# Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year

# Abstract

# Resumen

# Dedicación

# Agradecimientos

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

# Capítulo 2

# Antecedentes

## 2.1. Gráfica

## 2.2. Gráfica geométrica

## 2.3. Thrackles

## 2.4. Tipo de Orden

## 2.5. Anti-thickness y anti-thickness geométrico

# Capítulo 3

# Estado del arte

Antes de hablar del anti-thickness y los resultados, es sensato hablar de otro concepto llamado **thickness** pues su definición está estrechamente relacionada con el anti-thickness. En el artículo de Eppstein y otros [2] se recupera la definición de thickness teórico y thickness geométrico, además proporciona cotas para éste último. Podemos definir el thickness de una gráfica en términos del índice cromático de una gráfica y mantenerlo coherente con la definición de Eppstein: $\theta(G)$ : Mínimo $k$ tal que existe una partición de las aristas de $G$, de tamaño $k$ en gráficas planares.

Por otro lado el thickness geométrico $\bar{\theta}(G)$: Mínimo $k$ tal que existe un dibujo geométrico $\mathsf{G}$ de $G$ cuyas aristas pueden ser particionadas en $k$ gráficas planas. Eppstein prueba que:

$$\bar{\theta}(G) \in [\left\lceil n/5.646 + 0.342 \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil]$$

y encuentra el valor exacto para $K_n$ con $n \leq 12$ y $n \in \{15, 16\}$. También estudia el anti-thickness geométrico para gráficas completas bipartitas y demuestra:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{min(a, b)}{2} \right\rceil$$

Es natural pensar que si una gráfica puede ser descompuesta en sub-gráficas donde no existe ningún cruce entre dos aristas, es quizás posible descomponer la gráfica en sub-gráficas donde siempre ocurran cruces entre dos aristas, es decir en thrackles; este concepto es conocido como el anti-thickness de una gráfica y analogo al caso del thickness también existe el anti-thickness geométrico.

Antes de examinar los resultados del anti-thickness, resulta interesante verificar el trabajo de Araujo y Urrutia [1]; aquí se define la gráfica de disyunción $D(S)$ de un conjunto $S$ de puntos en el plano, donde considerando todos los segmentos de recta entre pares de vértices de $S$ como los vértices de $D(S)$, existe una arista entre dos vértices si los dos segmentos de recta correspondientes se cruzan o comparten un vértice.

Si asignamos un color a cada vértice de $D(S)$ de tal manera que dos vértices adyacentes no compartan color y además minimizamos el número de colores usados, obtenemos el número cromático de $\chi(D(S))$. Es fácil ver que una clase cromática de $D(S)$ es un conjunto independiente y además un thrackle. Si ahora consideramos todos los posibles encajes de $S$ en el plano y para cada uno encontramos $\chi(D(S))$, tendremos una lista de enteros que representa el tamaño mínimo de la descomposición en thrackles de una gráfica completa cuyos vértices están dados por $S$ en el plano. Si de esta lista consideramos ahora el valor mínimo encontraremos el anti-thickness para la gráfica completa geométrica de $n$ vértices. Sin embargo, en este trabajo se considera el máximo valor de dicha lista; definiendo entonces :

$$d(n) = \text{máx}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbf{R}^2 \text{ en posición general }, |S| = n\}$$

De manera concreta, el trabajo presenta cotas para $d(n)$, y $d_c(n)$ que se define de manera similar pero con $S$ en posición convexa.

La diferencia entre $d(n)$ y el anti-thickness reside en que el último buscamos el mínimo de la lista de números cromáticos de $D(S)$, para ver más claramente la relación entre $d(n)$ y el anti-thickness podemos definir el anti-thickness geométrico de la gráfica completa de n vértices $at(n)$ como sigue :

$$at(n) = \text{mín}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbf{R}^2 \text{ en posición general }, |S| = n\}$$

Por otro lado, debido a que cuando $K_n$ es encajado en el plano en posición convexa los dibujos posibles no presentan diferencias combinatorias, se tiene que el anti-thickness geométrico convexo de la gráfica completa de $n$ vértices $(cat(n))$ :

$$d_c(n) = cat(n)$$

Como se mencionó anteriormente el anti-thickness está relacionado con la descomposición de una gráfica en sub-gráficas donde siempre ocurren cruces, podemos ver el anti-thickness como el lado opuesto del thickness. Dujmovic y Wood [3] presentan resultados del anti-thickness para familias específicas de gráficas, por ejemplo árboles, 2-tracks, books, gráficas outerplanar, k-queues, entre otros haciendo observaciones de resultados anteriores. Además se prueba la relación entre thickness y anti-thickness, concretamente prueban que para toda gráfica con anti-thickness $k$ y thickness $t$ :

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$$

Acerca del anti-thickness (teórico) de gráficas completas, en [3] se prueba que es al menos $\frac{n}{3}$ y a lo más $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Sin embargo ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

El principal resultado para posición convexa lo presenta Wood y Fabila [5]. Aquí se prueba que cuando los puntos están en posición convexa dos thrackles máximos comparten al menos una arista y por lo tanto la unión de $k$ thrackles máximos tiene a lo más $kn - \binom{k}{2}$ aristas. Luego, como una gráfica completa de $n$ vértices tiene $\binom{n}{2}$ aristas la resolución de la desigualdad

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}$$

otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness geométrico convexo que es

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica de disyunción $D(S)$. La coloración es lograda consiguiendo trazar caminos en una estructura conocida como polyomino en la que los vértices de $D(S)$ son las filas y las columnas de dicha estructura. En este trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en $D(S)$ y por lo tanto un thrackle. Concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el polyomino, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness geométrico convexo ($cat(n)$) es:

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Es importante notar que el anti-thickness geométrico convexo es acotado examinando el número mínimo y máximo de aristas aportadas por una colección de thrackles máximos, dicho de otra manera se basa en descomponer la gráfica completa convexa en thrackles máximos. Esta idea fue retomada en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.

Con respecto a puntos que no están estrictamente en posición convexa Leaños y Lomelí [4] examinan el número cromático de la gráfica de disyunción de una familia de puntos conocida como la doble cadena convexa; al igual que la posición convexa la doble cadena solamente tiene un dibujo en el plano. El resultado al que se llega en este artículo es que el anti-thickness de la doble cadena convexa con $k$ puntos en la cadena convexa superior y $l \geq k$ puntos en la cadea convexa inferior es:

$$k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Como es mencionado en [3], encontrar el anti-thickness de gráficas completas en posición general es un problema abierto y la mejor cota superior conocida es $n - \lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rfloor$ la cual se sigue del caso convexo y la mejor cota inferior conocida es solamente $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ que se sigue del hecho de que una gráfica de $n$ vértices con anti-thickness geométrico $k$ tiene a lo más $kn$ aristas.

# Capítulo 4

# Resultados

## 4.1. Descomposiciones por thrackles máximos.

Inspirado en el método usado por [5] para posición convexa decidimos buscar para $n \leq 10$ descomposiciones de $K_n$ en la que los thrackles sean todos maximos y se alcance el anti-thickness establecido por el tipo de orden en posición convexa. Para esto buscamos para cada tipo de orden de cada $n \leq 10$ todos los thrackles máximos y evaluamos cada combinación de tamaño $k_n$ con $k_n$ el anti-thickness convexo para conjuntos de tamaño $n$. Encontramos que sí existen tipos de orden que no corresponden al de posición convexa que también alcanzan el anti-thickness convexo. Los resultados se muestran en la tabla 4.1.

Para los casos de $n \in [3, 7]$ no existen tipos de orden que puedan ser descompuestos de esta manera. Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo que primero evalúa cuáles son los tipos de orden que podrían tener una descomposición por thrackles máximos; se seleccionan aquellos que tengan suficientes thrackles máximos para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, en otras palabras que la unión de los thrackles máximos en determinado tipo de orden cubran las $\binom{n}{2}$ aristas.

El algoritmo fue ejecutado en el cluster, para $n = 8$ el resultado es obtenido en menos de un segundo mientras que para $n = 9$ y $n = 10$ se necesitaron al rededor de 1 día y 6 días respectivamente. Las decomposiciones encontradas pueden verse con más detalle en el apéndice XXXXX.

También se calculó, para las descomposiciones obtenidas mediante este método, el número de cruce de cada uno de los thrackles de la descomposición.

| $n$ | Tipo de Orden | $k_n$ |
|---|---|---|
| 8 | 12 | 5 |
| 8 | 54 | 5 |
| 9 | 12 | 6 |
| 9 | 52 | 6 |
| 9 | 54 | 6 |
| 9 | 80 | 6 |
| 9 | 696 | 6 |
| 9 | 1080 | 6 |
| 9 | 1287 | 6 |
| 10 | 81 | 6 |
| 10 | 1328 | 6 |
| 10 | 2243 | 6 |

Tabla 4.1: Tipos de orden para los que existe al menos una descomposición en thrackles máximos de tamaño igual al anti-thickness del tipo de orden convexo.

Se observa que en la mayoría de los casos la mitad de los thrackles de las descomposiciones tienen el número de cruce mínimo para $n$ vértices y la otra mitad es más cercano al mayor número de cruce para $n$ vértices.

## 4.2. Ajustando la cota inferior para $K_n$ con $n \leq 9$

# Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

# Bibliografía


[1] Gabriela Araujo, Adrian Dumitrescu, Ferran Hurtado, Marc Noy, and Jorge Urrutia. On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, 32(1):59–69, 2005.

[2] Michael B Dillencourt, David Eppstein, and Daniel S Hirschberg. Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, pages 39–51. World Scientific, 2004.

[3] Vida Dujmovic and David R. Wood. Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, abs/1708.04773, 2017.

[4] Ruy Fabila-Monroy, Carlos Hidalgo-Toscano, Jesús Leaños, and Mario Lomelí-Haro. The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*, 2017.

[5] Ruy Fabila-Monroy, Jakob Jonsson, Pavel Valtr, and David R Wood. The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*, 2018.