

Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year



# Abstract



# Resumen



# Dedicación





# Agradecimientos



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>15</b>
2.1. Gráficas . . . . .	15
2.1.1. Gráfica geométrica . . . . .	17
2.1.2. Thrackles . . . . .	19
2.1.3. Tipo de Orden . . . . .	21
2.2. Anti-thickness y anti-thickness geométrico . . . . .	25
2.3. Número cromático . . . . .	26
<b>3. Estado del arte</b>	<b>29</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>41</b>
4.1. Cota inferior del anti-thickness geométrico de $K_n$ . . . . .	41
4.2. Descomposiciones por thrackles máximos. . . . .	46
4.3. Anti-thickness geométrico exacto de $K_n$ con $3 \leq n \leq 9$ . . . . .	49
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>55</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Este trabajo está ubicado en el área de la geometría combinatoria y en el área de geometría computacional.

Una gráfica es un conjunto de vértices junto con un conjunto de aristas que unen pares de vértices. Cuando la gráfica tiene todas las aristas posibles decimos que es una gráfica completa. Cuando representamos la gráfica en el plano, es decir, cuando sus vértices son puntos en  $\mathbf{R}^2$  y sus aristas son curvas que unen dos puntos, decimos que tenemos un dibujo de la gráfica. Cuando las aristas son todas segmentos de recta, decimos que la gráfica es geométrica. Cuando las aristas del dibujo de la gráfica se intersectan a pares la gráfica es un thrackle.

En el área de geometría combinatoria existe un problema en el cual se busca obtener una descomposición de una gráfica completa con tamaño mínimo y en el que cada uno de los elementos de la partición sea un thrackle. En este trabajo exploramos una solución a este problema para gráficas completas de hasta diez vértices utilizando herramientas de la geometría computacional. Este problema, que recibe el nombre de anti-thickness de una gráfica completa  $K_n$  y se denota como  $At_g(K_n)$  ha sido estudiado con anterioridad para gráficas geométricas cuyos vértices están en posición convexa (Fabila-Monroy et al. (2018a)). A esta variación del problema la denotamos como  $At_c(K_n)$ . Se sabe que

$$At_c(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Dichos resultados fueron encontrados usando técnicas combinatorias y geométricas. Para el caso en el que los puntos de la gráfica completa están en posición

general existen las siguientes cotas:

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

La cota superior proviene del caso en el que los puntos están en posición convexa mientras que la cota inferior proviene del hecho de que un thrackle máximo tiene a lo más  $n$  aristas. Sin embargo, esto significaría que cuando los puntos están en posición general los thrackles máximos son disjuntos en aristas. Esto no es verdad en posición convexa, lo cual da lugar para cuestionarnos si en realidad esta cota es justa para posición general.

En esta tesis encontramos que en efecto  $At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$  para  $n \leq 10$ . Nosotros usamos la información que proveen los tipos de orden para conjuntos de hasta diez puntos para inducir una gráfica completa y obtener descomposiciones en thrackles usando algoritmos exhaustivos. Además buscamos información acerca del número de cruce de las descomposiciones para tratar de explicar las características de los conjuntos de puntos en posición general que alcanzan el anti-thickness geométrico de la posición convexa.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el siguiente capítulo se explican a detalle y de manera más formal las definiciones que usamos en este trabajo y que son necesarias para entender el desarrollo de la tesis, después hacemos un recuento de los resultados obtenidos acerca del anti-thickness geométrico y tratamos de explicar el origen del concepto tomando en cuenta un problema propuesto con anterioridad, luego, en la sección de resultados, explicaremos los resultados del trabajo y cómo fueron obtenidos. En esta sección exponemos los algoritmos usados para las búsquedas exhaustivas. Finalmente mencionaremos las conclusiones y posible trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Antecedentes

En este capítulo damos algunas definiciones necesarias para presentar lo que se conoce como descomposición de gráficas completas en thrackles. Este es el principal problema que se trata en esta tesis. Empezamos estableciendo conceptos relacionados con gráficas abstractas y después hablaremos de gráficas en el plano, posteriormente explicamos el concepto de tipo de orden y cómo se utiliza en este trabajo, continuamos hablando del anti-thickness abstracto y del anti-thickness geométrico y finalmente explicamos el número cromático de una gráfica.

### 2.1. Gráficas

El concepto base del trabajo, del cual se desprenden otras definiciones, es el de gráfica. Todas las definiciones que presentamos en esta sección fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *gráfica*  $G$  está compuesta por un conjunto no vacío  $V$  de objetos a los que llamamos *vértices* y por un conjunto  $E$ , de parejas de elementos de  $V$ , a los que llamamos *aristas*. Denotamos a la arista  $e$  compuesta por los vértices  $u$  y  $v$  como  $(u, v)$ . Para describir a la gráfica  $G$  compuesta por el conjunto  $V$  de vértices y el conjunto  $E$  de aristas escribimos  $G = (V, E)$ . Para referirnos al conjunto de vértices de  $G$  escribimos  $V(G)$  y para referirnos al conjunto de aristas de  $G$  escribimos  $E(G)$ . En la figura 2.1 presentamos un ejemplo de una gráfica.

Decimos que *dos vértices*  $u, v \in V(G)$  *son adyacentes* si existe la arista  $(u, v) \in E(G)$ . Decimos que *dos aristas*  $e_1, e_2 \in E(G)$  *son adyacentes* si inci-



Figura 2.1: Una gráfica con cinco vértices y cuatro aristas. Los vértices  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes y las aristas  $(v_1, v_3)$  y  $(v_1, v_4)$  son adyacentes.

den en el mismo vértice. La figura 2.1 ilustra un ejemplo de estos conceptos. Una gráfica es *completa* si cada pareja de vértices en la gráfica es adyacente. Mostramos un ejemplo de adyacencia de aristas en la figura 2.1 y un ejemplo de una gráfica completa en la figura 2.2. Para denotar una gráfica completa con  $n$  vértices escribimos  $K_n$ . Una gráfica  $G$  es *bipartita* si es posible dar una partición<sup>1</sup> de  $V(G)$  en dos subconjuntos  $U$  y  $W$  de tal manera que cada arista de  $G$  tenga un extremo en  $U$  y otro extremo en  $W$ . Presentamos un ejemplo de gráfica bipartita en la figura 2.3.



Figura 2.2: La gráfica completa con 6 vértices tiene una arista por cada par de vértices.

---

<sup>1</sup>Una partición  $P$  de un conjunto  $X$  es una colección de subconjuntos que cumplen lo siguiente:

- Ningún elemento de  $P$  es el conjunto vacío.
- La unión de todos los elementos de  $P$  es exactamente el conjunto  $X$ .
- La intersección de cualesquiera dos elementos de  $P$  es vacía.





Figura 2.3: Un ejemplo de una gráfica bipartita con bipartición  $U, W$ , ambos conjuntos son de tamaño tres.

Una *descomposición*  $\mathcal{D}$  de una gráfica  $G$  es una colección  $\mathcal{D} = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  de subgráficas de  $G$ , que cumple con dos condiciones:

1. Ninguna subgráfica  $G_i$  contiene vértices aislados.
2. Cada arista de  $G$  pertenece a exactamente una subgráfica  $G_i$  de  $\mathcal{D}$ .

En este trabajo decimos que una gráfica  $G$  cubre a una arista  $e$  si sucede que  $e \in E(G)$ .

Nótese que, en otras palabras, las subgráficas de la colección son disjuntas en aristas y su unión cubre a  $E(G)$ . La figura 2.4 ilustra un ejemplo de una descomposición de la gráfica  $K_4$ .

En este trabajo hacemos descomposiciones de dibujos de gráficas (abstractas) en gráficas geométricas que cumplen con cierta propiedad, que explicamos más adelante. En la siguiente sección exponemos el concepto de dibujo de una gráfica y de gráfica geométrica.

### 2.1.1. Gráfica geométrica

En esta sección abordamos uno de los conceptos clave de este trabajo, que son las gráficas geométricas. Empezamos explicando el concepto de un *dibujo* de una gráfica (abstracta), para continuar con la descripción de un dibujo de una gráfica, con características especiales, al que llamamos *gráfica geométrica*.

Los primeros dos párrafos de esta sección fueron tomados de Pach (2013a). El tercer párrafo fue extraído de Lara & Rubio-Montiel (2019). El cuarto párrafo fue tomado de Pach & Sterling (2011).



Figura 2.4: Un ejemplo de una descomposición  $\mathcal{D}$  de  $K_4$  en dos gráficas. Aquí  $\mathcal{D} = \{G_1, G_2\}$  donde  $G_1$  es la gráfica inducida por las aristas  $(v_1, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$  y  $G_2$  es la gráfica inducida por las aristas  $(v_1, v_3), (v_2, v_4)$ .

Un *dibujo*  $G = (V, E)$  de una gráfica  $G$  es una representación de la gráfica  $G$  en el plano tal que 1) cada vértice de  $G$  es representado por un punto en el plano y 2) cada arista de  $G$  es representada como una curva simple continua que conecta un par de puntos. El conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de aristas  $E$  de  $G$  son los puntos y las curvas, respectivamente. Sin pérdida de generalidad nos referimos al conjunto de puntos de  $G$  como  $V(G)$ , y les llamamos vértices, y nos referimos al conjunto de curvas de  $G$  como  $E(G)$ , y les llamamos aristas.

Cuando restringimos las curvas que representan a las aristas del dibujo de  $G$  a segmentos de recta, llamamos al dibujo de la gráfica *gráfica geométrica*. Una gráfica geométrica es completa si existe un segmento de recta entre cada par de vértices de  $V(G)$ . En la figura 2.5 mostramos un dibujo de  $K_5$  y una gráfica geométrica de  $K_5$ . Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano y sea  $G$  una gráfica geométrica de  $G$ . Decimos que  $G$  está definida sobre  $S$  si  $V(G) = S$ . Cualquier conjunto  $S$  de puntos en posición general induce una gráfica geométrica completa.

Todos los conceptos definidos para gráficas (abstractas) han sido heredados de manera natural para los dibujos de gráficas, sin embargo, como la gráfica geométrica está definida en el plano, es necesario redefinir el concepto de adyacencia de aristas. Decimos que dos aristas  $e_1, e_2 \in E(G)$  se *cruzan* si existe un punto  $p$ , en alguna de las aristas, tal que en  $p$  la arista  $e_1$  pasa de un lado de la arista  $e_2$  hacia el otro lado. Decimos que dos aristas  $e_1, e_2 \in E(G)$  son *adyacentes* si comparten un vértice. En este trabajo decimos que dos aris-



Figura 2.5: A la izquierda observamos un dibujo de  $K_5$  y a la derecha observamos una gráfica geométrica de  $K_5$ .

tas de una gráfica geométrica se *intersectan* si son adyacentes o si se cruzan. Mostramos un ejemplo de intersección de aristas en la figura 2.6.



Figura 2.6: En este ejemplo la arista  $(v_1, v_2)$  no se intersecta con la arista  $(v_3, v_4)$  (son disjuntas) pero sí se intersecta con la arista  $(v_2, v_5)$ . La arista  $(v_2, v_5)$  se cruza con la arista  $(v_3, v_4)$  y por lo tanto se intersectan.

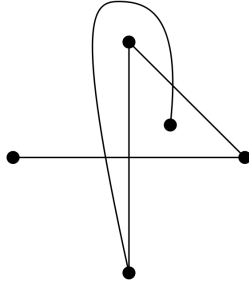
El concepto que estudiamos en esta tesis está relacionado con gráficas geométricas donde cada par de aristas se intersectan una vez, estas gráficas geométricas reciben el nombre de *thrackles*. En la siguiente sección explicamos formalmente qué son los thrackles.

### 2.1.2. Thrackles

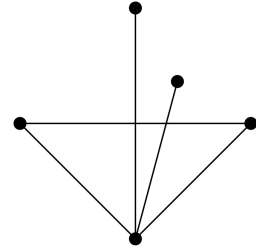
Sea  $G$  un dibujo de una gráfica  $G$ . Decimos que  $G$  es un *thrackle* si cada par de aristas se intersecta exactamente una vez. La figura 2.7 ilustra un ejemplo de thrackle. Los thrackles fueron definidos por John Conway en la década de 1960 (Pach (2013a)). Conway también conjeturó que el número de aristas en un thrackle no puede exceder el número de sus vértices (Fulek & Pach (2011)). Un thrackle de  $n$  vértices es *máximo* si tiene exactamente  $n$  aristas. La figura 2.7 muestra un thrackle máximo.



Figura 2.7: Un thrackle máximo sobre un conjunto de seis vértices.



(a) Un thrackle con cinco vértices.



(b) Un thrackle geométrico con cinco vértices.

Figura 2.8: Ambas figuras ilustran thrackles definidos sobre el mismo conjunto de puntos. En los dos casos el thrackle dibujado es máximo.

Una gráfica (abstracta)  $G$  es *thrackleable* si puede ser dibujada en el plano como un thrackle.

Una descomposición por thrackles  $D$ , de una gráfica geométrica  $G$ , es una colección  $D = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  de subgráficas geométricas que cumple con tres condiciones:

1. Cada subgráfica  $G_i$  es un thrackle.
2. Ninguna subgráfica  $G_i$  contiene vértices aislados.
3. Cada arista de  $G$  pertenece a exactamente una subgráfica  $G_i$  de  $D$ .

Un thrackle en el que todas sus aristas son segmentos de recta es conocido como *thrackle geométrico* (Schaefer (2018)). En la figura 2.8 presentamos un ejemplo de thrackle y un ejemplo de thrackle geométrico. En este trabajo nos

referimos a los thrackles geométricos como thrackles ya que solo estudiamos descomposiciones de gráficas con thrackles geométricos.

Dada una gráfica completa (abstracta) esta puede ser dibujada en el plano de muchas maneras, solo basta con mover un punto en cualquier dirección para obtener diferentes dibujos de la misma gráfica completa, de hecho hay un número no finito de dibujos para una sola gráfica abstracta. Estudiarlos todos no es posible y por ello necesitamos discretizar el número de posibles dibujos geométricos para una sola gráfica. El tipo de orden es una herramienta que otorga un número finito de dibujos combinatoriamente diferentes para gráficas abstractas. Explicamos este concepto a continuación.

### 2.1.3. Tipo de Orden

Para entender cómo funciona el tipo de orden de un conjunto de puntos debemos definir la orientación de una tripleta de puntos.

Tres puntos  $(p, q, w)$  en el plano en posición general, pueden tener una orientación en sentido horario o una orientación en sentido anti-horario. Decimos que  $(p, q, w)$  está orientada en sentido horario si  $w$  está a la derecha del segmento dirigido  $\overrightarrow{pq}$ . Si  $w$  está a la izquierda de dicho segmento entonces  $(p, q, w)$  está orientada en sentido anti-horario. Si la tripleta está orientada en sentido horario asignamos a esa tripleta el valor  $-1$ . Si la tripleta está orientada en sentido anti-horario asignamos a esa tripleta el valor  $+1$ . En la figura 2.9 mostramos un ejemplo de cada orientación posible para una tripleta.

Las definiciones siguientes fueron tomadas de Aichholzer et al. (2002). El tipo de orden de un conjunto  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de puntos en posición general, es una función que asigna a cada tripleta ordenada  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  la orientación de la tripleta de puntos  $\{p_i, p_j, p_k\}$ .

Decimos que dos conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  son *combinatoriamente equivalentes* si tienen el mismo tipo de orden de otra forma, si no son equivalentes decimos que son *combinatoriamente distintos*. Si  $S_1$  y  $S_2$  son combinatoriamente equivalentes dos segmentos en  $S_1$  se cruzan si y solo si los segmentos correspondientes en  $S_2$  se cruzan. Solo hay una manera (combinatoriamente equivalente) de acomodar tres puntos, dos maneras de acomodar cuatro puntos y tres maneras de acomodar cinco puntos. En la figura 2.10 ilustramos los diferentes tipos de orden para conjuntos de tres y cuatro puntos. En la figura 2.11 presentamos conjuntos combinatoriamente equivalentes de cinco puntos. En la figura 2.12 mostramos los diferentes tipos de orden para un

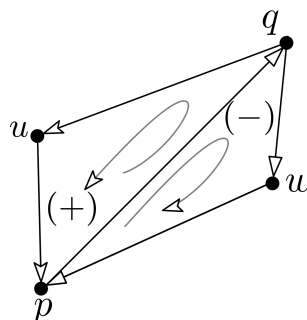


Figura 2.9: Esta figura muestra las posibles orientaciones de una tripleta de puntos. La tripleta  $\{p, q, w\}$  tiene asignado el valor de  $(-1)$  porque  $w$  está orientado en sentido horario con respecto del segmento  $\overline{pq}$ . La tripleta  $\{p, q, u\}$  tiene asignado el valor de  $(+1)$  porque  $u$  está orientado en sentido anti-horario con respecto del mismo segmento.

conjunto de cinco puntos.

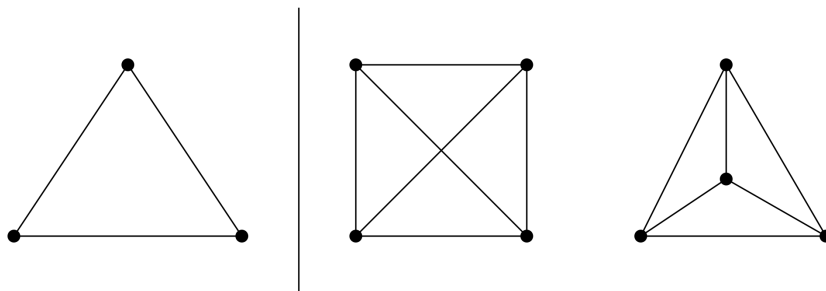


Figura 2.10: Las diferentes maneras combinatoriamente diferentes de acomodar 3 y 4 puntos.

No es trivial enumerar o contar los conjuntos combinatoriamente diferentes, por ejemplo, dados  $n$  puntos podemos colocarlos en posición convexa y obtener el primer tipo de orden para  $n$  puntos, luego podemos colocar  $n - 1$  puntos en posición convexa y un punto dentro del  $(n - 1)$ -ágono y evaluar de cuántas maneras combinatoriamente distintas es posible colocar un punto dentro del polígono. Posteriormente podemos ver que pasa con  $n - 2$  puntos en posición convexa y dos dentro del  $(n - 2)$ -ágono y así sucesivamente hasta que tengamos 3 puntos en posición convexa y  $n - (n - 3)$  dentro del triángulo. En la figura 2.13 explicamos una parte de este proceso. Usando una técnica parecida se sabe que para  $n = 10$  hay más de 14 millones de



Figura 2.11: Estos dos conjuntos de puntos tienen el mismo tipo de orden. Observe que el valor de cada una de las tripletas del dibujo que está a la izquierda es igual al valor de las tripletas del dibujo a la derecha.



Figura 2.12: Las tres maneras diferentes de distribuir 5 puntos en el plano. Cualquier otra configuración es equivalente a alguna de estas tres configuraciones.

tipos de orden. En el trabajo de Aichholzer et al. (2002) se ofrece una base

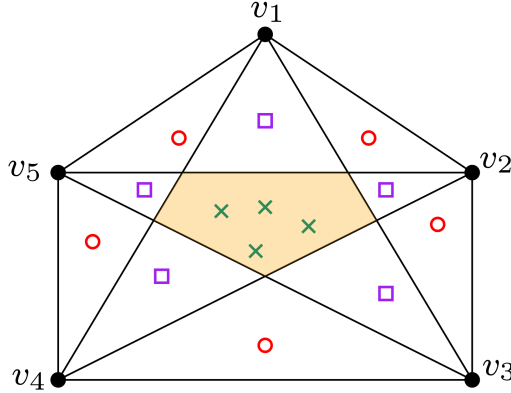


Figura 2.13: La figura ilustra las diferentes maneras de colocar un punto dentro de un pentágono, para formar un conjunto de 6 puntos en total. Hay al menos 3 formas diferentes de colocar dicho punto, 1) es posible ponerlo dentro del pentágono pero fuera del polígono en forma de estrella inducido por las aristas del ciclo interior. 2) Es posible ponerlo dentro de uno de los "picos" del polígono en forma de estrella y 3) es posible ubicarlo en el área rellena. Los puntos de 1) están representados con un círculo sin rellenar, los puntos de 2) con un cuadrado y los puntos de 3) con una cruz. La razón por la que existe más de una ocurrencia de un mismo tipo de punto es porque existe una equivalencia en la etiquetación de los vértices tales que los cruces se preservan.

de datos que contiene los conjuntos combinatoriamente diferentes para toda  $3 \leq n \leq 10$ . En la tabla 2.1 se presenta el número de conjuntos diferentes para cada  $n$  y el tamaño en bytes de la base de datos.

En este trabajo buscamos descomposiciones de gráficas geométricas completas en thrackles. Como se mencionó antes, un conjunto de  $n$  puntos en posición general induce una gráfica completa de  $n$  vértices en el plano. Nosotros analizamos cada tipo de orden para cada  $n \leq 10$  induciendo la gráfica completa de  $n$  vértices. Después examinamos sus thrackles y luego buscamos una descomposición. Cuando buscamos una descomposición que minimiza el número de thrackles utilizados estamos buscando el anti-thickness de la gráfica. Dicho concepto será explicado formalmente en seguida.



$n$	Número de tipos de orden	Tamaño (bytes)
3	1	6
4	2	16
5	3	30
6	16	192
7	135	1890
8	3315	53040
9	158817	5 717 412
10	14309547	572 381 880

Tabla 2.1: Tipos de orden para cada  $n \leq 10$ .

## 2.2. Anti-thickness y anti-thickness geométrico

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Dujmovic & Wood (2017).

**Definición 1.** *Anti-thickness de una gráfica.* El anti-thickness de una gráfica  $G$  es el entero  $k$  más pequeño tal que existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada elemento de la partición es una gráfica thrackable.

La figura 2.14 ilustra un ejemplo del anti-thickness de  $K_5$ .

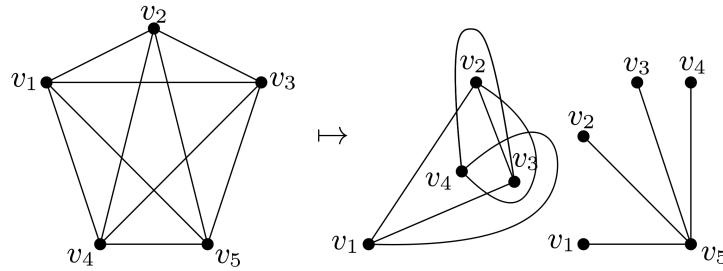


Figura 2.14: La figura muestra a  $K_5$  a la izquierda y a la derecha dos thrackles cuya unión es  $K_5$ . Consideremos las aristas de la gráfica completa inducida por los vértices 1, 2, 3, 4, estas aristas inducen un thrackle mientras que las aristas con un extremo en el vértice 5 inducen otro thrackle. El anti-thickness de  $K_5$  es precisamente igual a dos. Este resultado se discute en el capítulo de resultados.

Cuando deseamos que los thrackles usados en la descomposición de la gráfica sean geométricos, entonces podemos definir el anti-thickness geométrico como sigue.

**Definición 2.** *Anti-thickness geométrico de una gráfica.* El anti-thickness geométrico de una gráfica  $G$  es el entero  $k$  más pequeño tal que existe un dibujo  $\mathbf{G}$  de  $G$  para el cual hay una partición de  $E(\mathbf{G})$ , de tamaño  $k$ , en la que cada elemento de la partición induce un thrackle.

Nótese que en la partición que realiza el anti-thickness de la gráfica, cada elemento de la partición tiene uno o más dibujos, mientras que en la partición que realiza el anti-thickness geométrico de la gráfica, cada elemento es una subgráfica geométrica del dibujo original.

En la figura 2.15 damos un ejemplo del anti-thickness geométrico de  $K_5$ .

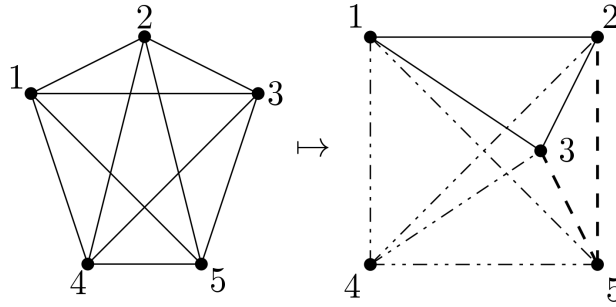


Figura 2.15: En esta figura podemos observar una descomposición de  $K_5$  en 3 thrackles geométricos. Esta descomposición se muestra en la figura del lado derecho, cada thrackle está dibujado con diferentes patrones de línea. El anti-thickness geométrico de  $K_5$  es exactamente tres, esto es demostrado en la sección de resultados.

Dar una descomposición de una gráfica en thrackles es equivalente a encontrar conjuntos independientes de aristas que comparten ciertas propiedades. A su vez, encontrar los conjuntos independientes de una gráfica está relacionado a encontrar el *número cromático* de una gráfica (abstracta). Discutimos esto en la siguiente sección.

### 2.3. Número cromático

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *coloración propia* de los vértices de una gráfica  $G$  es la asignación de colores a los vértices de  $G$  tal que cada vértice tiene un solo color asignado y dos vértices adyacentes tienen diferentes colores. Un color puede ser un color como rojo, verde, amarillo, etc. cuando el número de colores a usar es pequeño, de otra forma se usan enteros  $1, 2, \dots, k$  para algún entero positivo  $k$  para representar los colores. Si la coloración propia usa  $k$  colores diferentes decimos que tenemos una  $k$ -coloración de la gráfica  $G$ . Dada una  $k$ -coloración de una gráfica  $G$ , si  $V_i$  es el conjunto de vértices de  $G$  que tienen el color  $i$  asignado, llamamos a  $V_i$  una *clase cromática* de  $G$ . El conjunto  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  genera una partición en conjuntos independientes de los vértices de  $G$ .

Una gráfica  $G$  es  $k$ -colorable si existe una coloración propia de  $G$  de tamaño  $k$ . El entero positivo  $k$  más pequeño para el cual  $G$  es  $k$ -colorable recibe el nombre de *número cromático* de  $G$ . Lo denotamos como  $\chi(G)$ .

La figura 2.16 muestra un ejemplo de una coloración propia de una gráfica  $G$ . En este ejemplo ilustramos cada clase cromática dibujando los vértices con diferentes colores representados por una cruz, un círculo y un cuadrado. Si tenemos una descomposición en  $k$  thrackles de una gráfica geométrica

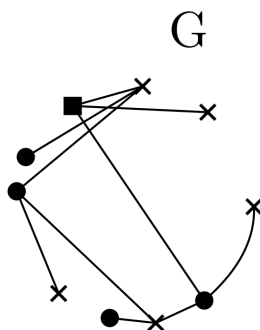


Figura 2.16: Una coloración propia de una gráfica  $G$ . Esta coloración es de tamaño 3, por lo tanto decimos que es una 3-coloración de  $G$ . Para esta gráfica en particular no existe una coloración más pequeña, por lo que su número cromático es 3. Nótese que los conjuntos independientes son formados por vértices que tienen el mismo color asignado y no son adyacentes entre sí.

y asignamos uno de  $k$  colores a cada thrackle de la descomposición de tal manera que no existan dos thrackles del mismo color y si además minimizamos el valor de  $k$  entonces  $k$  es el anti-thickness de la gráfica geométrica dada. Esta idea ha sido utilizada para encontrar el anti-thickness de una gráfica geométrica cuyos vértices están en posición convexa. Detallamos este

concepto en la siguiente sección.

En este capítulo explicamos los conceptos necesarios para entender el trabajo realizado en esta tesis. Empezamos hablando de gráficas abstractas y después de su representación en el plano usando aristas que son curvas y usando aristas que son segmentos de recta a las cuales llamamos gráficas geométricas. Continuamos definiendo un tipo especial de gráfica geométrica en la cual cada par de aristas se intersecta, este tipo de gráfica geométrica recibe el nombre de thrackle. Luego explicamos el tipo de orden como herramienta para discretizar el número de dibujos posibles de una gráfica en el plano. Después hablamos del anti-thickness geométrico de una gráfica como el mínimo número de thrackles que existen en una descomposición para todos los dibujos de una gráfica. Finalmente mencionamos el número cromático como el mínimo número de conjuntos independientes que existen en una partición de los vértices de una gráfica. Este último punto es de importancia para el siguiente capítulo pues explicamos cómo el problema de encontrar el anti-thickness geométrico de una gráfica puede ser visto como un problema de encontrar el número cromático. Además hablaremos de cuáles son los aportes más recientes acerca del problema del anti-thickness geométrico.

# Capítulo 3

## Estado del arte

Comenzamos este capítulo hablando del thickness de una gráfica, concepto que cronológicamente fue definido antes que el anti-thickness, y discutimos su relación con éste. Luego, mencionamos algunos resultados acerca del thickness. Después, explicaremos de qué manera el número cromático de una gráfica puede otorgar una descomposición de una gráfica geométrica. Finalmente discutimos los resultados actuales para el anti-thickness.

El thickness de una gráfica se define como sigue:

**Definición 3.** [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness.* Sea  $G$  una gráfica, el thickness  $\theta(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  para el cual existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , en la que cada elemento de la partición induce una gráfica planar.

Este concepto también puede extenderse a gráficas geométricas, en este caso estaremos hablando del thickness de una gráfica geométrica:

**Definición 4.** *Thickness de una gráfica geométrica.* Sea  $G$  una gráfica geométrica, el thickness  $th(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  para el cual existe una partición de  $E(G)$ , de tamaño  $k$ , donde cada elemento de la partición induce una gráfica (geométrica) plana.

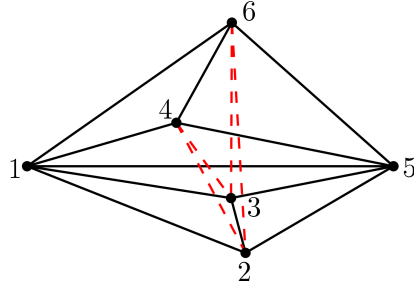
Finalmente podemos definir el thickness geométrico de una gráfica  $G$ .

**Definición 5.** [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness geométrico.* Sea  $G$  una gráfica, el thickness geométrico  $\bar{\theta}(G)$  de  $G$  es :

$$\bar{\theta}(G) = \min\{th(G) : G \text{ es una gráfica geométrica de } G\}.$$



(a) Una descomposición de tamaño 2 de  $K_6$ .



(b) Un dibujo geométrico de  $K_6$  y su descomposición en dos gráficas geométricas planas.

Figura 3.1: La figura (a) muestra que el thickness de  $K_6$  es menor o igual a dos. La figura (b) muestra que el thickness geométrico de  $K_6$  es menor o igual a dos. Sin embargo, en general, estos parámetros no coinciden.

En la figura 3.1 ilustramos un ejemplo del thickness de la gráfica completa de 6 vértices.

Dillencourt et al. (2004) demuestran que el thickness geométrico está acotado por:

$$\left\lceil \frac{n}{5.646} + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil.$$

En el mismo artículo encuentran el valor exacto del thicknes geométrico de cada gráfica completa con  $n$  vértices, para  $n \leq 12$ , así como para  $K_{15}$  y  $K_{16}$ . También estudian el thickness geométrico para gráficas completas

bipartitas y demuestran la siguiente cota:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{\min(a, b)}{2} \right\rceil.$$

Para explicar la relación entre el thickness y el anti-thickness es necesario hablar de coloraciones de vértices de gráficas de adyacencia. Recordemos que dadas dos aristas de una gráfica geométrica  $G$ , decimos que estas se *intersectan* si comparten un vértice (son adyacentes) o si se cruzan, y que son *disjuntas* si no se intersectan. La *gráfica de adyacencia* de una gráfica geométrica  $G$  tiene como conjunto de vértices a todas las aristas de  $G$  y sus aristas se definen a partir del tipo de adyacencia que se considere; se puede definir cuatro diferentes gráficas de adyacencia, estas se listan a continuación y se ilustran en la figura 3.2:

1. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  se cruzan.
2. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  comparten un vértice o son disjuntas.
3. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  se intersectan.
4. La gráfica de adyacencia en la que existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes en  $G$  son disjuntas.

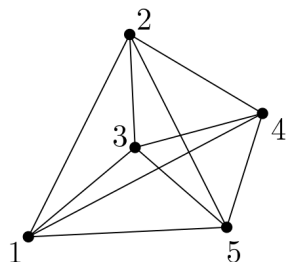
Ahora definimos una gráfica a la que llamamos *gráfica de cruce*.

**Definición 6.** *Gráfica de cruce.* Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano y sea  $K_n(S)$  la gráfica completa asociada a  $S$ . La gráfica de cruce  $E_{pp}(S)$  de  $S$  es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de  $K_n(S)$  y una arista entre dos vértices de  $E_{pp}(S)$  si sus aristas correspondientes se cruzan en  $K_n(S)$ .

La gráfica  $E_{pp}(S)$  corresponde a la gráfica de adyacencia 1.

En la figura 3.2b aparece un ejemplo de la gráfica de cruce  $E_{pp}(S)$ . Podemos notar que dado que en el dibujo de  $K_5$  hay 3 cruces, en la gráfica  $E_{pp}(S)$  hay 3 aristas.

Los conjuntos independientes de  $E_{pp}(S)$  corresponden a conjuntos de aristas de  $K_n(S)$  que inducen gráficas planas. Luego, una coloración propia de los



(a) Un dibujo geométrico de  $K_5$  cuyo conjunto de vértices es  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .



(b) La gráfica de adyacencia 1.



(c) La gráfica de adyacencia 2.



(d) La gráfica de adyacencia 3.



(e) La gráfica de adyacencia 4.

Figura 3.2: Una dibujo de  $K_5$  y sus respectivas gráficas de adyacencia.





Figura 3.3: De izquierda a derecha: Una coloración propia de los vértices de  $E_{pp}(S)$  con dos clases cromáticas indicadas como círculos y cuadros. Una descomposición de un dibujo de  $K_5$  en dos gráficas planas cuyas aristas corresponden a cada una de las clases cromáticas de la coloración de  $E_{pp}(S)$ .

vértices de  $E_{pp}(S)$  corresponde a una descomposición de  $K_n(S)$  en gráficas planas. Por lo tanto encontrar el número cromático de la gráfica  $E_{pp}(S)$  es equivalente a encontrar el thickness geométrico de  $K_n(S)$ . La figura 3.3 ilustra esta relación. El thickness geométrico de la gráfica completa de  $n$  vértices  $K_n$  se puede definir en estos términos como sigue:

**Definición 7.** *Thickness geométrico de una gráfica.*

$$\bar{\theta}(n) = \min\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}.$$

De la misma manera que definimos la gráfica de cruce podemos definir otras gráficas de adyacencia. Para esto basta con considerar alguno de los otros tipos de adyacencia. En este sentido, en el trabajo de Araujo et al. (2005) se definen las gráficas que se listan en seguida, cada una corresponde a una de las cuatro gráficas de adyacencia mencionadas anteriormente. Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general y  $K_n(S)$  la gráfica completa asociada a  $S$ :

- $W(S)$  : Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 2.
- $I(S)$  : Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 3.
- $D(S)$  Es la gráfica correspondiente a la gráfica de adyacencia 4.

Gráfica	Conjuntos independientes en $K_n(S)$
$W(S)$	<i>Crossing families</i>
$I(S)$	<i>Emparejamientos planos</i>
$D(S)$	<i>Thrackles</i>
$E_{pp}(S)$	<i>Gráficas planares</i>

Tabla 3.1: Esta tabla muestra qué representan los conjuntos independientes en  $K_n(S)$  para cada una de las gráficas definidas en Araujo et al. (2005) y para  $E_{pp}(S)$ . Una *crossing familie* es una colección de segmentos que se cruzan a pares Lara & Rubio-Montiel (2019).

A partir de aquí, nos referimos a las gráficas de adyacencia 1,2,3 y 4 como  $E_{pp}(S)$ ,  $W(S)$ ,  $I(S)$  y  $D(S)$ , respectivamente.

Es fácil darse cuenta que la condición de existencia de aristas de  $W(S)$  es complementaria a la condición en  $E_{pp}(S)$  y viceversa. De la misma forma, las condiciones de  $I(S)$  y  $D(S)$  son complementarias entre sí. En la tabla 3.1 mostramos esta relación y las estructuras geométricas que inducen, en  $K_n(S)$ , los conjuntos independientes para cada gráfica de adyacencia.

*Open problem garden* es un sitio web en el que investigadores de diferentes áreas de las matemáticas, como algebra, combinatoria, teoría de números o teoría de gráficas, publican problemas abiertos para que la comunidad pueda leerlos libremente. En este sitio web Hurtado (2009) presenta un problema en el que se requiere asignar un color a cada arista de una gráfica geométrica completa usando, de manera implícita, cada una de las cuatro gráficas de adyacencia mencionadas antes.

En el artículo de Araujo et al. (2005) buscan el número cromático de cada una de las gráficas de adyacencia mencionadas anteriormente, los autores estudian los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 w(n) &= \max\{\chi(W(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}. \\
 i(n) &= \max\{\chi(I(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}. \\
 d(n) &= \max\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}.
 \end{aligned}$$

Es usual estudiar el dibujo en posición convexa de una gráfica completa ya que se pueden explotar ciertas propiedades geométricas cuando se trabaja con un conjunto de puntos en posición convexa. Esta configuración es representada

por un solo tipo de orden para cada  $n$ . Para el caso en el que  $S$  está en posición convexa se denotan a estos valores como  $w_c(n)$ ,  $i_c(n)$  y  $d_c(n)$ . Es importante notar que, por consecuencia de la posición convexa, estos valores están definidos para un único tipo de orden. Nótese que  $d_c(n) = \chi(D(S))$  para el caso en el que  $S$  está en posición convexa.

Los autores demuestran las siguientes cotas:

- $w_c(n) = \Theta(n \log n)$ .
- $c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^2 \frac{\log \log n}{\log n}$ , para  $c_1, c_2 > 0$ .
- $i_c(n) = n$ .
- $n \leq i(n) \leq Cn^{3/2}$  para  $C > 0$ .
- $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \min\left(n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2}\right)$ .
- $5\lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \min\left(n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{n}\right)$ .

Ahora bien, como los conjuntos independientes de la gráfica  $D(S)$  son thrackles, es posible definir el anti-thickness geométrico usando la gráfica  $D(S)$  como sigue:

**Definición 8.** *Anti-thickness geométrico de una gráfica.*

$$At_g(n) = \min\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}.$$

De manera análoga si los puntos de  $S$  están en posición convexa definimos el anti-thickness convexo:

**Definición 9.** *Anti-thickness convexo de una gráfica.*

$$At_c(n) = \chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa, } |S| = n.$$

Como ya mencionamos antes, el anti-thickness convexo de la gráfica completa de  $n$  vértices es equivalente a  $d_c(n)$ . En otras palabras, sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa:

$$\begin{aligned} At_c(n) &= d_c(n) \\ \Rightarrow \chi(D(S)) &= \max\{\chi(D(S))\} \end{aligned}$$

Pero como solamente existe un solo dibujo cuando  $S$  está en posición convexa, entonces:

$$\text{máx}\{\chi(D(S))\} = \chi(D(S)).$$

A pesar de que en el trabajo de Araujo et al. (2005) se busca el número cromático de la gráfica  $D(S)$  y con ello, como mencionamos antes, se busca el anti-thickness de una gráfica geométrica asociada a  $S$ , es importante notar que la definición  $d(n)$  no es equivalente a la de anti-thickness. Dada una gráfica  $G$ : en  $d(n)$  se busca el máximo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de  $G$  mientras que en el anti-thickness se busca el mínimo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de  $G$ .

Los autores de Dujmovic & Wood (2017) presentan resultados respecto a el anti-thickness para familias específicas de gráficas como árboles, gráficas outerplanar, y algunos dibujos como 2-tracks, books, k-queues, entre otros.

En su trabajo definen en anti-thickness como sigue:

**Definición 10.** *Anti-thickness de una gráfica.* Sea  $G$  una gráfica el anti-thickness  $At(G)$  de  $G$  es el mínimo entero  $k$  para el cual existe una partición de  $E(G)$  de tamaño  $k$  en la que cada elemento de la partición induce una gráfica thrackable.

Además dan una relación entre el thickness y anti-thickness de cualquier gráfica. Concretamente los autores prueban la siguiente cota para toda gráfica con anti-thickness  $k$  y thickness  $t$ :

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

Acerca del anti-thickness de gráficas completas en el mismo artículo prueban que

$$\frac{n}{3} \leq At(K_n) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente  $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ .

Respecto al anti-thickness geométrico, en los siguientes párrafos describimos cómo los autores de Fabila-Monroy et al. (2018a) encuentran el anti-thickness geométrico exacto para gráficas cuyo conjunto de vértices está en posición convexa.

Los autores prueban que cuando los vértices de la gráfica geométrica están en posición convexa dos thrackles máximos siempre comparten al menos una arista. Por lo anterior la unión de  $k$  thrackles máximos tiene a lo sumo  $kn - \binom{k}{2}$  aristas. Entonces, como una gráfica completa de  $n$  vértices tiene  $\binom{n}{2}$  aristas la resolución de la siguiente desigualdad otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness convexo.

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}.$$

Esta cota es:

$$At_c(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica  $D(S)$ . Puesto que como explicamos anteriormente este problema es equivalente a encontrar el número cromático de la gráfica. En el artículo logran la coloración trazando caminos en una estructura conocida como poliominó Fabila-Monroy et al. (2018b) en la que los vértices de  $D(S)$  son las filas y las columnas de dicha estructura. En dicho trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en  $D(S)$  y por lo tanto representa un thrackle en  $K_n$ . Los autores concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el poliominó, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness convexo tiene exactamente el siguiente valor:

$$At_c(n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

A continuación hablamos del trabajo de Fabila-Monroy et al. (2017) en donde encuentran el anti-thickness geométrico de una familia de conjuntos conocidos como doble cadena convexa. Una doble cadena convexa es la configuración de puntos conformada por una  $k$ -cup y una  $l$ -cap. Una  $k$ -cup es una cadena de  $k$  puntos en posición convexa donde la parte superior de su *cierre convexo*<sup>1</sup> está delimitado por un solo segmento. Una  $l$ -cap es una cadena de  $l$  puntos en posición convexa donde la parte inferior de su cierre convexo está delimitado por un solo segmento. La doble cadena convexa  $C_{k,l}$  tiene las siguientes propiedades:

---

<sup>1</sup>El cierre convexo de un conjunto de puntos es el polígono con área más pequeña que contenga a todos los puntos del conjunto.

- Para  $l \geq k$  la doble cadena convexa es la unión una  $k$ -cup  $U$  y una  $l$ -cap  $L$ .
- Cada punto de  $L$  está por debajo de cada segmento de recta definido por dos puntos de  $U$ .
- Cada punto de  $U$  está por arriba de cada segmento de recta definido por dos puntos de  $L$ .

La figura 3.4 muestra un ejemplo de una doble cadena convexa.



Figura 3.4: Una doble cadena convexa con 5 vértices en su  $k$ -cup y 5 vértices en su  $l$ -cap.

El resultado al que se llega en ese trabajo es el siguiente: el anti-thickness geométrico de la gráfica completa inducida por una doble cadena convexa con  $k$  puntos en la cadena convexa superior y  $l$  puntos en la cadena convexa inferior,  $K_{l,k}$ , es:

$$At_g(K_{l,k}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Dujmovic & Wood (2017) mencionan que encontrar el anti-thickness geométrico de gráficas completas en posición general es un problema abierto. En esta tesis abordamos este problema para  $n \leq 10$ .

Hasta ahora las mejores cotas conocidas para el anti-thickness geométrico son :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (3.1)$$

La cota superior se sigue del caso convexo y la cota inferior se sigue del hecho de que una gráfica con  $n$  vértices con anti-thickness geométrico  $k$  tiene a lo

sumo  $kn$  aristas. Discutimos estas ideas con más detalle en la sección 4.1 del capítulo 4.

Los trabajos mencionados en este capítulo muestran cómo el problema original del thickness está relacionado con problema del anti-thickness. Mostramos de qué manera un problema de descomposición de gráficas geométricas equivale a un problema de coloración de gráficas. Los artículos más recientes tratan al anti-thickness como un problema de coloración. En este trabajo no construimos la gráfica  $D(S)$  y no coloreamos ninguna gráfica, uestro enfoque es geométrico y computacional.

Es importante notar que en el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018a) las descomposiciones de la gráfica completa están conformadas por thrackles máximos. Esta es una de las ideas que usamos en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.





# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Cota inferior del anti-thickness geométrico de $K_n$

El principal resultado de este trabajo es que encontramos el valor exacto del anti-thickness geométrico para la gráfica completa de hasta diez vértices en posición general. Obtuvimos dicho valor mejorando la cota inferior (3.1) y usando la cota superior actual mencionadas en el capítulo 3. Empezamos explicando el proceso para encontrar la cota inferior.

Un conjunto de  $n$  puntos en el plano induce una gráfica completa con  $n$  vértices a la que denotamos como  $K_n$ . Como es completa  $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$ . Cuando se quiere encontrar una descomposición de tamaño mínimo en thrackles una idea intuitiva es buscar que los thrackles tengan el mayor número posible de aristas. El siguiente teorema es útil para nosotros ya que establece el número máximo de aristas que puede tener un thrackle geométrico.

**Teorema 4.1.1.** (Pach (2013b)) Toda gráfica geométrica de  $n$  vértices en la que no existen dos aristas disjuntas tiene a lo más  $n$  aristas. Esto se cumple para toda  $n > 2$ .

Omitimos la demostración del teorema anterior ya que las ideas de la demostración no son retomadas en este trabajo. El teorema es importante para nosotros ya que indica el número máximo de aristas posibles para un thrackle.

Como mencionamos en el capítulo de antecedentes, un thrackle de  $n$  vértices con exactamente  $n$  aristas es un thrackle máximo. Por definición, toda

$n$	$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$
3	1
4	2
5	2
6	3
7	3
8	4
9	4
10	5

Tabla 4.1: Valor de la cota inferior del anti-thickness geométrico usando la cota trivial.

descomposición de la gráfica completa cubre sus aristas. Si suponemos que existen  $k$  thrackles máximos en la descomposición, entonces la siguiente desigualdad expresa el número de thrackles máximos necesarios para cubrir las  $\binom{n}{2}$  aristas de la gráfica completa:

$$kn \geq \binom{n}{2}.$$

Como los thrackles de la descomposición son geométricos, si buscamos la  $k$  más pequeña para la cual se cumple la desigualdad anterior entonces  $k$  es el anti-thickness geométrico de la gráfica completa. Resolviendo para  $k$  tenemos que al menos  $k \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$  thrackles máximos son necesarios para dar una descomposición de  $K_n$ . En otras palabras

$$At_g(K_n) \geq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil. \quad (4.1)$$

La tabla 4.1 ilustra el valor de la cota inferior del anti-thickness geométrico dada por (4.1) para  $n \leq 10$ . Esta cota es la más inmediata ya que usa el hecho de que cada thrackle máximo tiene a lo sumo tantas aristas como vértices. También es la cota actual para el anti-thickness geométrico (Dujmovic & Wood (2017)).

En el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018a) encuentran que, dados dos thrackles máximos en posición convexa, estos comparten una arista, y que esto se cumple para cada par de thrackles de la descomposición. En este trabajo verificamos que este resultado también es válido para conjuntos de hasta

#### 4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE $K_N$ 43

diez puntos en posición general. Usando los tipos de orden de los conjuntos con hasta diez puntos inducimos la gráfica completa, luego buscamos, para cada uno de los tipos de orden, todos los thrackles máximos y finalmente comparamos dichos thrackles a pares y encontramos que:

- Cada par de thrackles máximos tienen intersección no vacía en aristas, para todo tipo de orden con al menos dos thrackles máximos.
- Existen tipos de orden con solo un thrackle máximo.
- Existen tipos de orden en los que no hay thrackles máximos.

Para buscar los thrackles máximos usamos el algoritmo X descrito en la sección Y. Para comparar los thrackles a pares utilizamos el algoritmo XX descrito también en la sección Y. Describimos los algoritmos usados en otra sección para no romper con el flujo matemático de esta sección. El número de los tipos de orden para los cuales existe solamente un thrackle máximo está en el apéndice XX, la información también puede ser descargada de la siguiente liga: HTTPXX. El número de los tipos de orden para los cuales no existe un thrackle máximo está en la siguiente liga: HTTPXX.

Gracias a estos resultados podemos derivar el siguiente lema.

**Lema 4.1.2.** Sea  $S$  un conjunto de puntos en posición general y sean  $T_1$  y  $T_2$  thrackles máximos en  $K_n(S)$  con  $|V(T_1)| \leq 10$  y  $|V(T_2)| \leq 10$ .  $T_1$  y  $T_2$  tienen al menos una arista en común.

*Demostración.* Para cada tipo de orden con hasta diez puntos, generamos todos los thrackles máximos inducidos. Usando este conjunto verificamos que para cada pareja la intersección en aristas es no vacía  $\square$

Esto implica que para  $n \leq 10$  no es posible encontrar una descomposición en thrackles máximos de tamaño  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ , ya que los thrackles máximos no son disjuntos a pares y esto infringe las condiciones de una descomposición. Esto significa que una descomposición por thrackles solo podría contener un thrackle máximo. Sin embargo, dada una colección de thrackles máximos, cuya unión induce a  $K_n$ , es posible encontrar una colección de thrackles, no necesariamente máximos, que son disjuntos en aristas y contar cuántas aristas es posible cubrir con dicha colección. Describimos este proceso en el siguiente lema:

**Lema 4.1.3.** Sea  $\mathcal{C} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$  una colección de thrackles máximos de  $K_n$  con  $|E(T_i) \cap E(T_j)| = 1$ . Existe una colección  $\mathcal{D}$  de  $K_n$  inducida por  $\mathcal{C}$  donde para cada par de thrackles en  $\mathcal{D}$  su intersección en aristas es vacía y cuyo número de aristas cubiertas es:

$$\sum_{i=(n-m)+1}^n i$$

.

*Demostración.* Sea  $T'_i$ , con  $1 \leq i \leq m$  un thrackle inducido por el siguiente conjunto de aristas:

$$\{E(T_i) - \bigcup_{k=1}^{i-1} E(T_i) \cap E(T_k)\}$$

es decir  $T'_i$  es el thrackle que tiene todas las aristas de  $T_i$  a excepción de aquellas que  $T_i$  comparte con el resto de los thrackles en la colección.

Sea  $\mathcal{D} = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_m\}$ , por construcción, la intersección en aristas de cualesquiera dos thrackles de  $\mathcal{D}$  es vacía.

Nótese que si una arista  $e$  aparece en dos thrackles de  $\mathcal{C}$  entonces, en  $\mathcal{D}$ ,  $e$  aparecerá únicamente en el thrackle con menor etiqueta. De hecho  $T'_1$  tiene  $n$  aristas,  $T'_2$  tiene  $n - 1$  aristas,  $T'_3$  tiene  $n - 2$  aristas y, en general,  $T'_i$  tiene  $n - i + 1$  aristas. Como  $\mathcal{D}$  tiene  $m$  thrackles el número de aristas cubiertas por  $\mathcal{D}$  es

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + (n - m) + (n - m + 1)$$

Podemos escribir esta suma como :

$$\sum_{i=(n-m)+1}^n i$$

□

Es importante notar que este es el número más grande de aristas cubiertas por una colección de thrackles disjuntos en aristas inducida por una colección de thrackles máximos, esto es debido a que en el lema 4.1.2 consideramos que la intersección en aristas de dos thrackles máximos es de tamaño 1. No es

#### 4.1. COTA INFERIOR DEL ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO DE $K_N$ 45

$n$	$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$	$\sum_{i=(n-\lceil \frac{n-1}{2} \rceil)+1}^n i$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	2	9	10
6	3	15	15
7	3	18	21
8	4	26	28
9	4	30	36
10	5	40	45

Tabla 4.2: Mostramos cuántas aristas son cubiertas con una colección de  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos disjuntos en aristas. Se rellenan los casos en los que la colección no cubre todas las aristas.

difícil observar que si la intersección es más grande entonces el número de aristas cubiertas por la colección inducida es menor.

Con los lemas anteriores es posible probar que la cota inferior del anti-thickness geométrico de  $K_n$  no es justa para toda  $n$ . El siguiente teorema establece esta afirmación.

**Teorema 4.1.4.** Sea  $\mathcal{D} = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}\}$  una colección thrackles disjuntos en aristas inducida por una colección de  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos.  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos no son suficientes para inducir una colección que cubra las aristas de  $K_n$  para toda  $3 \leq n \leq 10$ .

*Demostración.* Para cada  $3 \leq n \leq 10$  aplicamos el resultado del lema 4.1.3 y encontramos que para  $n = \{5, 7, 8, 9, 10\}$  no es posible cubrir las aristas de  $K_n$  con una colección de  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles disjuntos en aristas.  $\square$

En la tabla 4.2 mostramos los casos para los que la cota inferior del anti-thickness geométrico no es justa usando el lema 4.1.3. Es importante notar que este resultado es válido solamente cuando el dibujo de  $K_n$  tiene al menos  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos.

Como resultado del teorema 4.1.4 tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 4.1.4.1.** Para  $n = 5, 7, 8, 9, 10$  no existe una descomposición de  $K_n$  formada por  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  thrackles máximos.

$n$	$k$	$\sum_{i=(n-k)+1}^n i$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	3	12	10
6	3	15	15
7	4	22	21
8	5	30	28
9	6	39	36
10	6	45	45

Tabla 4.3: Usando la cota del teorema 4.1.5 para el número de thrackles máximos necesarios para inducir una descomposición es posible cubrir, para toda  $n \leq 10$ , las aristas de  $K_n$ .

Gracias al lema 4.1.3 y al teorema 4.1.4 podemos dar el valor exacto del número de thrackles máximos necesarios para inducir una descomposición por thrackles de  $K_n$  con  $3 \leq n \leq 10$ .

**Teorema 4.1.5.** Si  $\mathcal{D}$  es una colección de thrackles disjuntos en aristas inducida por una colección de  $k$  thrackles máximos entonces :

$$k = \left\{ \begin{array}{ll} \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, & \text{para } n \in \{3, 4, 6\} \\ \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1, & \text{para } n \in \{5, 7, 8, 10\} \\ \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2, & \text{para } n = 9 \end{array} \right\}$$

*Demostración.* La prueba consiste en evaluar el número de aristas cubiertas por  $k$  thrackles usando el resultado del lema 4.1.3 hasta encontrar  $k$  suficientemente grande para que la descomposición cubra las  $\binom{n}{2}$  aristas de  $K_n$ .  $\square$

Los resultados del teorema 4.1.5 se presentan en la tabla 4.3.

## 4.2. Descomposiciones por thrackles máximos.

En este capítulo reportaremos el pseudocódigo de algoritmos usados durante el desarrollo del proyecto así como los resultados que obtuvimos con dichos algoritmos. Asimismo presentamos la prueba de que un thrackle que no es máximo no siempre puede ser completado a uno máximo en posición general, mientras que en posición convexa sí es posible.

$n$	Anti-thickness convexo de $K_n$ ( $At_c(n)$ )
3	1
4	2
5	3
6	3
7	4
8	5
9	6
10	6

Tabla 4.4: Anti-thickness convexo para  $n \leq 10$  basado en el resultado de Fabila-Monroy et al. (2018a).

En el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018a) se encuentran descomposiciones de gráficas geométricas en posición convexa usando thrackles máximos que comparten aristas a pares. Usando esta idea y los datos de la tabla 4.4 decidimos buscar descomposiciones de  $K_n$  para  $n \leq 10$  en las que los thrackles son todos máximos y cuyo tamaño sea el mismo del anti-thickness convexo para  $K_n$ .

En resumen: para cada  $n$  tomamos las combinaciones de  $cat(n)$  thrackles máximos y verificamos si alguna de estas combinaciones es una descomposición de  $K_n$ . Este proceso lo repetimos para cada uno de los tipos de orden que hay para cada  $n$ . Encontramos que sí existen tipos de orden que no corresponden al de posición convexa que también alcanzan el anti-thickness convexo. Los resultados se muestran en la tabla 4.5.

Para los casos de  $n \in \{3, 4, \dots, 7\}$  no pudimos encontrar una descomposición que cumpliera con las características antes descritas, esto es porque existen pocos tipos de orden cuya unión de thrackles máximos cubran las aristas de la gráfica completa. Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo que primero evalúa cuáles son los tipos de orden que podrían tener una descomposición por thrackles máximos; se seleccionan aquellos que tengan suficientes thrackles máximos para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, en otras palabras que la unión de los thrackles máximos en determinado tipo de orden cubran las  $\binom{n}{2}$  aristas. Los pseudocódigos de los algoritmos usados se encuentra en el algoritmo 1 y el algoritmo 2.

Ejecutamos la implementación del algoritmo en el cluster: para  $n = 8$  el resultado es obtenido en menos de un segundo mientras que para  $n = 9$

$n$	Tipo de Orden	$k_n$
8	12	5
8	54	5
9	12	6
9	52	6
9	54	6
9	80	6
9	696	6
9	1080	6
9	1287	6
10	81	6
10	1328	6
10	2243	6

Tabla 4.5: Tipos de orden para los que existe al menos una descomposición en thrackles máximos de tamaño igual al anti-thickness del tipo de orden convexo.

---

**Algorithm 1** Pseudocódigo del algoritmo que encuentra descomposiciones por thrackles máximos para todos los tipos de orden de una  $n$  dada.

---

```

1: procedure MAXTHRACKLEDECOM( $n$ )
2:    $vectorOT \leftarrow valid\_thrackles()$ 
3:    $k \leftarrow convexAt(n)$ 
4:   for each  $ot \in vectorOT$  do
5:      $n_{thr} \leftarrow number\ of\ max\ thrackles\ on\ order\ type\ ot$ 
6:      $find\_all\_decomposition\_of\_size(n_{thr}, k)$ 

```

---



---

**Algorithm 2** Pseudocódigo del algoritmo que encuentra combinaciones de  $k$  thrackles máximos, si la combinación es una descomposición se visita.

---

```

1: procedure FIND-ALL-DECOMPOSITION-OF-SIZE( $n_{thr}, k$ )
2:   while There is a combination  $c$  of size  $k$  from  $\{0, 1, \dots, n_{thr}\}$  do
3:     if  $c$  is a decomposition then
4:       visit  $c$ 

```

---

y  $n = 10$  se necesitaron al rededor de 1 día y 6 días respectivamente. Las descomposiciones encontradas pueden verse con más detalle en el apéndice



### 4.3. ANTI-THICKNESS GEOMÉTRICO EXACTO DE $K_N$ CON $3 \leq N \leq 9$ .49

XXXXX.

En el desarrollo del trabajo nos preguntamos por qué existen otros tipos de orden diferente del convexo que tienen el mismo anti-thickness. Algo en lo que pensamos fue en analizar de alguna manera la estructura de los thrackles en dichos tipos de orden y por ello calculamos, para las descomposiciones obtenidas mediante el método anteriormente descrito, el número de cruce de cada uno de los thrackles de la descomposición. Se observa que en la mayoría de los casos la mitad de los thrackles de las descomposiciones tienen el número de cruce mínimo para  $n$  vértices y la otra mitad es más cercano al mayor número de cruce para  $n$  vértices. Estos resultados pueden estudiarse con más detalle en el apéndice XXXXXX.

### 4.3. Anti-thickness geométrico exacto de $K_n$ con $3 \leq n \leq 9$ .

Dado que la cota superior está dada por el anti-thickness convexo decidimos tratar de ajustar la cota inferior ya que creemos que el anti-thickness geométrico es igual al anti-thickness convexo. Un enfoque para ajustar la cota inferior es obtener el anti-thickness de cada dibujo de  $K_n$ , esto es, obtener el anti-thickness de cada tipo de orden para  $K_n$  y seleccionar el menor de todos. Sin embargo, el algoritmo exhaustivo para encontrar el anti-thickness tarda al rededor de 7 horas para un solo tipo de orden cuando  $n = 8$ , si para  $n = 8$  hay 3315 tipos de orden requeriríamos cerca de 960 días para acabar dicha tarea.

Por esta razón decidimos analizar la estructura de las posibles descomposiciones; como  $K_n$  tiene  $\binom{n}{2}$  aristas y los thrackles de la descomposición deben cubrirlas todas podemos buscar particiones de enteros de la forma  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = \binom{n}{2}$ .

A manera de ejemplo, mostraremos como se ajusta la cota inferior del anti-thickness geométrico para  $K_5$ . En  $K_5$  existen 10 aristas. Las siguientes

son particiones del entero 10:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$
$6 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 2 + 1 + 1 + 1$
$4 + 3 + 1 + 1 + 1$	$4 + 2 + 2 + 1 + 1$
$3 + 3 + 2 + 1 + 1$	$3 + 2 + 2 + 2 + 1$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$7 + 1 + 1 + 1$
$6 + 2 + 1 + 1$	$5 + 3 + 1 + 1$
$5 + 2 + 2 + 1$	$4 + 4 + 1 + 1$
$4 + 3 + 2 + 1$	$4 + 2 + 2 + 2$
$3 + 3 + 3 + 1$	$3 + 3 + 2 + 2$
$8 + 1 + 1$	$7 + 2 + 1$
$6 + 3 + 1$	$6 + 2 + 2$
$5 + 4 + 1$	$5 + 3 + 2$
$4 + 4 + 2$	$4 + 3 + 3$
$9 + 1$	$8 + 2$
$7 + 3$	$6 + 4$
$5 + 5$	

Ahora bien, algunas de estas particiones pueden ser usadas como guía para encontrar una descomposición en thrackles para  $K_5$ . Si tomamos, por ejemplo, la partición  $5 + 4 + 1$  estaríamos buscando una descomposición por 3 thrackles: uno de tamaño 5, uno de tamaño 4 y otro de tamaño 1. Es importante notar que como las particiones de un entero  $k$  suman exactamente  $k$ , los thrackles de la descomposición tienen que ser disjuntos en aristas cuando los tamaños corresponden a los enteros de la partición de  $k$ . La partición  $5 + 4 + 1$  podría ser posible de encontrar, sin embargo, podemos deshacernos de ciertas particiones que estamos seguros jamás encontraremos como son aquellas particiones que tienen un entero mayor a 5 puesto que para un conjunto de 5 vértices el thrackle geométrico más grande tiene 5 aristas, esto también se cumple para todo  $n$ . Desaparecerían entonces particiones como  $7 + 2 + 1$  o  $9 + 1$  por mencionar algunas.

Nuestro conjunto de particiones posibles se ve ahora de la siguiente ma-

nera:

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1	5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1	3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1
3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1	2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1
5 + 2 + 1 + 1 + 1	4 + 3 + 1 + 1 + 1
4 + 2 + 2 + 1 + 1	3 + 3 + 2 + 1 + 1
3 + 2 + 2 + 2 + 1	2 + 2 + 2 + 2 + 2
5 + 3 + 1 + 1	5 + 2 + 2 + 1
4 + 3 + 2 + 1	4 + 4 + 1 + 1
3 + 3 + 3 + 1	4 + 2 + 2 + 2
5 + 4 + 1	3 + 3 + 2 + 2
4 + 4 + 2	5 + 3 + 2
5 + 5	4 + 3 + 3

Sin embargo, como buscamos ajustar la cota inferior del anti-thickness no nos interesa encontrar descomposiciones cuyo tamaño sea mayor a la cota superior del anti-thickness dada por  $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$ , en el caso de  $n = 5$ , evitaremos buscar descomposiciones con un tamaño mayor a 3. Dejando así las siguientes particiones disponibles:

$$\begin{array}{cc}
 5 + 4 + 1 & 4 + 4 + 2 \\
 4 + 3 + 3 & 5 + 3 + 2 \\
 5 + 5 &
 \end{array}$$

Finalmente, vamos a remover las particiones cuyo tamaño sea igual al anti-thickness convexo de  $K_5$ , esto porque sabemos que en efecto la posición convexa otorga descomposiciones de ese tamaño. Esto nos deja con una única partición posible :

$$5 + 5$$

Esto significa que debemos averiguar si existe una descomposición de  $K_5$  por dos thrackles de tamaño 5, en este caso dos thrackles máximos. No obstante, al buscar las thrackles máximos para todos los tipos de orden de  $K_5$  encontramos que no existen dos thrackles máximos que sean disjuntos en aristas, por esto no es posible dar una descomposición de  $K_5$  en dos thrackles máximos. Y luego, el anti-thickness de  $K_5$  es mayor a 2. Como la cota superior

del anti-thickness de  $K_5$  es 3 podemos decir que el anti-thickness geométrico de  $K_5$  es exactamente 3.

De esta manera podemos acotar el anti-thickness geométrico de  $K_n$ : examinar particiones del entero  $\binom{n}{2}$  con las siguientes condiciones:

- La longitud de la partición es menor que el anti-thickness convexo de  $K_n$ .
- Solo existe una ocurrencia del entero  $n$  en la partición.

Siguiendo las condiciones anteriores buscamos las particiones válidas para  $K_n$  con  $n \in [3, 9]$ . Encontramos que para  $n \in [3, 7]$  no existen particiones que cumplan las condiciones, por lo que podemos decir que el anti-thickness geométrico de  $K_n$  para  $n \in [3, 7]$  es igual al anti-thickness convexo.

Para  $K_8$  encontramos las siguientes particiones válidas:

$$8 + 7 + 7 + 6 \quad 7 + 7 + 7 + 7$$

No fue posible encontrar una descomposición en thrackles usando alguna de estas particiones, por lo que podemos decir que  $K_8$  tiene anti-thickness geométrico mayor a 4 y luego el anti-thickness geométrico de  $K_8$  es exactamente 5.

Por otro lado para ajustar la cota inferior del anti-thickness de  $K_9$ , tenemos las siguientes particiones válidas:

$$\begin{array}{ll} 9 + 8 + 8 + 8 + 3 & 9 + 8 + 8 + 7 + 4 \\ 9 + 8 + 8 + 6 + 5 & 9 + 8 + 7 + 7 + 5 \\ 9 + 8 + 7 + 6 + 6 & 9 + 7 + 7 + 7 + 6 \\ 8 + 8 + 8 + 8 + 4 & 8 + 8 + 8 + 7 + 5 \\ 8 + 8 + 8 + 6 + 6 & 8 + 8 + 7 + 7 + 6 \\ 8 + 7 + 7 + 7 + 7 & \end{array}$$

Para cada una de las particiones se diseñó un algoritmo que evalúa todos los thrackles de tamaño 9, 8, 7 y 6. Los resultados fueron los siguientes:

- $9 + 8 + 8 + 8 + 3$  - Probado con  $9+8+8$ .
- $9 + 8 + 8 + 7 + 4$  - Probado con  $9+8+8$ .
- $9 + 8 + 8 + 6 + 5$  - Probado con  $9+8+8$ . 150000ms

- $9 + 8 + 7 + 7 + 5$  - Probado con  $9+8+7+6+6$
- $9 + 8 + 7 + 6 + 6$  - Probado con  $9+8+7+6+6$ . 981709 ms.
- $9 + 7 + 7 + 7 + 6$  - Probado con  $9+7+7+7+6$ .  $2.11354e+06$  ms.
- $8 + 8 + 8 + 8 + 4$  - Probado con  $8+8+8+8$ . 300888 ms.
- $8 + 8 + 8 + 7 + 5$  - Probado con  $8+8+8+6+6$ .
- $8 + 8 + 8 + 6 + 6$  - Probado con  $8+8+8+6+6$ . 569735 ms.
- $8 + 8 + 7 + 7 + 6$  - Probado con  $8+8+7+7+6$ .  $6.39485e+06$  - 1 Hora, 46 minutos.
- $8 + 7 + 7 + 7 + 7$  - Probado con  $8+7+7+7+7$ .  $1.23716e+08$  - 34 Horas, 21 minutos.

En la mayoría de los casos no fue necesario examinar toda la partición, por ejemplo para la partición  $9 + 8 + 8 + 8 + 3$ , encontramos que no hay 3 thrackles, para ningún tipo de orden diferente del convexo, donde uno sea de tamaño 9 y los otros dos de tamaño 8 que sean disjuntos en aristas y por esta razón no es necesario seguir examinando la partición a fondo.

Como para ninguna partición fue posible encontrar una descomposición en thrackles podemos decir que el anti-thickness geométrico de  $K_9$  es mayor a 5. Y como la cota superior del anti-thickness geométrico es 6 decimos que el anti-thickness de  $K_9$  es exactamente 6.



## Capítulo 5

### Conclusiones y trabajo futuro





# Bibliografía

- Aichholzer, O., Aurenhammer, F., & Krasser, H. (2002). Enumerating order types for small point sets with applications. *Order*, 19(3), 265–281.
- Araujo, G., Dumitrescu, A., Hurtado, F., Noy, M., & Urrutia, J. (2005). On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, 32(1), 59–69.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2008). *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, 1 ed.
- Dillencourt, M. B., Eppstein, D., & Hirschberg, D. S. (2004). Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, (pp. 39–51). World Scientific.
- Dujmovic, V., & Wood, D. R. (2017). Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, [abs/1708.04773](https://arxiv.org/abs/1708.04773).
- Fabila-Monroy, R., Hidalgo-Toscano, C., Leaños, J., & Lomelí-Haro, M. (2017). The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*.
- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018a). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*.
- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018b). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*, (p. 6).
- Fulek, R., & Pach, J. (2011). A computational approach to conway’s thrackle conjecture. *Computational Geometry*, 44(6-7), 345–355.

- Hurtado, F. (2009). Edge colouring geometric complete graphs. [http://www.openproblemgarden.org/op/edge\\_colouring\\_geometric\\_complete\\_graphs](http://www.openproblemgarden.org/op/edge_colouring_geometric_complete_graphs).
- Lara, D., & Rubio-Montiel, C. (2019). On crossing families of complete geometric graphs. *Acta Mathematica Hungarica*, 157(2), 301–311.
- Pach, J. (2013a). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (pp. 465–484). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.  
URL [https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17)
- Pach, J. (2013b). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (p. 471). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.  
URL [https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17)
- Pach, J., & Sterling, E. (2011). Conway’s conjecture for monotone thrackles. *The American Mathematical Monthly*, 118(6), 544–548.  
URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.118.06.544>
- Schaefer, M. (2018). *Crossing numbers of graphs*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press.