujo de una gráfica en el plano en la que cada vértice es representado por un punto en el plano y cada arista es representada por un segmento de recta que une dos puntos. Un thrackle geométrico es una gráfica geométrica en la que cada par de aristas es adyacente o se cruza. El anti-thickness geométrico de una gráfica es el mínimo número de thrackles que existen en una descomposición de algún dibujo de la gráfica. Encontrar el anti-thickness de gráficas completas es un problema abierto y equivale a encontrar el número cromático de una gráfica por lo que es un problema NP -difícil. Actualmente se conoce la cota inferior y la cota superior del anti-thickness geométrico para gráficas completas. La cota inferior se basa en contar cuántos thrackles son necesarios en una descomposición de tal manera que la unión de sus aristas sea el conjunto de las aristas de la gráfica completa y la cota superior se basa en encontrar una descomposición en thrackles de un dibujo de la gráfica completa cuando sus puntos están en posición convexa. En esta tesis encontramos el anti-thickness geométrico exacto para gráficas completas con hasta diez vértices. Usamos algoritmos computacionales para buscar thrackles en dibujos de gráficas completas y observamos que cada par de thrackles máximos se intersecta en al menos una arista lo que nos permitió probar que la cota inferior no es justa para gráficas con hasta diez vértices. Además hicimos observaciones con respecto a otras propiedades geométricas de los thrackles y las gráficas completas como el número de cruce y la reflexividad de un conjunto de puntos.

Dedicación

A mi hermano Eduardo, a mis padres María e Isaías, a Jehová mi Dios.

Agradecimientos

Agradezco al CONACYT sin el cual no habría sido posible completar este programa de maestría. Estoy también muy agradecido con mi asesora de tesis, la Doctora María Dolores Lara Cuevas por aceptarme como tesista y apoyarme en todo momento en el desarrollo de este trabajo. Gracias a mis compañeros de generación por las incontables horas de diversión.

Índice general

1. Introducción	13
2. Antecedentes	17
2.1. Gráficas	17
2.1.1. Gráfica geométrica	19
2.1.2. Thrackles	21
2.1.3. Tipo de Orden	23
2.2. Anti-thickness y anti-thickness geométrico	26
2.3. Número cromático	29
3. Estado del arte	31
4. Resultados	43
4.1. Cota inferior del anti-thickness geométrico de K_n	43
4.2. Cota superior del anti-thickness geométrico	51
4.2.1. Número de cruce de thrackles máximos	59
4.3. Anti-thickness de gráficas geométricas sin thrackles máximos .	61
4.4. Intersección de thrackles de K_n con $3 \leq n \leq 9$	64
4.5. Algoritmos	67
4.5.1. Algoritmo para encontrar thrackles con k aristas	69
4.5.2. Algoritmo para la intersección de dos thrackles	75
4.5.3. Algoritmo para encontrar colecciones de thrackles máxi- mos de K_n	75
4.5.4. Algoritmo para generar particiones guía de un entero .	80
4.5.5. Algoritmo para encontrar descomposiciones por thrac- kles de K_n usando particiones de enteros	83
4.5.6. Algoritmo para encontrar el anti-thickness de un dibujo de K_n	88

4.5.7. Algoritmo para dar el número de cruce de un thrackle máximo	97
5. Conclusiones y trabajo futuro	101
A. Etiquetas de thrackles máximos	105
B. Números de cruce para thrackles máximos	109
C. Tipos de orden con descomposiciones.	113
D. Lista de ligas.	125

Capítulo 1

Introducción

Un dibujo rectilíneo de una gráfica, también llamado gráfica geométrica, está definido por un conjunto de puntos en el plano, llamados vértices, y un conjunto de segmentos de recta que unen pares de puntos, llamados aristas. Un thrackle es un subconjunto de estos segmentos tal que cada par se cruza o tiene un extremo en común. En el área de geometría combinatoria existe un problema en el que, dada una gráfica, se busca saber cuál es el mínimo número de thrackles que existen en un conjunto de tal manera que cada thrackle tiene una de las aristas de un dibujo rectilíneo de la gráfica y no hay dos thrackles del conjunto que compartan una o más aristas y además, la unión de los thrackles es el conjunto de aristas de la gráfica. Este parámetro recibe el nombre de anti-thickness geométrico de una gráfica.

El anti-thickness geométrico ha sido estudiado con anterioridad, para gráficas geométricas completas cuyos vértices están en posición convexa, en el trabajo de Fabila-Monroy *et al.* (2018a). Denotamos este parámetro como $At_g(K_n)$; se sabe que

$$At_c(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Además, en el trabajo de Fabila-Monroy *et al.* (2017) encuentran el anti-thickness geométrico de una configuración de puntos conocida como la doble cadena convexa, denotada como $K_{k,l}$. En este trabajo los autores demuestran que el anti-thickness, $At_g(K_{k,l})$ de la doble cadena convexa es

$$At_g(K_{k,l}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

En el trabajo de Dujmovic & Wood (2017) se ofrecen varios resultados para distintos dibujos de una gráfica, y además las cotas del anti-thickness geométrico para el caso en el que los puntos de la gráfica completa están en posición general. Estas cotas son las siguientes:

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

La cota superior proviene de resultado obtenido para el anti-thickness geométrico cuando los puntos están en posición convexa mientras que la cota inferior proviene del hecho de que un thrackle con el máximo número de aristas tiene a lo más n aristas. Sin embargo, para dar la cota inferior se asume que cada par de thrackles con el máximo número de aristas no comparten ni una arista. Esto no es verdad en posición convexa, lo cual da lugar para cuestionarnos si en realidad esta cota es justa para posición general.

En esta tesis encontramos que en efecto el anti-thickness geométrico $At_g(K_n)$ de una gráfica completa es $At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ para $n \leq 10$. Nosotros analizamos los dibujos rectilíneos con hasta diez puntos para buscar conjuntos de thrackles usando algoritmos exhaustivos. También encontramos dibujos rectilíneos cuyos puntos no están en posición convexa cuyo anti-thickness es igual al proveído en el trabajo de Fabila-Monroy *et al.* (2018a). Adicionalmente analizamos la reflexividad, el número de cruce y la convexidad de estos dibujos para trata de clasificarlos. Encontramos una relación entre estos tres parámetros y el anti-thickness geométrico de la gráfica completa. Asimismo encontramos el anti-thickness exacto de dibujos rectilíneos en los que no existen thrackles con n aristas.

Para dar un resultado acerca de un parámetro como el anti-thickness es necesario encontrar propiedades que sean compartidas por cada uno de los dibujos de una gráfica, podemos encontrar dichas propiedades usando herramientas combinatorias o geométricas, o bien, analizando los dibujos de una gráfica computacionalmente, por ello, cada uno de nuestros resultados tiene un algoritmo computacional como sustento. Este enfoque resulta nuevo para la búsqueda del anti-thickness geométrico ya que, como mencionamos anteriormente, este problema ha sido atacado usando herramientas geométricas. Nuestros resultados, a pesar de que son para conjuntos pequeños de puntos, ayudan a entender cómo se comporta el anti-thickness geométrico para puntos en posición general dando un panorama para conjuntos más grandes de puntos.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 se explican a detalle y de manera más formal las definiciones que usamos en este trabajo y que son necesarias para entender el desarrollo de la tesis, en el capítulo 2 hacemos un recuento de los resultados obtenidos acerca del anti-thickness geométrico y tratamos de explicar el origen del concepto tomando en cuenta un problema propuesto con anterioridad, luego, en el capítulo 3, explicaremos los resultados del trabajo y cómo fueron obtenidos. En dicho capítulo exponemos los algoritmos usados para las búsquedas exhaustivas. Finalmente, en el capítulo 5 mencionamos nuestras conclusiones y posible trabajo futuro.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo damos algunas definiciones necesarias para presentar lo que se conoce como descomposición de gráficas completas en thrackles. Este es el principal problema que se trata en esta tesis. Empezamos estableciendo conceptos relacionados con gráficas abstractas y después hablaremos de gráficas en el plano, posteriormente explicamos el concepto de tipo de orden y cómo se utiliza en este trabajo, continuamos hablando del anti-thickness abstracto y del anti-thickness geométrico y finalmente explicamos el número cromático de una gráfica.

2.1. Gráficas

El concepto base del trabajo, del cual se desprenden otras definiciones, es el de gráfica. Todas las definiciones que presentamos en esta sección fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *gráfica* G está compuesta por un conjunto no vacío V de objetos a los que llamamos *vértices* y por un conjunto E , de parejas de elementos de V , a los que llamamos *aristas*. Denotamos a la arista e compuesta por los vértices u y v como (u, v) . Para describir a la gráfica G compuesta por el conjunto V de vértices y el conjunto E de aristas escribimos $G = (V, E)$. Para referirnos al conjunto de vértices de G escribimos $V(G)$ y para referirnos al conjunto de aristas de G escribimos $E(G)$. En la figura 2.1 presentamos un ejemplo de una gráfica.

Decimos que *dos vértices* $u, v \in V(G)$ *son adyacentes* si existe la arista $(u, v) \in E(G)$. Decimos que *dos aristas* $e_1, e_2 \in E(G)$ *son adyacentes* si inci-

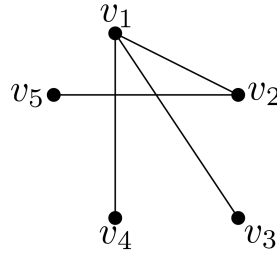


Figura 2.1: Una gráfica con cinco vértices y cuatro aristas. Los vértices v_1 y v_2 son adyacentes y las aristas (v_1, v_3) y (v_1, v_4) son adyacentes.

den en el mismo vértice. La figura 2.1 ilustra un ejemplo de estos conceptos. Una gráfica es *completa* si cada pareja de vértices en la gráfica es adyacente. Mostramos un ejemplo de adyacencia de aristas en la figura 2.1 y un ejemplo de una gráfica completa en la figura 2.2. Para denotar una gráfica completa con n vértices escribimos K_n . Una gráfica G es *bipartita* si es posible dar una partición¹ de $V(G)$ en dos subconjuntos U y W de tal manera que cada arista de G tenga un extremo en U y otro extremo en W . Presentamos un ejemplo de gráfica bipartita en la figura 2.3.

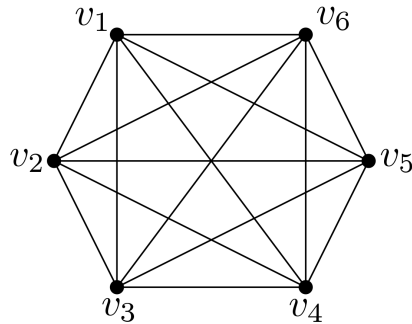


Figura 2.2: La gráfica completa con 6 vértices tiene una arista por cada par de vértices.

¹Una partición P de un conjunto X es una colección de subconjuntos que cumplen lo siguiente:

- Ningún elemento de P es el conjunto vacío.
- La unión de todos los elementos de P es exactamente el conjunto X .
- La intersección de cualesquiera dos elementos de P es vacía.

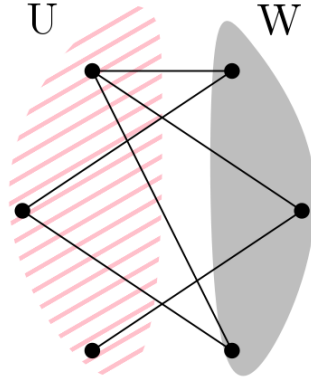


Figura 2.3: Un ejemplo de una gráfica bipartita con bipartición U, W , ambos conjuntos son de tamaño tres.

Una *descomposición* \mathcal{D} de una gráfica G es una colección $\mathcal{D} = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ de subgráficas de G , que cumple con dos condiciones:

1. Ninguna subgráfica G_i contiene vértices aislados.
2. Cada arista de G pertenece a exactamente una subgráfica G_i de \mathcal{D} .

En este trabajo decimos que una gráfica G cubre a una arista e si sucede que $e \in E(G)$.

Nótese que, en otras palabras, las subgráficas de la colección son disjuntas en aristas y su unión cubre a $E(G)$. La figura 2.4 ilustra un ejemplo de una descomposición de la gráfica K_4 .

En este trabajo hacemos descomposiciones de dibujos de gráficas (abstractas) en gráficas geométricas que cumplen con cierta propiedad, que explicamos más adelante. En la siguiente sección exponemos el concepto de dibujo de una gráfica y de gráfica geométrica.

2.1.1. Gráfica geométrica

En esta sección abordamos uno de los conceptos clave de este trabajo, que son las gráficas geométricas. Empezamos explicando el concepto de un *dibujo* de una gráfica (abstracta), para continuar con la descripción de un dibujo de una gráfica, con características especiales, al que llamamos *gráfica geométrica*.

Los primeros dos párrafos de esta sección fueron tomados de Pach (2013a). El tercer párrafo fue extraído de Lara & Rubio-Montiel (2019). El cuarto párrafo fue tomado de Pach & Sterling (2011).

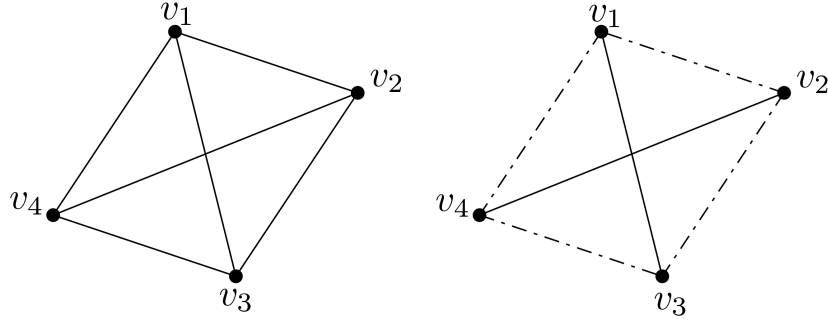


Figura 2.4: Un ejemplo de una descomposición \mathcal{D} de K_4 en dos gráficas. Aquí $\mathcal{D} = \{G_1, G_2\}$ donde G_1 es la gráfica inducida por las aristas $(v_1, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$ y G_2 es la gráfica inducida por las aristas $(v_1, v_3), (v_2, v_4)$.

Un *dibujo* $G = (V, E)$ de una gráfica G es una representación de la gráfica G en el plano tal que 1) cada vértice de G es representado por un punto en el plano y 2) cada arista de G es representada como una curva simple continua que conecta un par de puntos. El conjunto de vértices V y el conjunto de aristas E de G son los puntos y las curvas, respectivamente. Sin pérdida de generalidad nos referimos al conjunto de puntos de G como $V(G)$, y les llamamos vértices, y nos referimos al conjunto de curvas de G como $E(G)$, y les llamamos aristas.

Cuando restringimos las curvas que representan a las aristas del dibujo de G a segmentos de recta, llamamos al dibujo de la gráfica *gráfica geométrica*. Una gráfica geométrica es completa si existe un segmento de recta entre cada par de vértices de $V(G)$. En la figura 2.5 mostramos un dibujo de K_5 y una gráfica geométrica de K_5 . Sea S un conjunto de n puntos en posición general en el plano y sea G una gráfica geométrica de G . Decimos que G está definida sobre S si $V(G) = S$. Cualquier conjunto S de puntos en posición general induce una gráfica geométrica completa.

Todos los conceptos definidos para gráficas (abstractas) han sido heredados de manera natural para los dibujos de gráficas, sin embargo, como la gráfica geométrica está definida en el plano, es necesario redefinir el concepto de adyacencia de aristas. Decimos que dos aristas $e_1, e_2 \in E(G)$ se *cruzan* si existe un punto p , en alguna de las aristas, tal que en p la arista e_1 pasa de un lado de la arista e_2 hacia el otro lado. Decimos que dos aristas $e_1, e_2 \in E(G)$ son *adyacentes* si comparten un vértice. En este trabajo decimos que dos aris-

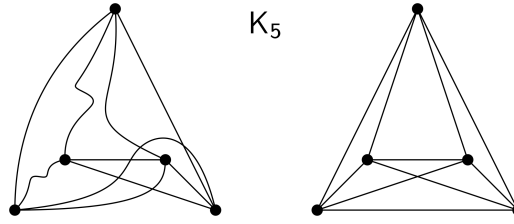


Figura 2.5: A la izquierda observamos un dibujo de K_5 y a la derecha observamos una gráfica geométrica de K_5 .

tas de una gráfica geométrica se *intersectan* si son adyacentes o si se cruzan. Mostramos un ejemplo de intersección de aristas en la figura 2.6.

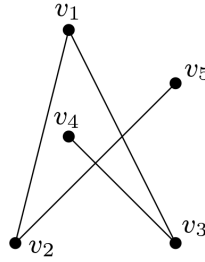


Figura 2.6: En este ejemplo la arista (v_1, v_2) no se intersecta con la arista (v_3, v_4) (son disjuntas) pero sí se intersecta con la arista (v_2, v_5) . La arista (v_2, v_5) se cruza con la arista (v_3, v_4) y por lo tanto se intersectan.

El concepto que estudiamos en esta tesis está relacionado con gráficas geométricas donde cada par de aristas se intersectan una vez, estas gráficas geométricas reciben el nombre de *thrackles*. En la siguiente sección explicamos formalmente qué son los thrackles.

2.1.2. Thrackles

Sea G un dibujo de una gráfica G . Decimos que G es un *thrackle* si cada par de aristas se intersecta exactamente una vez. La figura 2.7 ilustra un ejemplo de thrackle. Los thrackles fueron definidos por John Conway en la década de 1960 (Pach (2013a)). Conway también conjeturó que el número de aristas en un thrackle no puede exceder el número de sus vértices (Fulek & Pach (2011)). Un thrackle de n vértices es *máximo* si tiene exactamente n aristas. La figura 2.7 muestra un thrackle máximo.

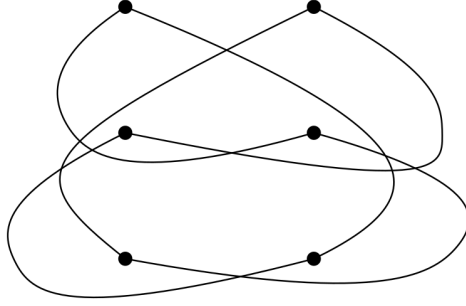
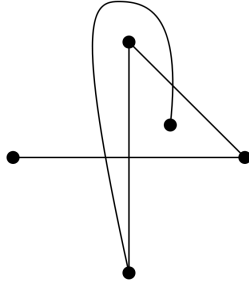
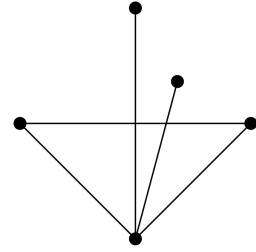


Figura 2.7: Un thrackle máximo sobre un conjunto de seis vértices.



(a) Un thrackle con cinco vértices.



(b) Un thrackle geométrico con cinco vértices.

Figura 2.8: Ambas figuras ilustran thrackles definidos sobre el mismo conjunto de puntos. En los dos casos el thrackle dibujado es máximo.

Una gráfica (abstracta) G es *thrackleable* si puede ser dibujada en el plano como un thrackle.

Una descomposición por thrackles D , de una gráfica geométrica G , es una colección $D = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ de subgráficas geométricas que cumple con tres condiciones:

1. Cada subgráfica G_i es un thrackle.
2. Ninguna subgráfica G_i contiene vértices aislados.
3. Cada arista de G pertenece a exactamente una subgráfica G_i de D .

Un thrackle en el que todas sus aristas son segmentos de recta es conocido como *thrackle geométrico* (Schaefer (2018)). En la figura 2.8 presentamos un ejemplo de thrackle y un ejemplo de thrackle geométrico. En este trabajo nos

referimos a los thrackles geométricos como thrackles ya que solo estudiamos descomposiciones de gráficas con thrackles geométricos.

Además definimos la intersección entre dos thrackles como sigue:

Definición 1. *Intersección de dos thrackles.* Sea T_i y T_j dos thrackles con el mismo número de arista, definimos la intersección de T_i y T_j como la intersección de sus conjuntos de aristas correspondientes. En otras palabras:

$$T_i \cap T_j = E(T_i) \cap E(T_j).$$

Decimos que dos thrackles T_i y T_j son disjuntos cuando $T_i \cap T_j = \emptyset$. Además, decimos que un thrackle T es de *tamaño* k si $E(T) = k$.

En este trabajo representamos un thrackle T de tamaño k con una tupla de enteros positivos $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ tales que $e_1 < e_2 < \dots < e_k$. Decimos que $T = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ tiene a las aristas e_1, e_2, \dots, e_k . Esta representación nos permite dar un orden para dos thrackles.

Definición 2. *Ordenamiento de dos thrackles.* Sea $T_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{t_1}\}$ y $T_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_{t_2}\}$ dos thrackles con tamaño t_1 y t_2 respectivamente. Decimos que $T_1 < T_2$ si y solo si existe $e_i \in T_1$ y $f_i \in T_2$ tal que $e_i < f_i$ o bien, si $t_1 > t_2$.

Para ejemplificar la definición anterior supongamos que $T_1 = \{1, 3, 6, 8, 12\}$ y que $T_2 = \{1, 3, 6, 9, 10\}$, en este caso $T_1 < T_2$ ya que $8 < 9$. Por otro lado, si $T_3 = \{1, 3, 4\}$ tenemos que $T_1 < T_3$ porque T_3 tiene tres aristas y T_1 tiene cinco aristas.

Dada una gráfica completa (abstracta) esta puede ser dibujada en el plano de muchas maneras, solo basta con mover un punto en cualquier dirección para obtener diferentes dibujos de la misma gráfica completa, de hecho hay un número no finito de dibujos para una sola gráfica abstracta. Estudiarlos todos no es posible y por ello necesitamos discretizar el número de posibles dibujos geométricos para una sola gráfica. El tipo de orden es una herramienta que otorga un número finito de dibujos combinatoriamente diferentes para gráficas abstractas. Explicamos este concepto a continuación.

2.1.3. Tipo de Orden

Para entender cómo funciona el tipo de orden de un conjunto de puntos debemos definir la orientación de una tripleta de puntos.

Tres puntos (p, q, w) en el plano en posición general, pueden tener una orientación en sentido horario o una orientación en sentido anti-horario. Decimos que (p, q, w) está orientada en sentido horario si w está a la derecha del segmento dirigido \overrightarrow{pq} . Si w está a la izquierda de dicho segmento entonces (p, q, w) está orientada en sentido anti-horario. Si la tripleta está orientada en sentido horario asignamos a esa tripleta el valor -1 . Si la tripleta está orientada en sentido anti-horario asignamos a esa tripleta el valor $+1$. En la figura 2.9 mostramos un ejemplo de cada orientación posible para una tripleta.

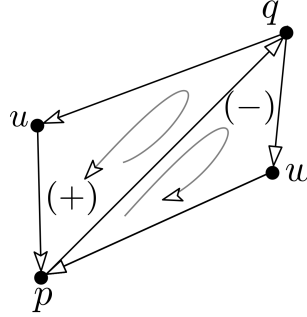


Figura 2.9: Esta figura muestra las posibles orientaciones de una tripleta de puntos. La tripleta $\{p, q, w\}$ tiene asignado el valor de (-1) porque w está orientado en sentido horario con respecto del segmento \overrightarrow{pq} . La tripleta $\{p, q, u\}$ tiene asignado el valor de $(+1)$ porque u está orientado en sentido anti-horario con respecto del mismo segmento.

Las definiciones siguientes fueron tomadas de Aichholzer *et al.* (2002). El tipo de orden de un conjunto $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de puntos en posición general, es una función que asigna a cada tripleta ordenada $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ la orientación de la tripleta de puntos $\{p_i, p_j, p_k\}$.

Decimos que dos conjuntos S_1 y S_2 son *combinatoriamente equivalentes* si tienen el mismo tipo de orden de otra forma, si no son equivalentes decimos que son *combinatoriamente distintos*. Si S_1 y S_2 son combinatoriamente equivalentes dos segmentos en S_1 se cruzan si y solo si los segmentos correspondientes en S_2 se cruzan. Solo hay una manera (combinatoriamente equivalente) de acomodar tres puntos, dos maneras de acomodar cuatro puntos y tres maneras de acomodar cinco puntos. En la figura 2.10 ilustramos los diferentes tipos de orden para conjuntos de tres y cuatro puntos. En la figura 2.11 presentamos conjuntos combinatoriamente equivalentes de cinco

puntos. En la figura 2.12 mostramos los diferentes tipos de orden para un conjunto de cinco puntos.

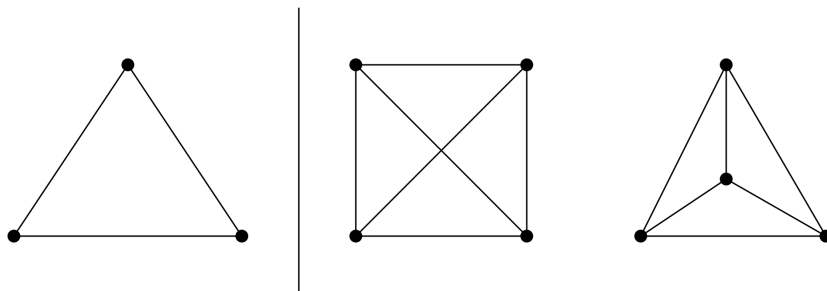


Figura 2.10: Las diferentes maneras combinatoriamente diferentes de acomodar 3 y 4 puntos.

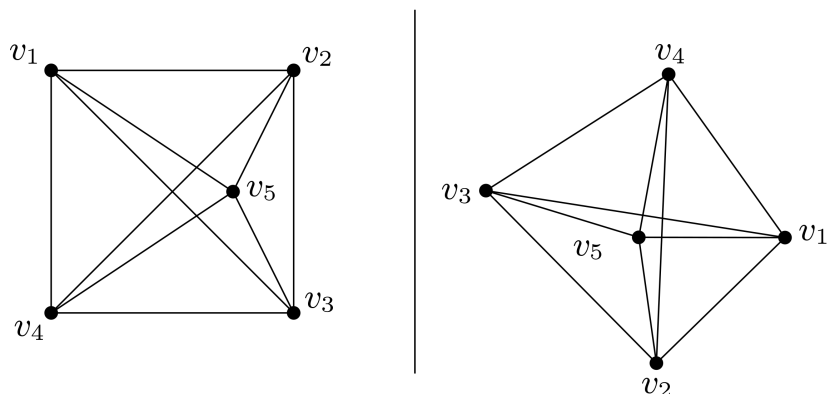


Figura 2.11: Estos dos conjuntos de puntos tienen el mismo tipo de orden. Observe que el valor de cada una de las tripletas del dibujo que está a la izquierda es igual al valor de las tripletas del dibujo a la derecha.

No es trivial enumerar o contar los conjuntos combinatoriamente diferentes, por ejemplo, dados n puntos podemos colocarlos en posición convexa y obtener el primer tipo de orden para n puntos, luego podemos colocar $n - 1$ puntos en posición convexa y un punto dentro del $(n - 1)$ -ágono y evaluar de cuántas maneras combinatoriamente distintas es posible colocar un punto dentro del polígono. Posteriormente podemos ver que pasa con $n - 2$ puntos en posición convexa y dos dentro del $(n - 2)$ -ágono y así sucesivamente hasta que tengamos 3 puntos en posición convexa y $n - (n - 3)$ dentro del

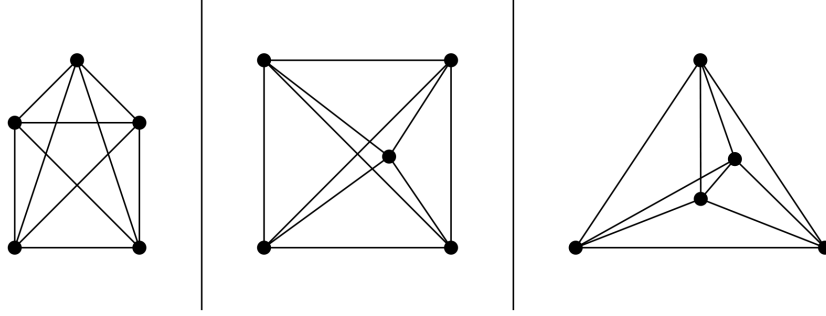


Figura 2.12: Las tres maneras diferentes de distribuir 5 puntos en el plano. Cualquier otra configuración es equivalente a alguna de estas tres configuraciones.

triángulo. En la figura 2.13 explicamos una parte de este proceso. Usando una técnica parecida se sabe que para $n = 10$ hay más de 14 millones de tipos de orden. En el trabajo de Aichholzer *et al.* (2002) se ofrece una base de datos que contiene los conjuntos combinatoriamente diferentes para toda $3 \leq n \leq 10$. En la tabla 2.1 se presenta el número de conjuntos diferentes para cada n y el tamaño en bytes de la base de datos.

En este trabajo buscamos descomposiciones de gráficas geométricas completas en thrackles. Como se mencionó antes, un conjunto de n puntos en posición general induce una gráfica completa de n vértices en el plano. Nosotros analizamos cada tipo de orden para cada $n \leq 10$ induciendo la gráfica completa de n vértices. Después examinamos sus thrackles y luego buscamos una descomposición. Cuando buscamos una descomposición que minimiza el número de thrackles utilizados estamos buscando el anti-thickness de la gráfica. Dicho concepto será explicado formalmente en seguida.

2.2. Anti-thickness y anti-thickness geométrico

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Dujmovic & Wood (2017).

Definición 3. *Anti-thickness de una gráfica.* El anti-thickness de una gráfica G es el entero k más pequeño tal que existe una partición de $E(G)$, de tamaño k , en la que cada elemento de la partición es una gráfica thracklable.

La figura 2.14 ilustra un ejemplo del anti-thickness de K_5 .

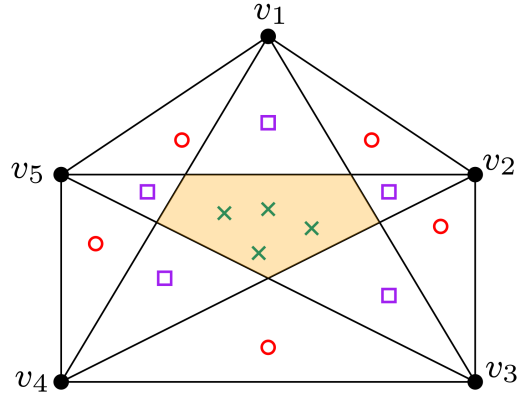


Figura 2.13: La figura ilustra las diferentes maneras de colocar un punto dentro de un pentágono, para formar un conjunto de 6 puntos en total. Hay al menos 3 formas diferentes de colocar dicho punto, 1) es posible ponerlo dentro del pentágono pero fuera del polígono en forma de estrella inducido por las aristas del ciclo interior. 2) Es posible ponerlo dentro de uno de los "picos" del polígono en forma de estrella y 3) es posible ubicarlo en el área rellena. Los puntos de 1) están representados con un círculo sin rellenar, los puntos de 2) con un cuadrado y los puntos de 3) con una cruz. La razón por la que existe más de una ocurrencia de un mismo tipo de punto es porque existe una equivalencia en la etiquetación de los vértices tales que los cruces se preservan.

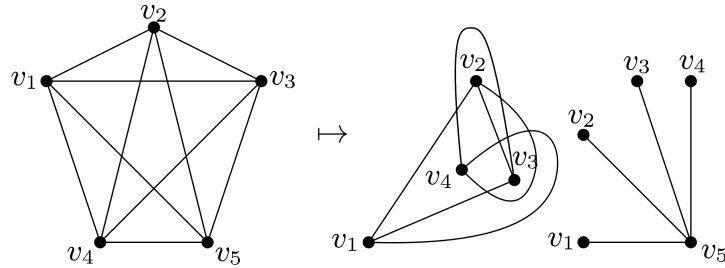


Figura 2.14: La figura muestra a K_5 a la izquierda y a la derecha dos thrackles cuya unión es K_5 . Consideremos las aristas de la gráfica completa inducida por los vértices 1, 2, 3, 4, estas aristas inducen un thrackle mientras que las aristas con un extremo en el vértice 5 inducen otro thrackle. El anti-thickness de K_5 es precisamente igual a dos. Este resultado se discute en el capítulo de resultados.

n	Número de tipos de orden	Tamaño (bytes)
3	1	6
4	2	16
5	3	30
6	16	192
7	135	1890
8	3315	53040
9	158817	5 717 412
10	14309547	572 381 880

Tabla 2.1: Tipos de orden para cada $n \leq 10$.

Cuando deseamos que los thrackles usados en la descomposición de la gráfica sean geométricos, entonces podemos definir el anti-thickness geométrico como sigue.

Definición 4. *Anti-thickness geométrico de una gráfica.* El anti-thickness geométrico de una gráfica G es el entero k más pequeño tal que existe un dibujo \mathbf{G} de G para el cual hay una partición de $E(\mathbf{G})$, de tamaño k , en la que cada elemento de la partición induce un thrackle.

Nótese que en la partición que realiza el anti-thickness de la gráfica, cada elemento de la partición tiene uno o más dibujos, mientras que en la partición que realiza el anti-thickness geométrico de la gráfica, cada elemento es una subgráfica geométrica del dibujo original.

En la figura 2.15 damos un ejemplo del anti-thickness geométrico de K_5 .

También es posible definir el anti-thickness de una gráfica geométrica como sigue:

Definición 5. *Anti-thickness de una gráfica geométrica* El anti-thickness $At_g(\mathbf{G})$ de una gráfica geométrica \mathbf{G} es el entero k más pequeño tal que existe una partición de $E(\mathbf{G})$, de tamaño k , en la que cada elemento de la partición es un thrackle.

Dar una descomposición de una gráfica en thrackles es equivalente a encontrar conjuntos independientes de aristas que comparten ciertas propiedades. A su vez, encontrar los conjuntos independientes de una gráfica está relacionado a encontrar el *número cromático* de una gráfica (abstracta). Discutimos esto en la siguiente sección.

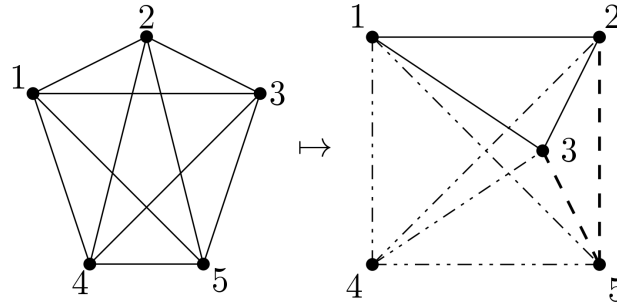


Figura 2.15: En esta figura podemos observar una descomposición de K_5 en 3 thrackles geométricos. Esta descomposición se muestra en la figura del lado derecho, cada thrackle está dibujado con diferentes patrones de línea. El anti-thickness geométrico de K_5 es exactamente tres, esto es demostrado en la sección de resultados.

2.3. Número cromático

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *coloración propia* de los vértices de una gráfica G es la asignación de colores a los vértices de G tal que cada vértice tiene un solo color asignado y dos vértices adyacentes tienen diferentes colores. Un color puede ser un color como rojo, verde, amarillo, etc. cuando el número de colores a usar es pequeño, de otra forma se usan enteros $1, 2, \dots, k$ para algún entero positivo k para representar los colores. Si la coloración propia usa k colores diferentes decimos que tenemos una k -coloración de la gráfica G . Dada una k -coloración de una gráfica G , si V_i es el conjunto de vértices de G que tienen el color i asignado, llamamos a V_i una *clase cromática* de G . El conjunto $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ genera una partición en conjuntos independientes de los vértices de G .

Una gráfica G es k -colorable si existe una coloración propia de G de tamaño k . El entero positivo k más pequeño para el cual G es k -colorable recibe el nombre de *número cromático* de G . Lo denotamos como $\chi(G)$.

La figura 2.16 muestra un ejemplo de una coloración propia de una gráfica G . En este ejemplo ilustramos cada clase cromática dibujando los vértices con diferentes colores representados por una cruz, un círculo y un cuadrado. Si tenemos una descomposición en k thrackles de una gráfica geométrica y asignamos uno de k colores a cada thrackle de la descomposición de tal manera que no existan dos thrackles del mismo color y si además minimizamos el valor de k entonces k es el anti-thickness de la gráfica geométrica

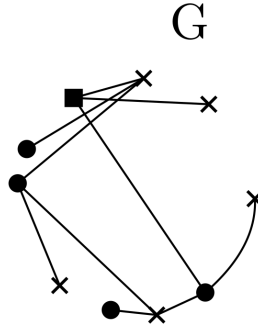


Figura 2.16: Una coloración propia de una gráfica G . Esta coloración es de tamaño 3, por lo tanto decimos que es una 3-coloración de G . Para esta gráfica en particular no existe una coloración más pequeña, por lo que su número cromático es 3. Nótese que los conjuntos independientes son formados por vértices que tienen el mismo color asignado y no son adyacentes entre sí.

dada. Esta idea ha sido utilizada para encontrar el anti-thickness de una gráfica geométrica cuyos vértices están en posición convexa. Detallamos este concepto en la siguiente sección.

En este capítulo explicamos los conceptos necesarios para entender el trabajo realizado en esta tesis. Empezamos hablando de gráficas abstractas y después de su representación en el plano usando aristas que son curvas y usando aristas que son segmentos de recta a las cuales llamamos gráficas geométricas. Continuamos definiendo un tipo especial de gráfica geométrica en la cual cada par de aristas se intersecta, este tipo de gráfica geométrica recibe el nombre de thrackle. Luego explicamos el tipo de orden como herramienta para discretizar el número de dibujos posibles de una gráfica en el plano. Después hablamos del anti-thickness geométrico de una gráfica como el mínimo número de thrackles que existen en una descomposición para todos los dibujos de una gráfica. Finalmente mencionamos el número cromático como el mínimo número de conjuntos independientes que existen en una partición de los vértices de una gráfica. Este último punto es de importancia para el siguiente capítulo pues explicamos cómo el problema de encontrar el anti-thickness geométrico de una gráfica puede ser visto como un problema de encontrar el número cromático. Además hablaremos de cuáles son los aportes más recientes acerca del problema del anti-thickness geométrico.

Capítulo 3

Estado del arte

Comenzamos este capítulo hablando del thickness de una gráfica, concepto que cronológicamente fue definido antes que el anti-thickness, y discutimos su relación con éste. Luego, mencionamos algunos resultados acerca del thickness. Después, explicaremos de qué manera el número cromático de una gráfica puede otorgar una descomposición de una gráfica geométrica. Finalmente discutimos los resultados actuales para el anti-thickness.

El thickness de una gráfica se define como sigue:

Definición 6. [Dillencourt *et al.* (2004)] *Thickness.* Sea G una gráfica, el thickness $\theta(G)$ de G es el mínimo entero k para el cual existe una partición de $E(G)$, de tamaño k , en la que cada elemento de la partición induce una gráfica planar.

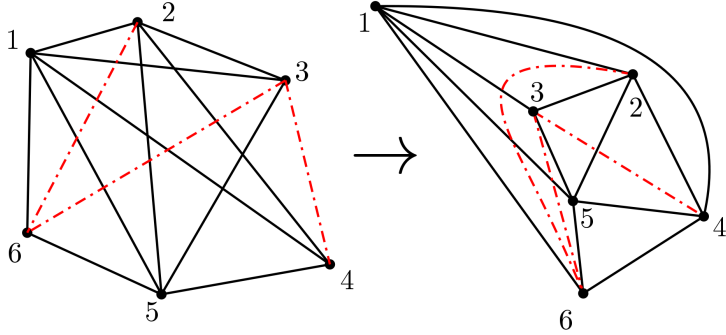
Este concepto también puede extenderse a gráficas geométricas, en este caso estaremos hablando del thickness de una gráfica geométrica:

Definición 7. *Thickness de una gráfica geométrica.* Sea G una gráfica geométrica, el thickness $th(G)$ de G es el mínimo entero k para el cual existe una partición de $E(G)$, de tamaño k , donde cada elemento de la partición induce una gráfica (geométrica) plana.

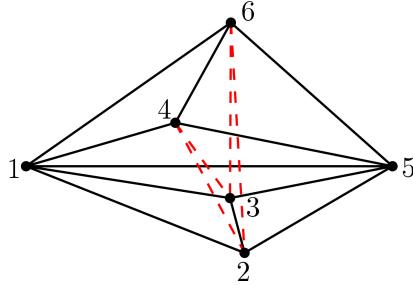
Finalmente podemos definir el thickness geométrico de una gráfica G .

Definición 8. [Dillencourt *et al.* (2004)] *Thickness geométrico.* Sea G una gráfica, el thickness geométrico $\bar{\theta}(G)$ de G es :

$$\bar{\theta}(G) = \min\{th(G) : G \text{ es una gráfica geométrica de } G\}.$$



(a) Una descomposición de tamaño 2 de K_6 .



(b) Un dibujo geométrico de K_6 y su descomposición en dos gráficas geométricas planas.

Figura 3.1: La figura (a) muestra que el thickness de K_6 es menor o igual a dos. La figura (b) muestra que el thickness geométrico de K_6 es menor o igual a dos. Sin embargo, en general, estos parámetros no coinciden.

En la figura 3.1 ilustramos un ejemplo del thickness de la gráfica completa de 6 vértices.

Dillencourt *et al.* (2004) demuestran que el thickness geométrico está acotado por:

$$\left\lceil \frac{n}{5.646} + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil.$$

En el mismo artículo encuentran el valor exacto del thicknes geométrico de cada gráfica completa con n vértices, para $n \leq 12$, así como para K_{15} y K_{16} . También estudian el thickness geométrico para gráficas completas

bipartitas y demuestran la siguiente cota:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{\min(a, b)}{2} \right\rceil.$$

Para explicar la relación entre el thickness y el anti-thickness es necesario hablar de coloraciones de vértices de gráficas de adyacencia. Recordemos que dadas dos aristas de una gráfica geométrica G , decimos que estas se *intersectan* si comparten un vértice (son adyacentes) o si se cruzan, y que son *disjuntas* si no se intersectan. La *gráfica de adyacencia* de una gráfica geométrica G tiene como conjunto de vértices a todas las aristas de G y sus aristas se definen a partir del tipo de adyacencia que se considere; se puede definir cuatro diferentes gráficas de adyacencia, estas se listan a continuación y se ilustran en la figura 3.2:

1. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en G se cruzan.
2. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en G comparten un vértice o son disjuntas.
3. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en G se intersectan.
4. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en G son disjuntas.

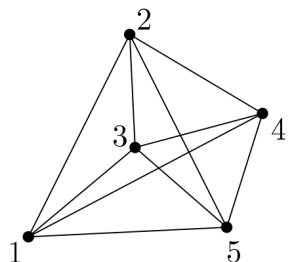
Ahora definimos una gráfica a la que llamamos *gráfica de cruce*.

Definición 9. *Gráfica de cruce.* Sea S un conjunto de n puntos en posición general en el plano y sea $K_n(S)$ la gráfica completa asociada a S . La gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ de S es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de $K_n(S)$ y una arista entre dos vértices de $E_{pp}(S)$ si sus aristas correspondientes se cruzan en $K_n(S)$.

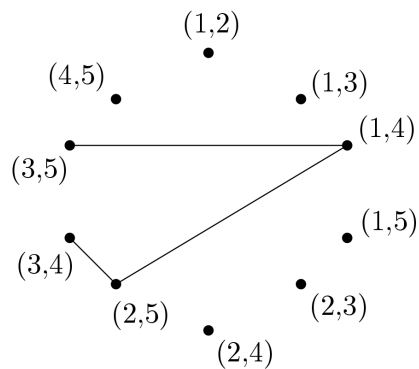
La gráfica $E_{pp}(S)$ corresponde a la gráfica de adyacencia 1.

En la figura 3.2b aparece un ejemplo de la gráfica de cruce $E_{pp}(S)$. Podemos notar que dado que en el dibujo de K_5 hay 3 cruces, en la gráfica $E_{pp}(S)$ hay 3 aristas.

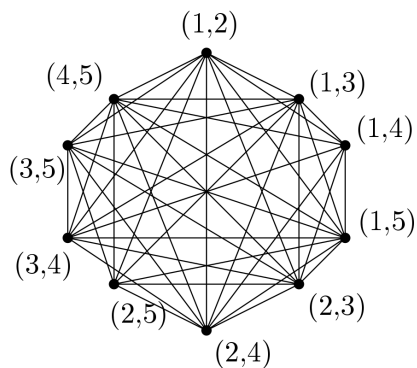
Los conjuntos independientes de $E_{pp}(S)$ corresponden a conjuntos de aristas de $K_n(S)$ que inducen gráficas planas. Luego, una coloración propia de los



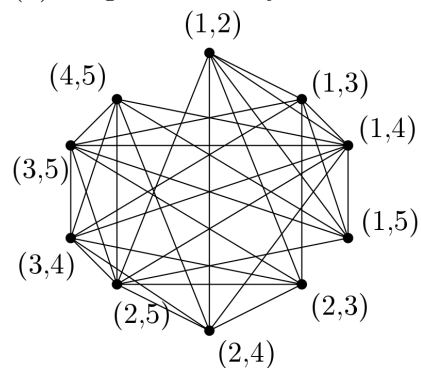
(a) Un dibujo geométrico de K_5 cuyo conjunto de vértices es $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



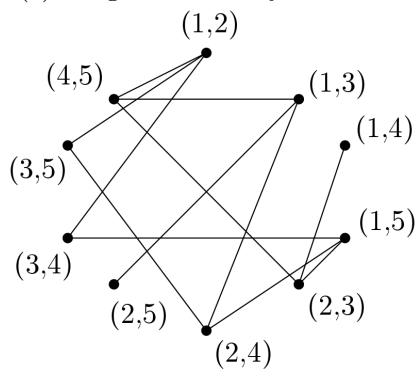
(b) La gráfica de adyacencia 1.



(c) La gráfica de adyacencia 2.



(d) La gráfica de adyacencia 3.



(e) La gráfica de adyacencia 4.

Figura 3.2: Una dibujo de K_5 y sus respectivas gráficas de adyacencia.

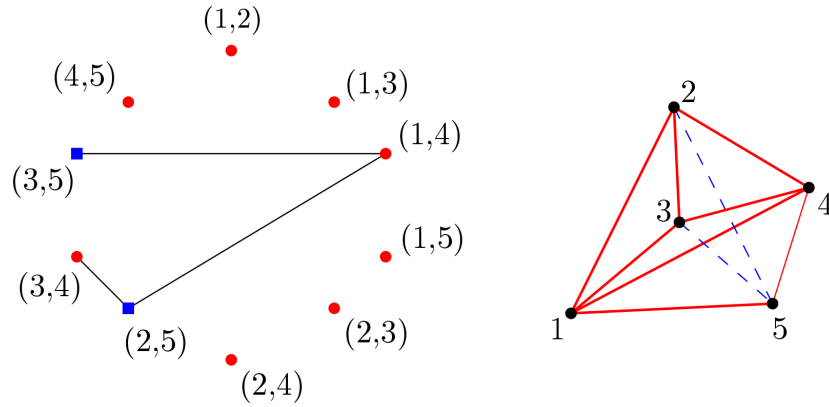


Figura 3.3: De izquierda a derecha: Una coloración propia de los vértices de $E_{pp}(S)$ con dos clases cromáticas indicadas como círculos y cuadros. Una descomposición de un dibujo de K_5 en dos gráficas planas cuyas aristas corresponden a cada una de las clases cromáticas de la coloración de $E_{pp}(S)$.

vértices de $E_{pp}(S)$ corresponde a una descomposición de $K_n(S)$ en gráficas planas. Por lo tanto encontrar el número cromático de la gráfica $E_{pp}(S)$ es equivalente a encontrar el thickness geométrico de $K_n(S)$. La figura 3.3 ilustra esta relación. El thickness geométrico de la gráfica completa de n vértices K_n se puede definir en estos términos como sigue:

Definición 10. *Thickness geométrico de una gráfica.*

$$\bar{\theta}(n) = \min\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S|=n\}.$$

De la misma manera que definimos la gráfica de cruce podemos definir otras gráficas de adyacencia. Para esto basta con considerar alguno de los otros tipos de adyacencia. En este sentido, en el trabajo de Araujo *et al.* (2005) se definen las gráficas que se listan en seguida, cada una corresponde a una de las cuatro gráficas de adyacencia mencionadas anteriormente. Sea S un conjunto de n puntos en posición general y $K_n(S)$ la gráfica completa asociada a S :

- $W(S)$: Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 2.
- $I(S)$: Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 3.
- $D(S)$ Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 4.

Gráfica	Conjuntos independientes en $K_n(S)$
$W(S)$	<i>Crossing families</i>
$I(S)$	<i>Emparejamientos planos</i>
$D(S)$	<i>Thrackles</i>
$E_{pp}(S)$	<i>Gráficas planares</i>

Tabla 3.1: Esta tabla muestra qué representan los conjuntos independientes en $K_n(S)$ para cada una de las gráficas definidas en Araujo *et al.* (2005) y para $E_{pp}(S)$. Una *crossing familie* es una colección de segmentos que se cruzan a pares Lara & Rubio-Montiel (2019).

A partir de aquí, nos referimos a las gráficas de adyacencia 1,2,3 y 4 como $E_{pp}(S)$, $W(S)$, $I(S)$ y $D(S)$, respectivamente.

Es fácil darse cuenta que la condición de existencia de aristas de $W(S)$ es complementaria a la condición en $E_{pp}(S)$ y viceversa. De la misma forma, las condiciones de $I(S)$ y $D(S)$ son complementarias entre sí. En la tabla 3.1 mostramos esta relación y las estructuras geométricas que inducen, en $K_n(S)$, los conjuntos independientes para cada gráfica de adyacencia.

Open problem garden es un sitio web en el que investigadores de diferentes áreas de las matemáticas, como algebra, combinatoria, teoría de números o teoría de gráficas, publican problemas abiertos para que la comunidad pueda leerlos libremente. En este sitio web Hurtado (2009) presenta un problema en el que se requiere asignar un color a cada arista de una gráfica geométrica completa usando, de manera implícita, cada una de las cuatro gráficas de adyacencia mencionadas antes.

En el artículo de Araujo *et al.* (2005) buscan el número cromático de cada una de las gráficas de adyacencia mencionadas anteriormente, los autores estudian los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 w(n) &= \max\{\chi(W(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S|=n\}. \\
 i(n) &= \max\{\chi(I(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S|=n\}. \\
 d(n) &= \max\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S|=n\}.
 \end{aligned}$$

Es usual estudiar el dibujo en posición convexa de una gráfica completa ya que se pueden explotar ciertas propiedades geométricas cuando se trabaja con un conjunto de puntos en posición convexa. Esta configuración es representada

por un solo tipo de orden para cada n . Para el caso en el que S está en posición convexa se denotan a estos valores como $w_c(n)$, $i_c(n)$ y $d_c(n)$. Es importante notar que, por consecuencia de la posición convexa, estos valores están definidos para un único tipo de orden. Nótese que $d_c(n) = \chi(D(S))$ para el caso en el que S está en posición convexa.

Los autores demuestran las siguientes cotas:

- $w_c(n) = \Theta(n \log n)$.
- $c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^2 \frac{\log \log n}{\log n}$, para $c_1, c_2 > 0$.
- $i_c(n) = n$.
- $n \leq i(n) \leq Cn^{3/2}$ para $C > 0$.
- $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \min\left(n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2}\right)$.
- $5\lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \min\left(n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{n}\right)$.

Ahora bien, como los conjuntos independientes de la gráfica $D(S)$ son thrackles, es posible definir el anti-thickness geométrico usando la gráfica $D(S)$ como sigue:

Definición 11. *Anti-thickness geométrico de una gráfica.*

$$At_g(n) = \min\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}.$$

De manera análoga si los puntos de S están en posición convexa definimos el anti-thickness convexo:

Definición 12. *Anti-thickness convexo de una gráfica.*

$$At_c(n) = \chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa, } |S| = n.$$

Como ya mencionamos antes, el anti-thickness convexo de la gráfica completa de n vértices es equivalente a $d_c(n)$. En otras palabras, sea S un conjunto de n puntos en posición convexa:

$$\begin{aligned} At_c(n) &= d_c(n) \\ \Rightarrow \chi(D(S)) &= \max\{\chi(D(S))\} \end{aligned}$$

Pero como solamente existe un solo dibujo cuando S está en posición convexa, entonces:

$$\text{máx}\{\chi(D(S))\} = \chi(D(S)).$$

A pesar de que en el trabajo de Araujo *et al.* (2005) se busca el número cromático de la gráfica $D(S)$ y con ello, como mencionamos antes, se busca el anti-thickness de una gráfica geométrica asociada a S , es importante notar que la definición $d(n)$ no es equivalente a la de anti-thickness. Dada una gráfica G : en $d(n)$ se busca el máximo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de G mientras que en el anti-thickness se busca el mínimo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de G .

Los autores de Dujmovic & Wood (2017) presentan resultados respecto a el anti-thickness para familias específicas de gráficas como árboles, gráficas outerplanar, y algunos dibujos como 2-tracks, books, k-queues, entre otros.

En su trabajo definen en anti-thickness como sigue:

Definición 13. *Anti-thickness de una gráfica.* Sea G una gráfica el anti-thickness $At(G)$ de G es el mínimo entero k para el cual existe una partición de $E(G)$ de tamaño k en la que cada elemento de la partición induce una gráfica thrackable.

Además dan una relación entre el thickness y anti-thickness de cualquier gráfica. Concretamente los autores prueban la siguiente cota para toda gráfica con anti-thickness k y thickness t :

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

Acerca del anti-thickness de gráficas completas en el mismo artículo prueban que

$$\frac{n}{3} \leq At(K_n) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

Respecto al anti-thickness geométrico, en los siguientes párrafos describimos cómo los autores de Fabila-Monroy *et al.* (2018a) encuentran el anti-thickness geométrico exacto para gráficas cuyo conjunto de vértices está en posición convexa.

Los autores prueban que cuando los vértices de la gráfica geométrica están en posición convexa dos thrackles máximos siempre comparten al menos una arista. Por lo anterior la unión de k thrackles máximos tiene a lo sumo $kn - \binom{k}{2}$ aristas. Entonces, como una gráfica completa de n vértices tiene $\binom{n}{2}$ aristas la resolución de la siguiente desigualdad otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness convexo.

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}.$$

Esta cota es:

$$At_c(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica $D(S)$. Puesto que como explicamos anteriormente este problema es equivalente a encontrar el número cromático de la gráfica. En el artículo logran la coloración trazando caminos en una estructura conocida como poliomínó Fabila-Monroy *et al.* (2018b) en la que los vértices de $D(S)$ son las filas y las columnas de dicha estructura. En dicho trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en $D(S)$ y por lo tanto representa un thrackle en K_n . Los autores concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el poliomínó, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness convexo tiene exactamente el siguiente valor:

$$At_c(n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

A continuación hablamos del trabajo de Fabila-Monroy *et al.* (2017) en donde encuentran el anti-thickness geométrico de una familia de conjuntos conocidos como doble cadena convexa. Una doble cadena convexa es la configuración de puntos conformada por una k -cup y una l -cap. Una k -cup es una cadena de k puntos en posición convexa donde la parte superior de su *cierre convexo*¹ está delimitado por un solo segmento. Una l -cap es una cadena de l puntos en posición convexa donde la parte inferior de su cierre convexo está delimitado por un solo segmento. La doble cadena convexa $C_{k,l}$ tiene las siguientes propiedades:

¹El cierre convexo de un conjunto de puntos es el polígono con área más pequeña que contenga a todos los puntos del conjunto.

- Para $l \geq k$ la doble cadena convexa es la unión una k -cup U y una l -cap L .
- Cada punto de L está por debajo de cada segmento de recta definido por dos puntos de U .
- Cada punto de U está por arriba de cada segmento de recta definido por dos puntos de L .

La figura 3.4 muestra un ejemplo de una doble cadena convexa.

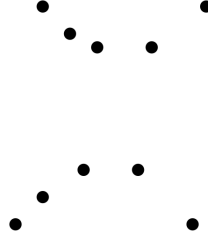


Figura 3.4: Una doble cadena convexa con 5 vértices en su k -cup y 5 vértices en su l -cap.

El resultado al que se llega en ese trabajo es el siguiente: el anti-thickness geométrico de la gráfica completa inducida por una doble cadena convexa con k puntos en la cadena convexa superior y l puntos en la cadena convexa inferior, $K_{l,k}$, es:

$$At_g(K_{l,k}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Dujmovic & Wood (2017) mencionan que encontrar el anti-thickness geométrico de gráficas completas en posición general es un problema abierto. En esta tesis abordamos este problema para $n \leq 10$.

Hasta ahora las mejores cotas conocidas para el anti-thickness geométrico son :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (3.1)$$

La cota superior se sigue del caso convexo y la cota inferior se sigue del hecho de que una gráfica con n vértices con anti-thickness geométrico k tiene a lo

sumo kn aristas. Discutimos estas ideas con más detalle en la sección 4.1 del capítulo 4.

Los trabajos mencionados en este capítulo muestran cómo el problema original del thickness está relacionado con problema del anti-thickness. Mostramos de qué manera un problema de descomposición de gráficas geométricas equivale a un problema de coloración de gráficas. Los artículos más recientes tratan al anti-thickness como un problema de coloración. En este trabajo no construimos la gráfica $D(S)$ y no coloreamos ninguna gráfica, uestro enfoque es geométrico y computacional.

Es importante notar que en el trabajo de Fabila-Monroy *et al.* (2018a) las descomposiciones de la gráfica completa están conformadas por thrackles máximos. Esta es una de las ideas que usamos en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo presentamos el producto de los diferentes enfoques que empleamos en el estudio del anti-thickness geométrico. Los resultados de esta tesis son todos para puntos en posición general. Comenzamos hablando de la cota inferior del anti-thickness geométrico y cómo la mejoramos para conjuntos de hasta diez puntos. Luego, explicamos cómo encontramos la cota superior usando conjuntos de hasta diez puntos. Este resultado nos permite dar el anti-thickness geométrico exacto para gráficas completas con hasta diez vértices. Después, mencionamos la relación que encontramos entre el anti-thickness geométrico de una gráfica completa inducida por un conjunto de puntos y su número de cruce. Finalmente listamos los algoritmos que utilizamos en este trabajo para dar los resultados que reportamos, también hacemos el análisis de complejidad de cada algoritmo.

4.1. Cota inferior del anti-thickness geométrico de K_n

El principal resultado de este trabajo es que encontramos el valor exacto del anti-thickness geométrico para la gráfica completa con hasta diez vértices en posición general. Obtuvimos dicho valor mejorando la cota inferior (Dujmovic & Wood (2017)) y usando la cota superior actual (Fabila-Monroy *et al.* (2018a)), que mostramos a continuación:

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (4.1)$$

De manera general, si se desea encontrar una cota superior para el anti-thickness geométrico de K_n es necesario encontrar una descomposición en thrackles, para cualquier dibujo de K_n . La cota superior trivial del anti-thickness geométrico de K_n es $\binom{n}{2}$ ya que cada arista de K_n es un thrackle. Si se desea encontrar una cota inferior es necesario demostrar, para todo dibujo de K_n , cuántos thrackles son necesarios para dar una descomposición en thrackles.

Empezamos explicando la cota inferior conocida para el anti-thickness geométrico y después diremos cómo la mejoramos para $n \leq 10$.

Un conjunto de n puntos en el plano induce una gráfica completa con n vértices a la que denotamos como K_n . Como es completa $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$. Cuando se quiere encontrar una descomposición de tamaño mínimo en thrackles una idea que resulta intuitiva es buscar que los thrackles tengan el mayor número posible de aristas. El siguiente teorema es útil para nosotros ya que establece el número máximo de aristas que puede tener un thrackle geométrico.

Teorema 4.1.1. (Pach (2013b)) Toda gráfica geométrica de n vértices en la que no existen dos aristas disjuntas tiene a lo más n aristas. Esto se cumple para toda $n > 2$.

Omitimos la demostración del teorema anterior ya que las ideas de la misma no son retomadas en este trabajo.

Como mencionamos en el capítulo de antecedentes, un thrackle de n vértices con exactamente n aristas es un thrackle máximo. Por definición, toda descomposición de la gráfica completa cubre sus aristas. Si suponemos que existen k thrackles máximos en la descomposición, entonces la siguiente desigualdad expresa el número de thrackles máximos necesarios para cubrir las $\binom{n}{2}$ aristas de la gráfica completa:

$$kn \geq \binom{n}{2}.$$

Como los thrackles de la descomposición son geométricos, si buscamos la k más pequeña para la cual se cumple la desigualdad anterior entonces k sería el anti-thickness geométrico de la gráfica completa. Resolviendo para k tenemos que al menos $k \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ thrackles máximos son necesarios para dar una descomposición de K_n . En otras palabras

$$At_g(K_n) \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil. \quad (4.2)$$

4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE K_N 45

n	$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$
3	1
4	2
5	2
6	3
7	3
8	4
9	4
10	5

Tabla 4.1: Valor de la cota inferior del anti-thickness geométrico usando la cota trivial.

La tabla 4.1 ilustra el valor de la cota inferior del anti-thickness geométrico dada por la desigualdad 4.2 para $n \leq 10$. Esta cota es la más inmediata ya que usa el hecho de que cada thrackle máximo tiene a lo sumo tantas aristas como vértices. También es la cota actual para el anti-thickness geométrico (Dujmovic & Wood (2017)).

En el trabajo de Fabila-Monroy *et al.* (2018a) encuentran que, dados dos thrackles máximos en posición convexa, estos comparten una arista, y que esto se cumple para cada par de thrackles de cualquier descomposición. En este trabajo verificamos que este resultado también es válido para conjuntos de hasta diez puntos en posición general no convexa. Usando los tipos de orden de los conjuntos con hasta diez puntos inducimos la gráfica completa, luego buscamos, para cada uno de los tipos de orden, todos los thrackles máximos y finalmente comparamos dichos thrackles a pares. Obtuvimos los siguientes resultados:

- Para todo tipo de orden con al menos dos thrackles máximos, cada par de thrackles máximos tienen intersección no vacía en aristas.
- Existen tipos de orden con solo un thrackle máximo.
- Existen tipos de orden en los que no hay thrackles máximos.

En la tabla 4.2 mostramos cuántos tipos de orden tienen thrackles máximos, cuántos tienen solamente un thrackle máximo y cuántos no tienen ningún thrackle máximo. La figura 4.1 muestra un tipo de orden, para $n = 9$,

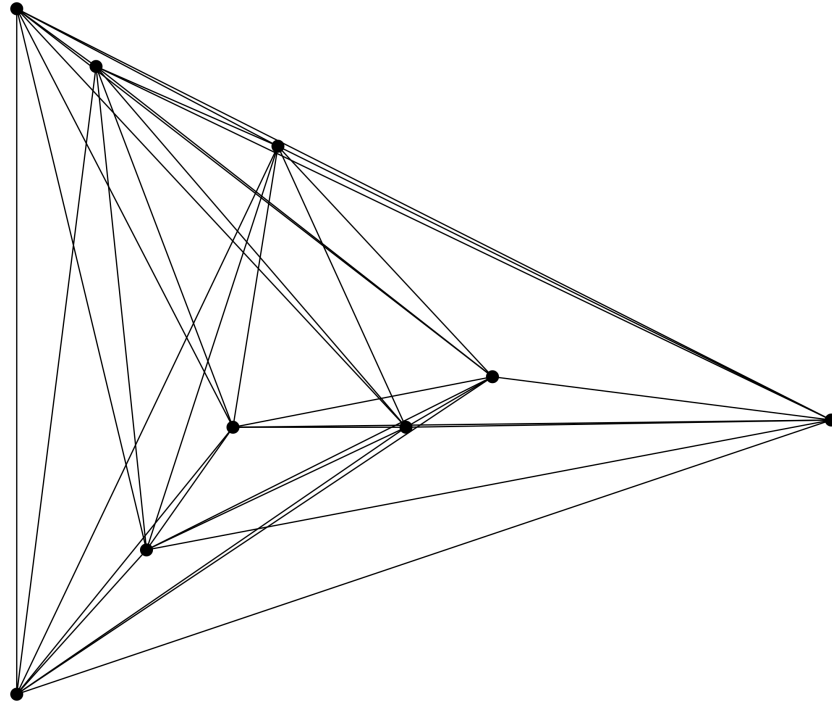


Figura 4.1: Este conjunto de puntos corresponde al tipo de orden 136764 de $n = 9$. La gráfica completa inducida por ellos no contiene ningún thrackle máximo.

en el cual no existe ningún thrackle máximo. Una pregunta interesante es ¿cómo caracterizamos a los tipos de orden cuya gráfica completa no tiene thrackles máximos? Esta pregunta es investigada en el trabajo de Domínguez (2017).

Los algoritmos que diseñamos para dar los resultados anteriores son descritos en la sección 4.5 para no romper con el flujo de esta sección. Para buscar los thrackles máximos usamos el algoritmo 1, para comparar los thrackles a pares utilizamos el algoritmo 2. La lista de tipos de orden con un solo thrackle máximo puede ser descargada de la siguiente liga: http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/withone_max.tar.gz. La lista de tipos de orden para los cuales no existe un thrackle máximo está en la siguiente liga: http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/without_max.tar.gz.

Usando estos resultados podemos derivar el siguiente lema.

4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE K_N 47

n	Tipos de orden(T.O.)	T.O. con solo un thrackle máximo	T.O. sin thrackles máximos
3	1	1(33 %)	0(0 %)
4	2	0(0 %)	1(50 %)
5	3	0(0 %)	2(66 %)
6	16	1(6.25 %)	6(37.50 %)
7	135	7(5.18 %)	50(37.03 %)
8	3315	208(6 %)	1175(35.44 %)
9	158817	10547(6.64 %)	53758(33.84 %)
10	14309547	962517(6.72 %)	4654339(32.52 %)

Tabla 4.2: Mostramos, para cada $3 \leq n \leq 10$, la relación de los tipos de orden con solamente un thrackle máximo y los tipos de orden sin thrackles máximos.

Lema 4.1.2. Sea S un conjunto de puntos en posición general y sean T_1 y T_2 thrackles máximos en $K_n(S)$ con $|V(T_1)| \leq 10$ y $|V(T_2)| \leq 10$. T_1 y T_2 tienen al menos una arista en común.

Demostración. Esta demostración se obtuvo computacionalmente. Para cada tipo de orden con hasta diez puntos, generamos todos los thrackles máximos inducidos con el algoritmo 1 cuya correctitud discutimos en la sección 4.5.1. Usando este conjunto verificamos que para cada pareja la intersección en aristas es no vacía usando el algoritmo 2 que describimos en la sección 4.5.2. \square

El lema anterior implica que para $n \leq 10$ no es posible encontrar una descomposición en thrackles máximos de tamaño $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, ya que, si esta existiera, los thrackles máximos no serían disjuntos a pares y esto infringiría las condiciones de una descomposición. En otras palabras una descomposición por thrackles solo podría contener un thrackle máximo. Sin embargo, es posible encontrar, a partir de una colección de thrackles máximos, una colección de thrackles que son disjuntos (y no necesariamente máximos). Describimos este proceso en el siguiente lema:

Lema 4.1.3. Sea $\mathcal{C} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ una colección de thrackles máximos de K_n con $|E(T_i) \cap E(T_j)| = 1$ y $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Existe una colección

de thrackles \mathcal{D} de K_n inducida por \mathcal{C} en la que cada par de thrackles tienen intersección vacía y que cubre el siguiente número de aristas:

$$\sum_{i=(n-m)+1}^n i.$$

Demostración. Sea T'_i , con $1 \leq i \leq m$ un thrackle inducido por el siguiente conjunto de aristas:

$$E(T_i) - \bigcup_{k=1}^{i-1} E(T_i) \cap E(T_k).$$

Es decir, T'_i es el thrackle que tiene todas las aristas de T_i a excepción de aquellas que T_i comparte con el resto de los thrackles en la colección.

Sea $\mathcal{D} = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_m\}$. Por construcción, la intersección de cualesquiera dos thrackles de \mathcal{D} es vacía.

Nótese que si una arista e aparece en dos thrackles de \mathcal{C} , entonces en \mathcal{D} , e aparecerá únicamente en el thrackle con menor etiqueta. De hecho T'_1 tiene n aristas, T'_2 tiene $n-1$ aristas, T'_3 tiene $n-2$ aristas y, en general, T'_i tiene $n-i+1$ aristas. Como \mathcal{D} tiene m thrackles el número de aristas cubiertas por \mathcal{D} es

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-m+2) + (n-m+1).$$

Podemos escribir esta suma como :

$$\sum_{i=(n-m)+1}^n i.$$

□

Es importante notar que este es el máximo número de aristas que una colección con m thrackles disjuntos puede cubrir.

Con los lemas anteriores es posible probar que la cota inferior del anti-thickness geométrico de K_n , mostrada en la ecuación 4.1, no es justa para toda n . El siguiente teorema establece esta afirmación.

Teorema 4.1.4. Sea $\mathcal{D} = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\}$ una colección de thrackles disjuntos en aristas inducida por una colección de $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ thrackles máximos. $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ thrackles máximos son suficientes para inducir una descomposición de K_n cuando $n \in \{3, 4, 6\}$ y no son suficientes cuando $n \in \{5, 7, 8, 9, 10\}$.

4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE K_N 49

n	$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$	$\sum_{i=(n-\lceil \frac{n-1}{2} \rceil)+1}^n i$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	2	9	10
6	3	15	15
7	3	18	21
8	4	26	28
9	4	30	36
10	5	40	45

Tabla 4.3: Mostramos cuántas aristas son cubiertas con una colección de $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ thrackles máximos disjuntos en aristas. Se rellenan los casos en los que la colección no cubre todas las aristas.

Demostración. Se sigue del lema 4.1.3. El número de aristas cubiertas por \mathcal{D} para cada $3 \leq n \leq 10$ se muestran en la tabla 4.3. Observando la tercera columna, es claro que para $n \in \{5, 7, 8, 9, 10\}$, $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ thrackles máximos no cubren las aristas necesarias de la gráfica completa. Marcamos estos casos de gris. \square

Como consecuencia del lema 4.1.3 y el teorema 4.1.4 podemos dar una cota inferior justa para el anti-thickness geométrico de K_n con $3 \leq n \leq 10$.

Teorema 4.1.5. Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general con $3 \leq n \leq 10$, y sea $K_n(S)$ la gráfica completa inducida por S . El anti-thickness $At_g(K_n)$ de $K_n(S)$ tiene la siguiente cota inferior:

$$At_g(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (4.3)$$

Demostración. Se sigue del teorema 4.1.3 que el número de aristas cubiertas por una colección $\mathcal{D} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ de thrackles, con $|E(T_i) \cap E(T_j)| = 1$, es

$$-\frac{1}{2}m(m-2n-1).$$

Para saber cuántos thrackles como mínimo son necesarios en la colección para cubrir las $\binom{n}{2}$ aristas de K_n , es necesario resolver la siguiente desigualdad

n	$k = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$	$\sum_{i=(n-k)+1}^n i$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	3	12	10
6	3	15	15
7	4	22	21
8	5	30	28
9	6	39	36
10	6	45	45

Tabla 4.4: En la tabla se muestra que la cota inferior del anti-thickness geométrico es justa para $3 \leq n \leq 10$. La segunda columna muestra el tamaño de la colección de thrackles, cuyo tamaño está dado por la cota inferior del anti-thickness geométrico del teorema 4.1.5 para cada n . La tercera columna muestra cuántas aristas cubre dicha colección. La cuarta columna muestra el número de aristas de K_n .

otorga el resultado.

$$-\frac{1}{2}m(m-2n-1) \geq \binom{n}{2}. \quad (4.4)$$

De aquí se tiene que m está en el siguiente intervalo:

$$\frac{1}{2} \left(2n - \sqrt{8n+1} + 1 \right) \leq m \leq \frac{1}{2} \left(2n + \sqrt{8n+1} + 1 \right).$$

Como nosotros estamos interesados en la m más pequeña para la cual se cumple la desigualdad 4.4, basta con tomar el término de la izquierda para obtener el resultado deseado. \square

Presentamos los valores dados por la cota inferior del teorema 4.1.5 en la tabla 4.4. Es posible observar que para toda n , con $3 \leq n \leq 10$ se cubren las aristas de la gráfica completa si usamos $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ thrackles máximos en la colección.

Como consecuencia del teorema 4.1.5 es posible obtener un valor exacto para el anti-thickness geométrico de K_n en posición general.

Teorema 4.1.6. Sea $K_n(S)$ la gráfica completa inducida por un conjunto S de n puntos, con $3 \leq n \leq 10$, en posición general. El anti-thickness geométrico de K_n es:

$$At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Se sigue del resultado del teorema 4.1.5 y la cota superior (Fabila-Monroy *et al.* (2018a)) del anti-thickness geométrico de K_n , $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$, cuando K_n es inducida por un conjunto de puntos en posición convexa. \square

Para dar un resultado similar para $n > 10$, bastaría con generalizar el lema 4.1.2. Esto es, demostrar que cada par de thrackles máximos se intersecta en al menos una arista y que esto sucede para toda $n > 10$. Nosotros conjeturamos que este lema también se cumple para $n > 10$.

Debido a que la cota superior del anti-thickness geométrico está dada por el dibujo en posición convexa, en este trabajo decidimos verificar si existen dibujos diferentes al convexo, para los cuales se alcanza la cota inferior dada por el teorema 4.1.5. Hacemos esto en la siguiente sección.

4.2. Cota superior del anti-thickness geométrico

La cota superior del anti-thickness geométrico está dada por el conjunto de puntos en posición convexa. Sea $k = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$, en esta tesis verificamos que existen tipos de orden, que no corresponden a la posición convexa, y que inducen una gráfica completa cuyo anti-thickness geométrico es a lo sumo k .

Para comprobar la existencia de tipos de orden con las características descritas anteriormente elegimos aquellos que tienen al menos k thrackles máximos. Luego, para cada uno, analizamos todas sus colecciones de thrackles máximos de tamaño k . Finalmente, para cada colección, evaluamos si esta cubre o no a $E(K_n)$. Cuando una colección de thrackles máximos cubre al conjunto de aristas de la gráfica completa, es posible inducir una descomposición de K_n en thrackles (no necesariamente máximos) asignando cada arista de K_n a un único thrackle que la cubra. Detallamos el algoritmo para

buscar colecciones de thrackles máximos que induzcan una descomposición en la sección 4.5.3. La tabla 4.5 muestra los resultados que obtuvimos de este análisis; observamos que únicamente para $n \in \{8, 9, 10\}$ existen tipos de orden que tienen k thrackles máximos que pueden inducir una descomposición.

Con los resultados del algoritmo 1 de búsqueda de thrackles podemos decir que las gráficas completas inducidas por los tipos de orden de la tabla 4.5 no son necesariamente las que tienen más thrackles máximos. Mostramos cuántos thrackles máximos hay en cada tipo de orden en un archivo que puede ser descargado de la liga 1 del apéndice D. Para $n \in \{8, 9, 10\}$ el tipo de orden con más thrackles máximos es el de etiqueta 1 o en otras palabras el siguiente del tipo de orden en posición convexa. Para estos tipos de orden existen 94, 213 y 459 thrackles máximos respectivamente.

El porcentaje de tipos de orden de 8, 9 y 10 puntos para los cuales es posible inducir una descomposición usando solamente thrackles máximos son los siguientes: solo el 0.09 % de los tipos de orden de 8 puntos tiene una descomposición en thrackles máximos incluyendo la posición convexa, solo el 0.005 % de los tipos de orden de 9 puntos y solo el .00002 % de los tipos de orden de 10 puntos.

Si la intersección de cada par de thrackles de la colección es exactamente de tamaño 1, entonces la colección es óptima, de otra manera, la colección no es óptima. Verificamos la optimalidad de las colecciones de thrackles máximos y encontramos que ninguna colección, para los tipos de orden descritos anteriormente, es óptima ya que en cada una existe al menos un par de thrackles cuya intersección tiene tamaño mayor a uno. Para este proceso utilizamos el algoritmo 2 de intersección de thrackles descrito en la sección 4.5.2. Este resultado nos permite dar el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. Sea $K_n(S)$ una gráfica completa inducida por un conjunto S de n puntos, con $3 \leq n \leq 10$, en posición general no convexa. No existen colecciones de thrackles máximos óptimas en $K_n(S)$.

Demostración. Esta demostración se obtuvo computacionalmente. Se sigue del algoritmo de búsqueda de colecciones de thrackles máximos que induzcan una descomposición cuya correctitud es discutida en la sección 4.5.3 y de la verificación de optimalidad. Encontramos que no existe ninguna colección de thrackles máximos óptima para ningún tipo de orden diferente del convexo para $3 \leq n \leq 10$. \square

Las etiquetas de los thrackles máximos para las gráficas dadas por cada

n	Tipo de Orden	Tamaño de la colección $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$	No. thrackles máximos
8	12	5	38
8	54	5	33
9	12	6	103
9	52	6	101
9	54	6	83
9	80	6	75
9	696	6	80
9	1080	6	40
9	1287	6	64
10	81	6	177
10	1328	6	151
10	2243	6	129

Tabla 4.5: Tipos de orden para los que existe al menos una colección de $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ thrackles máximos que cubren a K_n .

tipo de orden de los mostrados en la tabla 4.5 pueden ser consultados en el apéndice A.

La figura 4.2 muestra un ejemplo de una descomposición de K_9 en thrackles, inducida por seis thrackles máximos, cada thrackle es dibujado de un color diferente.

Decidimos estudiar la estructura geométrica de los tipos de orden de la tabla 4.5 para intentar caracterizar cuáles conjuntos de puntos inducen una gráfica completa que tiene una descomposición en thrackles máximos. Para esto describimos a continuación el concepto de *k-convexidad*(Valtr (2002)) de un conjunto y *reflexividad* de un conjunto. Existen varias definiciones de un conjunto *k-convexo*, aquí retomamos una.

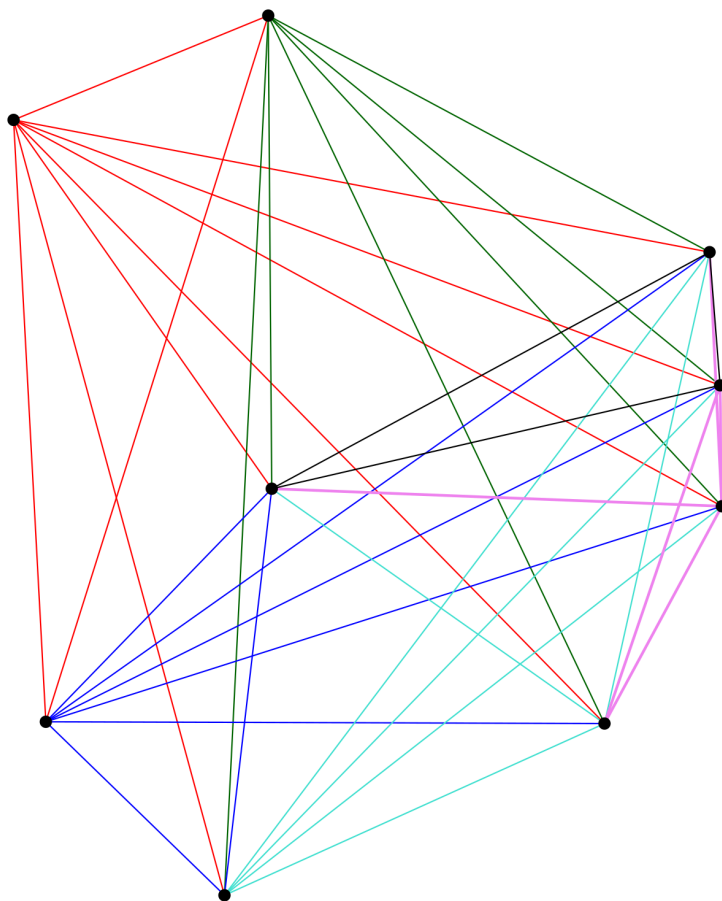


Figura 4.2: Una descomposición de K_9 en seis thrackles, la configuración de puntos corresponde al tipo de orden 12 con respecto de la base de datos de Aichholzer & Krasser (2001). El anti-thickness geométrico de K_9 es 6. Esta descomposición fue inducida por una colección de thrackles máximos que no es óptima, es sencillo ver esto observando que los thrackles tienen 9,7,6,6,5 y 3 aristas respectivamente. Una descomposición óptima de K_9 tiene thrackles de tamaño 9,8,7,6,5 y 4.

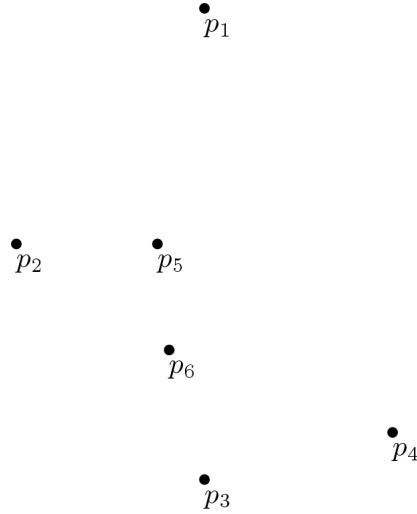


Figura 4.3: Un conjunto de puntos 2-convexo según la definición de Valtr (2002), nótese que los puntos p_1, p_2 y p_3 inducen un triángulo con dos puntos en su interior y que ningún otro triángulo inducido por el conjunto tiene a más de dos puntos en su interior.

Definición 14. (Valtr (2002)) *Conjunto k -convexo.* Un conjunto P de puntos en el plano es k -convexo si ningún triángulo definido por tres puntos de P contiene a más de k puntos de P en su interior.

Un conjunto de puntos en posición convexa es claramente 0-convexo ya que cualquier triángulo definido por tres puntos dicho conjunto, no contiene a ningún otro punto del conjunto. En la figura 4.3 mostramos un conjunto que es 2-convexo.

Para la siguiente definición consideramos una *poligonización* de un conjunto Q de puntos como un polígono cuyo conjunto de vértices es Q .

Definición 15. (Arkin *et al.* (2003)) *Reflexividad de un conjunto.* Sea $r(P)$ el número de vértices cóncavos de un polígono P y sea \mathcal{P} el conjunto de todas las poligonizaciones de un conjunto S de puntos, la reflexividad del conjunto S se define como sigue:

$$\rho(S) = \min_{P \in \mathcal{P}} r(P).$$

Es sencillo notar que cualquier conjunto en posición convexa tiene reflexividad 0, ya que todos sus ángulos son convexos.

Basándonos en las definiciones anteriores encontramos que, de los tipos de orden en la tabla 4.5, los doce tienen reflexividad igual a uno. Esto es, que todos tienen una poligonización que cuenta con solamente un vértice cóncavo. Cuando un conjunto de n vértices tiene a $n - 1$ vértices en posición convexa y a un vértice dentro de la cubierta convexa, es fácil observar que la reflexividad es uno, puesto que la cadena convexa contiene a $n - 1$ vértices y solo es necesario unir, con dos aristas, el principio y el fin de dicha cadena con el vértice que está dentro de la cadena convexa. El tipo de orden número 1080 para $n = 9$ contiene a dos puntos en el interior de su cubierta convexa, sin embargo, es posible encontrar una poligonización con un solo ángulo cóncavo. Presentamos dicha poligonización en la figura 4.4.

Respecto a la k -convexidad, encontramos que todos los tipos de orden listados, a excepción del tipo de orden de nueve vértices con número 1080, son 1-convexos ya que cuentan con solamente un punto en el interior de su cubierta convexa; el tipo de orden con número 1080 es 2-convexo.

Es importante recalcar que estos conjuntos son similares a la posición convexa, recordemos que la posición convexa tiene reflexividad 0 y todos los tipos de orden para los que existe una descomposición en thrackles inducida por thrackles máximos tienen reflexividad 1, en este sentido, la reflexividad de los conjuntos no es distante. Por otra parte, los conjuntos en posición convexa son 0-convexos mientras que la mayoría de los tipos de orden anteriormente descritos son 1-convexos, a excepción de un conjunto que es 2-convexo, de nuevo estos valores no distan mucho de la convexidad del conjunto en posición convexa.

Para los casos de $n \in \{3, 4, \dots, 7\}$ no existe ninguna colección de k thrackles máximos que pueda inducir una descomposición de K_n . Esto es porque, para ninguno de los tipos de orden, en este rango de n , existe una colección de thrackles máximos que cubran las aristas de K_n (a excepción del dibujo en posición convexa). Creemos que una de las razones por las que esto sucede es que los thrackles máximos que existen para cada tipo de orden en este rango comparten muchas aristas a pares por lo que aunque exista un alto número de thrackles máximos, la unión no cubre las aristas de la gráfica completa.

Para los valores de n anteriormente mencionados buscamos, de manera manual, una descomposición con ese número de thrackles (no necesariamente máximos). Explicamos esto en la sección 4.4.

La figura 4.5 muestra para cada valor de n con $3 \leq n \leq 7$, dibujos cuyo anti-thickness es igual a la cota inferior del teorema 4.1.5. De esto se sigue que el anti-thickness geométrico de K_n , con $3 \leq n \leq 7$, es a lo sumo

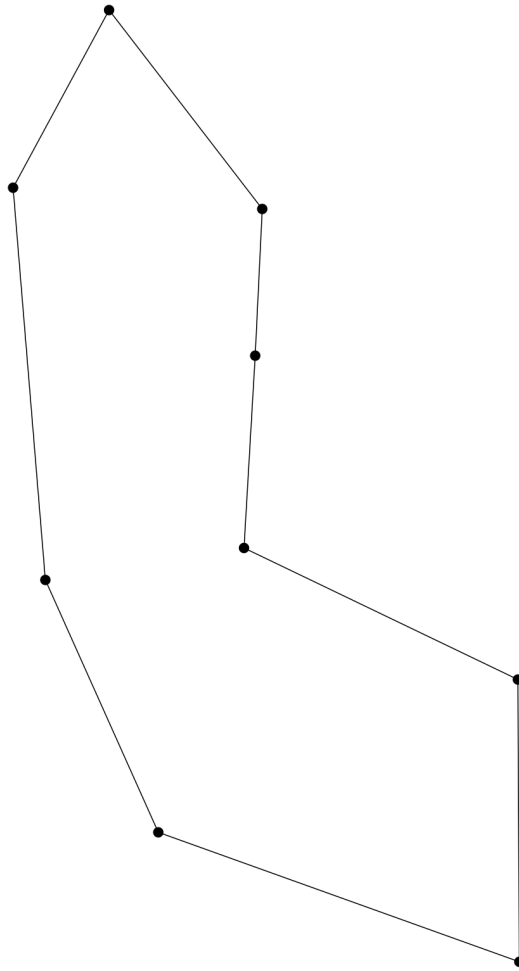


Figura 4.4: Una poligonización para el tipo de orden número 1080 de nueve vértices, esta poligonización solo tiene un ángulo cóncavo por lo que su reflexividad es uno. No es cero ya que esto requiere que todos sus ángulos sean convexos, lo que equivale a que todos los puntos estén en posición convexa.

$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$. Como resultado podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_n , con $3 \leq n \leq 10$ es exactamente $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$.

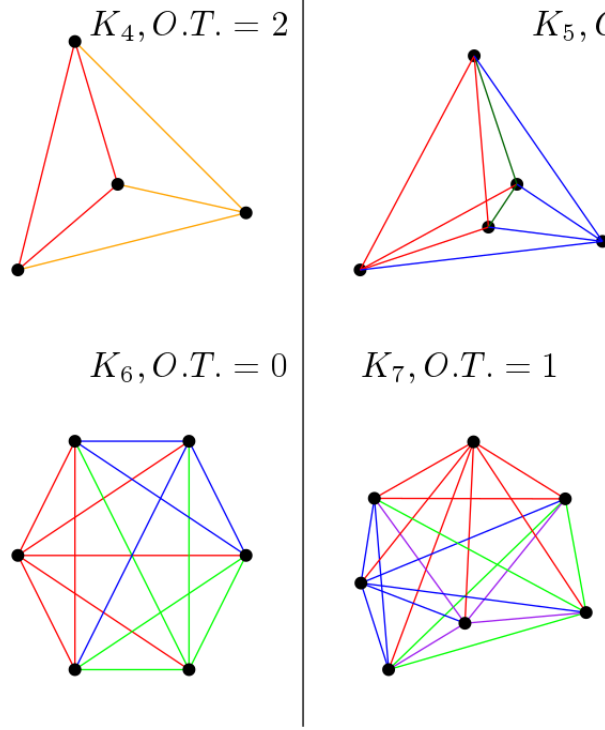


Figura 4.5: Mostramos posibles descomposiciones de la gráfica completa con hasta 7 vértices. Las descomposiciones tienen exactamente el número de thrackles establecido por la cota inferior del teorema 4.1.5. Estas configuraciones de puntos, a excepción de K_6 , son diferentes de la posición convexa. Los tipos de orden correspondientes a cada dibujo están indicados en la figura como $O.T.$

Mientras estudiábamos las colecciones de thrackles máximos, decidimos explorar en qué otra forma se parecen los tipos de orden de la tabla 4.5 a la posición convexa y por ello buscamos calcular el número de cruce de los thrackles máximos de las colecciones, detallamos los resultados de este análisis en la siguiente sección.

4.2.1. Número de cruce de thrackles máximos

Durante el desarrollo de este trabajo decidimos analizar el número de cruce de cada uno de los thrackles máximos que hay en una colección que puede inducir una descomposición de K_n . Definimos el número de cruce de una gráfica geométrica a continuación.

Definición 16. *Número de cruce de una gráfica geométrica*(Schaefer (2018)) El número de cruce $cr(G)$ de una gráfica geométrica G es el número de cruces propios entre aristas de G .

Mostramos ejemplos del número de cruce de gráficas geométricas en la figura 4.6; es posible observar que la gráfica K_4 puede ser dibujada con un cruce y también puede ser dibujada como gráfica plana (sin cruces).

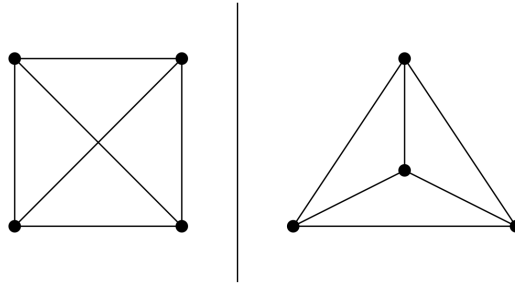


Figura 4.6: A la izquierda, K_4 dibujada con un cruce. A la derecha K_4 dibujada sin cruces.

Para presentar los resultados de esta sección, debemos definir el número de cruce de un thrackle máximo. Para esto, es necesario mencionar cuántos *no cruces* existen en un thrackle geométrico. Para nosotros, un *no cruce* es un par de aristas que son adyacentes entre sí.

Lema 4.2.2. Sea T un thrackle y sea $v \in V(T)$ un vértice de T . El vértice v causa $\binom{deg(v)}{2}$ *no cruces*. En otras palabras: existen $\binom{deg(v)}{2}$ aristas adyacentes a pares para cada vértice $v \in V(T)$.

Demostración. Sea $e = (a, b)$ una arista de T con extremos a y b . Por la definición de thrackle geométrico toda arista diferente de e , con extremo en a o en b es adyacente con e , y por lo tanto no la cruza. Sea $v \in V(T)$ un vértice con grado $deg(v) = k$ y sea (v, b_i) alguna arista con un extremo en v , con $1 \leq i \leq k$. Tenemos que (v, b_i) no cruza a $\{(v, b_{i+1}), (v, b_{i+2}) \dots, (v, b_k)\}$,

esto es $k - i$ no cruces. De esta manera, en total, del vértice v podemos contar $(k - 1) + (k - 2) + \cdots + 0$ no cruces, lo que equivale a $\binom{k}{2}$ y como, $k = \deg(v)$ el resultado se sigue. \square

Teorema 4.2.3. Sea T un thrackle geométrico, con $m = |E(T)|$ el número de cruce $cr(T)$ de T es:

$$\binom{m}{2} - \sum_{u \in V(T)} \binom{\deg(u)}{2}$$

Demostración. Como T es un thrackle, cada una de las m aristas debe intersectarse a pares exactamente una vez. Si T está compuesto solamente por aristas que se cruzan a pares, se tiene que para cada $u \in V(T)$ $\deg(u) = 1$ y por lo tanto $\sum_{u \in V(T)} \binom{\deg(u)}{2} = 0$ y el resultado se sigue. Sin embargo, debemos tener en cuenta que no necesariamente cada par de aristas se cruza sino que algunas pueden ser adyacentes. Dicho de otra manera, debemos contar cuántos no cruces existen en el thrackle. Por el lema 4.2.2 sabemos que existen exactamente $\binom{\deg(v)}{2}$ no cruces por cada vértice v del thrackle. El resultado se sigue. \square

Basándonos en el resultado del teorema 4.2.3, codificamos un algoritmo para encontrar el número de cruce de un thrackle. Y además, para cada colección de thrackles máximos que pueden inducir una descomposición de K_n , descritas en el apéndice A buscamos, para cada thrackle máximo, el número de cruce de cada uno. Detallamos el algoritmo mencionado en la sección 4.5.7.

Encontramos que en cada colección de la lista anteriormente mencionada, cerca del 50 % de los thrackles máximos, tiene un número de cruce mínimo (con respecto al número de vértices). Reportamos estos resultados en el apéndice B.

Encontramos que el número de cruce de la gráfica completa inducida por algún tipo de orden puede estar relacionado con el número de thrackles máximos en esta. Observamos y conjeturamos que los tipos de orden con menor número de cruce tienen pocos thrackles máximos y los tipos de orden con mayor número de cruce tienen el máximo número de thrackles máximos, esto último se cumple para el tipo de orden en posición convexa. Encontramos también, que para $3 \leq n \leq 8$ los conjuntos de puntos que son *menos convexos*, esto es, que tienen k -convexidad alta, tienen anti-thickness mayor que el convexo por una unidad.

Observamos también que los thrackles máximos que encontramos en los tipos de orden de 9 vértices, de la tabla 4.5 son ciclos de tamaño 3, con aristas con un extremo en vértices de grado uno y otro extremo en alguno de los vértices ápice del ciclo.

Para cada n , con $n \in [3, 10]$ listamos los tipos de orden, el número de thrackles máximos en cada tipo de orden y el número de cruce para cada tipo de orden. Estas listas están ordenados de acuerdo al número de thrackles en el tipo de orden de mayor a menor y pueden ser descargadas en la liga 1 del apéndice D. Con este orden notamos que el número de thrackles máximos disminuye casi de la misma manera que el número de cruce.

En esta tesis decidimos analizar qué pasa con el anti-thickness de los tipos de orden en los que no existe ni un thrackle máximo, para esto usamos un algoritmo que encuentra, de manera exhaustiva, el anti-thickness de un dibujo dado. Explicamos este resultado a continuación.

4.3. Anti-thickness de gráficas geométricas sin thrackles máximos

Una vez que obtuvimos el anti-thickness geométrico exacto para gráficas completas con hasta 10 vértices, y al observar que podemos alcanzar este usando colecciones de thrackles máximos, nos preguntamos ¿cómo es el anti-thickness para los dibujos que no tienen thrackles máximos? ¿Es mayor? Y si es así ¿cuánto más?

En el trabajo de Domínguez (2017) se ofrece el número total de tipos de orden con hasta diez puntos, para los cuáles no existen thrackles máximos, en la tabla 4.6 mostramos una comparación entre estos y el número de tipos de orden de n para los cuales existe una descomposición por thrackles máximos con tamaño igual al anti-thickness de K_n . Es posible observar que si sumamos el número de tipos de orden sin thrackles máximos con el número de tipos de orden para los cuales existe una descomposición por thrackles máximos cuyo tamaño es igual al anti-thickness geométrico de K_n , aún queda un buen número de tipos de orden que analizar. Más del 60 % de tipos de orden con 8,9 y 10 puntos están fuera de estas dos clasificaciones.

Para responder estas interrogantes desafortunadamente no es posible formar colecciones de thrackles máximos y evaluar la cobertura de aristas como hicimos anteriormente. Por esta razón construimos un algoritmo que encuen-

n	No. Tipos de orden sin thrackles máximos	No. Tipos de orden con descomposición por thrackles máximos	Total
8	1175	2	1, 177 (35.50 %)
9	53758	7	53, 765 (33.85 %)
10	4654339	3	4, 654, 342 (32.52 %)

Tabla 4.6: En esta tabla mostramos el número de tipos de orden sin thrackles máximos, el número de tipos de orden que tienen una descomposición por thrackles máximos con tamaño igual al anti-thickness geométrico de K_n y además la suma de estos dos números comparado con el total de tipos de orden para cada n .

tra el anti-thickness de un dibujo geométrico inducido por un conjunto de n puntos. El algoritmo es recursivo y usa una técnica de *backtracking*. Discutimos con más detalle el algoritmo en la sección 4.5.6.

En teoría, este algoritmo puede encontrar el anti-thickness de cualquier dibujo, para cualquier $n \geq 3$, sin embargo, debido a su costo computacional que es $O(n^{2+2^n})$, solamente hicimos experimentos para $n \leq 8$. Hacemos el análisis de complejidad del algoritmo en la sección 4.5.6. Utilizando el algoritmo 1 para encontrar thrackles máximos descrito en la sección 4.5.1 listamos cuáles son los tipos de orden que no tienen thrackles máximos. La lista de cada uno de los tipos de orden que cumplen con esta característica puede ser descargada de la liga 2 del apéndice D.

Por otra parte, utilizamos estos tipos de orden como entrada para el algoritmo de búsqueda de anti-thickness de un dibujo de la sección 4.5.6. Encontramos que estos dibujos tienen anti-thickness mayor, en uno, al anti-thickness geométrico de K_n .

Recordemos que en el trabajo de Araujo *et al.* (2005) definen:

$$d(n) = \max\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S|=n\},$$

y donde además prueban que :

$$5 \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor \leq d(n) \leq \min \left(n - 2, n - \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \lg \lg n \rfloor}{2} \right). \quad (4.5)$$

4.3. ANTI-THICKNESS DE GRÁFICAS GEOMÉTRICAS SIN THRACKLES MÁXIMOS63

n	Tipo de orden
3	0
4	1
5	2
6	14
7	80
8	1943

Tabla 4.7: En los tipos de orden de n listados se requiere de $n - 2$ thrackles para dar una descomposición por thrackles. Nótese que estos tipos de orden inducen gráficas completas que no tienen thrackles máximos.

Con nuestros resultados encontramos el valor exacto de $d(n)$ para $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Recordemos que, dado un conjunto S de n puntos, el número cromático $\chi(D(S))$ busca minimizar el número de thrackles necesarios para dar una descomposición de $K_n(S)$ como explicamos en la sección 3. En el caso de K_8 , existe al menos un dibujo que necesita cinco thrackles para su descomposición, por ejemplo, el dibujo en posición convexa. Sin embargo, como existe al menos otro dibujo para el que se necesitan seis thrackles en su descomposición y como este número coincide con el de la cota superior de la ecuación 4.5, cuando $n = 8$, decimos que $d(8) = 6$. El resultado $d(7) = 5$ se sigue del trabajo de Araujo *et al.* (2005). Para los valores de $d(n)$ con $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ verificamos que el máximo número de thrackles necesarios en una descomposición de K_n es, en efecto, $n - 2$. En la tabla 4.7 mostramos, para cada $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de uno de los tipos de orden que necesita exactamente $n - 2$ thrackles en su descomposición. Encontramos que para todos los tipos de orden que inducen gráficas completas sin thrackles máximos se necesitan $n - 2$ thrackles máximos para dar una descomposición. Nosotros creemos que en efecto, $d(n) = \min\left(n - 2, n - \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \lg \lg n \rfloor}{2}\right)$.

Todos los números de tipo de orden de tamaño n , para $n \in [3, 8]$, para los que se ejecutó el algoritmo y el anti-thickness encontrado para cada uno pueden descargarse desde la liga 3 del apéndice D. Con lo anterior demostramos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. El anti-thickness de los dibujos para los cuales no existen thrackles máximos es mayor que el anti-thickness geométrico de K_n , con $n \in [3, 10]$.

En la siguiente sección analizamos, para $3 \leq n \leq 9$, cómo se comporta la intersección de thrackles, no necesariamente máximos, de los dibujos de K_n .

4.4. Intersección de thrackles de K_n con $3 \leq n \leq 9$.

El teorema 4.2.1 establecido en la sección 4.2 nos indica que no existen colecciones óptimas de thrackles máximos que induzcan una descomposición por thrackles. Por ello, decidimos estudiar la existencia de colecciones de thrackles, no necesariamente máximos, cuya intersección a pares es vacía y que además puedan cubrir las aristas de K_n . Para explicar este proceso primero es necesario definir una *partición de un entero*.

Definición 17. *Partición de un entero.* (Knuth (2011b)) Una partición de un entero n es una colección P de enteros no negativos $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ tales que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ y $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Es posible usar ciertas particiones de un entero como guía para buscar descomposiciones en thrackles de K_n . Por ejemplo, si deseamos obtener una descomposición en thrackles de K_4 , entonces necesitamos cubrir seis aristas. El entero 6 tiene once particiones, tres de ellas son: $\{4, 2\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{3, 1, 1, 1\}$. Las cuales pueden traducirse a tres diferentes descomposiciones en thrackles, la partición $\{4, 2\}$ se traduce en una descomposición con un thrackle con cuatro aristas y uno con dos aristas; la partición $\{2, 2, 2\}$ se traduce en una descomposición con tres thrackles con dos aristas cada uno; la partición $\{3, 1, 1, 1\}$ se traduce a una descomposición con un thrackle con tres aristas y tres thrackles con una arista. Debido a que nosotros estudiamos descomposiciones de tamaño estrictamente menor a la cota superior del anti-thickness geométrico, que es $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$, y como en una descomposición solamente puede existir un thrackle máximo, es posible restringir el conjunto de particiones de enteros para las particiones que usaremos. Nos referimos a estas como *particiones guía*.

Definición 18. *Partición guía.* Sea $K_n(S)$ la gráfica completa inducida por un conjunto S de n puntos en posición general. Una partición $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ es guía si cumple con las siguientes condiciones:

- Si a_1 es igual a n entonces solo existe una ocurrencia de a_1 en P .

- La suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \binom{n}{2}$.
- $m < n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$.

No existe una fórmula cerrada para conocer el número de particiones de algún entero n . Una *composición* de un entero n es una partición en la que el orden de los elementos importa es decir, dos composiciones diferentes del entero 3 son $\{2, 1\}$ y $\{1, 2\}$. Podemos acotar el espacio de búsqueda de las particiones de un entero considerando únicamente las composiciones. Como el número de composiciones para un entero n es 2^{n-1} podemos decir que existen a lo sumo $O(2^{n-1})$ particiones para el mismo entero n .

Usando la definición 18 generamos las particiones guía para todo entero $x \in \left\{ \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{10}{2} \right\}$. En Knuth (2011b) se ofrece un algoritmo para generar las particiones de algún entero n . Nosotros utilizamos dicho algoritmo en este trabajo modificándolo para que genere solamente particiones guía de un entero. Discutimos con más detalle el algoritmo en la sección 4.5.4. La tabla 4.8 muestra las particiones generadas por el algoritmo. Nuestro algoritmo observó que para $x \in \left\{ \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{7}{2} \right\}$ no existen particiones guía, esto reafirma, para $3 \leq n \leq 7$, el resultado del teorema 4.1.5 que establece una cota inferior para el anti-thickness geométrico de K_n . Por otro lado, no generamos las particiones para K_{10} ya que debido al tamaño de los archivos binarios generados con el algoritmo de búsqueda de thrackles no fue posible diseñar un algoritmo con el mismo diseño de los discutidos en la sección 4.5.4. Esto es porque requerimos de cargar los archivos binarios a la memoria física para reducir las lecturas a disco, sin embargo los archivos relacionados con K_{10} son demasiado grandes para la memoria. Una alternativa es partir los archivos en otros de menor tamaño pero esto incrementaría las lecturas a disco al cargar y descargar archivos a memoria y además requeriría que diseñáramos otra estrategia para estas tareas por lo que decidimos no examinar estos archivos.

Usando las particiones de la tabla 4.8 diseñamos una serie de algoritmos que buscan thrackles disjuntos usando estas particiones como guía. Como hay cerca de catorce algoritmos para realizar esta tarea, expondremos solamente uno de ellos en el algoritmo 7 de la sección 4.5.5, los otros algoritmos son similares a este. Como resultado de estos algoritmos podemos dar el siguiente teorema:

Teorema 4.4.1. Sea $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ una partición guía para K_8 o para K_9 . No existe, para ningún dibujo diferente del convexo, una colección

n	Particiones guía de $\binom{n}{2}$
8	$\{8, 7, 7, 6\}$
	$\{7, 7, 7, 7\}$
9	$\{9, 8, 8, 8, 3\}$
	$\{9, 8, 8, 7, 4\}$
	$\{9, 8, 8, 6, 5\}$
	$\{9, 8, 7, 7, 5\}$
	$\{9, 8, 7, 6, 6\}$
	$\{9, 7, 7, 7, 6\}$
	$\{8, 8, 8, 8, 4\}$
	$\{8, 8, 8, 7, 5\}$
	$\{8, 8, 8, 6, 6\}$
	$\{8, 8, 7, 7, 6\}$
	$\{8, 7, 7, 7, 7\}$

Tabla 4.8: Particiones de enteros del número de aristas de K_8 y de K_9 .

$\mathcal{D} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ de thrackles disjuntos tales que $|E(T_1)| = a_1, |E(T_2)| = a_2, \dots, |E(T_m)| = a_m$.

Demostración. Se sigue del resultado de la ejecución de los algoritmos para evaluar colecciones de thrackles. Los algoritmos encuentran que, para ninguna partición de la tabla 4.8, existe una colección de thrackles disjuntos cuyo número de aristas corresponde a las particiones guía de K_8 y K_9 . \square

Estos resultados tienen implicaciones sobre la cota inferior del anti-thickness geométrico de K_n para $n \in [3, 9]$. Debido a que el número de elementos en las particiones guía es menor a $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ y como no encontramos ninguna descomposición en thrackles usando alguna de las particiones guía, podemos concluir que el anti-thickness geométrico de K_n es mayor o igual a $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$. Lo que confirma la discusión de la cota inferior en la sección 4.1.

4.5. Algoritmos

En esta sección presentamos los algoritmos usados en este trabajo. Empezamos describiendo el algoritmo para encontrar thrackles, de cualquier tamaño, dado un conjunto de puntos en posición general en el algoritmo 1. Después hablamos del algoritmo usado para encontrar la intersección de dos thrackles con el mismo número de aristas en el algoritmo 2. Luego, explicamos el algoritmo que implementamos para encontrar colecciones de thrackles máximos de K_n con el algoritmo 3. Explicamos también como generamos las particiones guía de un entero con el algoritmo 6 y como usamos esas particiones para buscar colecciones de thrackles con un algoritmo exhaustivo en el algoritmo 7. Después, mostramos el algoritmo para encontrar el anti-thickness de un dibujo específico con el algoritmo 8. Finalmente, hablamos del algoritmo para calcular el número de cruce de un thrackle con el algoritmo 10.

En la figura 4.7 explicamos cómo se relacionan los algoritmos con los resultados obtenidos. En esta figura ilustramos los resultados con rectángulos delineados continuamente y los algoritmos con rectángulos con líneas punteadas.

Los algoritmos fueron implementados en el lenguaje C++ en su versión 5 (2017); las implementaciones fueron ejecutadas en un *cluster* con las siguientes características:

- Procesador de 8 núcleos con velocidad de 1.5 GHz.
- Memoria RAM de 64 GB.
- Almacenamiento en disco duro de 128 GB.

Como nuestra implementación no está paralelizada, cada proceso corre en un solo procesador. Por lo que las comparaciones con el tiempo teórico son hechas tomando en cuenta solo un procesador de 1.5 GHz.

Para almacenar información utilizamos, principalmente, una estructura de datos llamada vector. Un vector es un contenedor que representa a un arreglo que puede cambiar de tamaño. Podemos acceder al vector igual que se hace con un arreglo (usando el operador `[]`) con la misma complejidad.

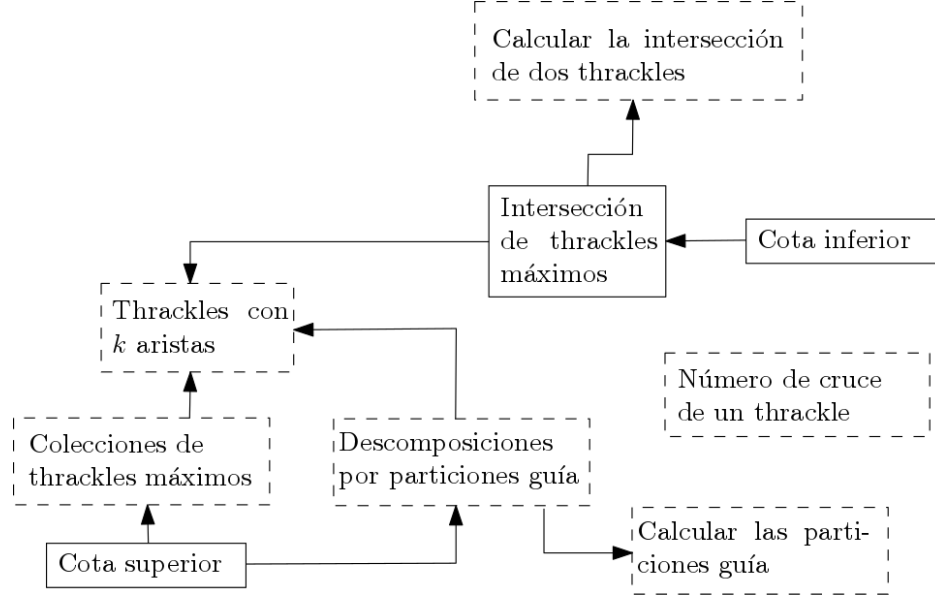


Figura 4.7: Ilustramos la relación entre algunos de los algoritmos y los resultados que describimos en esta tesis. Las flechas indican que algún resultado o algoritmo usó el resultado o el algoritmo al que está apuntado. Por ejemplo, el algoritmo de descomposiciones por particiones guía usa el algoritmo de búsqueda de thrackles con k aristas y a su vez el resultado de dicho algoritmo está relacionado con la cota superior. Por otra parte, mejoramos la cota inferior del anti-thickness geométrico usando el resultado de la intersección entre thrackles máximos, para obtener este resultado buscamos los thrackles máximos para cada tipo de orden usando el algoritmo de búsqueda de thrackles con k aristas.

4.5.1. Algoritmo para encontrar thrackles con k aristas

A continuación presentamos un algoritmo para resolver el siguiente problema:

Problema: Dado n , deseamos encontrar todos los thrackles de tamaño k de todas las gráficas completas $K_n(S)$, donde S es un conjunto de n puntos.

Entrada: Un entero n , con $3 \leq n \leq 10$ y un entero k , con $n \leq k$.

Salida: Por cada tipo de orden de n puntos, una lista de todos los thrackles de tamaño k inducidos por el conjunto.

Este algoritmo requiere tres pasos de preparación para funcionar. Describimos estos pasos a continuación. Para cada tipo de orden S :

1. Leer y almacenar el archivo que contiene el tipo de orden S . Los puntos se almacenan en un vector de tamaño n donde cada elemento es un objeto que contiene las coordenadas x y y de cada uno de los puntos de S .
2. Generar y almacenar las aristas de la gráfica completa inducida por S . Para cada punto almacenado p_i , creamos todas las aristas (no dirigidas) que tienen como punto inicial a p_i y como punto final a p_j , donde $i + 1 \leq j \leq n$. Las aristas son almacenadas en un vector de tamaño $\binom{n}{2}$ y las etiquetamos con enteros desde 0 hasta $\binom{n}{2} - 1$.
3. Construir la *matriz de disyunción*. Construimos una matriz binaria de $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$. La matriz es almacenada en un arreglo de arreglos convencional. Cada índice de las filas y de las columnas representa a cada una de las aristas de $K_n(S)$, de manera tal que la fila i representa a la arista que tiene la etiqueta i , consideramos que la enumeración de las filas y columnas de la matriz empieza desde 0, por lo que $i \in [0, \binom{n}{2} - 1]$. Esto ocurre de la misma manera para las columnas.

La matriz de disyunción tiene un 0 en la entrada (i, j) si las aristas i y j se cruzan o comparten un vértice, y tiene un 1 en la entrada (i, j) si las aristas i y j son totalmente disjuntas. Es decir, construimos la matriz de adyacencia de la gráfica $D(S)$.

A continuación describimos el algoritmo para encontrar thrackles de tamaño k , este algoritmo usa la matriz de disyunción construida en el paso 3 descrito anteriormente. El pseudocódigo se encuentra en el algoritmo 1.

El algoritmo que diseñamos utiliza la técnica de *backtracking*, recordemos que se desea encontrar todos los thrackles de tamaño k . Para nosotros, un solo thrackle de tamaño k es una solución. Una solución es almacenada en un vector C . Almacenamos las etiquetas de las aristas que conforman un thrackle de tamaño k en las entradas del vector.

En cada iteración, el algoritmo verifica si ya se han encontrado k aristas que se intersectan a pares, para evaluar la intersección se usa la matriz de disyunción.

Supongamos que el vector C tiene entradas desde $C[0]$ hasta $C[j]$ y que $j + 1 < k$. Esto quiere decir que las aristas $C[0], C[1], \dots, C[j]$ forman un thrackle con $j + 1$ aristas. El algoritmo buscaría extender el tamaño de este thrackle en uno. Para esto hacemos $C[j + 1] = C[j] + 1$ y verificamos si $C[j + 1]$ intersecta a $C[0], C[1], C[2], \dots, C[j - 1], C[j]$. Si lo hace, entonces $C[j + 1]$ forma parte del thrackle y ahora el thrackle tiene $j + 2$ aristas. En caso contrario hacemos $C[j + 1] = C[j + 1] + 1$, es decir, se descarta la arista que estaba en $C[j + 1]$ y es reemplazada por la arista subsecuente en la etiquetación.

Si en algún momento la entrada $C[j]$ tiene un valor mayor o igual a $\binom{n}{2}$, esto es, que ya agotó los valores posibles para representar alguna arista en K_n , entonces, se incrementa el valor de la entrada $C[j - 1]$ en uno y se continua la verificación a partir de esta entrada. Esto permite que el algoritmo realice el proceso de *backtracking*.

Si el vector C tiene k entradas, es decir, encontró un thrackle con k aristas entonces almacenamos el contenido del vector C en una lista de vectores. Como ya se encontró una solución y esta ha sido procesada, para buscar la siguiente solución, le indicamos al algoritmo que el thrackle tiene actualmente tamaño $k - 1$, provocando así que en la siguiente iteración se busque incrementar el tamaño del thrackle en uno.

Mostramos un ejemplo de cómo se llena el vector C en una ejecución del algoritmo en la figura 4.8. En el inicio de la ejecución del algoritmo, el vector C está vacío, es decir, que todas sus entradas tienen un valor nulo. Esto se representa en la raíz del árbol generado implícitamente por el *backtracking*. Podemos pensar que el árbol implícito se construye primero a profundidad, similar a un recorrido de búsqueda en profundidad (DFS). El primer subárbol que se genera, después de la raíz, es aquel cuya raíz tiene a $C[0] = 0$ y las

Algoritmo 1: Algoritmo para encontrar todos los thrackles de tamaño k .

```

1  función EncontrarThrackle ( $n, k$ )
   Entrada: Un entero  $n$ , un entero  $k$ .
   Salida : Una lista de thrackles de tamaño  $k$  para cada tipo de
           orden de  $n$ .
2  Sea  $C$  un vector de tamaño  $k + 1$ ;  $C[0] \leftarrow 0$ 
3   $C[i] \leftarrow NIL$  para  $1 \leq i \leq k + 1$ 
4  inters_flag  $\leftarrow$  true
5  curr_size  $\leftarrow$  0
6  while  $C[0] < \binom{n}{2}$  do
7      while curr_size  $< k$  do
8          inters_flag = true
9          if  $C[curr\_size] \geq \binom{n}{2}$  then
10             curr_size  $\leftarrow$  curr_size - 1
11             if curr_size  $< 0$  then
12                 return Lista  $L$  y thrackle_counter
13              $C[curr\_size] \leftarrow C[curr\_size] + 1$ 
14             continue
15         for  $i \leftarrow 0 \dots curr\_size - 1$  do
16             inters_flag = inters_flag &&
17             matrix[ $C[i]$ ][ $C[curr\_size]$ ]
18         if inters_flag == False then
19              $C[curr\_size] \leftarrow C[curr\_size] + 1$ 
20             continue
21         else
22             if curr_size + 1 ==  $k$  then
23                 thrackle_counter  $\leftarrow$  thrackle_counter + 1
24                 Almacenar  $C$  en una lista de vectores  $L$ .
25                 continue
26          $C[curr\_size + 1] \leftarrow C[curr\_size] + 1$ 
27     curr_size  $\leftarrow$  curr_size + 1

```

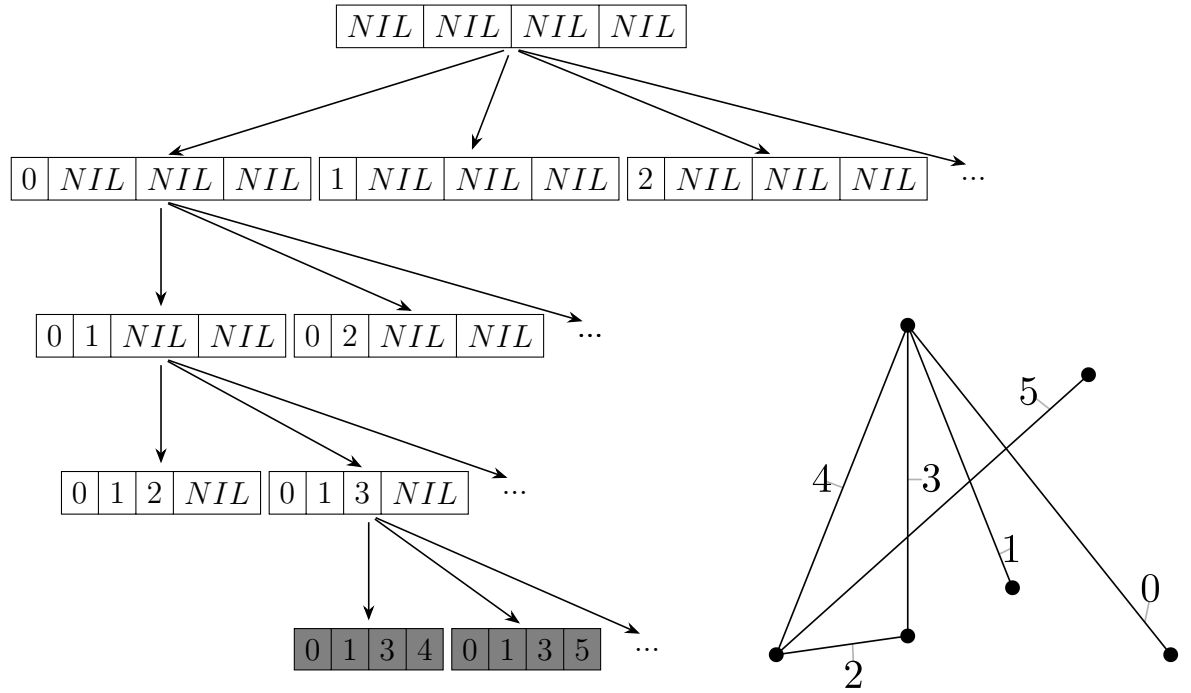


Figura 4.8: La figura muestra un ejemplo de cómo cambia el vector C cuando se busca un thrackle con 4 aristas para alguna $n > 5$. En el lado derecho presentamos un dibujo de una gráfica en la que se buscan los thrackles con 4 aristas. Solamente se representan algunas instancias del vector C . En este ejemplo suponemos que las aristas con etiqueta 1 y 2 no se intersectan. Es posible observar que cuando $C = [0, 1, 2, NIL]$ no se generan, debajo de ese nivel, combinaciones con las etiquetas 1 y 2. Se marcan de fondo gris las soluciones encontradas.

demás posiciones con un valor nulo, llamemosle r_1 . Si aún no se alcanza el tamaño de thrackle deseado, después generamos, como hijo de r_1 , el subárbol cuya raíz tiene a $C[0] = 0$ y $C[1] = 1$ y las demás posiciones con un valor nulo, llamemosle r_2 . Si aún no se alcanza el tamaño de thrackle deseado, después generamos, como hijo de r_2 , el subárbol cuya raíz tiene a $C[0] = 0, C[1] = 1$ y $C[2] = 2$ y las demás posiciones con un valor nulo. Repetimos este proceso hasta que alcancemos el tamaño de thrackle que buscamos. Cada nodo genera un hijo siempre y cuando las aristas representadas en C se intersecten a pares. En la figura 4.8 mostramos un ejemplo de un árbol generado por el algoritmo que tiene 4 niveles.

En la primera iteración hacemos $C[0] = 0$. Esta inicialización es necesaria para poner en marcha el algoritmo. De esta manera, el algoritmo encuentra primero todos los thrackles que contengan a la arista con etiqueta 0 en la primera posición. Una vez que la posición $C[0]$ tenga un valor mayor o igual a $\binom{n}{2}$, el valor de $C[0]$ será igual a 1. Esto hará que el algoritmo busque los thrackles que contengan a la arista con etiqueta 1 en la primera posición. Este proceso se repite para todos los valores entre 0 y $\binom{n}{2} - 1$.

Este algoritmo solamente genera soluciones que son thrackles. Puesto que en C solo se avanza a la siguiente posición cuando se encuentra que la arista de la posición actual intersecta a las aristas anteriormente establecidas. Además, el algoritmo genera todos los thrackles con k aristas, si no lo hiciera significaría que no evaluó determinada combinación de aristas. Recordemos que las aristas están etiquetadas con enteros desde 0 hasta $\binom{n}{2} - 1$. Supongamos que existe un subconjunto $T = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ de las etiquetas $\{0, 1, 2, \dots, \binom{n}{2} - 1$ que representa un thrackle de tamaño k y que el algoritmo no evaluó. Existe un subárbol cuya raíz, llamemosle r_1 tiene a $C[0] = a_1$ y, por consiguiente r_1 , tiene como hijo al subárbol cuya raíz, llamemosle r_2 tiene a $C[0] = a_1$ y a $C[1] = a_2$ y así sucesivamente hasta llegar a un nodo sin hijos que tiene a $C[0] = a_1, C[1] = a_2, \dots, C[k] = a_k$, si el algoritmo no evaluó esta combinación, significa que no generó alguno de los subárboles, en la línea 25 del algoritmo, que tienen como descendiente al nodo $C[0] = a_1, C[1] = a_2, \dots, C[k] = a_k$ y esto sucede cuando existe al menos un par de aristas $a_i, a_j \in T$ que son disjuntas. Esto contradice la suposición de que T representa un thrackle, por lo tanto, si T es un thrackle, entonces el algoritmo lo evalúa, esto sucede en el ciclo **for** de la línea 15.

Para el caso particular de la entrada $C[0]$, se toman los valores en el rango $[0, \binom{n}{2}]$. Las combinaciones que se descartan, al hacer la evaluación en la línea 18, son aquellas que no forman un thrackle, estas son las combinaciones que

contienen al menos una arista disjunta de alguna de las otras aristas de la combinación.

Análisis de complejidad

El caso en el que este algoritmo realiza más cálculos es aquel en el que no se descarta ninguna combinación de tamaño t para $t \leq k$ y por lo tanto el algoritmo analiza, en tiempo $O(t)$, cada combinación en el ciclo de la línea 15. Para establecer el costo computacional del algoritmo es necesario saber cuántas combinaciones de tamaño t existen para cada $t \leq k$ y multiplicar esto por el costo de evaluar cada combinación. Como hay $\binom{n}{2}$ aristas y estamos suponiendo que cualquier combinación de tamaño t es válida, existen $\binom{\binom{n}{2}}{t}$ combinaciones de dicho tamaño. Se necesitan $t \binom{\binom{n}{2}}{t}$ operaciones para evaluar todas las combinaciones de tamaño t . En nuestro caso $t \in [1, 10]$, por lo tanto el costo computacional del algoritmo, en el peor caso es:

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{t=1}^{10} t \binom{\binom{n}{2}}{t}\right) &= O\left(\binom{\binom{n}{2}}{1} + 2\binom{\binom{n}{2}}{2} + 3\binom{\binom{n}{2}}{3} + \cdots + 10\binom{\binom{n}{2}}{10}\right) \\ &= O(n^2) + O(n^4) + O(n^6) + \cdots + O(n^{20}) \\ &= O(n^{20}), \end{aligned} \tag{4.6}$$

para cada tipo de orden de n puntos.

En teoría, el tiempo que necesitaríamos para ejecutar este algoritmo en el cluster es significativo. En la tabla 4.9, mostramos cuánto tiempo es requerido por este algoritmo con complejidad $O(n^{20})$ tomando en cuenta la velocidad de procesamiento del cluster. También mostramos cuánto tiempo tardó su ejecución para $n = \{8, 9, 10\}$.

Los datos de los thrackles máximos encontrados para cada $3 \leq n \leq 9$ pueden ser descargados de la siguiente liga: http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/3to9.tar.gz el archivo para $n = 10$, separado debido a su tamaño, puede ser descargado de la siguiente liga: http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/10.tar.gz

n	Tiempo teórico en cluster	Tiempo real en cluster
10	2113.99 años	3 días
9	257.01 años	12 minutos
8	24.36 años	6 segundos

Tabla 4.9: Tiempo de ejecución teórico del algoritmo y tiempo real de ejecución en el cluster.

4.5.2. Algoritmo para la intersección de dos thrackles

Dados dos thrackles con el mismo número de aristas, con un arreglo de enteros que represente a sus aristas, aprovechamos el ordenamiento lexicográfico para hacer la operación de intersección de thrackles en tiempo lineal. Sea A y B dos vectores que representan las aristas de dos thrackles, con $|A| = |B| = k$. El algoritmo 2 entrega la intersección de A y B y la almacena en un conjunto C . Este algoritmo es secuencial y visita en el peor caso todas las entradas de los dos vectores, en nuestra implementación, los thrackles almacenan la información de sus aristas en un vector de tamaño $\binom{n}{2}$ para cada n en el rango $[3, 10]$.

4.5.3. Algoritmo para encontrar colecciones de thrackles máximos de K_n

Aquí presentamos un algoritmo para resolver el siguiente problema:

Problema: Determinar si existen y encontrar, para cada tipo de orden de n puntos, con $3 \leq n \leq 10$, las colecciones de thrackles máximos que pueden inducir una descomposición de K_n .

Entrada: Un entero n , con $3 \leq n \leq 10$.

Salida: Para cada tipo de orden de n puntos, una lista de colecciones de thrackles máximos que pueden inducir una descomposición de K_n .

El algoritmo que diseñamos para este resultado es exhaustivo y secuencial.

Este algoritmo necesita un paso de preparación para funcionar: Para cada tipo de orden, para $3 \leq n \leq 10$, examinamos cuáles tienen al menos $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ thrackles máximos. De los resultantes, examinamos cuáles

Algoritmo 2: Intersección de dos conjuntos ordenados en tiempo lineal.

```

1 función Intersection ( $A, B, C$ )
   Entrada: Dos conjuntos  $A, B$  del mismo tamaño y un conjunto  $C$ 
   Salida : Un conjunto  $C$  con la intersección de  $A$  y  $B$ 
2  $i \leftarrow 0$ 
3  $j \leftarrow 0$ 
4 while  $i < k$  and  $j < k$  do
5     if  $A[i] < B[j]$  then
6          $i \leftarrow i + 1$ 
7     continue
8     if  $A[i] == B[j]$  then
9          $C \leftarrow C \cup \{A[i]\}$ 
10         $i \leftarrow i + 1$ 
11         $j \leftarrow j + 1$ 
12    continue
13    if  $A[i] > B[j]$  then
14         $j \leftarrow j + 1$ 
15    continue

```

tipos de orden cubren, con la unión de sus thrackles máximos, todas las aristas de K_n .

Algoritmo 3: Búsqueda de colecciones de thrackles máximos que inducen una descomposición de K_n

```

1 función FindThrackleCollections ( $n, ot$ )
  Entrada: Un entero  $n$ , un entero  $ot$  que representa algún tipo de
    orden válido de  $n$ .
  Salida : Las combinaciones de  $At_g(K_n)$  thrackles máximos que
    pueden inducir una descomposición del dibujo de  $K_n$ 
    inducido por el tipo de orden  $ot$ .
2  $c \leftarrow n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ 
3  $\mathcal{T} \leftarrow$  colección de thrackles máximos del tipo de orden  $ot$ 
4  $k \leftarrow |\mathcal{T}|$ 
5  $C \leftarrow$  combinaciones de tamaño  $c$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ 
6 foreach  $t \in C$  do
7    $solution \leftarrow \{T[t[1]], T[t[2]], \dots, T[t[k]]\}$ 
8   if  $solution$  cubre las aristas de  $K_n$  then
9      $\quad$  Almacenar  $solution$  en una lista de soluciones.
```

Después de la etapa de preparación, podemos empezar la búsqueda de las colecciones de thrackles máximos. Mostramos el pseudocódigo en el algoritmo 3. Una vez que sabemos cuáles son los tipos de orden candidatos a tener una colección de thrackles máximos que induzcan una descomposición de K_n , buscamos, de manera exhaustiva, todas las combinaciones posibles de $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ thrackles máximos. Para cada una de las combinaciones verificamos si esta cubre o no a las aristas de K_n . Si la combinación cubre, almacenamos las etiquetas en una lista de soluciones y examinamos la siguiente combinación. En caso contrario descartamos esa combinación y continuamos examinando.

Las combinaciones fueron generadas usando el algoritmo descrito en Knuth (2011a). Mostramos el pseudocódigo del algoritmo para generar las combinaciones en el algoritmo 4 en la página 79. Dado un entero t , si queremos generar las combinaciones de c elementos, algoritmo 4 tiene una complejidad de $O\left(\binom{t}{c}\right) = O(t^c)$.

En nuestro trabajo, c es fija para cada n ya que hacemos $c = At_g(K_n)$. Recordemos que $At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$. Sin embargo, t depende de

dos parámetros: uno es n y el otro es el tipo de orden de tamaño n con el que trabajemos. Por ejemplo, para $n = 6$ el tipo de orden 1 tiene 13 thrackles máximos, por lo que buscaríamos generar las $\binom{13}{3}$ combinaciones. Por otro lado, el tipo de orden 7 tiene 5 thrackles máximos, por lo que buscaríamos generar las $\binom{5}{3}$ combinaciones. Esto tiene un impacto en la complejidad del algoritmo.

Sea $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ una combinación generada por el algoritmo. $c_i \in \mathcal{C}$ representa una etiqueta de un thrackle máximo. Recordemos que el algoritmo entrega, para cada tipo de orden de tamaño n , una lista $\{\mathcal{C}_\infty, \mathcal{C}_\infty, \dots, \mathcal{C}_1\}$, donde cada \mathcal{C}_i es una colección de thrackles máximos que pueden inducir una descomposición de K_n . Por ejemplo, si $\mathcal{C}_1 = \{23, 45, 99\}$ entonces \mathcal{C}_1 representa una colección de tres thrackles máximos, los cuales tienen etiquetas 23, 45 y 99 respectivamente. Es posible buscar, en el archivo generado por el algoritmo 1 que busca thrackles con k aristas, el thrackle que corresponde con determinada etiqueta y realizar operaciones sobre este.

Para cada combinación calculada, el algoritmo verifica si esta cubre o no a las aristas de K_n . Hacemos esta verificación con un algoritmo secuencial que recorre el arreglo de aristas de cada thrackle identificado por las etiquetas de la combinación. En nuestra implementación cada thrackle de K_n tiene asociado un arreglo de $\binom{n}{2}$ posiciones.

Análisis de complejidad

Sea $x = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$, para un tipo de orden válido (un tipo de orden con al menos x thrackles máximos) de tamaño n , con m thrackles máximos, el algoritmo 3 genera las $\binom{m}{x}$ combinaciones y después, para cada una, examina, en tiempo $O((n-x) \cdot n^2)$, si esta cubre o no a las aristas de K_n . Luego, este algoritmo tiene complejidad:

$$O\left(\binom{m}{x} \cdot (n-x)n^2\right) = O\left(\binom{m}{n} n^3\right) = O(m^n n^3) \quad (4.7)$$

Es importante notar que la complejidad establecida en la ecuación 4.7 es para un tipo de orden. Nosotros ejecutamos este algoritmo para cada tipo de orden válido. Para saber cuántos thrackles máximos hay en determinado tipo de orden usamos el algoritmo 1 descrito en la sección 4.5.1. En la tabla 4.11 damos un panorama de los valores que toma m para $6 \leq n \leq 10$. Con esto ilustramos también los valores que toma $\binom{m}{At_g(K_n)}$, es decir, el número de combinaciones a evaluar por el algoritmo en el peor caso.

Algoritmo 4: Algoritmo de Knuth para generar las combinaciones de tamaño t del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

```

1 función KnuthCombinations ( $n, t$ )
  Entrada: Un entero  $n$ , un entero  $t$  con  $0 \leq t \leq n$ 
  Salida : Las combinaciones de  $t$  elementos de los  $n$  números en el
           conjunto  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .
2 for  $j = 1 \dots t$  do
3    $c[j] \leftarrow j - 1$ 
4  $c[t+1] \leftarrow n$ 
5  $c[t+2] \leftarrow 0$ 
6 L2:
7 Almacenar la combinación  $c[t], c[t-1], \dots, c[0]$ .
8  $j \leftarrow 1$ 
9 while  $c[j] + 1 == c[j+1]$  do
10   $c[j] \leftarrow j - 1$ 
11   $j \leftarrow j + 1$ 
12 if  $j > t$  then
13  return
14  $c[j] \leftarrow c[j] + 1$ 
15 goto L2

```

A pesar de que la complejidad descrita por la ecuación 4.7 es bastante grande, en la ejecución que realizamos obtuvimos tiempos de ejecución aceptables para el trabajo. En la tabla 4.10 describimos el tiempo de ejecución necesario para el tipo de orden de tamaño $n = \{8, 9, 10\}$ que tiene el mayor número de thrackles máximos y no es el convexo, y el tiempo de ejecución que tomó analizar todos los tipos de orden válidos. Podemos notar que a pesar de que en el caso de K_{10} hay aproximadamente $1.8E^{12}$ combinaciones posibles para uno de los tipos de orden de 10 puntos, el algoritmo termina en un tiempo considerable para nosotros.

n	m	Tiempo de ejecución teórico	Tiempo de ejecución real
8	94	2×10^{450} años	0.70 segundos
9	213	3×10^{193} años	25 minutos
10	459	1.3×10^{74} años	4 días y 2 horas

Tabla 4.10: Mostramos el tiempo de ejecución real del algoritmo para todos los tipos de orden. La segunda columna indica cuántos thrackles máximos hay en como máximo en algún tipo de orden válido para cada n . La tercera columna indica cuánto tiempo necesitaría para acabar, en el peor caso. La última columna indica cuánto tiempo se necesitó en realidad.

n	Número máximo de thrackles en un T.O.	$At_g(K_n)$	Número de combinaciones
6	5	3	10
7	16	4	1,820
8	49	5	1,906,884
9	134	6	7,177,979,809
10	333	6	1,809,928,822,548

Tabla 4.11: Se cuantifica el número de combinaciones a examinar por el algoritmo para el tipo de orden válido con más thrackles de cada $3 \leq n \leq 10$. Para los casos de $n = \{3, 4, 5\}$ no existen tipos de orden, diferentes al convexo, tal que la unión de thrackles máximos cubra las aristas de K_n .

4.5.4. Algoritmo para generar particiones guía de un entero

El algoritmo proporcionado en Knuth (2011b) genera las particiones de algún entero n con $O(n^2)$ operaciones, mostramos el pseudocódigo en el algoritmo 5. Una vez que las particiones son generadas, examinamos aquellas que tengan menos de $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ elementos y evaluamos si son válidas.

Una partición P , de tamaño $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$, de n es una *partición guía* si 1) todo elemento de P es menor o igual a n y 2) si algún $p_i \in P$ es igual a n , entonces solamente hay una ocurrencia de p_i en P .

Nuestra función para evaluar si una partición es una partición guía consiste en visitar cada posición de un arreglo con a lo sumo $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$

Algoritmo 5: Algoritmo de Knuth para generar las particiones de un entero n .

```

1 función KnuthPartitions ( $n$ )
  Entrada: Un entero  $n$ , con  $n \geq 1$ .
  Salida : Las particiones  $P = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  del entero  $n$ , tal que
             $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$  y  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ .
2 P1.  $a_0 \leftarrow 0, m \leftarrow 1$ 
3 P2.  $a_m \leftarrow n, q \leftarrow m - [n = 1]$ 
4 P3. Almacenar la partición  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .
5 if  $a_q \neq 2$  then
6   goto P5
7 P4.  $a_q \leftarrow 1, q \leftarrow q - 1, m \leftarrow m + 1, a_m \leftarrow 1$ .
8 goto P4
9 P5. if  $q == 0$  then
10   return
11 else
12    $x \leftarrow a_q - 1$ 
13    $a_q \leftarrow x$ 
14    $n \leftarrow m - q + 1$ 
15    $m \leftarrow q + 1$ 
16 P6. if  $n \leq x$  then
17   goto P2
18 else
19    $a_m \leftarrow x$ 
20    $m \leftarrow m + 1$ 
21    $n \leftarrow n - x$ 
22   goto P6

```

elementos y verificar que solamente exista una ocurrencia de n . Mostramos el pseudocódigo en el algoritmo 6. Esta tarea requiere analizar, en tiempo $O(1)$ cada una de los elementos del arreglo, cuyo tamaño es $O(n)$, por ello la prueba tiene complejidad lineal. Esta función es usada por el algoritmo de generación de particiones guía.

Algoritmo 6: Algoritmo para evaluar si una partición es válida o no.

```

1 función ParticionValida ( $n, P$ )
  Entrada: Un entero  $n$ , una partición  $P$  de  $n$  de tamaño  $k$ .
  Salida :  $true$ , si la partición  $P$  es válida,  $false$  en otro caso.
2  $c \leftarrow 0$ 
3 foreach  $i \in P$  do
4   if  $i > n$  then
5     return  $false$ 
6   if  $i == n$  then
7      $c \leftarrow c + 1$ 
8   if  $c > 1$  then
9     return  $false$ 
10 return  $true$ 

```

Análisis de complejidad

El algoritmo para generar las particiones de un entero n tiene complejidad $O(n^2)$. Adicionalmente, nosotros verificamos que las particiones tengan menos de $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ elementos en tiempo lineal. Luego, para cada partición con el tamaño deseado, evaluamos si es válida o no. El costo total de este algoritmo es:

$$O(n^2 \cdot n \cdot n) = O(n^4)$$

La razón principal por las que definimos las particiones guía es porque pueden ser utilizadas como guía para buscar descomposiciones de K_n donde cada elemento de la partición indica el tamaño de un thrackle. A continuación presentamos cómo utilizamos estas particiones para construir una serie de algoritmos.

4.5.5. Algoritmo para encontrar descomposiciones por thrackles de K_n usando particiones de enteros

Este algoritmo fue diseñado para resolver el siguiente problema:

Problema: Dada una partición $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ de un entero n con $m < At_g(K_n)$, deseamos encontrar si existe, para algún dibujo de n , una colección $\mathcal{C} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ de thrackles disjuntos tales que $|E(T_i)| = a_i$.

Entrada: Una partición guía P de n .

Salida: *true* si existe una colección de thrackles con las características descritas en el problema. *false* en otro caso.

Como resultado del algoritmo para encontrar particiones guía descrito en la sección 4.5.4, tenemos una lista de particiones guía para $n \in \{8, 9\}$ que presentamos en la tabla 4.12. En esta función se cargan, a memoria, los datos de los thrackles, en el caso de K_{10} , los archivos de los thrackles máximos y thrackles con 9 aristas exceden el tamaño de la memoria del cluster. Por ello las particiones de $n = 10$ no fueron evaluadas en este trabajo.

A continuación presentamos, con un caso particular, el esquema general de los algoritmos usados para verificar si existen colecciones de thrackles cuyos tamaños correspondan a los elementos de una partición. Este algoritmo utiliza la técnica de *backtracking*, presentamos el pseudocódigo en el algoritmo 7.

Para el funcionamiento de este algoritmo es necesario tener los datos de los thrackles de cada tamaño indicado por la partición, por ejemplo, si se trabaja con $n = 8$ y la partición guía es $\{8, 7, 7, 6\}$ se debe usar la función de búsqueda de thrackles con k aristas descrito en la sección 4.5.1 para buscar los thrackles con ocho, siete y seis aristas. No es necesario tener dos archivos diferentes para cada uno de los dos thrackles de tamaño siete, es suficiente tener un archivo para cada tamaño diferente.

Tomemos el caso de la primera partición de ocho, $P = \{8, 7, 7, 6\}$, en este caso queremos verificar si existe o no una colección de cuatro thrackles, uno de tamaño ocho, dos de tamaño siete y uno de tamaño seis, tal que sean disjuntos a pares. Para buscar esta colección, podemos diseñar un algoritmo que evalúe, exhaustivamente, la intersección de cada thrackle A de tamaño ocho, con cada thrackle B de tamaño siete, si existen A y B disjuntos, verificamos

Algoritmo 7: Algoritmo para buscar una colección de thrackles disjuntos de K_n dada una partición guía de n .

```

1  función 8876 ( $n, P$ )
   Entrada: Un entero  $n$ , Una partición guía  $P$  de  $n$  de tamaño  $k$ .
   Salida : true, si existe una colección de thrackles disjuntos en la
             que los tamaños de los thrackles corresponden a los
             elementos de  $P$ ; false en otro caso.

2  Begin
3      Sea  $Z$  un vector booleano de 28 posiciones. for  $i \leftarrow 0 \dots 28$  do
4          |  $Z[i] = 0$ 
5      end
6      Almacenar el estado actual de  $Z$  en el arreglo  $Z_1$ .
7      foreach Thrackle  $A$  de tamaño 8 do
8          | Sea  $A.bedges$  el vector booleano que representa las aristas de
9          |  $A$ .
10         for  $i \leftarrow 0 \dots 26$  do
11             | if  $A.bedges[i] == 1$  then
12                 | if  $Z[i] == 1$  then
13                     | Restaurar  $Z$  a  $Z_1$ .
14                     | Descartar thrackle actual y continuar con el
15                     | siguiente de tamaño 8.
16                 end
17             else
18                 |  $Z[i] \leftarrow 1$ 
19             end
20         end
21     end
22     Almacenar el estado actual de  $Z$  en el arreglo  $Z_2$ .
23     foreach Thrackle  $B$  de tamaño 7
24         | Sea  $B.bedges$  el vector booleano que representa las aristas
25         | de  $B$ .
26         for  $i \leftarrow 0 \dots 26$  do
27             | if  $B.bedges[i] == 1$  then
28                 | if  $Z[i] == 1$  then
29                     | Restaurar  $Z$  a  $Z_2$ .
30                     | Descartar thrackle actual y continuar con el
31                     | siguiente de tamaño 7.
32                 end
33             else
34                 |  $Z[i] \leftarrow 1$ 
35             end
36         end
37     end
38 end

```

```

36
37   Almacenar el estado actual de  $Z$  en el arreglo  $Z_3$ .;
38   foreach Thrackle  $C$  de tamaño 7 do
39       Sea  $C.bedges$  el vector booleano que representa las aristas de
         $C$ .;
40       for  $i \leftarrow 0 \dots 26$  do
41           if  $C.bedges[i] == 1$  then
42               if  $Z[i] == 1$  then
43                   Restaurar  $Z$  a  $Z_3$ .;
44                   Descartar thrackle actual y continuar con el
                     siguiente de tamaño 7.;
45               else
46                    $Z[i] \leftarrow 1$ ;
47   Almacenar el estado actual de  $Z$  en el arreglo  $Z_4$ .;
48   foreach Thrackle  $D$  de tamaño 6 do
49       Sea  $D.bedges$  el vector booleano que representa las aristas
        de  $D$ .;
50       for  $i \leftarrow 0 \dots 26$  do
51           if  $D.bedges[i] == 1$  then
52               if  $Z[i] == 1$  then
53                   Restaurar  $Z$  a  $Z_4$ .;
54                   Descartar thrackle actual y continuar con el
                     siguiente de tamaño 6.;
55               else
56                    $Z[i] \leftarrow 1$ ;

```

n	Particiones válidas de $\binom{n}{2}$
8	$\{8, 7, 7, 6\}$
	$\{7, 7, 7, 7\}$
9	$\{9, 8, 8, 8, 3\}$
	$\{9, 8, 8, 7, 4\}$
	$\{9, 8, 8, 6, 5\}$
	$\{9, 8, 7, 7, 5\}$
	$\{9, 8, 7, 6, 6\}$
	$\{9, 7, 7, 7, 6\}$
	$\{8, 8, 8, 8, 4\}$
	$\{8, 8, 8, 7, 5\}$
	$\{8, 8, 8, 6, 6\}$
	$\{8, 8, 7, 7, 6\}$
	$\{8, 7, 7, 7, 7\}$

Tabla 4.12: Particiones de enteros del número de aristas de K_8 y de K_9 .

que exista algún thrackle C de tamaño siete que sea disjunto con A y con B y, finalmente, si existe, buscamos un thrackle D , de tamaño seis que sea disjunto con A, B y C .

Para verificar que los thrackles sean disjuntos, mantenemos un arreglo booleano Z de $\binom{8}{2}$ posiciones. Cuando se analiza un thrackle T de tamaño 8 recorremos el arreglo de aristas de T , cuyo tamaño es también $\binom{8}{2}$. Como T tiene 8 aristas entonces el arreglo de aristas de T tiene exactamente 8 posiciones con valor uno y el resto con valor cero. Para cada posición p de T cuyo valor sea uno, marcamos la misma posición en Z con un uno. Esto significa que el thrackle T cubre a la arista p .

Si en algún momento debemos marcar alguna posición p del arreglo Z y esta ya tiene un valor de uno entonces un thrackle, anteriormente analizado, ya cubre esa arista y por lo tanto el thrackle que se está verificando actualmente no es disjunto con alguno anterior. Por lo tanto descartamos ese thrackle y continuamos verificando con el thrackle subsecuente del archivo.

Si no encontramos ningún thrackle que sea disjunto con los anteriormente analizados, el algoritmo descarta el último thrackle que fue compatible con los demás y continúa con el siguiente del mismo tamaño del thrackle descartado.

El algoritmo termina, retornando un valor *true*, cuando encuentra un

thackle con ocho aristas, dos con siete aristas y uno con seis aristas que son disjuntos a pares o bien, cuando no hay más thrackles que analizar; en este caso el algoritmo retorna un valor *false*.

Este algoritmo evalúa, en el peor caso, todas las combinaciones posibles de cuatro thrackles con tamaños 8,7,7 y 6 respectivamente.

En nuestra implementación, decidimos almacenar los datos de los thrackles en la memoria del cluster para que el acceso fuera mucho más rápido que leer repetitivamente los archivos creados por el algoritmo de búsqueda de thrackles con k aristas presentado en la sección 4.5.1.

Para las particiones guía presentadas en la tabla 4.12, en la algunos de los casos no fue necesario construir funciones que evaluarán toda la partición. Para el caso de $n = 9$ y las particiones $\{9, 8, 8, 8, 3\}$, $\{9, 8, 8, 7, 4\}$, $\{9, 8, 8, 6, 5\}$ el construimos un algoritmo que verifica la existencia de una colección de thrackles de tamaños nueve, ocho y ocho. Para las particiones $\{9, 8, 7, 7, 5\}$, $\{9, 8, 7, 6, 6\}$, $\{9, 7, 7, 7, 6\}$ construimos un algoritmo que verifica la existencia de una colección de thrackles de tamaños nueve, siete, siete, siete y seis. Para el resto de las particiones guía de $n = 9$ escribimos un algoritmo para cada una. Para las dos particiones guía de $n = 9$ construimos dos algoritmos.

Las funciones construidas permitieron dar el resultado del teorema 4.4.1 de la sección 4.4. Estas funciones pueden encontrarse en la siguiente liga:

https://github.com/demaseme/programas_tesis_rev3/tree/master/cpps.

Análisis de complejidad

La complejidad de este algoritmo está dado por el número de thrackles de cada tamaño establecido por la partición. Si existen k thrackles de tamaño 8, m thrackles de tamaño 7 y q thrackles de tamaño 6. El algoritmo realiza $O(k \cdot m^2 \cdot q)$ operaciones. Nótese el exponente de m en la complejidad, recordemos que la partición guía es $\{8, 7, 7, 6\}$ esto implica que por cada thrackle de tamaño 7, verificaremos con cada uno de los otros thrackles de tamaño 7 y por ello debemos considerar $m \times m$ en la complejidad.

De manera general para una partición guía $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, si existen t_i thrackles de tamaño a_i , en el peor caso hay

$$\binom{n}{2}^{t_i} = \binom{n}{a_i}^{t_i} \quad (4.8)$$

thrackles de tamaño a_i . La ecuación 4.8 alcanza el máximo cuando $a_i = n$. Por lo que un algoritmo exhaustivo como el aquí presentado que usa como

partición guía una partición que tiene m elementos tiene, en el peor caso, una complejidad de

$$O\left(\left(\binom{n}{2}\right)^m\right) = O(n^{2nm})$$

Por otro lado 4.8 se minimiza cuando $a_i = 1$, por lo que el algoritmo tiene como mejor caso una complejidad de :

$$\omega\left(\left(\binom{n}{2}\right)^m\right) = \omega\left(\binom{n}{2}^m\right) = \omega(n^{2m})$$

4.5.6. Algoritmo para encontrar el anti-thickness de un dibujo de K_n

El algoritmo presentado en esta sección resuelve el siguiente problema:

Problema: Dado un conjunto de n puntos en posición general, deseamos encontrar el anti-thickness de la gráfica geométrica completa inducida por el conjunto.

Entrada: Un conjunto de n puntos en posición general.

Salida: El anti-thickness de la gráfica completa inducida por el conjunto de puntos.

Este es un algoritmo exhaustivo y recursivo que usa la técnica de back-tracking para encontrar el anti-thickness de un dibujo de K_n . El algoritmo realiza esta tarea buscando colecciones de thrackles cuyo tamaño sea mínimo, como en la definición 5 de anti-thickness de un dibujo presentado en la sección 2.2.

Este algoritmo construye, implícitamente, un árbol en el que cada nodo es un thrackle y un camino desde la raíz hasta algún nodo es una colección de thrackles. Una colección de thrackles es una descomposición si la intersección a pares de cada thrackle en la colección es vacía y si la unión de las aristas de todos los thrackles es igual al conjunto de aristas de K_n . Decimos que dos thrackles son compatibles si su intersección es vacía. En este árbol la raíz es el nivel cero, los hijos de la raíz son el nivel 1, los hijos de los hijos de la raíz son el nivel 2 y así sucesivamente. El algoritmo baja de nivel en el árbol

cuando encuentra un thrackle compatible con el resto de los thrackles que ya están en la colección.

El algoritmo busca el thrackle de mayor tamaño posible en cada llamada recursiva para intentar agregarlo a la colección. Para poder agregarlo debe ser disjunto con los thrackles que ya existan en la colección. El algoritmo termina cuando no puede encontrar más colecciones de thrackles que cubran la gráfica completa y que tenga tamaño mínimo o bien, cuando las colecciones que encuentra son más grandes que el anti-thickness encontrado actualmente.

Este algoritmo requiere que se lean los puntos y se induzca la gráfica completa así como la inicialización de la matriz de disyunción de la misma que mencionamos en la sección 4.5.1 del algoritmo de búsqueda de thrackles con k aristas.

En el algoritmo representamos un thrackle con un vector de enteros que representan las etiquetas de las aristas que inducen al thrackle. El vector de enteros tiene valores desde 0 hasta $\binom{n}{2} - 1$ ya que este es el rango de etiquetación de las aristas de K_n .

Presentamos el pseudocódigo en el algoritmo 8, donde *minAt*, *matrix*, *cols*, *n* y *coveredEdges* son variables globales. En el pseudocódigo *minAt* es un entero que representa el tamaño mínimo de la colección de thrackles encontrada hasta determinado momento, *matrix* representa la matriz de disyunción previamente construida, *cols* es un entero que representa el número de columnas en la matriz de disyunción y $cols = \binom{n}{2} - 1$ y *coveredEdges* es un vector de enteros que indica cuáles aristas han sido cubiertas por alguna colección en determinado momento.

Procedemos a explicar las líneas de este algoritmo para entender mejor qué es lo que hace. En la línea 2 se verifica si el nivel actual en el árbol es mayor al mínimo encontrado hasta el momento. Si es así la llamada a la función termina. Esta verificación es útil cuando ya se encontró una descomposición de K_n de tamaño t , y el tamaño de la colección actual es mayor o igual a t . Ya que esa colección no mejorará el resultado actual de t , evitamos seguir por ese camino. La verificación de la línea 4 funciona para saber si la colección de thrackles ya cubre las aristas de la gráfica completa. Si la verificación es verdadera, quiere decir que se ha encontrado una descomposición. En la línea 5 se procede a evaluar si la descomposición es más pequeña que alguna encontrada anteriormente, si es así, se actualiza el valor de *minAt* en la línea 6. Finalmente, en la línea 7, terminamos la llamada recursiva. El bloque **else** de la línea 8 se ejecuta cuando aún no se ha encontrado una descomposición. En la línea 9 declaramos un vector de enteros que nos servirá para almacenar

Algoritmo 8: Pseudocódigo del algoritmo que encuentra el anti-thickness de una gráfica completa inducida por un conjunto de puntos S .

```

1 función exhaustive_at (current_thrackle, LevelAt)
  Entrada: Un vector de enteros que representa las aristas de un
            thrackle, un entero que representa el tamaño de la
            colección de thrackles actual.
  Salida : El anti-thickness de la gráfica completa inducida por un
            conjunto de puntos.
2 if LevelAt  $\geq$  minAt then
3   return
4 if coveredEdges.size() == cols then
5   if LevelAt < minAt then
6     minAt = LevelAt
7   return
8 else
9   Sea local_desc un vector de enteros.
10  while true do
11    Sea thrackle un vector de vector de enteros.
12    val  $\leftarrow$  next(local_desc, thrackle, current_thrackle, at)
13    if !val then
14      return
15    local_desc.push_back(thrackle)
16    coveredEdges  $\leftarrow$  coveredEdges  $\cup$  thrackle
17    exhaustive_at(thrackle, LevelAt + 1)
18    coveredEdges  $\leftarrow$  coveredEdges  $\cap$  thrackle

```

los hijos del nodo actual del árbol. El ciclo `while` de las líneas 10 a la 18 es en donde se hace la búsqueda de thrackles para la descomposición.

En la línea 11 declaramos un vector de enteros *thrackle*, en él, almacenaremos un thrackle compatible con el thrackle actual *current_thrackle*. En la línea 12 buscamos el thrackle compatible más cercano posible usando una función que busca, dada una colección de aristas, un thrackle compatible. Para nosotros, la noción de cercanía está basada en el ordenamiento de dos thrackles como mencionamos en la sección 2.1.2. Explicamos esta función más adelante. Si `next` encuentra un thrackle, lo almacena en la variable *thrackle* y *val* adquiere el valor de *true*, en caso contrario *val* tiene el valor de *false*. La línea 13 verifica si se encontró o no un thrackle compatible; si no se encontró, la llamada recursiva es terminada en la línea 14. La línea 15 agrega el vector *thrackle* a la lista de descendientes *local_desc*. Esto indica que *thrackle* es hijo de *current_thrackle* en el árbol. Esta información es usada por el la función `next`. La línea 16 actualiza la lista de aristas cubiertas hasta el momento. La línea 17 realiza la llamada recursiva para seguir bajando en el árbol y verificar si ya se ha cubierto a todas las aristas de K_n . La línea 18 quita de la lista de aristas cubiertas a las aristas cubiertas por *thrackle*. Esto permite realizar el backtracking en la siguiente iteración del ciclo `while`.

Para saber cuáles aristas han sido cubiertas por la colección de thrackles mantenemos registro de las aristas de cada thrackle haciendo la operación de unión: El vector *coveredEdges* contiene enteros desde 0 hasta $\binom{n}{2} - 1$. Cada vez que se trabaja con un thrackle compatible se hace la unión del vector *coveredEdges* con el contenido del vector que representa al thrackle.

En la figura 4.9 mostramos un ejemplo de un árbol que se forma cuando se ejecuta el algoritmo para la búsqueda del anti-thickness de algún dibujo de K_6 , ilustramos un camino desde la raíz hasta un nodo T_3 . En cada uno de los nodos se representa la información de los thrackles que conforman una descomposición de un dibujo de K_6 . La gráfica K_6 tiene 15 aristas por lo que las etiquetas de las aristas de los thrackles van desde 0 hasta 15. En este ejemplo, una vez que se encontró la descomposición de tres thrackles T_1, T_2 y T_3 el valor de *minAt* es igual a 3. Por ello el algoritmo evitará analizar colecciones de 3 o más thrackles. El algoritmo ignora estas colecciones al terminar prematuramente las llamadas recursivas en la línea 3 del pseudocódigo.

Una vez que se ha inicializado la matriz de disyunción podemos hacer la primer llamada recursiva a la función `exhaustive_at` usando como parámetros un vector de enteros vacío y *LevelAt* = 0.

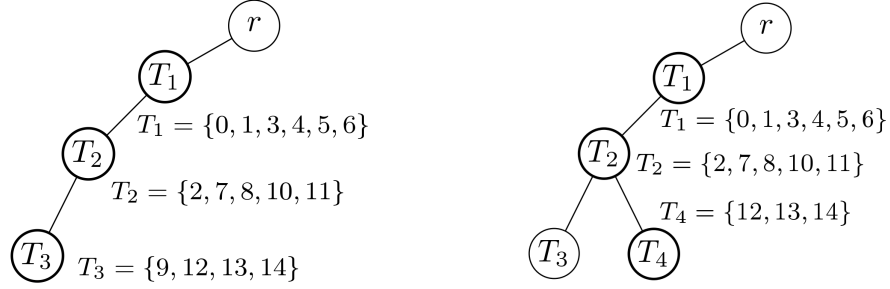


Figura 4.9: En la figura de la izquierda: una descomposición de algún dibujo de K_6 por tres thrackles T_1, T_2 y T_3 . Cuando T_1 es analizado en el algoritmo, las aristas con etiquetas 0, 1, 3, 4, 5 y 6 son agregadas al vector *coveredEdges* y después se hace la llamada recursiva con *current_thrackle* = T_1 y *LevelAt* = 1, en esta llamada recursiva el algoritmo **next** encuentra a T_2 y lo agrega como parte de la colección al hacer la unión de sus aristas con el vector *coveredEdges*. Después se hace la llamada recursiva con *current_thrackle* = T_2 y *LevelAt* = 2, en esta llamada recursiva el algoritmo **next** encuentra a T_3 y lo agrega como parte de la colección al hacer la unión de sus aristas con el vector *coveredEdges*. Después se hace la llamada recursiva y se detecta que todas las aristas han sido cubiertas por lo que se actualiza el valor de *minAt* y se termina la última llamada recursiva. En la figura de la derecha: Después de terminar la llamada recursiva se descarta T_3 y **next** busca, a partir de T_2 el siguiente thrackle compatible. En este ejemplo, se encuentra a T_4 que es un thrackle con 3 aristas. En la colección de los tres thrackles T_1, T_2, T_4 falta la arista con etiqueta 9. El algoritmo intentaría buscar el próximo thrackle, de tamaño 1, que cubra esta arista en la siguiente llamada recursiva. Sin embargo, antes de buscar un thrackle comparará las variables *LevelAt* y *minAt*. Como son iguales, evitará seguir buscando un thrackle y finalizará la llamada recursiva descartando así a T_4 . Nótese que en este momento la instancia del vector *local_desc* tiene los siguientes elementos: $local_desc = \{T_3, T_4\}$.

Algoritmo 9: Algoritmo para encontrar el siguiente thrackle compatible.

```

1  función next_at
   (current_thrackle, descendants, currentAt, found_thrackle)
   Entrada: El thrackle actual current_thrackle desde donde se quiere
               encontrar otro thrackle compatible, un vector de vectores
               de enteros que representa a los descendientes de
               current_thrackle, llamado descendants, el mejor tamaño
               actual de una descomposición de la gráfica completa
               actual currentAt y un vector vacío found_thrackle para
               almacenar el resultado. .
   Salida : false si no se encontró un thrackle compatible; true si se
               encontró un thrackle compatible. El resultado es
               almacenado en found_thrackle.
2  Sea  $missing = \{0, 1, 2, \dots, \binom{n}{2} - 1\} - coveredEdges$ .
3   $q \leftarrow |missing|$ 
4  if  $q > n$  and  $currentAt == 0$  then
5  |    $q \leftarrow n$ 
6  end
7  if  $q > n$  and  $currentAt > 0$  then
8  |    $q \leftarrow n - 1$ 
9  end
10 Sea  $s$  el tamaño del descendiente más pequeño  $i$ .
11 if  $s < q$  and  $s > 0$  then
12 |    $q \leftarrow s$ 
13 end
14 if  $descendants \neq \emptyset$  then
15 |    $starting\_thrackle \leftarrow$ 
       [ $descendants[i][0], descendants[i][1], \dots, descendants[i][q-1]$ ]
16 end
17 else if current_thrackle es máximo o es vacío then
18 |    $starting\_thrackle \leftarrow [missing[0], missing[1], \dots, missing[q-1]]$ 
19 end
20 else if current_thrackle no es máximo ni vacío y no hay
       descendientes then
21 |    $starting\_thrackle \leftarrow current\_thrackle$   $q \leftarrow |current\_thrackle|$ 
22 end
23  $p \leftarrow 1$ 
24  $ce \leftarrow |coveredEdges|$ 
25 while  $qp + ce < cols$  do
26 |    $p \leftarrow p + 1$ 
27 end
28 if  $currentAt + p \geq minAt$  then
29 |   return false
30 end

```

```

32
33 Sea local un vector de enteros vacío.;
34 while true do
35   val  $\leftarrow$  find_next_thrackle(starting_thrackle, local);
36   while !val do
37     q  $\leftarrow$  q - 1;
38     if q == 0 then
39        $\lfloor$  return false
40     p  $\leftarrow$  1;
41     ce  $\leftarrow$  |coveredEdges|;
42     while qp + ce < cols do
43        $\lfloor$  p  $\leftarrow$  p + 1
44     if currentAt + p  $\geq$  minAt then
45        $\lfloor$  return false;
46     starting_thrackle  $\leftarrow$ 
47       [missing[0], missing[1], ..., missing[q - 1]];
48   if coveredEdges  $\cap$  local ==  $\emptyset$  then
49     if local  $\not\subset$  descendants then
50        $\lfloor$  found_thrackle  $\leftarrow$  local;
51        $\lfloor$  return true;

```

Ahora hablaremos acerca de la función **next** presentamos el pseudocódigo en el algoritmo 9. Esta función encuentra, dado un thrackle T de tamaño k otro thrackle compatible con T . Antes de empezar la búsqueda establece el tamaño q del thrackle a encontrar. Esto lo hace analizando el tamaño de los descendientes de T , el algoritmo toma el tamaño más pequeño de estos descendientes ya que, por la naturaleza del algoritmo, no tiene sentido buscar un thrackle más grande que el descendiente más pequeño. Una vez que se conoce el valor de q hay que elegir cuáles son las aristas en las que se iniciará la búsqueda del siguiente thrackle. Después se inicia una búsqueda secuencial y exhaustiva de un thrackle de tamaño q usando la misma técnica descrita en la sección 4.5.1 para encontrar un thrackle de un tamaño dado. La diferencia principal es la inicialización del vector C que en este caso no tendrá valores nulos sino los de las q etiquetas elegidas anteriormente.

Cuando la función **next** encuentra un thrackle M con q aristas se procede a verificar que la intersección del vector *coveredEdges* y las etiquetas de M sea vacía. Esto es para asegurar que M sea disjunto con los otros thrackles de la colección.

Si la función **next** no encuentra un thrackle con q aristas, se repite la búsqueda de un thrackle con $q - 1$ aristas. El tamaño mínimo de un thrackle es 1.

Si no se logra encontrar ningún thrackle compatible se retorna el valor de *false*. Si el thrackle encontrado es disjunto de los thrackles que ya están en la colección se retorna el valor de *true*.

Las primeras 30 líneas del pseudocódigo ilustran cómo se elige el tamaño del nuevo thrackle e inicializan el thrackle por donde se empezará la búsqueda. Las siguientes líneas describen el proceso de búsqueda de un thrackle compatible. La línea 35 llama al algoritmo de búsqueda que, como ya mencionamos, trabaja de la misma manera que el algoritmo para búsqueda de thrackles de tamaño k con la diferencia de que el vector inicial no está vacío sino que tiene los contenidos de *starting_thrackle*.

El ciclo **while** de las líneas 34 a la 50 termina cuando sucede una de las tres situaciones siguientes

- El tamaño del thrackle compatible es 0. Esto indica que ya se ha intentado buscar thrackles compatibles con diferentes tamaños pero no se ha encontrado ninguno. Cada vez que el algoritmo no encuentra un thrackle compatible, se reduce el tamaño del thrackle a buscar en la línea 37.

- La comparación de la línea 44 es positiva. El segmento de código compuesto por las líneas 40 a la 45 hacen un cálculo para saber si vale la pena o no buscar un thrackle de tamaño q . Si se supone que en el mejor caso se necesitan p thrackles de tamaño q para cubrir a K_n entonces el tamaño final de la descomposición en ese caso en particular es $currentAt + p$. Si esto es mayor al tamaño más pequeño encontrado para una descomposición hasta el momento ($minAt$), entonces no vale la pena seguir por ese camino y se descarta esa búsqueda.
- Se ha encontrado un thrackle compatible, esto es que la intersección del thrackle encontrado y las aristas cubiertas hasta el momento es vacía y que además, el thrackle encontrado no es ninguno de los descendientes de $current_thrackle$. Esta verificación se hace en el `if` de las línea 47 a la 50.

Análisis de complejidad

Analizamos primero el costo de la función `exhaustive_at` descrita en el algoritmo 8. Las primeras 7 líneas tienen costo $O(1)$. Llamemos $O(\mathcal{XT})$ al costo de la línea 12, esto es el costo de la función `next`. El costo de agregar un elemento a un vector al final de este es constante por lo que la línea 15 tiene costo $O(1)$. Las operaciones de unión e intersección de conjuntos tienen costo lineal en el tamaño de los vectores de entrada, como el tamaño máximo del vector `coveredEdges` es $\binom{n}{2}$, las operaciones de las líneas 16 y 18 tienen costo $O(n^2)$. El costo total del algoritmo depende del número de veces que se llame recursivamente a la función `exhaustive_at`. En el peor caso, en la primera llamada a la función tratamos de cubrir una gráfica con $\binom{n}{2}$ aristas y solo podemos cubrir una, es decir, encontramos un thrackle de tamaño uno, luego la llamada recursiva será para resolver un problema de $\binom{n}{2} - 1$ aristas y de nuevo, encontramos un thrackle de tamaño uno y así sucesivamente. Esto nos permite escribir una relación de recurrencia para la complejidad de este algoritmo. Sea $T(k)$ la complejidad, en el peor caso, del algoritmo `exhaustive_at` y $k = \binom{n}{2}$:

$$T(k) = T(k - 1) + O(1) + O(k^2 \frac{n - 1}{2}) + O(\mathcal{XT})$$

Podemos observar que como $k = \binom{n}{2}$ entonces $n = k^{\frac{n-1}{2}}$. Esta relación de

recurrencia converge a

$$O(k^3 n^2 + \mathcal{XT} \cdot k) = O\left(\binom{n}{2}^3 n^2 + \binom{n}{2} \mathcal{XT}\right) = O(n^8 + n^2 \mathcal{XT})$$

Ahora analizamos el costo de la función **next**. Hacemos esto contando cuántas veces se llamará a **next** desde un mismo nodo, para esto suponemos que el anti-thickness de la gráfica completa inducida por el dibujo es mayor que el nivel donde se encuentra el nodo. Dado un thrackle con m aristas donde $m < n$, debemos calcular cuántos thrackles son compatibles con él. Digamos que solo se han cubierto m aristas, esto implica que quedan $\binom{n}{2} - m$ aristas por cubrir. En el peor caso hay $\binom{\binom{n}{2} - m}{m}$ thrackles de tamaño m compatibles, $\binom{\binom{n}{2} - m}{m-1}$ thrackles de tamaño $m-1$ compatibles, $\binom{\binom{n}{2} - m}{m-2}$ thrackles de tamaño $m-2$ compatibles y de esta misma manera hasta $\binom{\binom{n}{2} - m}{1}$ thrackles de tamaño 1 compatibles. Y cada uno será encontrado, no necesariamente de manera subsecuente, por la función **next** desde el mismo nodo. En total hay, en el peor caso

$$\sum_{i=1}^m \binom{\binom{n}{2} - m}{i}$$

thrackles compatibles. Como esa suma maximiza su valor cuando $i = m$, podemos acotarla por $O(n^{2m})$. Luego, el valor más grande que puede tener m es $n-1$ podemos acotar el costo de esta función por $O(n^{2(n-1)}) = O(n^{2n})$.

Finalmente el costo del algoritmo **exhaustive_at** es

$$O(n^8 + n^2 n^{2n}) = O(n^8 + n^{2+2n}) = O(n^{2+2n}).$$

Mostramos el tiempo teórico que le tomaría a este algoritmo para terminar, con las características del cluster que mencionamos anteriormente, y el tiempo real que le tomó para un dibujo en la tabla 4.13.

4.5.7. Algoritmo para dar el número de cruce de un thrackle máximo

Utilizamos este algoritmo para resolver el siguiente problema:

Este algoritmo fue diseñado para resolver el siguiente problema:

Problema: Dado un thrackle geométrico, calcular su número de cruce.

n	Tiempo teórico	Tipo de orden	Tiempo real
8	1.20096×10^7 años	1943	9 días
7	22155.3 años	80	1 minuto
6	52.2428 años	9	0.33 segundos

Tabla 4.13: Mostramos el tiempo estimado de terminación de acuerdo a la complejidad del algoritmo y el tiempo que tardó en terminar una ejecución de este algoritmo usando los tipos de orden descritos en la tabla. Estos tiempos de terminación son aceptables para esta implementación.

Entrada: Las aristas del thrackle representadas en un arreglo booleano.

Salida: El número de cruce del thrackle.

Calculamos el número de cruce de un thrackle como describimos en la sección 4.2.1. Mostramos el pseudocódigo del algoritmo para realizar los cálculos en el algoritmo 10.

Análisis de complejidad

Este algoritmo es secuencial. El ciclo de la línea 7, recorre un arreglo de tamaño $\binom{n}{2}$ lo que aporta $O(n^2)$ a la complejidad. Los ciclos anidados de las líneas 10 y 11 realizan $n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1$ operaciones con complejidad $O(1)$, lo que aporta $O(n^2)$ a la complejidad del algoritmo. Finalmente, el ciclo de la línea 18 recorre un arreglo de tamaño n , lo que aporta $O(n)$ a la complejidad.

Así, la complejidad total del algoritmo es

$$O(n^2) + O(n^2) + O(n) = O(n^2)$$

Algoritmo 10: Algoritmo para calcular el número de cruce de un thrackle geométrico.

```

1 función CrossingNumberThrackle ( $E, n$ )
   Entrada: Un arreglo booleano  $E$ , de tamaño  $\binom{n}{2}$ , que representa a
               las aristas del thrackle.
   Salida : Un entero  $r$  igual al número de cruce del thrackle
               inducido por  $E$ .

2  $i, j, c \leftarrow 0$ 
3 Sea  $deg[s][n]$  un arreglo de enteros, de tamaño  $n$ 
4  $th\_size \leftarrow 0$ 
5  $sum \leftarrow 0$ 
6  $r \leftarrow 0$ 
7 for  $i = 0, \dots, \binom{n}{2}$  do
8   if  $E[i] == 1$  then
9      $th\_size \leftarrow th\_size + 1$ 
10 for  $i = 0, \dots, n$  do
11   for  $j = i + 1, \dots, n$  do
12     if  $E[c]$  then
13        $deg[s][i] \leftarrow deg[s][i] + 1$ 
14        $deg[s][j] \leftarrow deg[s][j] + 1$ 
15      $c \leftarrow c + 1$ 
16  $ans \leftarrow th\_size \cdot \frac{(th\_size-1)}{2}$ 
17  $sum \leftarrow 0$ 
18 for  $i = 0, \dots, n$  do
19    $sum \leftarrow sum + deg[s][i] \cdot \frac{(deg[s][i]-1)}{2}$ 
20  $r \leftarrow ans - sum$ 
21 return  $r$ 

```

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis estudiamos el problema del anti-thickness geométrico de gráficas completas con hasta 10 vértices. El anti-thickness geométrico de una gráfica es el entero k más pequeño tal que existe una descomposición de la gráfica en k thrackles. Un thrackle es una gráfica en la que cada par de aristas se intersecta exactamente una vez.

En este trabajo encontramos que el anti-thickness geométrico $At_g(K_n)$ de la gráfica completa de n vértices K_n , con $3 \leq n \leq 10$, es:

$$At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Para dar este resultado analizamos las gráficas completas inducidas por los conjuntos de hasta diez vértices proveídos por la base de datos de tipos de orden del trabajo de Aichholzer & Krasser (2001), encontramos que dos thrackles máximos de la misma gráfica completa comparten al menos una arista, dando así una nueva cota inferior para conjuntos pequeños de puntos. La cota superior está dada por el anti-thickness del dibujo de K_n en posición convexa; nosotros encontramos dibujos, que no están en posición convexa, que tienen el mismo anti-thickness.

Para cada thrackle de las descomposiciones encontradas calculamos el número de cruce para observar que existe una relación del número de thrackles con número de cruce alto y número de cruce bajo cercana al 50 %; en este trabajo damos la definición del número de cruce de un thrackle.

También analizamos y listamos cuáles conjuntos de puntos no tienen thrackles máximos y cuáles tienen solamente un thrackle máximo para cada

n en el rango $[3, 10]$. Aquí hacemos la observación de que conjuntos con un número de cruce pequeño tienen menos thrackles máximos que los conjuntos con un número de cruce elevado con respecto del número de cruce máximo para cada n en el rango anteriormente mencionado.

Para los conjuntos de n puntos, con $3 \leq n \leq 8$ que inducen gráficas completas sin thrackles máximos analizamos, con un algoritmo exhaustivo, el anti-thickness geométrico de cada uno. Encontramos que estos dibujos tienen anti-thickness mayor, en una unidad, al anti-thickness geométrico de K_n .

Uno de los objetivos de la tesis era obtener el anti-thickness geométrico de K_n con $n \geq 3$. Sin embargo no fue posible ya que no pudimos probar la generalización del lema 4.1.2 que establece que la intersección entre dos thrackles máximos de un mismo dibujo siempre sucede. Decidimos no invertir más tiempo en la generalización del teorema para dar más resultados acerca de conjuntos pequeño de n .

Queremos destacar que el trabajo mostrado en esta tesis muestra el proceso por el cuál pasamos para intentar resolver el problema del anti-thickness geométrico para conjuntos pequeños de puntos. La cota inferior del anti-thickness geométrico puede ser obtenida al probar que dos thrackles máximos se intersectan en al menos una arista o bien, probando que no existen descomposiciones con menos de $n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ thrackles.

Trabajo futuro

La generalización del lema 4.1.2 es el trabajo a futuro más fuerte, de encontrarse, el problema del anti-thickness geométrico para gráficas completas quedaría resuelto de manera general. Esto deja abierto el problema de encontrar el anti-thickness de un dibujo en específico de manera eficiente. Pero, como explicamos en el capítulo 3, encontrar el anti-thickness de una gráfica geométrica equivale a encontrar el número cromático de su gráfica de disyunción y este último es un problema *NP*-difícil (Pemmaraju & Skiena (2003)). Sin embargo, existen algoritmos genéticos para encontrar una aproximación al número cromático de una gráfica dada como los presentados en Fleurent & Ferland (1996) y Galinier & Hao (1999) en los que se muestra que los resultados fueron obtenidos en un rango de tiempo considerablemente bueno para el hardware en el que se implementaron. Es posible implementar estos algoritmos para encontrar la coloración de la gráfica de disyunción y obtener

resultados acerca del anti-thickness de algún dibujo de K_n .

También es deseable encontrar una manera de caracterizar los dibujos que inducen gráficas completas sin thrackles máximos, o con solo uno, ya que analizar todas las $\binom{\binom{n}{2}}{n}$ posibles combinaciones de n aristas para buscar thrackles máximos puede resultar ineficiente, especialmente con conjuntos grandes de puntos.

Apéndice A

Etiquetas de thrackles máximos

n	Tipo de Orden	Thrackles	n	Tipo de Orden	Thrackles
8	2	36 32 29 25 2	9	1287	62 56 39 35 24 3
		37 31 28 23 0			62 57 55 35 24 3
	54	32 29 26 16 2			62 57 56 35 24 3
9	12	101 96 93 68 33 2			63 56 35 20 6 0
	52	100 97 96 92 33 2			63 56 35 20 7 6
	54	82 78 75 52 33 2			63 56 35 21 20 0
	80	71 68 67 55 33 2			63 56 35 22 20 0
		72 68 67 55 33 2			63 56 35 24 3 0
		73 68 59 58 33 2			63 56 35 24 4 0
	696	79 76 73 40 22 2			63 56 35 24 5 0
	1080	37 33 32 29 15 2			63 56 35 24 6 0
	1287	57 55 44 35 24 3			63 56 35 24 7 3
		57 56 43 35 24 3			63 56 35 24 7 4
		57 55 50 35 24 3			63 56 35 24 7 5
		57 56 42 35 24 3			63 56 35 24 7 6
		57 56 44 35 24 3			63 56 35 24 12 0
		57 56 45 35 24 3			63 56 35 24 13 0
		57 56 48 35 24 3			63 56 35 24 14 0
		57 56 49 35 24 3			63 56 35 24 15 0
		57 56 50 35 24 3			63 56 35 24 17 0
		57 56 51 35 24 3			63 56 35 24 18 0
		60 56 39 35 24 3			63 56 35 24 21 0
		60 57 56 35 24 3			63 56 35 24 22 0
		61 56 39 35 24 3			63 56 39 35 24 3
		61 57 56 35 24 3			63 57 56 35 24 3
		62 55 39 35 24 3			

n	Tipo de Orden	Thrackles
10	81	176 168 156 125 38 0
	1328	150 142 113 100 39 0
	2243	121 119 85 67 42 3
		128 115 82 51 39 0

Apéndice B

Números de cruce para thrackles máximos

n	Tipo de Orden	Thrackles	Números de Cruce
8	12	36 32 29 25 2	5 5 11 5 11
		37 31 28 23 0	11 5 5 11 5
	54	32 29 26 16 2	5 5 11 5 11
9	12	101 96 93 68 33 2	14 6 14 14 6 6
	52	100 97 96 92 33 2	14 6 14 6 6 6
	54	82 78 75 52 33 2	6 6 14 14 6 14
	80	71 68 67 55 33 2	14 6 15 6 6 14
		72 68 67 55 33 2	14 6 15 6 6 11
		73 68 59 58 33 2	6 6 17 6 6 14
	696	79 76 73 40 22 2	14 6 14 14 6 6
	1080	37 33 32 29 15 2	14 6 14 18 6 6
	1287	57 55 44 35 24 3	6 11 11 15 6 15
		57 56 43 35 24 3	6 11 14 15 6 15
		57 55 50 35 24 3	6 6 20 15 6 15
		57 56 42 35 24 3	6 6 17 15 6 15
		57 56 44 35 24 3	6 6 11 15 6 15
		57 56 45 35 24 3	6 6 21 15 6 15
		57 56 48 35 24 3	6 6 22 15 6 15
		57 56 49 35 24 3	6 6 20 15 6 15
		57 56 50 35 24 3	6 6 14 15 6 15
		57 56 51 35 24 3	6 6 22 15 6 15
		60 56 39 35 24 3	14 6 11 15 6 15
		60 57 56 35 24 3	14 6 11 15 6 15
		61 56 39 35 24 3	14 6 6 15 6 15
		61 57 56 35 24 3	11 6 11 15 6 15
		62 55 39 35 24 3	11 6 6 15 6 15

n	Tipo de Orden	Thrackles	Número de cruce
9	1287	62 56 39 35 24 3	6 6 11 15 6 15
		62 57 55 35 24 3	6 6 11 15 6 15
		62 57 56 35 24 3	6 6 6 15 6 15
		63 56 35 20 6 0	15 6 15 11 6 6
		63 56 35 20 7 6	15 6 15 11 11 6
		63 56 35 21 20 0	15 6 15 11 11 6
		63 56 35 22 20 0	15 6 15 14 11 6
		63 56 35 24 3 0	15 6 15 6 15 6
		63 56 35 24 4 0	15 6 15 6 14 6
		63 56 35 24 5 0	15 6 15 6 11 6
		63 56 35 24 6 0	15 6 15 6 6 6
		63 56 35 24 7 3	15 6 15 6 11 15
		63 56 35 24 7 4	15 6 15 6 11 14
		63 56 35 24 7 5	15 6 15 6 11 11
		63 56 35 24 7 6	15 6 15 6 11 6
		63 56 35 24 12 0	15 6 15 6 21 6
		63 56 35 24 13 0	15 6 15 6 22 6
		63 56 35 24 14 0	15 6 15 6 20 6
		63 56 35 24 15 0	15 6 15 6 22 6
		63 56 35 24 17 0	15 6 15 6 17 6
		63 56 35 24 18 0	15 6 15 6 20 6
		63 56 35 24 21 0	15 6 15 6 11 6
		63 56 35 24 22 0	15 6 15 6 14 6
		63 56 39 35 24 3	15 6 11 15 6 15
		63 57 56 35 24 3	15 6 6 15 6 15
n	Tipo de Orden	Thrackles	Número de cruce
10	81	176 168 156 125 38 0	19 7 19 7 19 7
	1328	150 142 113 100 39 0	19 7 19 7 19 7
	2243	121 119 85 67 42 3	7 19 7 19 7 19
		128 115 82 51 39 0	19 7 19 7 19 7

Apéndice C

Tipos de orden con descomposiciones.

Presentamos los doce tipos de orden para los cuales existe una descomposición en thrackles máximos.



Figura C.1: Tipo de orden número 12 para $n = 8$

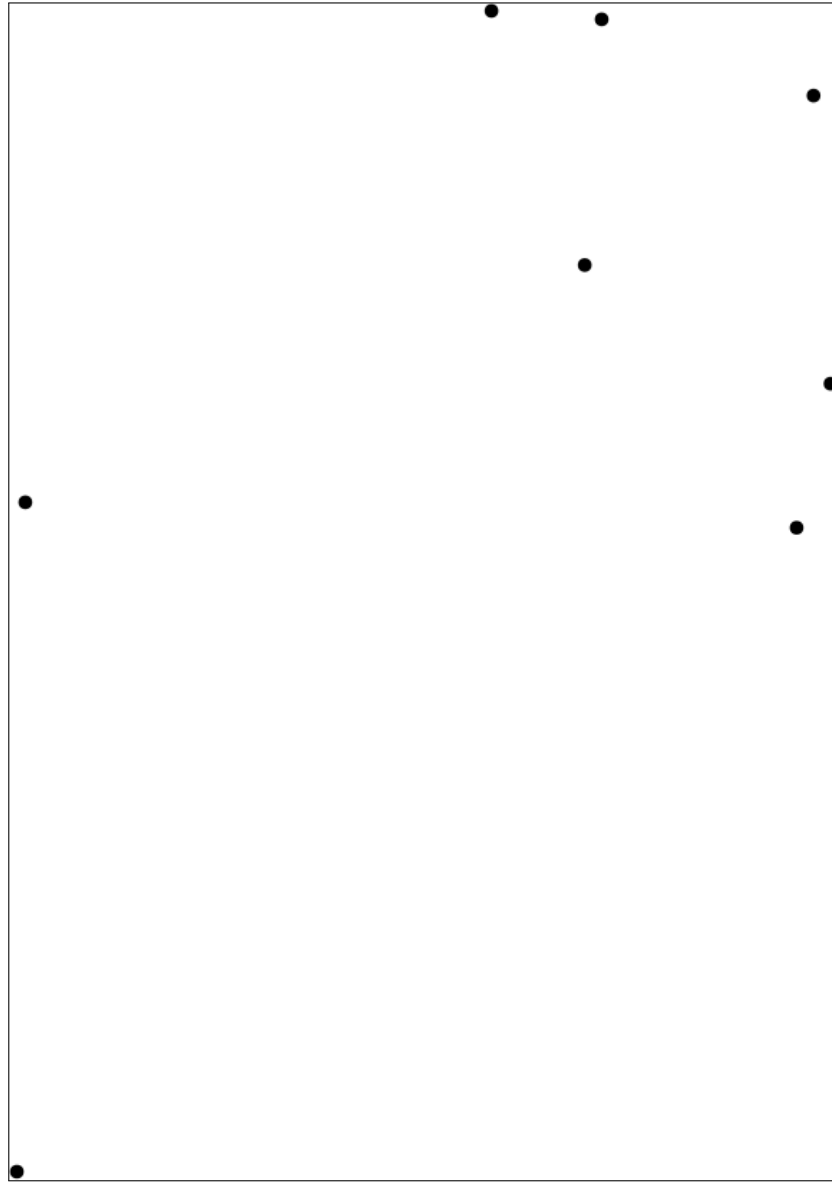


Figura C.2: Tipo de orden número 54 para $n = 8$

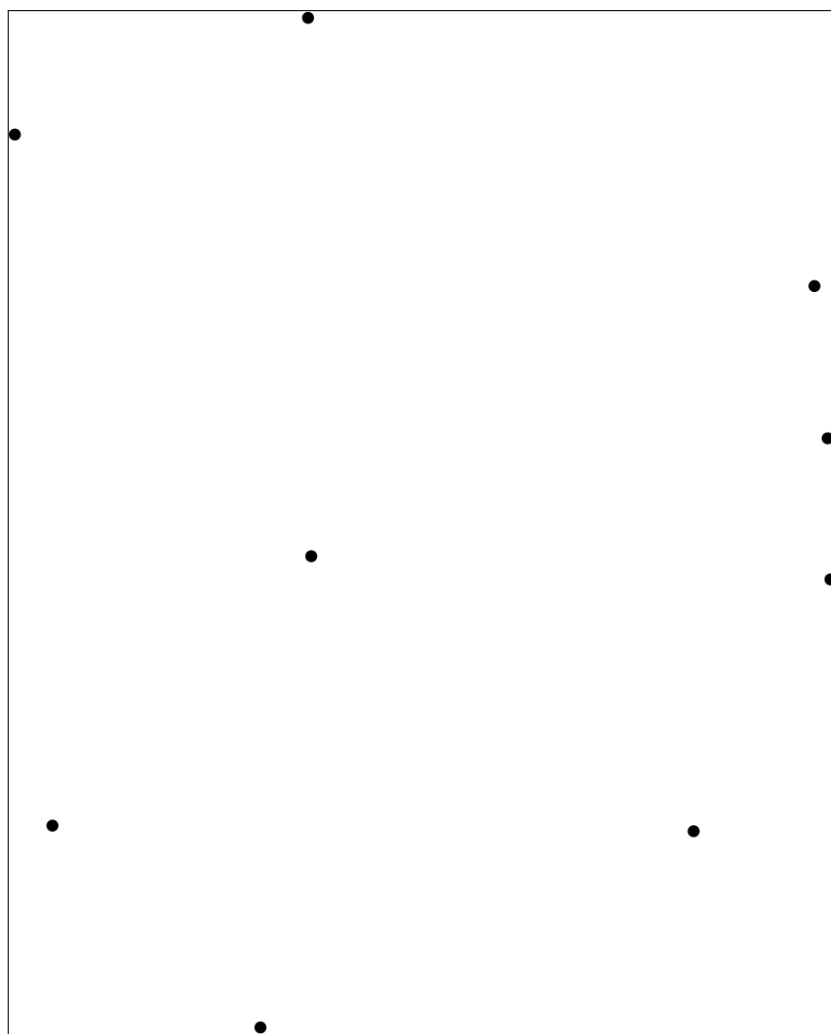


Figura C.3: Tipo de orden número 12 para $n = 9$

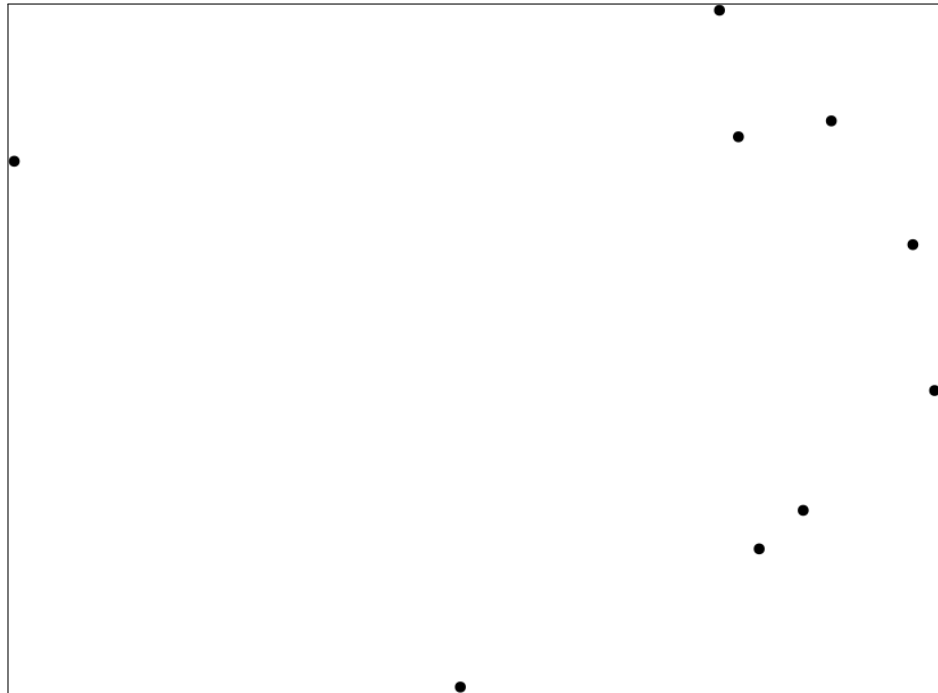


Figura C.4: Tipo de orden número 52 para $n = 9$

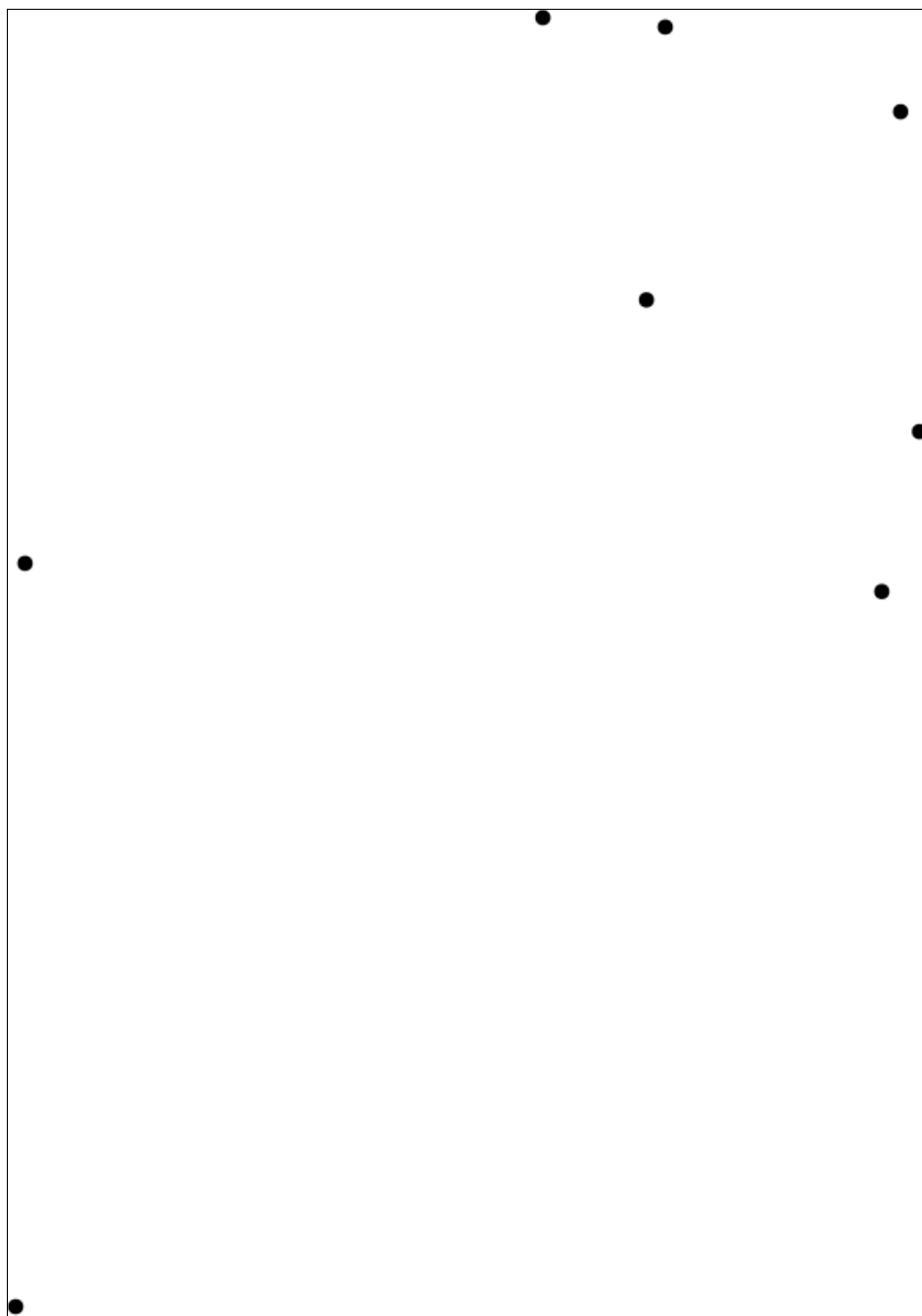


Figura C.5: Tipo de orden número 54 para $n = 9$

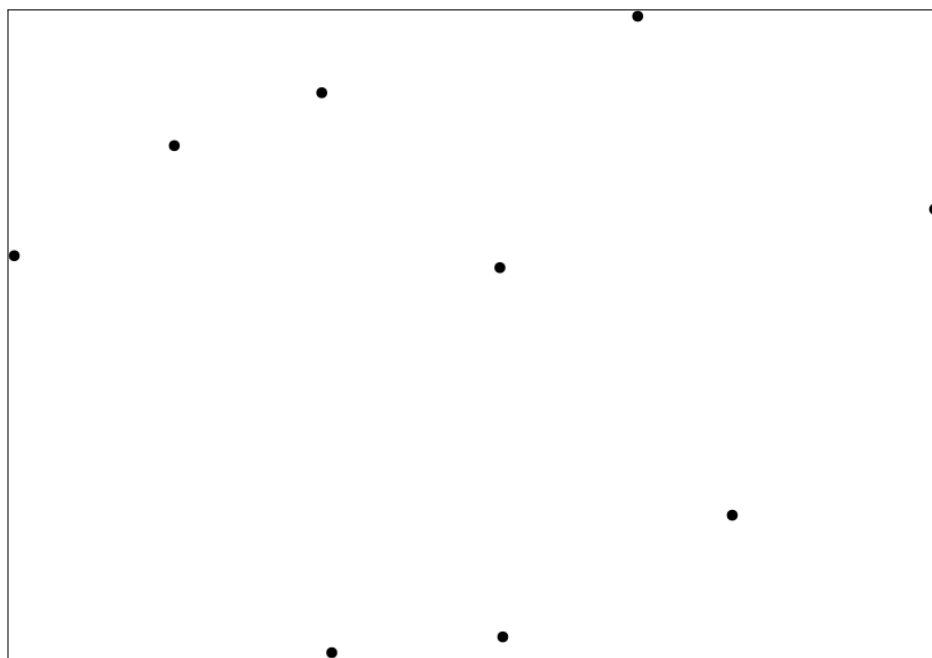


Figura C.6: Tipo de orden número 80 para $n = 9$



Figura C.7: Tipo de orden número 696 para $n = 9$

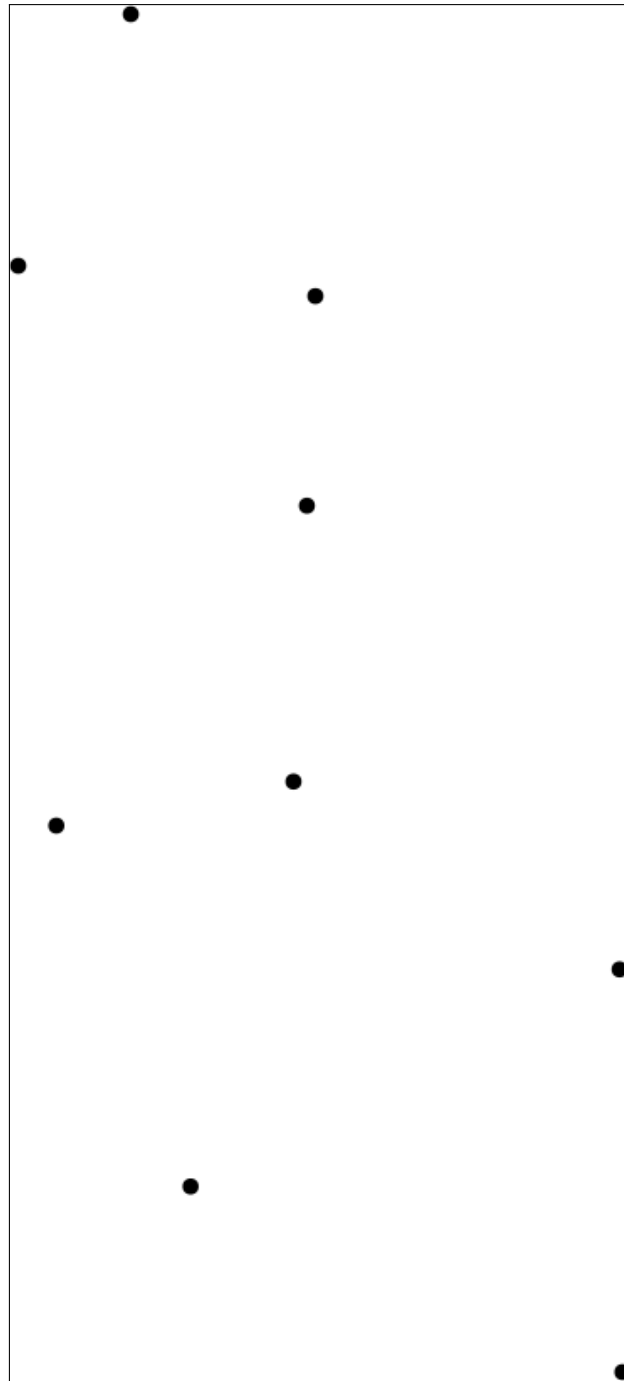


Figura C.8: Tipo de orden número 1080 para $n = 9$

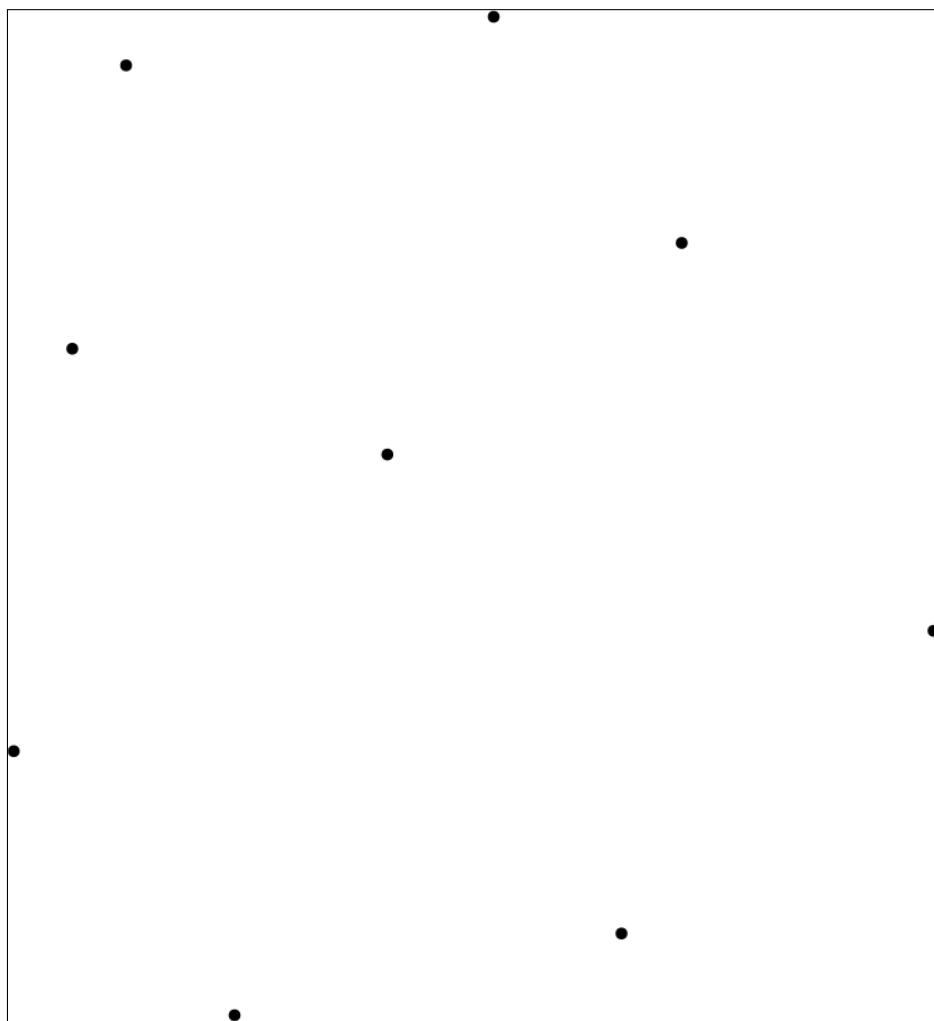


Figura C.9: Tipo de orden número 1287 para $n = 9$

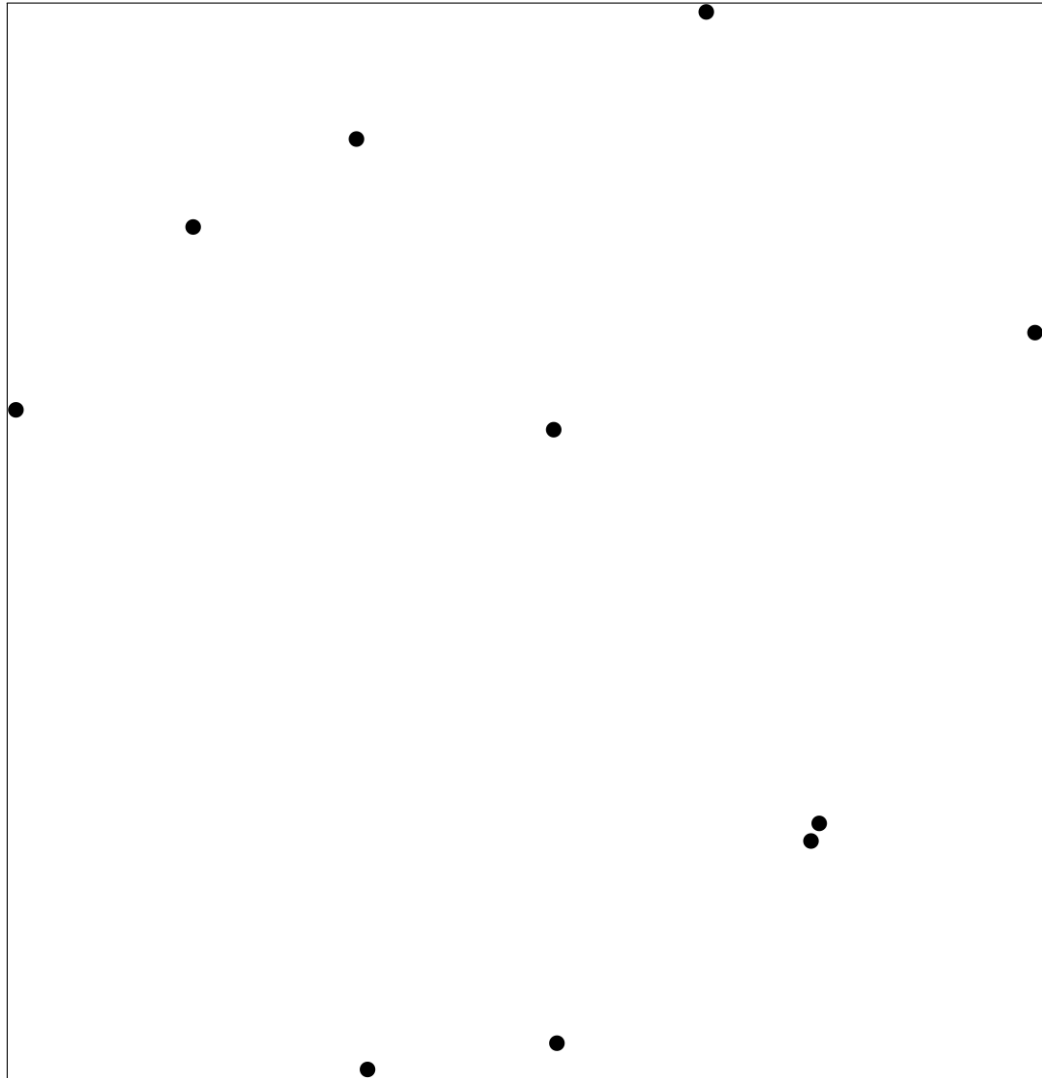


Figura C.10: Tipo de orden número 81 para $n = 10$

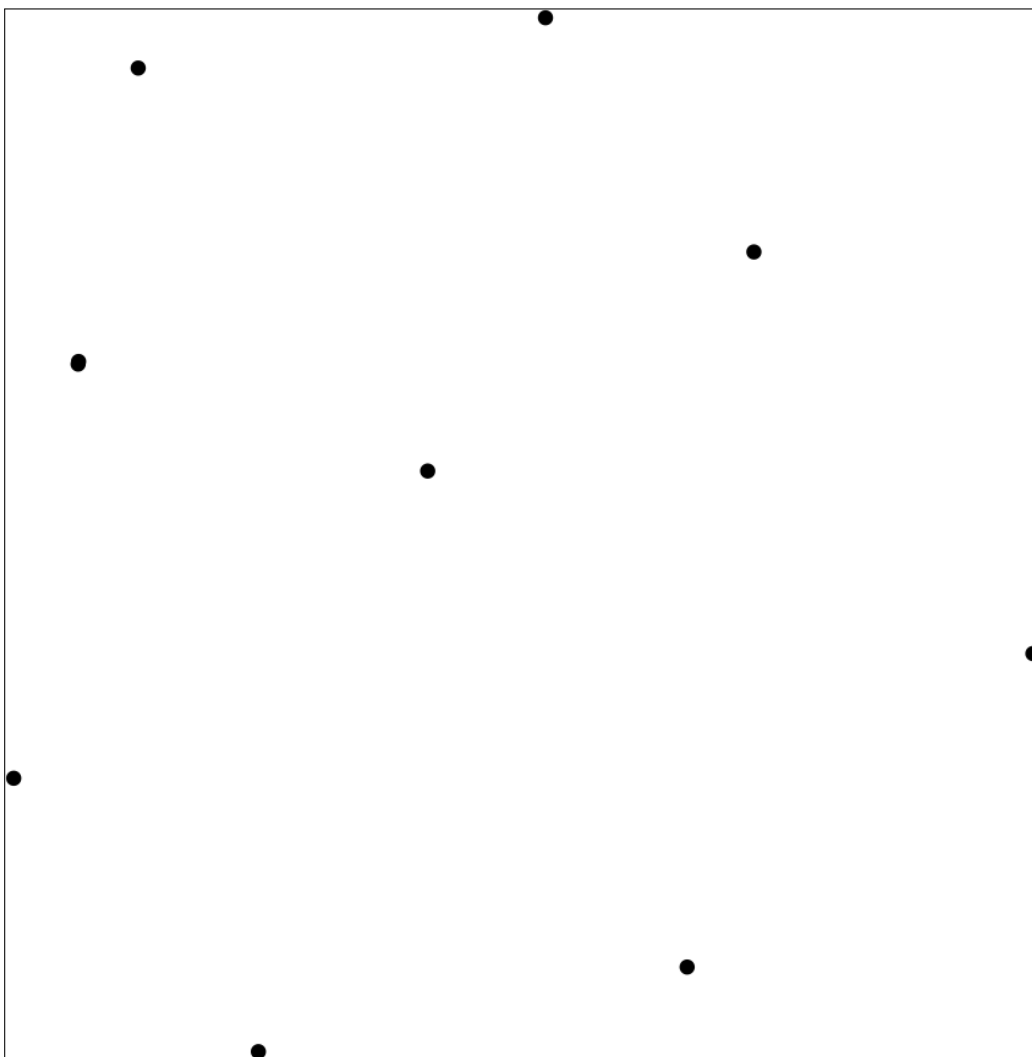


Figura C.11: Tipo de orden número 1328 para $n = 10$

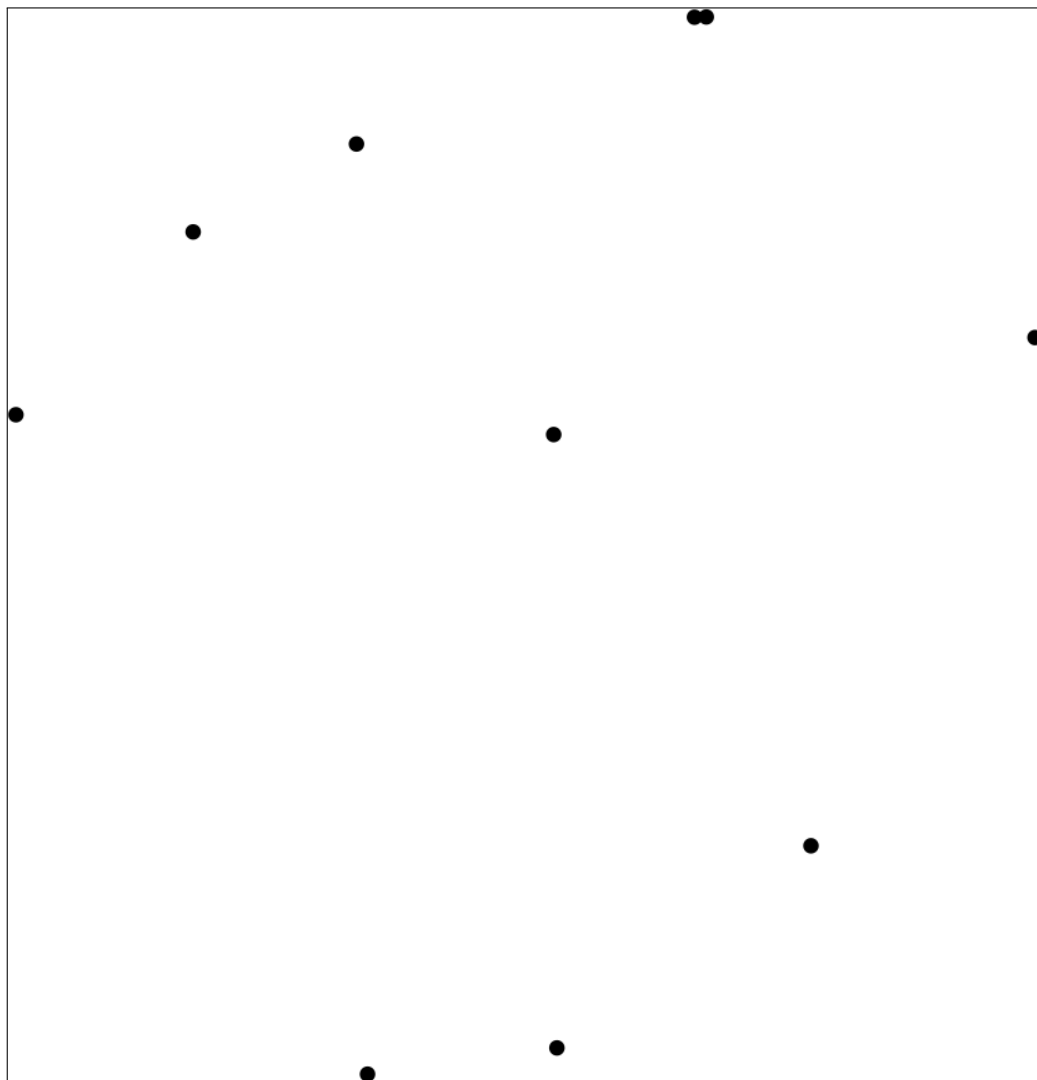


Figura C.12: Tipo de orden número 2243 para $n = 10$

Apéndice D

Lista de ligas.

1. Thrackles máximos por cada tipo de orden ordenados por número de thrackles máximos. http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/thrMax_k.tar.xz
2. Tipos de orden que no tienen thrackles máximos. http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/without_max.tar.gz
3. Anti-thickness de los dibujos para los cuales no hay thrackles máximos. http://computacion.cs.cinvestav.mx/~dmerinos/site/archivos_tesis/without_max_at.tar.gz

Bibliografía

- Aichholzer, O., Aurenhammer, F., & Krasser, H. (2002). Enumerating order types for small point sets with applications. *Order*, 19(3), 265–281.
- Aichholzer, O., & Krasser, H. (2001). The point set order type data base: A collection of applications and results. In *CCCG*, vol. 1, (pp. 17–20).
- Araujo, G., Dumitrescu, A., Hurtado, F., Noy, M., & Urrutia, J. (2005). On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, 32(1), 59–69.
- Arkin, E. M., Mitchell, J. S. B., Fekete, S. P., Hurtado, F., Noy, M., Sacristán, V., & Sethia, S. (2003). *On the Reflexivity of Point Sets*, (pp. 139–156). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-55566-4_6
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2008). *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, 1 ed.
- Dillencourt, M. B., Eppstein, D., & Hirschberg, D. S. (2004). Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, (pp. 39–51). World Scientific.
- Domínguez, C. A. B. (2017). *Búsqueda de Crossing Families para Gráficas Geométricas*. mathesis, CINVESTAV.
- Dujmovic, V., & Wood, D. R. (2017). Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, abs/1708.04773.
- Fabila-Monroy, R., Hidalgo-Toscano, C., Leaños, J., & Lomelí-Haro, M. (2017). The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*.

- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018a). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*.
- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018b). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*, (p. 6).
- Fleurent, C., & Ferland, J. A. (1996). Genetic and hybrid algorithms for graph coloring. *Annals of Operations Research*, 63(3), 437–461.
URL <https://doi.org/10.1007/BF02125407>
- Fulek, R., & Pach, J. (2011). A computational approach to conway’s thrackle conjecture. *Computational Geometry*, 44(6-7), 345–355.
- Galinier, P., & Hao, J.-K. (1999). Hybrid evolutionary algorithms for graph coloring. *Journal of Combinatorial Optimization*, 3(4), 379–397.
URL <https://doi.org/10.1023/A:1009823419804>
- Hurtado, F. (2009). Edge colouring geometric complete graphs. http://www.openproblemgarden.org/op/edge_colouring_geometric_complete_graphs.
- Knuth, D. (2011a). *The art of computer programming: Volume 4A, Combinatorial Algorithms: Part 1, Fascicle 3A*. Addison-Wesley.
URL <http://www.cs.utsa.edu/~wagner/knuth/fasc3b.pdf>
- Knuth, D. (2011b). *The art of computer programming: Volume 4A, Combinatorial Algorithms: Part 1, Fascicle 3B*. Addison-Wesley.
URL <http://www.cs.utsa.edu/~wagner/knuth/fasc3b.pdf>
- Lara, D., & Rubio-Montiel, C. (2019). On crossing families of complete geometric graphs. *Acta Mathematica Hungarica*, 157(2), 301–311.
- Pach, J. (2013a). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (pp. 465–484). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17
- Pach, J. (2013b). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (p. 471). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17

- Pach, J., & Sterling, E. (2011). Conway's conjecture for monotone thrackles. *The American Mathematical Monthly*, 118(6), 544–548.
URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.118.06.544>
- Pemmaraju, S., & Skiena, S. (2003). *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica* (p. 309). The press syndicate of the university of Cambridge.
- Schaefer, M. (2018). *Crossing numbers of graphs*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press.
- Valtr (2002). A sufficient condition for the existence of large empty convex polygons. *Discrete & Computational Geometry*, 28(4), 671–682.
URL <https://doi.org/10.1007/s00454-002-2898-x>