

Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year



# Abstract



# Resumen



# Dedicación





# Agradecimientos



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>15</b>
2.1. Gráfica . . . . .	15
2.2. Gráfica geométrica . . . . .	16
2.3. Thrackles . . . . .	16
2.4. Tipo de Orden . . . . .	16
2.5. Anti-thickness y anti-thickness geométrico . . . . .	16
<b>3. Estado del arte</b>	<b>17</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>25</b>
4.1. Descomposiciones por thrackles máximos. . . . .	25
4.2. Anti-thickness geométrico exacto de $K_n$ con $3 \leq n \leq 9$ . . . . .	28
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>33</b>



# Capítulo 1

## Introducción



# Capítulo 2

## Antecedentes

En este capítulo daremos las definiciones necesarias para el desarrollo del proyecto. Empezamos estableciendo conceptos relacionados con gráficas abstractas y después hablaremos de gráficas en el plano, explicamos el concepto de tipo de orden y cómo se utiliza en este trabajo. Finalmente hablaremos del anti-thickness abstracto y del anti-thickness geométrico.

La estructura más básica que se utiliza en nuestro trabajo son las gráficas abstractas a las que llamaremos solamente gráficas. La definición se sigue:

### 2.1. Gráfica

La siguiente definición fue tomada de Chartrand & Zhang (2008).

Una gráfica  $G$  está compuesta por un conjunto  $V$  no vacío de objetos a los que llamamos vértices y un conjunto  $E$  de parejas de elementos de  $V$  a los que llamamos aristas. Denotamos a la arista  $e$  compuesta por los vértices  $u$  y  $v$  como  $(u, v)$ . Para describir a la gráfica  $G$  compuesta por el conjunto  $V$  de vértices y el conjunto  $E$  de aristas escribimos  $G = (V, E)$ . Para referirnos al conjunto de vértices de  $G$  escribimos  $V(G)$  y para referirnos al conjunto de aristas de  $G$  escribimos  $E(G)$ .

Decimos que dos vértices  $u, v \in V(G)$  son *adyacentes* si existe una arista  $(u, v) \in E(G)$ . Una gráfica es *completa* si cada pareja de vértices en la gráfica es adyacente. Para referirnos a la gráfica completa de  $n$  vértices escribimos  $K_n$ . Decimos que dos aristas  $e_1, e_2 \in E(G)$  son adyacentes si comparten vértices.

## 2.2. Gráfica geométrica

La siguiente definición fue tomada de Pach (2013). Un *dibujo* de una gráfica es una representación de la gráfica en el plano de tal manera que los vértices son representados por puntos en posición general y las aristas como curvas simples continuas que conectan pares de vértices.

Cuando restringimos dichas curvas a segmentos de recta el dibujo de la gráfica adquiere el nombre de *gráfica geométrica*. Sin pérdida de generalidad representamos a una gráfica geométrica como  $G$  y nos referimos a su conjunto de vértices como  $V(G)$  y a su conjunto de aristas como  $E(G)$ .

## 2.3. Thrackles

## 2.4. Tipo de Orden

## 2.5. Anti-thickness y anti-thickness geométrico



# Capítulo 3

## Estado del arte

En este capítulo hablaremos de un concepto que cronológicamente fue definido antes que el anti-thickness además discutiremos su relación. Mencionamos algunos resultados acerca de dicho concepto. Explicaremos de qué manera el número cromático de una gráfica puede otorgar una descomposición de una gráfica geométrica. Finalmente discutimos los resultados actuales para el anti-thickness.

Un concepto que está estrechamente relacionado con el de anti-thickness es el de thickness, que se define como sigue:

**Definición 1.** [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness*. Sea  $G$  una gráfica, el thickness  $\theta(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  para el cual existe una partición de  $E(G)$  de tamaño  $k$  en la que cada elemento de la partición induce una gráfica planar.

Este concepto también puede ser extendido a gráficas geométricas, en cuyo caso estaremos hablando del thickness de una gráfica geométrica, definido a continuación:

**Definición 2.** *Thickness de una gráfica geométrica*. Sea  $G$  una gráfica geométrica, el thickness  $th(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  tal que existe una partición de  $E(G)$  de tamaño  $k$  donde cada elemento de la partición induce una gráfica (geométrica) plana.

Finalmente podemos definir el thickness geométrico de una gráfica  $G$ .

**Definición 3.** [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness geométrico*. Sea  $G$  una gráfica, el thickness geométrico  $\bar{\theta}(G)$  de  $G$  es :

$$\bar{\theta}(G) = \min\{th(G) : G \text{ es una gráfica geométrica de } G.\}$$

Respecto a este parámetro Dillencourt et al. (2004) demuestran que el thickness geométrico está acotado por:

$$\left\lceil \frac{n}{5.646} + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

En el mismo artículo encuentran el valor exacto del thicknes geométrico de cada gráfica completa con  $n$  vértices, para  $n \leq 12$ , así como para  $K_{15}$  y  $K_{16}$ . Para el caso de  $n = 15$  encuentran el thickness geométrico exacto probando que no existen un conjunto de tres triangulaciones del conjunto de puntos que cubran las  $\binom{15}{2} = 105$  aristas. Para el caso de  $n = 16$  el resultado es exacto usando las cotas dadas. También estudian el thickness geométrico para gráficas completas bipartitas y demuestran la siguiente cota:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{\min(a, b)}{2} \right\rceil.$$

Para explicar la relación entre thickness y anti-thickness es necesario hablar de coloraciones de vértices de gráficas de incidencia. Dada una gráfica geométrica su gráfica de incidencia es construida a partir de las incidencias de aristas de la gráfica geométrica. Empezaremos por definir una gráfica a la que llamaremos *gráfica de cruce*.

**Definición 4.** *Gráfica de cruce.* Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general y sea  $K_n(S)$  la gráfica completa asociada a  $S$ . La gráfica de cruce  $E_{pp}(S)$  de  $S$  es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de  $K_n(S)$  y una arista entre dos vértices de  $E_{pp}(S)$  por cada par de aristas que se crucen en  $K_n(S)$ .

En la figura 3.1 aparece un ejemplo de la gráfica de cruce  $E_{pp}(S)$ . Podemos notar que dado que en el dibujo de  $K_5$  existen 3 cruces, la gráfica  $E_{pp}(S)$  tiene 3 aristas.

Los conjuntos independientes de  $E_{pp}(S)$  corresponden a conjuntos de aristas de  $K_n(S)$  que inducen gráficas planas. Luego, una coloración propia de los vértices de  $E_{pp}(S)$  corresponde a una descomposición de  $K_n(S)$  en gráficas planas. Por lo tanto encontrar el número cromático  $\chi(E_{pp}(S))$  de la gráfica  $E_{pp}(S)$  es equivalente a encontrar el thickness geométrico de  $K_n(S)$ . La figura 3.2 ilustra esta relación.

El thickness geométrico de la gráfica completa de  $n$  vértices  $K_n$  se puede definir en estos términos como:

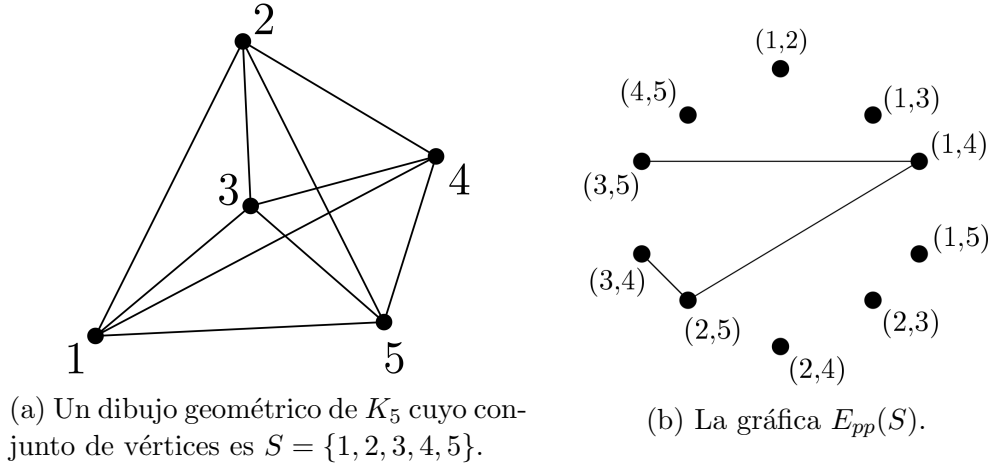


Figura 3.1: Una instancia de  $K_5$  y su respectiva gráfica de cruce  $E_{pp}(S)$ .

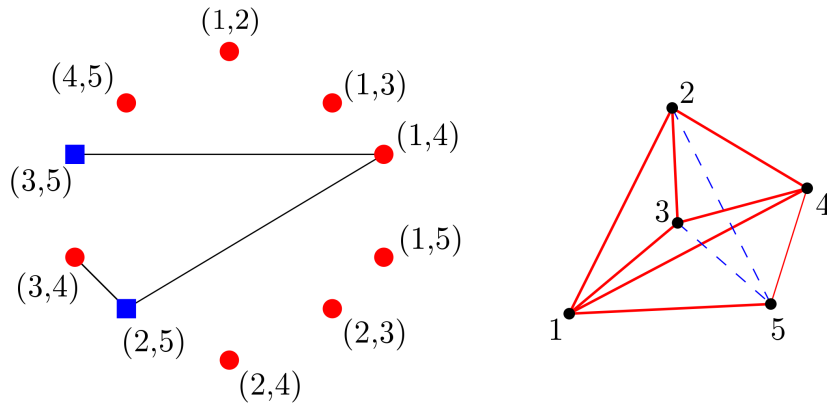


Figura 3.2: De izquierda a derecha: Una coloración propia de los vértices de  $E_{pp}(S)$  con dos clases cromáticas indicadas como círculos y cuadros. Una descomposición de un dibujo de  $K_5$  en dos gráficas planas cuyas aristas corresponden a cada una de las clases cromáticas de la coloración de  $E_{pp}(S)$ .

**Definición 5.** *Thickness geométrico de una gráfica.*

$$\bar{\theta}(n) = \min\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}$$

De la misma manera que definimos la gráfica de cruce podemos definir otras gráficas. Para esto basta con cambiar la condición bajo la cual se asignan aristas entre los vértices de la gráfica de incidencia. En este sentido, en el trabajo de Araujo et al. (2005) se definen las gráficas de incidencia que se listan en seguida. Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general y  $K_n(S)$  la gráfica completa asociada a  $S$ :

- $W(S)$  : Es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de  $K_n(S)$  y una arista entre dos vértices de  $W(S)$  por cada par de aristas que no se crucen en  $K_n(S)$ .
- $I(S)$  : Es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de  $K_n(S)$  y una arista entre dos vértices de  $I(S)$  por cada par de aristas que se cruzan propiamente o son adyacentes en  $K_n(S)$ .
- $D(S)$  Es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de  $K_n(S)$  y una arista entre dos vértices de  $D(S)$  por cada par de aristas que no se cruzan ni son adyacentes.

Es fácil darse cuenta que la condición de existencia de aristas de  $W(S)$  es complementaria a la condición establecida en  $E_{pp}(S)$  y viceversa. De la misma forma, las condiciones de  $I(S)$  y  $D(S)$  son complementarias entre sí. En la tabla 3.1 mostramos esta relación y las estructuras geométricas que representan, en  $K_n(S)$ , los conjuntos independientes para cada alternativa. En Hurtado (2009) se presenta un problema en el que se requiere asignar un color a cada arista de una gráfica geométrica completa bajo cada una de las cuatro variantes que se presentan en la tabla 3.1.

En el aporte de Araujo et al. (2005) buscan el número cromático de cada una de las gráficas listadas, los autores estudian los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} w(n) &= \max\{\chi(W(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\} \\ i(n) &= \max\{\chi(I(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\} \\ d(n) &= \max\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\} \end{aligned}$$

Para el caso en el que  $S$  está en posición convexa se denotan a estos valores como  $w_c(n)$ ,  $i_c(n)$  y  $d_c(n)$ . Los autores demuestran las siguientes cotas:

Gráfica	Conjuntos independientes en $K_n(S)$
$W(S)$	<i>Emparejamientos de cruces</i>
$I(S)$	<i>Emparejamientos planos</i>
$D(S)$	<i>Thrackles</i>
$E_p p(S)$	<i>Gráfica planar</i>

Tabla 3.1: Esta tabla muestra qué representan los conjuntos independientes en  $K_n(S)$  para cada una de las gráficas definidas en Araujo et al. (2005) y para  $E_p p(S)$ .

- $w_c(n) = \Theta(n \log n)$ .
- $c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^{2 \frac{\log \log n}{\log n}}$ , para  $c_1, c_2 > 0$ .
- $i_c(n) = n$ .
- $n \leq i(n) \leq C n^{3/2}$  para  $C > 0$ .
- $2 \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \min \left( n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2} \right)$ .
- $5 \lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \min \left( n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{n} \right)$ .

A pesar de que en el trabajo de Araujo et al. (2005) se busca el número cromático de la gráfica  $D(S)$  y esto significa buscar el anti-thickness de una gráfica geométrica asociada a  $S$ , es importante notar que la definición  $d(n)$  no es equivalente a la de anti-thickness. En  $d(n)$  se busca el máximo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas posibles de una gráfica dada mientras que el anti-thickness busca el mínimo de este mismo parámetro.

Podemos dar una definición del anti-thickness geométrico usando la gráfica  $D(S)$  como sigue:

**Definición 6.** *Anti-thickness geométrico de una gráfica.*

$$gat(n) = \min \{ \chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n \}$$

De manera análoga si los puntos de  $S$  están en posición convexa definimos el anti-thickness convexo:

**Definición 7.** *Anti-thickness convexo de una gráfica.*

$$cat(n) = \min\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa}, |S| = n\}$$

El anti-thickness convexo de la gráfica completa de  $n$  vértices es equivalente a  $d_c(n)$ .

Los autores de Dujmovic & Wood (2017) presentan resultados del anti-thickness para familias específicas de gráficas, por ejemplo árboles, 2-tracks, books, gráficas outerplanar,  $k$ -queues, entre otros haciendo observaciones de resultados anteriores. Además se prueba la relación entre thickness y anti-thickness, concretamente prueban la siguiente cota para toda gráfica con anti-thickness  $k$  y thickness  $t$ :

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$$

Acercas del anti-thickness (teórico) de gráficas completas, en Dujmovic & Wood (2017) se prueba que es al menos  $\frac{n}{3}$  y a lo más  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ . Sin embargo ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ .

El principal resultado para puntos en posición convexa es presentado en Fabila-Monroy et al. (2018). Aquí se prueba que cuando los puntos están en posición convexa dos thrackles máximos comparten al menos una arista y por lo tanto la unión de  $k$  thrackles máximos tiene a lo más  $kn - \binom{k}{2}$  aristas. Luego, como una gráfica completa de  $n$  vértices tiene  $\binom{n}{2}$  aristas la resolución de la desigualdad

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}$$

otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness convexo mostrado a continuación:

$$cat \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica  $D(S)$ . La coloración es lograda consiguiendo trazar caminos en una estructura conocida como polyomino en la que los vértices de  $D(S)$  son las filas y las columnas de dicha estructura. En este trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en  $D(S)$  y como se mencionó antes, representa un thrackle en  $K_n$ . Concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el polyomino, dicho número coincide con el de la cota

inferior y luego se tiene que el anti-thickness convexo tiene exactamente el siguiente valor:

$$cat(n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Con respecto a puntos que no están estrictamente en posición convexa, Fabila-Monroy et al. (2017) examinan el número cromático de la gráfica de disyunción de una familia de puntos conocida como la doble cadena convexa; al igual que la posición convexa la doble cadena solamente tiene un dibujo en el plano. El resultado al que se llega en este artículo es que el anti-thickness geométrico de la doble cadena convexa con  $k$  puntos en la cadena convexa superior y  $l \geq k$  puntos en la cadena convexa inferior es:

$$gat(K_{l,k}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Como es mencionado en Dujmovic & Wood (2017), encontrar el anti-thickness geométrico de gráficas completas en posición general es un problema abierto se tiene que las mejores cotas conocidas son :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq gat(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

La cota superior se sigue del caso convexo y la cota inferior se sigue del hecho de que una gráfica de  $n$  vértices con anti-thickness geométrico  $k$  tiene a lo más  $kn$  aristas.

Los trabajos mencionados en este capítulo muestran cómo el problema original del thickness da origen al problema del anti-thickness, más aún, explicamos el proceso por el cual un problema de descomposición de gráficas geométricas se convirtió a un problema de coloración de gráficas. Los autores más recientes tratan al anti-thickness como un problema de coloración. En este trabajo no construimos la gráfica  $D(S)$  y no coloreamos ninguna gráfica. Nuestro enfoque es más geométrico y computacional.

Es importante notar que el anti-thickness convexo es acotado examinando el número mínimo y máximo de aristas aportadas por una colección de thrackles máximos, dicho de otra manera se basa en descomponer la gráfica completa convexa en thrackles máximos. Esta idea fue retomada en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.





# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Descomposiciones por thrackles máximos.

En este capítulo reportaremos el pseudocódigo de algoritmos usados durante el desarrollo del proyecto así como los resultados que obtuvimos con dichos algoritmos. Asimismo presentamos la prueba de que un thrackle que no es máximo no siempre puede ser completado a uno máximo en posición general, mientras que en posición convexa sí es posible.

En el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018) se encuentran descomposiciones de gráficas geométricas en posición convexa usando thrackles máximos que comparten aristas a pares. Usando esta idea y los datos de la tabla 4.1 decidimos buscar descomposiciones de  $K_n$  para  $n \leq 10$  en las que los thrackles son todos máximos y cuyo tamaño sea el mismo del anti-thickness convexo para  $K_n$ .

En resumen: para cada  $n$  tomamos las combinaciones de  $cat(n)$  thrackles máximos y verificamos si alguna de estas combinaciones es una descomposición de  $K_n$ . Este proceso lo repetimos para cada uno de los tipos de orden que hay para cada  $n$ . Encontramos que sí existen tipos de orden que no corresponden al de posición convexa que también alcanzan el anti-thickness convexo. Los resultados se muestran en la tabla 4.2.

Para los casos de  $n \in \{3, 4, \dots, 7\}$  no pudimos encontrar una descomposición que cumpliera con las características antes descritas, esto es porque existen pocos tipos de orden cuya unión de thrackles máximos cubran las aristas de la gráfica completa. Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo que primero evalúa cuáles son los tipos de orden que podrían tener

$n$	Anti-thickness convexo de $K_n$ ( $cat(n)$ )
3	1
4	2
5	3
6	3
7	4
8	5
9	6
10	6

Tabla 4.1: Anti-thickness convexo para  $n \leq 10$  basado en el resultado de Fabila-Monroy et al. (2018).

una descomposición por thrackles máximos; se seleccionan aquellos que tengan suficientes thrackles máximos para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, en otras palabras que la unión de los thrackles máximos en determinado tipo de orden cubran las  $\binom{n}{2}$  aristas. Los pseudocódigos de los algoritmos usados se encuentra en el algoritmo 1 y el algoritmo 2.

---

**Algorithm 1** Pseudocódigo del algoritmo que encuentra descomposiciones por thrackles máximos para todos los tipos de orden de una  $n$  dada.

---

```

1: procedure MAXTHRACKLEDECOM( $n$ )
2:    $vectorOT \leftarrow valid\_thrackles()$ 
3:    $k \leftarrow convexAt(n)$ 
4:   for each  $ot \in vectorOT$  do
5:      $n_{thr} \leftarrow number\ of\ max\ thrackles\ on\ order\ type\ ot$ 
6:      $find\_all\_decomposition\_of\_size(n_{thr}, k)$ 

```

---



---

**Algorithm 2** Pseudocódigo del algoritmo que encuentra combinaciones de  $k$  thrackles máximos, si la combinación es una descomposición se visita.

---

```

1: procedure FIND-ALL-DECOMPOSITION-OF-SIZE( $n_{thr}, k$ )
2:   while There is a combination  $c$  of size  $k$  from  $\{0, 1, \dots, n_{thr}\}$  do
3:     if  $c$  is a decomposition then
4:       visit  $c$ 

```

---

Ejecutamos la implementación del algoritmo en el cluster: para  $n = 8$

$n$	Tipo de Orden	$k_n$
8	12	5
8	54	5
9	12	6
9	52	6
9	54	6
9	80	6
9	696	6
9	1080	6
9	1287	6
10	81	6
10	1328	6
10	2243	6

Tabla 4.2: Tipos de orden para los que existe al menos una descomposición en thrackles máximos de tamaño igual al anti-thickness del tipo de orden convexo.

el resultado es obtenido en menos de un segundo mientras que para  $n = 9$  y  $n = 10$  se necesitaron al rededor de 1 día y 6 días respectivamente. Las descomposiciones encontradas pueden verse con más detalle en el apéndice XXXXX.

En el desarrollo del trabajo nos preguntamos por qué existen otros tipos de orden diferente del convexo que tienen el mismo anti-thickness. Algo en lo que pensamos fue en analizar de alguna manera la estructura de los thrackles en dichos tipos de orden y por ello calculamos, para las descomposiciones obtenidas mediante el método anteriormente descrito, el número de cruce de cada uno de los thrackles de la descomposición. Se observa que en la mayoría de los casos la mitad de los thrackles de las descomposiciones tienen el número de cruce mínimo para  $n$  vértices y la otra mitad es más cercano al mayor número de cruce para  $n$  vértices. Estos resultados pueden estudiarse con más detalle en el apéndice XXXXXX.

## 4.2. Anti-thickness geométrico exacto de $K_n$ con $3 \leq n \leq 9$ .

Dado que la cota superior está dada por el anti-thickness convexo decidimos tratar de ajustar la cota inferior ya que creemos que el anti-thickness geométrico es igual al anti-thickness convexo. Un enfoque para ajustar la cota inferior es obtener el anti-thickness de cada dibujo de  $K_n$ , esto es, obtener el anti-thickness de cada tipo de orden para  $K_n$  y seleccionar el menor de todos. Sin embargo, el algoritmo exhaustivo para encontrar el anti-thickness tarda al rededor de 7 horas para un solo tipo de orden cuando  $n = 8$ , si para  $n = 8$  hay 3315 tipos de orden requeriríamos cerca de 960 días para acabar dicha tarea.

Por esta razón decidimos analizar la estructura de las posibles descomposiciones; como  $K_n$  tiene  $\binom{n}{2}$  aristas y los thrackles de la descomposición deben cubrirlas todas podemos buscar particiones de enteros de la forma  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = \binom{n}{2}$ .

A manera de ejemplo, mostraremos como se ajusta la cota inferior del anti-thickness geométrico para  $K_5$ . En  $K_5$  existen 10 aristas. Las siguientes

son particiones del entero 10:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$
$6 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 2 + 1 + 1 + 1$
$4 + 3 + 1 + 1 + 1$	$4 + 2 + 2 + 1 + 1$
$3 + 3 + 2 + 1 + 1$	$3 + 2 + 2 + 2 + 1$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$7 + 1 + 1 + 1$
$6 + 2 + 1 + 1$	$5 + 3 + 1 + 1$
$5 + 2 + 2 + 1$	$4 + 4 + 1 + 1$
$4 + 3 + 2 + 1$	$4 + 2 + 2 + 2$
$3 + 3 + 3 + 1$	$3 + 3 + 2 + 2$
$8 + 1 + 1$	$7 + 2 + 1$
$6 + 3 + 1$	$6 + 2 + 2$
$5 + 4 + 1$	$5 + 3 + 2$
$4 + 4 + 2$	$4 + 3 + 3$
$9 + 1$	$8 + 2$
$7 + 3$	$6 + 4$
$5 + 5$	

Ahora bien, algunas de estas particiones pueden ser usadas como guía para encontrar una descomposición en thrackles para  $K_5$ . Si tomamos, por ejemplo, la partición  $5 + 4 + 1$  estaríamos buscando una descomposición por 3 thrackles: uno de tamaño 5, uno de tamaño 4 y otro de tamaño 1. Es importante notar que como las particiones de un entero  $k$  suman exactamente  $k$ , los thrackles de la descomposición tienen que ser disjuntos en aristas cuando los tamaños corresponden a los enteros de la partición de  $k$ . La partición  $5 + 4 + 1$  podría ser posible de encontrar, sin embargo, podemos deshacernos de ciertas particiones que estamos seguros jamás encontraremos como son aquellas particiones que tienen un entero mayor a 5 puesto que para un conjunto de 5 vértices el thrackle geométrico más grande tiene 5 aristas, esto también se cumple para todo  $n$ . Desaparecerían entonces particiones como  $7 + 2 + 1$  o  $9 + 1$  por mencionar algunas.

Nuestro conjunto de particiones posibles se ve ahora de la siguiente ma-

nera:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$
$5 + 2 + 1 + 1 + 1$	$4 + 3 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 2 + 1 + 1$	$3 + 3 + 2 + 1 + 1$
$3 + 2 + 2 + 2 + 1$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2$
$5 + 3 + 1 + 1$	$5 + 2 + 2 + 1$
$4 + 3 + 2 + 1$	$4 + 4 + 1 + 1$
$3 + 3 + 3 + 1$	$4 + 2 + 2 + 2$
$5 + 4 + 1$	$3 + 3 + 2 + 2$
$4 + 4 + 2$	$5 + 3 + 2$
$5 + 5$	$4 + 3 + 3$

Sin embargo, como buscamos ajustar la cota inferior del anti-thickness no nos interesa encontrar descomposiciones cuyo tamaño sea mayor a la cota superior del anti-thickness dada por  $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$ , en el caso de  $n = 5$ , evitaremos buscar descomposiciones con un tamaño mayor a 3. Dejando así las siguientes particiones disponibles:

$$\begin{array}{l} 5 + 4 + 1 \quad 4 + 4 + 2 \\ 4 + 3 + 3 \quad 5 + 3 + 2 \\ 5 + 5 \end{array}$$

Finalmente, vamos a remover las particiones cuyo tamaño sea igual al anti-thickness convexo de  $K_5$ , esto porque sabemos que en efecto la posición convexa otorga descomposiciones de ese tamaño. Esto nos deja con una única partición posible :

$$5 + 5$$

Esto significa que debemos averiguar si existe una descomposición de  $K_5$  por dos thrackles de tamaño 5, en este caso dos thrackles máximos. No obstante, al buscar las thrackles máximos para todos los tipos de orden de  $K_5$  encontramos que no existen dos thrackles máximos que sean disjuntos en aristas, por esto no es posible dar una descomposición de  $K_5$  en dos thrackles máximos. Y luego, el anti-thickness de  $K_5$  es mayor a 2. Como la cota superior

del anti-thickness de  $K_5$  es 3 podemos decir que el anti-thickness geométrico de  $K_5$  es exactamente 3.

De esta manera podemos acotar el anti-thickness geométrico de  $K_n$ : examinar particiones del entero  $\binom{n}{2}$  con las siguientes condiciones:

- La longitud de la partición es menor que el anti-thickness convexo de  $K_n$ .
- Solo existe una ocurrencia del entero  $n$  en la partición.

Siguiendo las condiciones anteriores buscamos las particiones válidas para  $K_n$  con  $n \in [3, 9]$ . Encontramos que para  $n \in [3, 7]$  no existen particiones que cumplan las condiciones, por lo que podemos decir que el anti-thickness geométrico de  $K_n$  para  $n \in [3, 7]$  es igual al anti-thickness convexo.

Para  $K_8$  encontramos las siguientes particiones válidas:

$$8 + 7 + 7 + 6 \quad 7 + 7 + 7 + 7$$

No fue posible encontrar una descomposición en thrackles usando alguna de estas particiones, por lo que podemos decir que  $K_8$  tiene anti-thickness geométrico mayor a 4 y luego el anti-thickness geométrico de  $K_8$  es exactamente 5.

Por otro lado para ajustar la cota inferior del anti-thickness de  $K_9$ , tenemos las siguientes particiones válidas:

$$\begin{array}{ll} 9 + 8 + 8 + 8 + 3 & 9 + 8 + 8 + 7 + 4 \\ 9 + 8 + 8 + 6 + 5 & 9 + 8 + 7 + 7 + 5 \\ 9 + 8 + 7 + 6 + 6 & 9 + 7 + 7 + 7 + 6 \\ 8 + 8 + 8 + 8 + 4 & 8 + 8 + 8 + 7 + 5 \\ 8 + 8 + 8 + 6 + 6 & 8 + 8 + 7 + 7 + 6 \\ 8 + 7 + 7 + 7 + 7 & \end{array}$$

Para cada una de las particiones se diseñó un algoritmo que evalúa todos los thrackles de tamaño 9, 8, 7 y 6. Los resultados fueron los siguientes:

- $9 + 8 + 8 + 8 + 3$  - Probado con  $9+8+8$ .
- $9 + 8 + 8 + 7 + 4$  - Probado con  $9+8+8$ .
- $9 + 8 + 8 + 6 + 5$  - Probado con  $9+8+8$ . 150000ms

- $9 + 8 + 7 + 7 + 5$  - Probado con  $9+8+7+6+6$
- $9 + 8 + 7 + 6 + 6$  - Probado con  $9+8+7+6+6$ . 981709 ms.
- $9 + 7 + 7 + 7 + 6$  - Probado con  $9+7+7+7+6$ . 2.11354e+06 ms.
- $8 + 8 + 8 + 8 + 4$  - Probado con  $8+8+8+8$ . 300888 ms.
- $8 + 8 + 8 + 7 + 5$  - Probado con  $8+8+8+6+6$ .
- $8 + 8 + 8 + 6 + 6$  - Probado con  $8+8+8+6+6$ . 569735 ms.
- $8 + 8 + 7 + 7 + 6$  - Probado con  $8+8+7+7+6$ . 6.39485e+06 - 1 Hora, 46 minutos.
- $8 + 7 + 7 + 7 + 7$  - Probado con  $8+7+7+7+7$ . 1.23716e+08 - 34 Horas, 21 minutos.

En la mayoría de los casos no fue necesario examinar toda la partición, por ejemplo para la partición  $9 + 8 + 8 + 8 + 3$ , encontramos que no hay 3 thrackles, para ningún tipo de orden diferente del convexo, donde uno sea de tamaño 9 y los otros dos de tamaño 8 que sean disjuntos en aristas y por esta razón no es necesario seguir examinando la partición a fondo.

Como para ninguna partición fue posible encontrar una descomposición en thrackles podemos decir que el anti-thickness geométrico de  $K_9$  es mayor a 5. Y como la cota superior del anti-thickness geométrico es 6 decimos que el anti-thickness de  $K_9$  es exactamente 6.



## Capítulo 5

### Conclusiones y trabajo futuro



# Bibliografía

- Araujo, G., Dumitrescu, A., Hurtado, F., Noy, M., & Urrutia, J. (2005). On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, 32(1), 59–69.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2008). *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, 1 ed.
- Dillencourt, M. B., Eppstein, D., & Hirschberg, D. S. (2004). Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, (pp. 39–51). World Scientific.
- Dujmovic, V., & Wood, D. R. (2017). Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, abs/1708.04773.
- Fabila-Monroy, R., Hidalgo-Toscano, C., Leaños, J., & Lomelí-Haro, M. (2017). The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*.
- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*.
- Hurtado, F. (2009). Edge colouring geometric complete graphs. [http://www.openproblemgarden.org/op/edge\\_colouring\\_geometric\\_complete\\_graphs](http://www.openproblemgarden.org/op/edge_colouring_geometric_complete_graphs).
- Pach, J. (2013). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (pp. 465–484). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.  
URL [https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17)