Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year

Abstract

Resumen

Dedicación

Agradecimientos

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Gráfica

2.2. Gráfica geométrica

2.3. Thrackles

2.4. Tipo de Orden

2.5. Anti-thickness y anti-thickness geométrico

Capítulo 3

Estado del arte

En este capítulo hablaremos de un concepto que históricamente fue definido antes del anti-thickness y de cómo se relacionan. Mencionamos algunos resultados acerca de dicho concepto. Explicaremos de qué manera el número cromático de una gráfica puede otorgar una descomposición de una gráfica geométrica basándonos en trabajos en los que se busca obtener una descomposición de una gráfica geométrica.

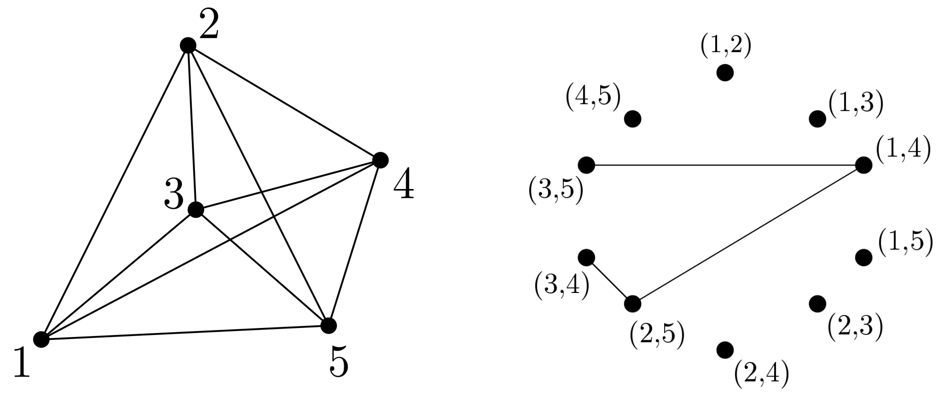
Un concepto que está estrechamente relacionado con el de anti-thickness es el de thickness que esta definido como sigue:

Definición 1. *Thickness.* El thickness de una gráfica G, denotado como $\theta(G)$, es la mínima k tal que existe una partición de las aristas de G, cuyo tamaño es k y cada elemento induce una gráfica planar.

Este concepto también puede ser aplicado a gráficas que están encajadas en el plano, en cuyo caso estaremos hablando del thickess geométrico, definido a continuación:

Definición 2. *Thickness geométrico.* El thickness geométrico de una gráfica G, denotado como $\bar{\theta}(G)$, es la mínima k tal que existe un dibujo geométrico G de G el cuál tiene una partición de sus aristas, cuyo tamaño es k y cada elemento es una gráfica plana.

A través de este capítulo nos referimos a la gráfica completa de n vértices como K_n ya que los trabajos citados utilizan gráficas completas y además es también nuestro objeto de estudio.



(a) Un dibujo geométrico de K_5 cuyo conjunto de vértices es $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) La gráfica $E_{pp}(S)$.

Figura 3.1: Una instancia de K_5 y su respectiva gráfica de cruce $E_{pp}(S)$.

Respecto a este parámetro Dillencourt et al. (2004) demuestran que el thickness geométrico está acotado por:

$$\left\lceil n/5.646 + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

En el mismo artículo encuentran el valor exacto del thicknes geométrico de K_n con $n \leq 12$ así como para K_{15} y K_{16}. También estudian el thickness geométrico para gráficas completas bipartitas $K_{a,b}$ y demuestran la siguiente cota:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{min(a, b)}{2} \right\rceil$$

A continuación citaremos dos trabajos asociados al anti-thickness cuyo núcleo se basa en obtener el número cromático de una gráfica cuyos vértices y aristas son abstraidas de una gráfica geométrica definida sobre un conjunto de puntos en el plano. Empezaremos por definir la gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ de un conjunto de puntos S en posición general. Consideremos que existe un dibujo geométrico de K_n cuyo conjunto de vértices es S.

Definición 3. *Gráfica de cruce.* La gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ de un conjunto de puntos S en el plano, es la gráfica cuyo conjunto de vértices está compuesto por todos los pares de puntos de S. Existe una arista entre dos vértices de $E_{pp}(S)$ si las aristas correspondientes se cruzan propiamente en K_n.

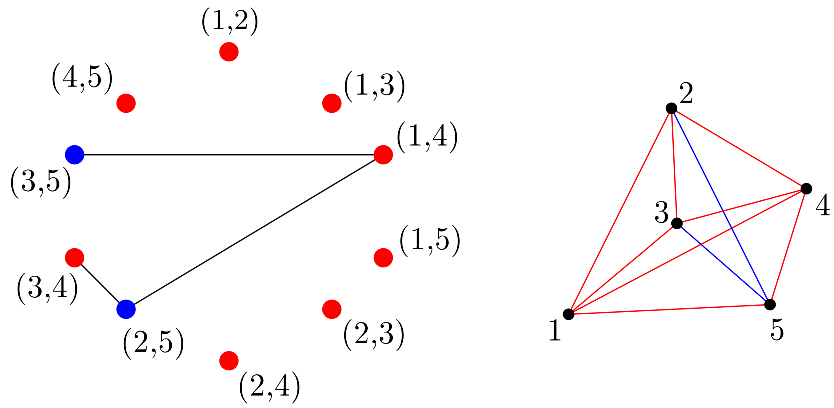


Figura 3.2: De izquierda a derecha: Una coloración propia de $E_{pp}(S)$ con dos clases cromáticas; Una descomposición de un dibujo de K_5 en dos gráficas planas cuyas aristas corresponden a cada una de las clases cromáticas de la coloración de $E_{pp}(S)$.

En la figura 3.1 observamos un ejemplo de la gráfica de cruce $E_{pp}(S)$. Podemos notar que dado que en el dibujo de K_5 existen 3 cruces, la gráfica $E_{pp}(S)$ tiene 3 aristas.

Si analizamos ahora los conjuntos independientes de $E_{pp}(S)$ podemos verificar que las aristas correspondientes en el dibujo de K_n son en efecto gráficas planas. Si ahora asignamos un color a cada conjunto independiente, tenemos ahora una clase cromática por cada conjunto independiente y si minimizamos el número de clases cromáticas habremos encontrado una coloración propia de $E_{pp}(S)$ y por consiguiente una descomposición en gráficas planas de un dibujo de K_n cuyo tamaño es mínimo, en otras palabras obtenemos el thickness de un dibujo en particular de K_n. La figura 3.2 ilustra este concepto con un dibujo de K_5.

De esta manera encontrar el número cromático de la gráfica $E_{pp}(S)$ implica encontrar el thickness geométrico de K_n. Lo que nos permite replantear el thickness geométrico de un dibujo de la siguiente manera:

Definición 4. *Thickness geométrico de un dibujo de una gráfica.* El thickness geométrico $th_g(G)$ de un dibujo geométrico de G es el número cromático $\chi(E_{pp}(S))$ de la gráfica $E_{pp}(S)$ donde S es el conjunto de vértices de K_n.

Y luego, siguiendo la definición de Dillencourt et al. (2004) redefinimos el thickness geométrico de una gráfica completa de n vértices como el thickness geométrico más pequeño de de todos los dibujos posibles de la gráfica. A este número le llamaremos también $epp(n)$ y lo definimos formalmente como:

Definición 5. *Thickness geométrico de una gráfica.* Considerese $K_n = (S, E)$ la gráfica completa cuyo conjunto de vértices es S.

$$epp(n) = \text{mín}\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general }, |S| = n\}$$

De la misma manera que definimos la gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ podemos definir otras gráficas si cambiamos la condición bajo la cual existen aristas entre vértices de $E_{pp}(S)$. En este sentido, en el trabajo de Araujo et al. (2005), se definen varias gráficas que se listan en seguida. Para todas existe una gráfica geométrica completa K_n cuyo conjunto de vértices es S.

- $W(S)$ la gráfica en la que existe una arista entre sus vértices cuando las aristas correspondientes en K_n no se cruzan propiamente.
- $I(S)$ es la gráfica en la que existe una arista entre sus vértices cuando las aristas correspondientes en K_n se cruzan propiamente o son adyacentes.
- $D(S)$ es la gráfica en la que existe una arista entre sus vértices cuando las aristas correspondientes en K_n no se cruzan propiamente ni son adyacentes.

Es fácil darse cuenta que la condición de existencia de aristas de $W(S)$ es opuesta o complementaria a la condición establecida en $E_{pp}(S)$ y viceversa. De la misma forma, las condiciones de $I(S)$ y $D(S)$ son opuestas entre sí.

En el aporte de Araujo et al. (2005) buscan el número cromático de cada una de las gráficas listadas anteriormente por lo que creemos sensato decir a qué estructuras geométricas en el dibujo de K_n equivale una clase cromática de cada alternativa. Para $W(S)$ una clase cromática equivale a un emparejamiento de cruce (*crossing matching*), para $I(S)$ equivale a un emparejamiento sin cruce (*non-crossing matching*) y para $D(S)$ equivale a un thrackle.

El hecho de que la coloración de $D(S)$ otorgue una descomposición en thrackles es la principal razón por la cual el trabajo es de importancia para nosotros. Sin embargo, en Araujo et al. (2005) se busca el máximo número cromático para cada dibujo posible de K_n para cada una de las tres gráficas listadas anteriormente. Concretamente ellos definen los siguiente:

$$w(n) = \text{máx}\{\chi(W(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general }, |S| = n\}$$
$$i(n) = \text{máx}\{\chi(I(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general }, |S| = n\}$$
$$d(n) = \text{máx}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general }, |S| = n\}$$

Para cada uno también definen el caso en el que $S \subset \mathbb{R}^2$ está en posición convexa como $w_c(n)$, $i_c(n)$ y $d_c(n)$ y demuestran las siguientes cotas:

- $w_c(n) = \Theta(n \log n)$.
- $c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^2 \frac{\log\log n}{\log n}$, para $c_1, c_2 > 0$.
- $i_c(n) = n$.
- $n \leq i(n) \leq Cn^{3/2}$ para $C > 0$.
- $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \text{mín}\left(n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2}\right)$.
- $5\lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \text{mín}\left(n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log\log n \rfloor}{n}\right)$.

Es importante notar que la definición $d(n)$ no es equivalente a la de anti-thickness ya que en este último se busca el mínimo número de thrackles en una descomposición. Entonces podemos dar una definición del anti-thickness geométrico basándonos en la gráfica $D(S)$, considerando que existe una gráfica completa $K_n = (S, E)$, como sigue a continuación:

Definición 6. *Anti-thickness geométrico de una gráfica.*

$$gat(n) = \text{mín}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general }, |S| = n\}$$

Y de manera análoga definimos el caso en el que los puntos de S están en posición convexa como anti-thickness convexo.

Definición 7. *Anti-thickness convexo de una gráfica.*

$$cat(n) = \text{mín}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa }, |S| = n\}$$

Por otro lado, debido a que cuando K_n es dibujado en el plano en posición convexa los dibujos posibles no presentan diferencias combinatorias se tiene que el anti-thickness convexo de la gráfica completa de n vértices es equivalente a la definición de $d_c(n)$ de Araujo et al. (2005), dicho de otra forma:

$$d_c(n) = cat(n)$$

Los autores de Dujmovic & Wood (2017) presentan resultados del anti-thickness para familias específicas de gráficas, por ejemplo árboles, 2-tracks, books, gráficas outerplanar, k-queues, entre otros haciendo observaciones de resultados anteriores. Además se prueba la relación entre thickness y anti-thickness, concretamente prueban la siguiente cota para toda gráfica con anti-thickness k y thickness t :

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$$

Acerca del anti-thickness (teórico) de gráficas completas, en Dujmovic & Wood (2017) se prueba que es al menos $\frac{n}{3}$ y a lo más $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Sin embargo ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

El principal resultado para posición convexa es presentado en Fabila-Monroy et al. (2018). Aquí se prueba que cuando los puntos están en posición convexa dos thrackles máximos comparten al menos una arista y por lo tanto la unión de k thrackles máximos tiene a lo más $kn - \binom{k}{2}$ aristas. Luego, como una gráfica completa de n vértices tiene $\binom{n}{2}$ aristas la resolución de la desigualdad

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}$$

otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness geométrico convexo que es

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica de disyunción $D(S)$. La coloración es lograda consiguiendo trazar caminos en una estructura conocida como polyomino en la que los vértices de $D(S)$ son las filas y las columnas de dicha estructura. En este trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en $D(S)$ y por lo tanto un thrackle. Concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el polyomino, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness geométrico convexo ($cat(n)$) es:

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Es importante notar que el anti-thickness geométrico convexo es acotado examinando el número mínimo y máximo de aristas aportadas por una colección de thrackles máximos, dicho de otra manera se basa en descomponer la gráfica completa convexa en thrackles máximos. Esta idea fue retomada en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.

Con respecto a puntos que no están estrictamente en posición convexa Leaños y Lomelí Fabila-Monroy et al. (2017) examinan el número cromático de la gráfica de disyunción de una familia de puntos conocida como la doble cadena convexa; al igual que la posición convexa la doble cadena solamente tiene un dibujo en el plano. El resultado al que se llega en este artículo es que el anti-thickness de la doble cadena convexa con k puntos en la cadena convexa superior y $l \geq k$ puntos en la cadea convexa inferior es:

$$k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Como es mencionado en Dujmovic & Wood (2017), encontrar el anti-thickness de gráficas completas en posición general es un problema abierto y la mejor cota superior conocida es $n - \lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rfloor$ la cual se sigue del caso convexo y la mejor cota inferior conocida es solamente $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ que se sigue del hecho de que una gráfica de n vértices con anti-thickness geométrico k tiene a lo más kn aristas.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Descomposiciones por thrackles máximos.

Inspirado en el método usado por Fabila-Monroy et al. (2018) para posición convexa decidimos buscar para $n \leq 10$ descomposiciones de K_n en la que los thrackles sean todos maximos y se alcance el anti-thickness establecido por el tipo de orden en posición convexa. Para esto buscamos para cada tipo de orden de cada $n \leq 10$ todos los thrackles máximos y evaluamos cada combinación de tamaño k_n con k_n el anti-thickness convexo para conjuntos de tamaño n. Encontramos que sí existen tipos de orden que no corresponden al de posición convexa que también alcanzan el anti-thickness convexo. Los resultados se muestran en la tabla 4.1.

Para los casos de $n \in [3, 7]$ no existen tipos de orden que puedan ser descompuestos de esta manera. Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo que primero evalúa cuáles son los tipos de orden que podrían tener una descomposición por thrackles máximos; se seleccionan aquellos que tengan suficientes thrackles máximos para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, en otras palabras que la unión de los thrackles máximos en determinado tipo de orden cubran las $\binom{n}{2}$ aristas.

El algoritmo fue ejecutado en el cluster, para $n = 8$ el resultado es obtenido en menos de un segundo mientras que para $n = 9$ y $n = 10$ se necesitaron al rededor de 1 día y 6 días respectivamente. Las decomposiciones encontradas pueden verse con más detalle en el apéndice XXXXX.

También se calculó, para las descomposiciones obtenidas mediante este método, el número de cruce de cada uno de los thrackles de la descomposición.

n	Tipo de Orden	k_n
8	12	5
8	54	5
9	12	6
9	52	6
9	54	6
9	80	6
9	696	6
9	1080	6
9	1287	6
10	81	6
10	1328	6
10	2243	6

Tabla 4.1: Tipos de orden para los que existe al menos una descomposición en thrackles máximos de tamaño igual al anti-thickness del tipo de orden convexo.

Se observa que en la mayoría de los casos la mitad de los thrackles de las descomposiciones tienen el número de cruce mínimo para n vértices y la otra mitad es más cercano al mayor número de cruce para n vértices.

4.2. Ajustando el anti-thickness geométrico de K_n con $n \in [3, 9]$.

Dado que la cota superior está dada por el anti-thickness convexo decidimos tratar de ajustar la cota inferior ya que creemos que el anti-thickness geométrico es igual al anti-thickness convexo. Un enfoque para ajustar la cota inferior es obtener el anti-thickness de cada dibujo de K_n, esto es, obtener el anti-thickness de cada tipo de orden para K_n y seleccionar el menor de todos. Sin embargo, el algoritmo exhaustivo para encontrar el anti-thickness tarda al rededor de 7 horas para un solo tipo de orden cuando $n = 8$, si para $n = 8$ hay 3315 tipos de orden requeririamos cerca de 960 días para acabar dicha tarea.

Por esta razón decidimos analizar la estructura de las posibles descomposiciones; como K_n tiene $\binom{n}{2}$ aristas y los thrackles de la descomposición deben cubrirlas todas podemos buscar particiones de enteros de la forma $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \binom{n}{2}$.

A manera de ejemplo, mostraremos como se ajusta la cota inferior del anti-thickness geométrico para K_5. En K_5 existen 10 aristas. Las siguientes son particiones del entero 10:

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$2+1+1+1+1+1+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1+1+1$	$2+2+1+1+1+1+1+1$
$4+1+1+1+1+1+1$	$3+2+1+1+1+1+1$
$2+2+2+1+1+1+1$	$5+1+1+1+1+1$
$4+2+1+1+1+1$	$3+3+1+1+1+1$
$3+2+2+1+1+1$	$2+2+2+2+1+1$
$6+1+1+1+1$	$5+2+1+1+1$
$4+3+1+1+1$	$4+2+2+1+1$
$3+3+2+1+1$	$3+2+2+2+1$
$2+2+2+2+2$	$7+1+1+1$
$6+2+1+1$	$5+3+1+1$
$5+2+2+1$	$4+4+1+1$
$4+3+2+1$	$4+2+2+2$
$3+3+3+1$	$3+3+2+2$
$8+1+1$	$7+2+1$
$6+3+1$	$6+2+2$
$5+4+1$	$5+3+2$
$4+4+2$	$4+3+3$
$9+1$	$8+2$
$7+3$	$6+4$
$5+5$	

Ahora bien, algunas de estas particiones pueden ser usadas como guía para encontrar una descomposición en thrackles para K_5. Si tomamos, por ejemplo, la partición $5 + 4 + 1$ estaríamos buscando una descomposición por 3 thrackles: uno de tamaño 5, uno de tamaño 4 y otro de tamaño 1. Es importante notar que como las particiones de un entero k suman exactamente k, los thrackles de la descomposición tienen que ser disjuntos en aristas cuando los tamaños corresponden a los enteros de la partición de k. La partición $5 + 4 + 1$ podría ser posible de encontrar, sin embargo, podemos deshacernos de ciertas particiones que estamos seguros jamás encontraremos como son aquellas particiones que tienen un entero mayor a 5 puesto que para un conjunto de 5 vértices el thrackle geométrico más grande tiene 5 aristas, esto también se cumple para todo n. Desaparecerían entonces particiones como $7+2+1$ o $9+1$ por mencionar algunas.

Nuestro conjunto de particiones posibles se ve ahora de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 & 2+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
3+1+1+1+1+1+1+1 & 2+2+1+1+1+1+1+1 \\
4+1+1+1+1+1+1 & 3+2+1+1+1+1+1 \\
2+2+2+1+1+1+1 & 5+1+1+1+1+1 \\
4+2+1+1+1+1 & 3+3+1+1+1+1 \\
3+2+2+1+1+1 & 2+2+2+2+1+1 \\
5+2+1+1+1 & 4+3+1+1+1 \\
4+2+2+1+1 & 3+3+2+1+1 \\
3+2+2+2+1 & 2+2+2+2+2 \\
5+3+1+1 & 5+2+2+1 \\
4+3+2+1 & 4+4+1+1 \\
3+3+3+1 & 4+2+2+2 \\
5+4+1 & 3+3+2+2 \\
4+4+2 & 5+3+2 \\
5+5 & 4+3+3
\end{array}$$

Sin embargo, como buscamos ajustar la cota inferior del anti-thickness no nos interesa encontrar descomposiciones cuyo tamaño sea mayor a la cota superior del anti-thickness dada por $n - \lfloor \sqrt{2n+1/4} - 1/2 \rfloor$, en el caso de $n = 5$, evitaremos buscar descomposiciones con un tamaño mayor a 3. Dejando así las siguientes particiones disponibles:

$$\begin{array}{ll}
5+4+1 & 4+4+2 \\
4+3+3 & 5+3+2 \\
5+5 &
\end{array}$$

Finalmente, vamos a remover las particiones cuyo tamaño sea igual al anti-thickness convexo de K_5, esto porque sabemos que en efecto la posición convexa otorga descomposiciones de ese tamaño. Esto nos deja con una única partición posible :

$$5+5$$

Esto significa que debemos averiguar si existe una descomposición de K_5 por dos thrackles de tamaño 5, en este caso dos thrackles máximos. No obstante, al buscar las thrackles máximos para todos los tipos de orden de K_5 encontramos que no existen dos thrackles máximos que sean disjuntos en aristas, por esto no es posible dar una descomposición de K_5 en dos thrackles máximos. Y luego, el anti-thickness de K_5 es mayor a 2. Como la cota superior del anti-thickness de K_5 es 3 podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_5 es exactamente 3.

De esta manera podemos acotar el anti-thickness geométrico de K_n: examinar particiones del entero $\binom{n}{2}$ con las siguientes condiciones:

- La longitud de la partición es menor que el anti-thickness convexo de K_n.
- Solo existe una ocurrencia del entero n en la partición.

Siguiendo las condiciones anteriores buscamos las particiones válidas para K_n con $n \in [3,9]$. Encontramos que para $n \in [3,7]$ no existen particiones que cumplan las condiciones, por lo que podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_n para $n \in [3,7]$ es igual al anti-thickness convexo.

Para K_8 encontramos las siguientes particiones válidas:

$$8+7+7+6 \quad 7+7+7+7$$

No fue posible encontrar una descomposición en thrackles usando alguna de estas particiones, por lo que podemos decir que K_8 tiene anti-thickness geométrico mayor a 4 y luego el anti-thickness geométrico de K_8 es exactamente 5.

Por otro lado para ajustar la cota inferior del anti-thickness de K_9, tenemos las siguientes particiones válidas:

$$\begin{array}{ll}
9+8+8+8+3 & 9+8+8+7+4 \\
9+8+8+6+5 & 9+8+7+7+5 \\
9+8+7+6+6 & 9+7+7+7+6 \\
8+8+8+8+4 & 8+8+8+7+5 \\
8+8+8+6+6 & 8+8+7+7+6 \\
8+7+7+7+7 &
\end{array}$$

Para cada una de las particiones se diseñó un algoritmo que evalúa todos los thrackles de tamaño 9, 8, 7 y 6. Los resultados fueron los siguientes:

- 9 + 8 + 8 + 8 + 3 - Probado con 9+8+8.

- $9 + 8 + 8 + 7 + 4$ - Probado con 9+8+8.
- $9 + 8 + 8 + 6 + 5$ - Probado con 9+8+8. 150000ms
- $9 + 8 + 7 + 7 + 5$ - Probado con 9+8+7+6+6
- $9 + 8 + 7 + 6 + 6$ - Probado con 9+8+7+6+6. 981709 ms.
- $9 + 7 + 7 + 7 + 6$ - Probado con 9+7+7+7+6. 2.11354e+06 ms.
- $8 + 8 + 8 + 8 + 4$ - Probado con 8+8+8+8. 300888 ms.
- $8 + 8 + 8 + 7 + 5$ - Probado con 8+8+8+6+6.
- $8 + 8 + 8 + 6 + 6$ - Probado con 8+8+8+6+6. 569735 ms.
- $8 + 8 + 7 + 7 + 6$ - Probado con 8+8+7+7+6. 6.39485e+06 - 1 Hora, 46 minutos.
- $8 + 7 + 7 + 7 + 7$ - Probado con 8+7+7+7+7. 1.23716e+08 - 34 Horas, 21 minutos.

En la mayoría de los casos no fue necesario examinar toda la partición, por ejemplo para la partición $9 + 8 + 8 + 8 + 3$, encontramos que no hay 3 thrackles, para ningún tipo de orden diferente del convexo, donde uno sea de tamaño 9 y los otros dos de tamaño 8 que sean disjuntos en aristas y por esta razón no es necesario seguir examinando la partición a fondo.

Como para ninguna partición fue posible encontrar una descomposición en thrackles podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_9 es mayor a 5. Y como la cota superior del anti-thickness geométrico es 6 decimos que el anti-thickness de K_9 es exactamente 6.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Bibliografía

Araujo, G., Dumitrescu, A., Hurtado, F., Noy, M., & Urrutia, J. (2005). On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, *32*(1), 59–69.

Dillencourt, M. B., Eppstein, D., & Hirschberg, D. S. (2004). Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, (pp. 39–51). World Scientific.

Dujmovic, V., & Wood, D. R. (2017). Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, *abs/1708.04773*.

Fabila-Monroy, R., Hidalgo-Toscano, C., Leaños, J., & Lomelí-Haro, M. (2017). The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*.

Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*.