

Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year

Abstract

Resumen

Dedicación

Agradecimientos

Índice general

1. Introducción	13
2. Antecedentes	15
2.1. Gráfica	15
2.2. Gráfica geométrica	16
2.3. Thrackles	16
2.4. Tipo de Orden	16
2.5. Anti-thickness y anti-thickness geométrico	16
3. Estado del arte	17
4. Resultados	25
4.1. Descomposiciones por thrackles máximos.	25
4.2. Anti-thickness geométrico exacto de K_n con $3 \leq n \leq 9$	28
5. Conclusiones y trabajo futuro	33

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo daremos las definiciones necesarias para el desarrollo del proyecto. Empezamos estableciendo conceptos relacionados con gráficas abstractas y después hablaremos de gráficas en el plano, explicamos el concepto de tipo de orden y cómo se utiliza en este trabajo. Finalmente hablaremos del anti-thickness abstracto y del anti-thickness geométrico.

La estructura más básica que se utiliza en nuestro trabajo son las gráficas abstractas a las que llamaremos solamente gráficas. La definición se sigue:

2.1. Gráfica

Una gráfica G está compuesta por un conjunto V no vacío de objetos a los que llamamos vértices y un conjunto E de parejas de elementos de V a los que llamamos aristas. Denotamos a la arista e compuesta por los vértices u y v como (u, v) . Para describir a la gráfica G compuesta por el conjunto V de vértices y el conjunto E de aristas escribimos $G = (V, E)$. Para referirnos al conjunto de vértices de G escribimos $V(G)$ y para referirnos al conjunto de aristas de G escribimos $E(G)$.

2.2. Gráfica geométrica

2.3. Thrackles

2.4. Tipo de Orden

2.5. Anti-thickness y anti-thickness geométrico

Capítulo 3

Estado del arte

En este capítulo hablaremos de un concepto que cronológicamente fue definido antes que el anti-thickness y de cómo se relacionan. Mencionamos algunos resultados acerca de dicho concepto. Explicaremos de qué manera el número cromático de una gráfica puede otorgar una descomposición de una gráfica geométrica basándonos en trabajos en los que se busca obtener una descomposición de una gráfica geométrica.

Un concepto que está estrechamente relacionado con el de anti-thickness es el de thickness, que se define como sigue:

Definición 1. Dillencourt et al. (2004) *Thickness*. Sea G una gráfica, el thickness $\theta(G)$ de G es la mínima k tal que existe una partición de $E(G)$ de tamaño k y en la que cada elemento de la partición induce una gráfica planar.

Este concepto también puede ser extendido a dibujos rectilíneos, en cuyo caso estaremos hablando del thickness geométrico, definido a continuación:

Definición 2. Dillencourt et al. (2004) *Thickness geométrico*. Sea G una gráfica, el anti-thickness $\bar{\theta}(G)$ de G es la mínima k para la cual existe un dibujo geométrico \mathbf{G} de G que tiene una partición de $E(\mathbf{G})$, de tamaño k y en la que cada elemento de la partición es una gráfica plana.

Respecto a este parámetro Dillencourt et al. (2004) demuestran que el thickness geométrico está acotado por:

$$\left\lceil \frac{n}{5.646} + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

En el mismo artículo encuentran el valor exacto del thicknes geométrico de cada gráfica completa con n vértices para $n \leq 12$ así como para K_{15} y K_{16} . Para el caso de $n = 15$ encuentran el thickness geométrico exacto probando que no existen un conjunto de tres triangulaciones del conjunto de puntos que cubran las $\binom{15}{2} = 105$ aristas. Para el caso de $n = 16$ el resultado es exacto usando las cotas dadas. También estudian el thickness geométrico para gráficas completas bipartitas y demuestran la siguiente cota:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a + 2b - 4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{\min(a,b)}{2} \right\rceil$$

A continuación discutimos dos trabajos que están relacionados con el anti-thickness. En ambos artículos los autores obtienen el número cromático de una gráfica cuyos vértices y aristas abstraen las relaciones de adyacencia de una gráfica geométrica. Empezaremos por definir una gráfica a la que llamaremos gráfica de cruce.

Sea S un conjunto de puntos en posición general con $|S| = n$ y sea $K_n(S)$ la gráfica completa asociada a S .

Definición 3. *Gráfica de cruce.* La gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ de S es la gráfica que tiene como conjunto de vértices a las aristas de $K_n(S)$ y dos vértices de $E_{pp}(S)$ son adyacentes las aristas correspondientes se cruzan propiamente en $K_n(S)$.

En la figura 3.1 aparece un ejemplo de la gráfica de cruce $E_{pp}(S)$. Podemos notar que dado que en el dibujo de K_5 existen 3 cruces, la gráfica $E_{pp}(S)$ tiene 3 aristas.

Los conjuntos independientes de $E_{pp}(S)$ corresponden a aristas de $K_n(S)$ que inducen gráficas planas. Una coloración propia de los vértices de $E_{pp}(S)$ corresponde a una descomposición de $K_n(S)$ en gráficas planas. La figura 3.2 ilustra esta relación.

De esta manera encontrar el número cromático $\chi(E_{pp}(S))$ de la gráfica $E_{pp}(S)$ es igual a encontrar el thickness geométrico de $K_n(S)$.

Y luego, siguiendo la definición de Dillencourt et al. (2004) redefinimos el thickness geométrico de la gráfica completa de n vértices K_n , como el thickness geométrico más pequeño de de todos los dibujos posibles de la gráfica. A este número le llamaremos $epp(n)$ y lo definimos formalmente como:

Definición 4. *Thickness geométrico de una gráfica.*

$$epp(n) = \min\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, } |S| = n\}$$

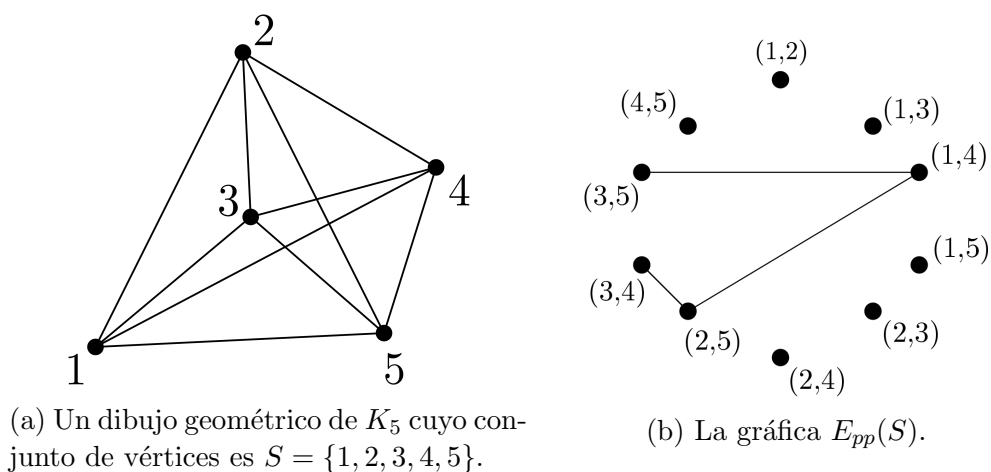


Figura 3.1: Una instancia de K_5 y su respectiva gráfica de cruce $E_{pp}(S)$.

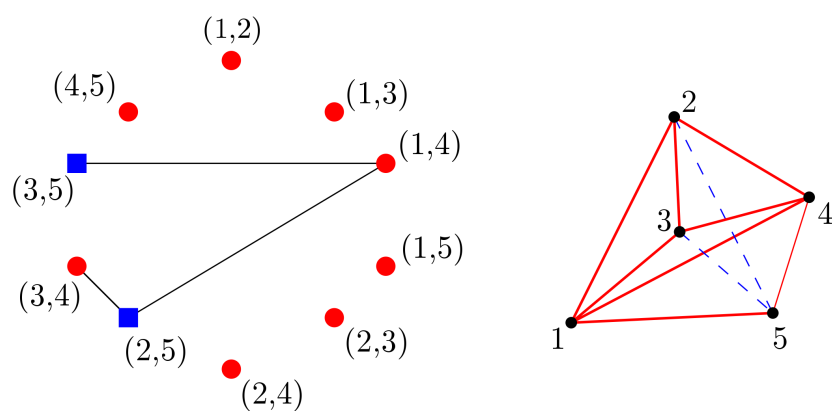


Figura 3.2: De izquierda a derecha: Una coloración propia de los vértices de $E_{pp}(S)$ con dos clases cromáticas. Una descomposición de un dibujo de K_5 en dos gráficas planas cuyas aristas corresponden a cada una de las clases cromáticas de la coloración de $E_{pp}(S)$.

De la misma manera que definimos la gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ podemos definir otras gráficas si cambiamos la condición bajo la cual existen aristas entre vértices de $E_{pp}(S)$. En este sentido, en el trabajo de Araujo et al. (2005), se definen varias gráficas que se listan en seguida. Para todas existe una gráfica geométrica completa K_n cuyo conjunto de vértices es S .

- $W(S)$ la gráfica en la que existe una arista entre sus vértices cuando las aristas correspondientes en K_n no se cruzan propiamente.
- $I(S)$ es la gráfica en la que existe una arista entre sus vértices cuando las aristas correspondientes en K_n se cruzan propiamente o son adyacentes.
- $D(S)$ es la gráfica en la que existe una arista entre sus vértices cuando las aristas correspondientes en K_n no se cruzan propiamente ni son adyacentes.

Es fácil darse cuenta que la condición de existencia de aristas de $W(S)$ es opuesta o complementaria a la condición establecida en $E_{pp}(S)$ y viceversa. De la misma forma, las condiciones de $I(S)$ y $D(S)$ son opuestas entre sí.

En el aporte de Araujo et al. (2005) buscan el número cromático de cada una de las gráficas listadas anteriormente por lo que creemos sensato decir a qué estructuras geométricas en el dibujo de K_n equivale una clase cromática de cada alternativa. Para $W(S)$ una clase cromática equivale a un emparejamiento de cruce (*crossing matching*), para $I(S)$ equivale a un emparejamiento sin cruce (*non-crossing matching*) y para $D(S)$ equivale a un thrackle.

El hecho de que la coloración de $D(S)$ otorgue una descomposición en thrackles es la principal razón por la cual el trabajo es de importancia para nosotros. Sin embargo, en Araujo et al. (2005) se busca el máximo número cromático para cada dibujo posible de K_n para cada una de las tres gráficas listadas anteriormente. Concretamente ellos definen los siguiente:

$$\begin{aligned} w(n) &= \max\{\chi(W(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\} \\ i(n) &= \max\{\chi(I(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\} \\ d(n) &= \max\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\} \end{aligned}$$

Para cada uno también definen el caso en el que $S \subset \mathbb{R}^2$ está en posición convexa como $w_c(n)$, $i_c(n)$ y $d_c(n)$ y demuestran las siguientes cotas:

- $w_c(n) = \Theta(n \log n)$.
- $c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^{2 \frac{\log \log n}{\log n}}$, para $c_1, c_2 > 0$.
- $i_c(n) = n$.
- $n \leq i(n) \leq C n^{3/2}$ para $C > 0$.
- $2 \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \min \left(n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2} \right)$.
- $5 \lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \min \left(n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{n} \right)$.

Es importante notar que la definición $d(n)$ no es equivalente a la de anti-thickness ya que en este último se busca el mínimo número de thrackles en una descomposición. Entonces podemos dar una definición del anti-thickness geométrico basándonos en la gráfica $D(S)$, considerando que existe una gráfica completa $K_n = (S, E)$, como sigue a continuación:

Definición 5. *Anti-thickness geométrico de una gráfica.*

$$gat(n) = \min \{ \chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n \}$$

Y de manera análoga definimos el caso en el que los puntos de S están en posición convexa como anti-thickness convexo.

Definición 6. *Anti-thickness convexo de una gráfica.*

$$cat(n) = \min \{ \chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa}, |S| = n \}$$

Por otro lado, debido a que cuando K_n es dibujado en el plano en posición convexa los dibujos posibles no presentan diferencias combinatorias se tiene que el anti-thickness convexo de la gráfica completa de n vértices es equivalente a la definición de $d_c(n)$ de Araujo et al. (2005), dicho de otra forma:

$$d_c(n) = cat(n)$$

Los autores de Dujmovic & Wood (2017) presentan resultados del anti-thickness para familias específicas de gráficas, por ejemplo árboles, 2-tracks, books, gráficas outerplanar, k-queues, entre otros haciendo observaciones de

resultados anteriores. Además se prueba la relación entre thickness y anti-thickness, concretamente prueban la siguiente cota para toda gráfica con anti-thickness k y thickness t :

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$$

Acerca del anti-thickness (teórico) de gráficas completas, en Dujmovic & Wood (2017) se prueba que es al menos $\frac{n}{3}$ y a lo más $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Sin embargo ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

El principal resultado para puntos en posición convexa es presentado en Fabila-Monroy et al. (2018). Aquí se prueba que cuando los puntos están en posición convexa dos thrackles máximos comparten al menos una arista y por lo tanto la unión de k thrackles máximos tiene a lo más $kn - \binom{k}{2}$ aristas. Luego, como una gráfica completa de n vértices tiene $\binom{n}{2}$ aristas la resolución de la desigualdad

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}$$

otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness convexo mostrado a continuación:

$$cat \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica $D(S)$. La coloración es lograda consiguiendo trazar caminos en una estructura conocida como polyomino en la que los vértices de $D(S)$ son las filas y las columnas de dicha estructura. En este trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en $D(S)$ y como se mencionó antes, representa un thrackle en K_n . Concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el polyomino, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness convexo tiene exactamente el siguiente valor:

$$cat(n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Con respecto a puntos que no están estrictamente en posición convexa, Fabila-Monroy et al. (2017) examinan el número cromático de la gráfica de disyunción de una familia de puntos conocida como la doble cadena convexa; al igual que la posición convexa la doble cadena solamente tiene un dibujo en

el plano. El resultado al que se llega en este artículo es que el anti-thickness geométrico de la doble cadena convexa con k puntos en la cadena convexa superior y $l \geq k$ puntos en la cadea convexa inferior es:

$$gat(K_{l,k}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Como es mencionado en Dujmovic & Wood (2017), encontrar el anti-thickness geométrico de gráficas completas en posición general es un problema abierto se tiene que las mejores cotas conocidas son :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq gat(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

La cota superior se sigue del caso convexo y la cota inferior se sigue del hecho de que una gráfica de n vértices con anti-thickness geométrico k tiene a lo más kn aristas.

Los trabajos mencionados en este capítulo muestran cómo el problema original del thickness da origen al problema del anti-thickness, más aún, explicamos el proceso por el cual un problema de descomposición de gráficas geométricas se convirtió a un problema de coloración de gráficas. Los autores más recientes tratan al anti-thickness como un problema de coloración. En este trabajo no construimos la gráfica $D(S)$ y no coloreamos ninguna gráfica. Nuestro enfoque es más geométrico y computacional.

Es importante notar que el anti-thickness convexo es acotado examinando el número mínimo y máximo de aristas aportadas por una colección de thrackles máximos, dicho de otra manera se basa en descomponer la gráfica completa convexa en thrackles máximos. Esta idea fue retomada en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Descomposiciones por thrackles máximos.

En este capítulo reportaremos el pseudocódigo de algoritmos usados durante el desarrollo del proyecto así como los resultados que obtuvimos con dichos algoritmos. Asimismo presentamos la prueba de que un thrackle que no es máximo no siempre puede ser completado a uno máximo en posición general, mientras que en posición convexa sí es posible.

En el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018) se encuentran descomposiciones de gráficas geométricas en posición convexa usando thrackles máximos que comparten aristas a pares. Usando esta idea y los datos de la tabla 4.1 decidimos buscar descomposiciones de K_n para $n \leq 10$ en las que los thrackles son todos máximos y cuyo tamaño sea el mismo del anti-thickness convexo para K_n .

En resumen: para cada n tomamos las combinaciones de $cat(n)$ thrackles máximos y verificamos si alguna de estas combinaciones es una descomposición de K_n . Este proceso lo repetimos para cada uno de los tipos de orden que hay para cada n . Encontramos que sí existen tipos de orden que no corresponden al de posición convexa que también alcanzan el anti-thickness convexo. Los resultados se muestran en la tabla 4.2.

Para los casos de $n \in \{3, 4, \dots, 7\}$ no pudimos encontrar una descomposición que cumpliera con las características antes descritas, esto es porque existen pocos tipos de orden cuya unión de thrackles máximos cubran las aristas de la gráfica completa. Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo que primero evalúa cuáles son los tipos de orden que podrían tener

n	Anti-thickness convexo de K_n ($cat(n)$)
3	1
4	2
5	3
6	3
7	4
8	5
9	6
10	6

Tabla 4.1: Anti-thickness convexo para $n \leq 10$ basado en el resultado de Fabila-Monroy et al. (2018).

una descomposición por thrackles máximos; se seleccionan aquellos que tengan suficientes thrackles máximos para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, en otras palabras que la unión de los thrackles máximos en determinado tipo de orden cubran las $\binom{n}{2}$ aristas. Los pseudocódigos de los algoritmos usados se encuentra en el algoritmo 1 y el algoritmo 2.

Algorithm 1 Pseudocódigo del algoritmo que encuentra descomposiciones por thrackles máximos para todos los tipos de orden de una n dada.

```

1: procedure MAXTHRACKLEDECOM( $n$ )
2:    $vectorOT \leftarrow valid\_thrackles()$ 
3:    $k \leftarrow convexAt(n)$ 
4:   for each  $ot \in vectorOT$  do
5:      $n_{thr} \leftarrow number\ of\ max\ thrackles\ on\ order\ type\ ot$ 
6:      $find\_all\_decomposition\_of\_size(n_{thr}, k)$ 

```

Algorithm 2 Pseudocódigo del algoritmo que encuentra combinaciones de k thrackles máximos, si la combinación es una descomposición se visita.

```

1: procedure FIND-ALL-DECOMPOSITION-OF-SIZE( $n_{thr}, k$ )
2:   while There is a combination  $c$  of size  $k$  from  $\{0, 1, \dots, n_{thr}\}$  do
3:     if  $c$  is a decomposition then
4:       visit  $c$ 

```

Ejecutamos la implementación del algoritmo en el cluster: para $n = 8$

n	Tipo de Orden	k_n
8	12	5
8	54	5
9	12	6
9	52	6
9	54	6
9	80	6
9	696	6
9	1080	6
9	1287	6
10	81	6
10	1328	6
10	2243	6

Tabla 4.2: Tipos de orden para los que existe al menos una descomposición en thrackles máximos de tamaño igual al anti-thickness del tipo de orden convexo.

el resultado es obtenido en menos de un segundo mientras que para $n = 9$ y $n = 10$ se necesitaron al rededor de 1 día y 6 días respectivamente. Las descomposiciones encontradas pueden verse con más detalle en el apéndice XXXXX.

En el desarrollo del trabajo nos preguntamos por qué existen otros tipos de orden diferente del convexo que tienen el mismo anti-thickness. Algo en lo que pensamos fue en analizar de alguna manera la estructura de los thrackles en dichos tipos de orden y por ello calculamos, para las descomposiciones obtenidas mediante el método anteriormente descrito, el número de cruce de cada uno de los thrackles de la descomposición. Se observa que en la mayoría de los casos la mitad de los thrackles de las descomposiciones tienen el número de cruce mínimo para n vértices y la otra mitad es más cercano al mayor número de cruce para n vértices. Estos resultados pueden estudiarse con más detalle en el apéndice XXXXXX.

4.2. Anti-thickness geométrico exacto de K_n con $3 \leq n \leq 9$.

Dado que la cota superior está dada por el anti-thickness convexo decidimos tratar de ajustar la cota inferior ya que creemos que el anti-thickness geométrico es igual al anti-thickness convexo. Un enfoque para ajustar la cota inferior es obtener el anti-thickness de cada dibujo de K_n , esto es, obtener el anti-thickness de cada tipo de orden para K_n y seleccionar el menor de todos. Sin embargo, el algoritmo exhaustivo para encontrar el anti-thickness tarda al rededor de 7 horas para un solo tipo de orden cuando $n = 8$, si para $n = 8$ hay 3315 tipos de orden requeriríamos cerca de 960 días para acabar dicha tarea.

Por esta razón decidimos analizar la estructura de las posibles descomposiciones; como K_n tiene $\binom{n}{2}$ aristas y los thrackles de la descomposición deben cubrirlas todas podemos buscar particiones de enteros de la forma $a_1 + a_2 + \dots + a_k = \binom{n}{2}$.

A manera de ejemplo, mostraremos como se ajusta la cota inferior del anti-thickness geométrico para K_5 . En K_5 existen 10 aristas. Las siguientes

son particiones del entero 10:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$
$6 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 2 + 1 + 1 + 1$
$4 + 3 + 1 + 1 + 1$	$4 + 2 + 2 + 1 + 1$
$3 + 3 + 2 + 1 + 1$	$3 + 2 + 2 + 2 + 1$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2$	$7 + 1 + 1 + 1$
$6 + 2 + 1 + 1$	$5 + 3 + 1 + 1$
$5 + 2 + 2 + 1$	$4 + 4 + 1 + 1$
$4 + 3 + 2 + 1$	$4 + 2 + 2 + 2$
$3 + 3 + 3 + 1$	$3 + 3 + 2 + 2$
$8 + 1 + 1$	$7 + 2 + 1$
$6 + 3 + 1$	$6 + 2 + 2$
$5 + 4 + 1$	$5 + 3 + 2$
$4 + 4 + 2$	$4 + 3 + 3$
$9 + 1$	$8 + 2$
$7 + 3$	$6 + 4$
$5 + 5$	

Ahora bien, algunas de estas particiones pueden ser usadas como guía para encontrar una descomposición en thrackles para K_5 . Si tomamos, por ejemplo, la partición $5 + 4 + 1$ estaríamos buscando una descomposición por 3 thrackles: uno de tamaño 5, uno de tamaño 4 y otro de tamaño 1. Es importante notar que como las particiones de un entero k suman exactamente k , los thrackles de la descomposición tienen que ser disjuntos en aristas cuando los tamaños corresponden a los enteros de la partición de k . La partición $5 + 4 + 1$ podría ser posible de encontrar, sin embargo, podemos deshacernos de ciertas particiones que estamos seguros jamás encontraremos como son aquellas particiones que tienen un entero mayor a 5 puesto que para un conjunto de 5 vértices el thrackle geométrico más grande tiene 5 aristas, esto también se cumple para todo n . Desaparecerían entonces particiones como $7 + 2 + 1$ o $9 + 1$ por mencionar algunas.

Nuestro conjunto de particiones posibles se ve ahora de la siguiente ma-

nera:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$	$3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
$3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$
$5 + 2 + 1 + 1 + 1$	$4 + 3 + 1 + 1 + 1$
$4 + 2 + 2 + 1 + 1$	$3 + 3 + 2 + 1 + 1$
$3 + 2 + 2 + 2 + 1$	$2 + 2 + 2 + 2 + 2$
$5 + 3 + 1 + 1$	$5 + 2 + 2 + 1$
$4 + 3 + 2 + 1$	$4 + 4 + 1 + 1$
$3 + 3 + 3 + 1$	$4 + 2 + 2 + 2$
$5 + 4 + 1$	$3 + 3 + 2 + 2$
$4 + 4 + 2$	$5 + 3 + 2$
$5 + 5$	$4 + 3 + 3$

Sin embargo, como buscamos ajustar la cota inferior del anti-thickness no nos interesa encontrar descomposiciones cuyo tamaño sea mayor a la cota superior del anti-thickness dada por $n - \lfloor \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \rfloor$, en el caso de $n = 5$, evitaremos buscar descomposiciones con un tamaño mayor a 3. Dejando así las siguientes particiones disponibles:

$$\begin{array}{l} 5 + 4 + 1 \quad 4 + 4 + 2 \\ 4 + 3 + 3 \quad 5 + 3 + 2 \\ 5 + 5 \end{array}$$

Finalmente, vamos a remover las particiones cuyo tamaño sea igual al anti-thickness convexo de K_5 , esto porque sabemos que en efecto la posición convexa otorga descomposiciones de ese tamaño. Esto nos deja con una única partición posible :

$$5 + 5$$

Esto significa que debemos averiguar si existe una descomposición de K_5 por dos thrackles de tamaño 5, en este caso dos thrackles máximos. No obstante, al buscar las thrackles máximos para todos los tipos de orden de K_5 encontramos que no existen dos thrackles máximos que sean disjuntos en aristas, por esto no es posible dar una descomposición de K_5 en dos thrackles máximos. Y luego, el anti-thickness de K_5 es mayor a 2. Como la cota superior

del anti-thickness de K_5 es 3 podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_5 es exactamente 3.

De esta manera podemos acotar el anti-thickness geométrico de K_n : examinar particiones del entero $\binom{n}{2}$ con las siguientes condiciones:

- La longitud de la partición es menor que el anti-thickness convexo de K_n .
- Solo existe una ocurrencia del entero n en la partición.

Siguiendo las condiciones anteriores buscamos las particiones válidas para K_n con $n \in [3, 9]$. Encontramos que para $n \in [3, 7]$ no existen particiones que cumplan las condiciones, por lo que podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_n para $n \in [3, 7]$ es igual al anti-thickness convexo.

Para K_8 encontramos las siguientes particiones válidas:

$$8 + 7 + 7 + 6 \quad 7 + 7 + 7 + 7$$

No fue posible encontrar una descomposición en thrackles usando alguna de estas particiones, por lo que podemos decir que K_8 tiene anti-thickness geométrico mayor a 4 y luego el anti-thickness geométrico de K_8 es exactamente 5.

Por otro lado para ajustar la cota inferior del anti-thickness de K_9 , tenemos las siguientes particiones válidas:

$$\begin{array}{ll} 9 + 8 + 8 + 8 + 3 & 9 + 8 + 8 + 7 + 4 \\ 9 + 8 + 8 + 6 + 5 & 9 + 8 + 7 + 7 + 5 \\ 9 + 8 + 7 + 6 + 6 & 9 + 7 + 7 + 7 + 6 \\ 8 + 8 + 8 + 8 + 4 & 8 + 8 + 8 + 7 + 5 \\ 8 + 8 + 8 + 6 + 6 & 8 + 8 + 7 + 7 + 6 \\ 8 + 7 + 7 + 7 + 7 & \end{array}$$

Para cada una de las particiones se diseñó un algoritmo que evalúa todos los thrackles de tamaño 9, 8, 7 y 6. Los resultados fueron los siguientes:

- $9 + 8 + 8 + 8 + 3$ - Probado con $9+8+8$.
- $9 + 8 + 8 + 7 + 4$ - Probado con $9+8+8$.
- $9 + 8 + 8 + 6 + 5$ - Probado con $9+8+8$. 150000ms

- $9 + 8 + 7 + 7 + 5$ - Probado con $9+8+7+6+6$
- $9 + 8 + 7 + 6 + 6$ - Probado con $9+8+7+6+6$. 981709 ms.
- $9 + 7 + 7 + 7 + 6$ - Probado con $9+7+7+7+6$. 2.11354e+06 ms.
- $8 + 8 + 8 + 8 + 4$ - Probado con $8+8+8+8$. 300888 ms.
- $8 + 8 + 8 + 7 + 5$ - Probado con $8+8+8+6+6$.
- $8 + 8 + 8 + 6 + 6$ - Probado con $8+8+8+6+6$. 569735 ms.
- $8 + 8 + 7 + 7 + 6$ - Probado con $8+8+7+7+6$. 6.39485e+06 - 1 Hora, 46 minutos.
- $8 + 7 + 7 + 7 + 7$ - Probado con $8+7+7+7+7$. 1.23716e+08 - 34 Horas, 21 minutos.

En la mayoría de los casos no fue necesario examinar toda la partición, por ejemplo para la partición $9 + 8 + 8 + 8 + 3$, encontramos que no hay 3 thrackles, para ningún tipo de orden diferente del convexo, donde uno sea de tamaño 9 y los otros dos de tamaño 8 que sean disjuntos en aristas y por esta razón no es necesario seguir examinando la partición a fondo.

Como para ninguna partición fue posible encontrar una descomposición en thrackles podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_9 es mayor a 5. Y como la cota superior del anti-thickness geométrico es 6 decimos que el anti-thickness de K_9 es exactamente 6.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Bibliografía

- Araujo, G., Dumitrescu, A., Hurtado, F., Noy, M., & Urrutia, J. (2005). On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, *32*(1), 59–69.
- Dillencourt, M. B., Eppstein, D., & Hirschberg, D. S. (2004). Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, (pp. 39–51). World Scientific.
- Dujmovic, V., & Wood, D. R. (2017). Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, *abs/1708.04773*.
- Fabila-Monroy, R., Hidalgo-Toscano, C., Leaños, J., & Lomelí-Haro, M. (2017). The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*.
- Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*.