Avance de trabajo de Tesis.

David Gustavo Merinos Sosa

6 de abril de 2019

Datos de la tesis.

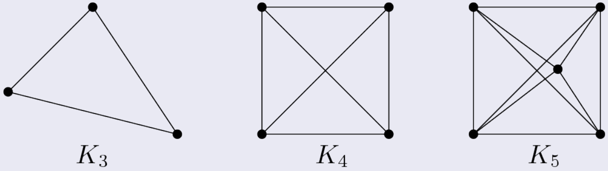
- Nombre: Descomposición de gráficas geométricas completas en thrackles: un enfoque computacional para conjuntos con hasta diez puntos.
- Directora: Dra. María Dolores Lara Cuevas
- Área: Geometría combinatoria, geometría computacional.

Algunas definiciones

Gráfica completa de n vértices. (K_n)

Una gráfica es completa cuando existe una arista entre cada par de vértices. La gráfica completa de n vértices tiene $\binom{n}{2}$ aristas.

Figura: De izquierda a derecha se muestran gráficas completas de 3, 4 y 5 vértices respectivamente

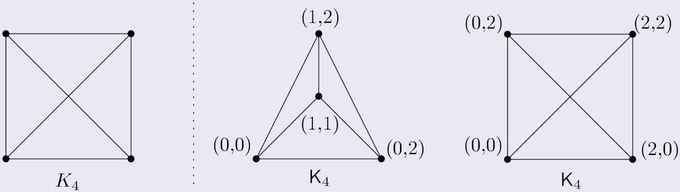


Algunas definiciones

Gráfica geométrica

Es la representación de una gráfica en el plano, donde cada vértice es representado por un punto en el plano y cada arista es representada por un segmento de recta que une dos puntos.

Figura: K_4 y gráficas geométricas de K_4 distintos.



Algunas definiciones

Descomposición de una gráfica.

Una descomposición de una gráfica G es una colección $D = \{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ de subgráficas de G tal que se cumplan:

1. Ninguna subgráfica G_i tiene vértices aislados.
2. Cada arista de G pertenece a exactamente un elemento de D.

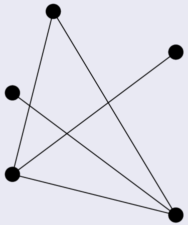
Algunas definiciones

Thrackle.

Un thrackle es una gráfica geométrica en la que cada par de aristas se intersecta.

Un thrackle en un conjunto de *n* vértices es máximo si tiene *n* aristas.

Figura: Ejemplo de un thrackle de 5 vértices.



Algunas definiciones

Anti-thickness de una gráfica geométrica

El anti-thickness de una gráfica geométrica G es la k más pequeña tal que se puede dar una descomposición de las aristas de G en k thrackles.

Anti-thickness geométrico

El anti-thickness geométrico de una gráfica G, $\mathrm{at_g}(G)$ es la k más pequeña tal que G tiene un gráfica geométrica con anti-thickness k.

El anti-thickness geométrico de K_9 es 6.

Es equivalente decir...

Existe una gráfica geométrica de K_9 que puede ser descompuesta en 6 thrackles y además no existe ningúna gráfica geométrica de K_9 que pueda ser descompuesta con menos de 6 thrackles.

El anti-thickness geométrico de K_9 es 6.

Mejorando las cotas.

De la literatura sabemos que $\mathrm{at_g}(K_n) \in [\frac{n-1}{2}, n - \lfloor\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\rfloor]$

El anti-thickness geométrico de K_9 es 6.

Mejorando las cotas.

$$\mathrm{at_g}(K_n) \in [\frac{n-1}{2}, n - \lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rfloor]$$

Para $n = 9$:

$$\mathrm{at_g}(K_9) \in [\frac{9-1}{2}, 9 - \lfloor \sqrt{2(9) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rfloor]$$

$$\mathrm{at_g}(K_9) \in [4, 6]$$

El anti-thickness geométrico de K_9 es 6.

Buscando una descomposición de tamaño 5.

Es necesario analizar todas las descomposiciones de tamaño 5 o menos para 36 aristas.

- $9+8+8+8+3$
- $9+8+8+7+4$
- $9+8+8+6+5$
- $9+8+7+7+5$
- $9+8+7+6+6$
- $9+7+7+7+6$
- $8+8+8+8+4$
- $8+8+8+7+5$
- $8+8+8+6+6$
- $8+8+7+7+6$
- $8+7+7+7+7$

El anti-thickness geométrico de K_9 es 6

Analizando una descomposición.

Al analizar una descomposición, por ejemplo: $9 + 7 + 7 + 7 + 6$, necesitamos verificar todos los thrackles de tamaño 9, todos los thrackles de tamaño 7 y todos los thrackles de tamaño 6.

El anti-thickness geométrico de K_9 es 6

Analizando una descomposición.

Para hacerlo, usamos un algoritmo de back-tracking que agrega thrackles a la descomposición cuando las aristas son totalmente disjuntas. Esto es, agrega un thrackle de tamaño 9 y uno de 7 si no comparten aristas, repetimos esto para cada elemento de la descomposición $9 + 7 + 7 + 7 + 6$.

El anti-thickness geométrico de K_9 es 6

Descomposición válida

Una descomposición de la forma $9 + 7 + 7 + 7 + 6$, es válida si existen 5 thrackles, uno de tamaño 9, tres de tamaño 7 y uno de tamaño 6 que no compartan aristas a pares.

El anti-thickness geométrico de K_9 es mayor a 5

Resultados

Después de analizar todas las posibles descomposiciones, no fue posible encontrar una que fuera válida. Esto puede traducirse en que ninguna de las descomposiciones en thrackles cubría las 36 aristas necesarias, lo que a su vez significa que se necesitan más de 5 thrackles para cubrir la gráfica completa.

$$\mathrm{at_g}(K_9) > 5$$

$$\mathrm{at_g}(K_9) \in (5, 6]$$

$$\mathrm{at_g}(K_9) = 6$$

Fin,¿preguntas?

Analizar todos los dibujos geométricos de K_n

Hay un número infinito de dibujos geométricos para cualquier conjunto de puntos en el plano. Para analizarlos todos usamos el tipo de orden que es una forma de clasificar los dibujos geométricos de acuerdo a sus propiedades combinatorias.

n	No. tipos de orden
3	1
4	2
5	3
6	16
7	135
8	3315
9	158817
10	14309547

Tiempos de ejecución

Para cada uno de las decomposiciones se almacenaron los tiempos de ejecución.

- 9 + 8 + 8 + 8 + 3 -
- 9 + 8 + 8 + 7 + 4 -
- 9 + 8 + 8 + 6 + 5 -
- 9 + 8 + 7 + 7 + 5 - 16 minutos.
- 9 + 8 + 7 + 6 + 6 - 16 minutos.
- 9 + 7 + 7 + 7 + 6 - 35 minutos.
- 8 + 8 + 8 + 8 + 4 - 5 minutos.
- 8 + 8 + 8 + 7 + 5 - 9 minutos.
- 8 + 8 + 8 + 6 + 6 - 9 minutos.
- 8 + 8 + 7 + 7 + 6 - 1 Hora, 46 minutos.
- 8 + 7 + 7 + 7 + 7 - 34 Horas, 21 minutos.