Thesis Title

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

David Gustavo Merinos Sosa

Day Month Year

Abstract

Resumen

Dedicación

Agradecimientos

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo damos algunas definiciones necesarias para presentar lo que se conoce como descomposición de gráficas completas en thrackles. Empezamos estableciendo conceptos relacionados con gráficas abstractas y después hablaremos de gráficas en el plano, posteriormente explicamos el concepto de tipo de orden y cómo se utiliza en este trabajo, continuamos hablando del anti-thickness abstracto y del anti-thickness geométrico y finalmente explicamos el número cromático de una gráfica.

2.1. Gráficas

El concepto base del cual se desprenden otras definiciones es el de gráfica. Todas las definiciones que presentamos en esta sección fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *gráfica* G está compuesta por un conjunto no vacío V de objetos a los que llamamos *vértices* y por un conjunto E, de parejas de elementos de V, a los que llamamos *aristas*. Denotamos a la arista e compuesta por los vértices u y v como (u, v). Para describir a la gráfica G compuesta por el conjunto V de vértices y el conjunto E de aristas escribimos $G = (V, E)$. Para referirnos al conjunto de vértices de G escribimos $V(G)$ y para referirnos al conjunto de aristas de G escribimos $E(G)$. En la figura 2.1 presentamos un ejemplo de una gráfica.

Decimos que *dos vértices* $u, v \in V(G)$ *son adyacentes* si existe la arista $(u, v) \in E(G)$. La figura 2.1 muestra un ejemplo de dos vértices adyacentes. Decimos que *dos aristas* $e_1, e_2 \in E(G)$ *son adyacentes* si inciden en el mismo

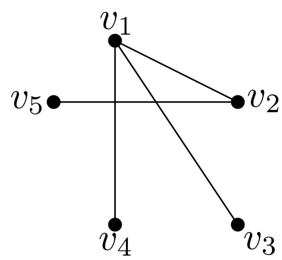


Figura 2.1: Una gráfica de cinco vértices y cuatro aristas. Los vértices v_1 y v_2 son adyacentes y las aristas (v_1, v_3) y (v_2, v_5) son adyacentes.

vértice. Una gráfica es *completa* si cada pareja de vértices en la gráfica es adyacente. Mostramos un ejemplo de adyacencia de aristas en la figura 2.1 y un ejemplo de una gráfica completa en la figura 2.2. Para referirnos a la gráfica completa con n vértices escribimos K_n. Una gráfica G es *bipartita* si es posible dar una partición[1] de $V(G)$ en dos subcojuntos U y W de tal manera que cada arista de G tenga un extremo en U y otro extremo en W. Presentamos un ejemplo de gráfica bipartita en la figura 2.3.

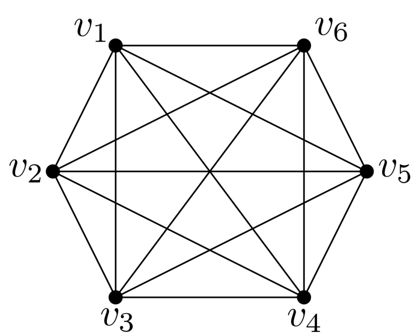


Figura 2.2: La gráfica completa con 6 vértices tiene una arista por cada par de vértices.

[1]Una partición P de un conjunto X es una colección de subconjuntos que cumplen lo siguiente:

- Ningún elemento de P es el conjunto vacío.
- La unión de todos los elementos de P es exactamente el conjunto X.
- La intersección de cualesquiera dos elementos de P es vacía.

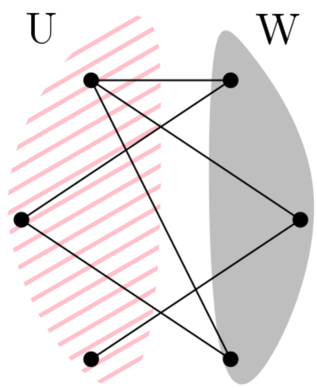


Figura 2.3: Un ejemplo de una gráfica bipartita con partición U y W, ambos conjuntos son de tamaño tres.

Una *descomposición* D de una gráfica G es una colección $D = \{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ de subgráficas de G que cumple con dos condiciones:

1. Ninguna subgráfica G_i contiene vértices aislados.

2. Cada arista de G pertenece a exactamente una subráfica G_i de D.

La figura 2.4 ilustra un ejemplo de una descomposición de la gráfica K_4.

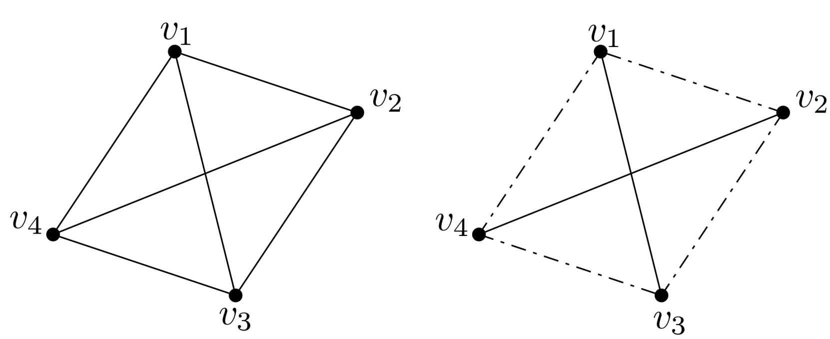


Figura 2.4: Un ejemplo de una descomposición D de K_4 en dos gráficas. Aquí $D = \{G_1, G_2\}$ donde G_1 es la gráfica compuesta por las aristas $(1,4), (1,2), (2,3), (3,4)$ y G_2 es la gráfica compuesta por las aristas $(1,3), (2,4)$.

En este trabajo hacemos descomposiciones de gráficas (abstractas) en gráficas geométricas con cierta propiedad que explicamos más adelante, en la siguiente sección exponemos el concepto de dibujo de una gráfica y gráfica geométrica.

2.1.1. Gráfica geométrica

En esta sección abordamos uno de los conceptos clave del trabajo que son las gráficas geométricas, empezamos explicando el significado de un *dibujo* de una gráfica (abstracta) para continuar con la descripción de un dibujo de una gráfica con características especiales al que llamamos *gráfica geométrica.*

Los primeros dos párrafos de esta sección fueron tomados de Pach (2013). El tercer párrafo fue extraido de Lara & Rubio-Montiel (2019). El cuarto párrafo fue tomado de Pach & Sterling (2011). Un *dibujo* $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$ de una gráfica G es una representación de la gráfica G en el plano tal que 1) cada vértice de G es representado por un punto en el plano y 2) cada arista de G es representada como una curva simple continua que conecta un par de puntos. El conjunto de vértices V y el conjunto de aristas E de G son los puntos y las curvas, respectivamente. Sin perdida de generalidad nos referimos al conjunto de puntos de G como $V(\mathsf{G})$, y les llamamos vértices, y nos referimos al conjunto de curvas de G como $E(\mathsf{G})$, y les llamamos aristas.

Cuando restringimos las curvas que representan a las aristas del dibujo de G a segmentos de recta llamamos al dibujo de la gráfica *gráfica geométrica.* Una gráfica geométrica es completa si existe un segmento de recta entre cada par de vértices de $V(\mathsf{G})$. En la figura 2.5 mostramos un dibujo de K_5 y una gráfica geométrica de K_5.

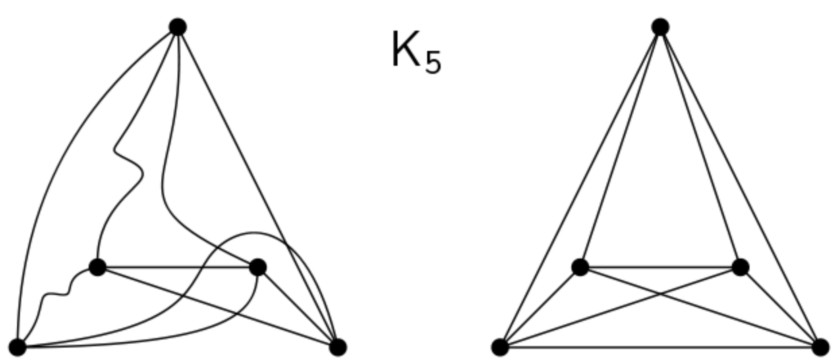


Figura 2.5: A la izquierda observamos un dibujo de K_5 y a la derecha observamos una gráfica geométrica de K_5.

Sea S un conjunto de n puntos en posición general en el plano y sea G una gráfica geométrica de G. Decimos que G está definida sobre S si $V(\mathsf{G}) = S$. Cualquier conjunto S de puntos en posición general induce una gráfica geométrica completa.

Decimos que dos aristas $e_1, e_2 \in E(\mathsf{G})$ se *cruzan* si existe un punto p, en alguna de las aristas, tal que en p la arista e_1 pasa de un lado de la arista e_2 hacia el otro lado. Decimos que dos aristas $e_1, e_2 \in E(\mathsf{G})$ son *adyacentes* si comparten un vértice. En este trabajo decimos que dos aristas de una gráfica geométrica se *intersectan* si son adyacentes o si se cruzan. Mostramos un ejemplo de intersección de aristas en la figura 2.6.

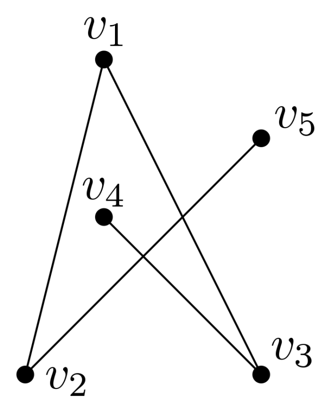


Figura 2.6: En este ejemplo la arista $(1, 2)$ no se intersecta con la arista $(3, 4)$ (son disjuntas) pero sí se intersecta con la arista $(2, 5)$. La arista $(2, 5)$ se cruza con la arista $(3, 4)$ y por lo tanto se intersectan.

El concepto que estudiamos en esta tesis está ligado a gráficas geométricas donde cada par de aristas se intersectan una vez, estas gráficas geométricas reciben el nombre de thrackles. En la siguiente sección explicamos qué son los thrackles formalmente.

2.1.2. Thrackles

Sea G un dibujo de una gráfica G. Decimos que G es un *thrackle* si cada par de aristas se intersecta exactamente una vez. Los thrackles fueron definidos por John Conway en la decada de 1960 (Pach (2013)). Conway también conjeturó que el número de aristas en un thrackle no puede exceder el número de sus vértices (Fulek & Pach (2011)). Un thrackle de n vértices es *máximo* si tiene exactamente n aristas. La figura 2.7 muestra un thrackle máximo.

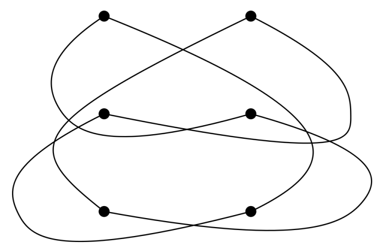
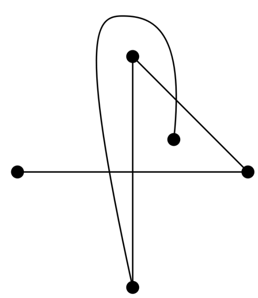
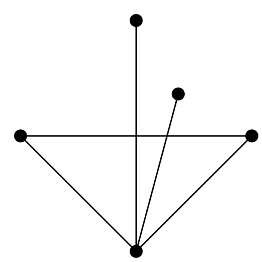


Figura 2.7: Un thrackle máximo sobre un conjunto de seis vértices.

Un thrackle en el que todas sus aristas son segmentos de recta es conocido como *thrackle geométrico*(Schaefer (2018)). En la figura 2.8 presentamos un ejemplo de thrackle y un ejemplo de thrackle geométrico. En este trabajo nos referimos a los thrackles geométricos como thrackles ya que solo estudiamos descomposiciones de gráficas con thrackles geométricos.



(a) Un thrackle con cinco vértices.



(b) Un thrackle geométrico con cinco vértices.

Figura 2.8: Ambas figuras ilustran thracklese definidos sobre el mismo conjunto de puntos. En los dos casos el thrackle dibujado es máximo.

Una gráfica (abstracta) G es *thrackleable* si puede ser dibujada en el plano como un thrackle.

Una descomposición por thrackles D, de una gráfica geométrica G, es una colección $D = \{\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, \ldots, \mathsf{G}_k\}$ de subgráficas geométricas que cumple con tres condiciones:

1. Cada subgráfica G_i es un thrackle.
2. Ninguna subgráfica G_i contiene vértices aislados.
3. Cada arista de G pertenece a exactamente una subráfica G_i de D.

Dada una gráfica completa (abstracta) esta puede ser dibujada en el plano de muchas maneras, solo basta con mover un punto en cualquier dirección para obtener diferentes dibujos de la misma gráfica completa, de hecho hay un número infinito de dibujos para una sola gráfica abstracta. Estudiarlos todos no es posible y por ello necesitamos discretizar el número de posibles dibujos geométricos para una sola gráfica. El tipo de orden es la herramienta que otorga un número finito de dibujos combinatoriamente diferentes para gráficas abstractas y lo explicamos a continuación.

2.1.3. Tipo de Orden

Para entender cómo funciona el tipo de orden de un conjunto de puntos debemos definir la orientación de una tripleta de puntos.

Tres puntos en el plano en posición general pueden tener una orientación en sentido horario o una orientación en sentido anti-horario. Si la tripleta está orientada en sentido horario asignamos a esa tripleta un valor negativo. Si la tripleta está orientada en sentido anti-horario asignamos a esa tripleta un valor positivo. En la figura 2.9 mostramos un ejemplo de cada orientación posible para una tripleta.

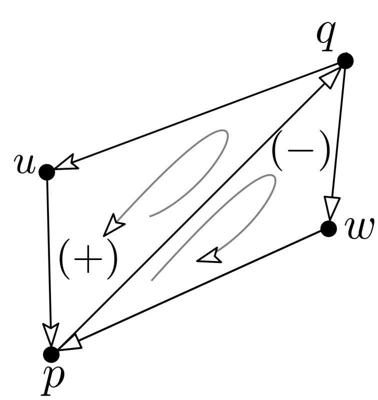


Figura 2.9: Esta figura muestra las posibles orientaciones de una tripleta de puntos. La tripleta $\{p, q, w\}$ tiene asignado el valor de $(-)$ porque w está a la derecha del segmento formado por los puntos p, q. La tripleta $\{p, q, u\}$ tiene asignado el valor de $(+)$ porque u está a la izquierda del mismo segmento.

Las definiciones siguientes fueron tomadas de Aichholzer et al. (2002). El tipo de orden de un conjunto S de n puntos en posición general, digamos

$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ es una función que asigna a cada tripleta ordenada $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ la orientación de la tripleta de puntos $\{p_i, p_j, p_k\}$.

Decimos que dos conjuntos S_1 y S_2 son *combinatoriamente equivalentes* si tienen el mismo tipo de orden de otra forma, si no son equivalentes decimos que son *combinatoriamente distintos*. Si S_1 y S_2 son combinatoriamente equivalentes dos segmentos en S_1 se cruzan si y solo si los segmentos correspondientes en S_2 se cruzan. Solo hay una manera (combinatoriamente equivalente) de acomodar tres puntos, dos maneras de acomodar cuatro puntos y tres maneras de acomodar cinco puntos. En la figura 2.10 presentamos conjuntos combinatoriamente equivalentes de 5 puntos. En la figura 2.11 mostramos los diferentes tipos de orden para un conjunto de 5 puntos.

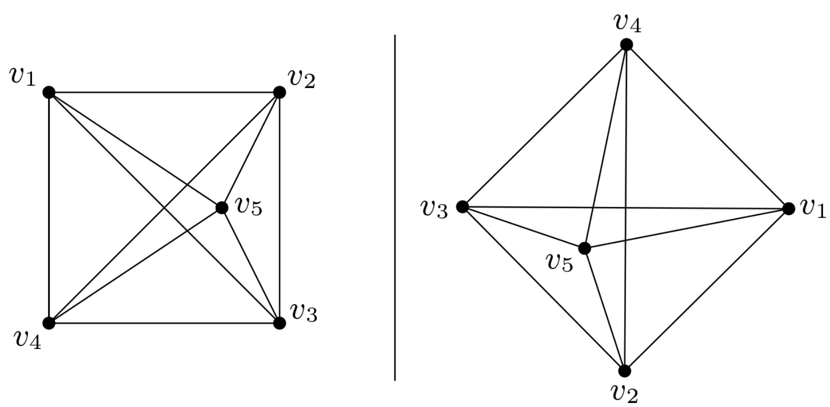


Figura 2.10: Estos dos conjuntos de puntos tienen el mismo tipo de orden. Observe que el valor de cada una de las tripletas del dibujo que está a la izquierda es igual al valor de las tripletas del dibujo a la derecha.

No es trivial enumerar o contar los conjuntos combinatoriamente diferentes, por ejemplo, dados n puntos podemos colocarlos en posición convexa y obtener el primer tipo de orden para n puntos, luego podemos colocar $n-1$ puntos en posición convexa y un punto dentro del $n-1$-gono y evaluar de cuántas maneras combinatoriamente distintas es posible colocar un punto dentro del polígono. Posteriormente podemos ver que pasa con $n-2$ puntos en posición convexa y dos dentro y así sucesivamente hasta que tengamos 3 puntos en posición convexa y $n-(n-3)$ dentro del triángulo. Usando una técnica parecida se sabe que para $n = 10$ hay más de 10 millones de tipos de orden.

En el trabajo de Aichholzer et al. (2002) ofrecen una base de datos que

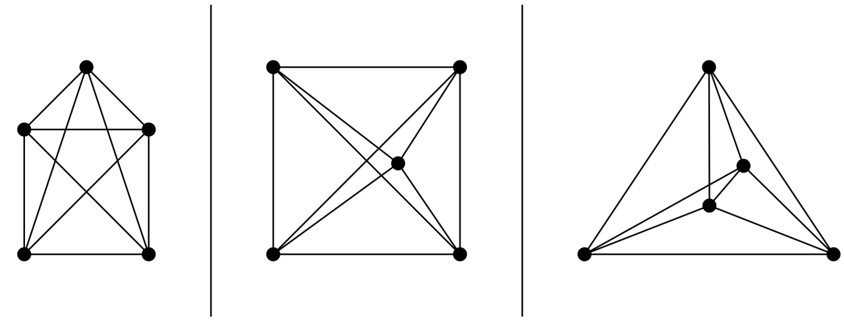


Figura 2.11: Las tres maneras diferentes de distribuir 5 puntos en el plano. Cualquier otra configuración es equivalente a alguna de estas tres configuraciones.

contiene los conjuntos combinatoriamente diferentes para $n \leq 10$. En la tabla 2.1 se presenta el número de conjuntos diferentes para cada n y el tamaño en bytes de la base de datos.

Es imposible analizar todos los posibles conjuntos de n puntos en el plano ya que existe un número infinito de ellos. Sin embargo, para $n \leq 10$, el trabajo de Aichholzer et al. (2002) nos otorga un número finito de conjuntos de n puntos combinatoriamente diferentes. Analizar los tipos de orden proveidos es equivalente a analizar todos los conjuntos de n puntos en el plano para $n \leq 10$.

En este trabajo buscamos descomposiciones de gráficas geométricas completas en thrackles. Y como se mencionó antes, un conjunto de n puntos en posición general induce una gráfica completa de n vértices en el plano. Nosotros analizamos cada tipo de orden para cada $n \leq 10$: inducimos la gráfica completa de n vértices, examinamos sus thrackles y luego buscamos una descomposición. Cuando buscamos una descomposición por thrackles de una gráfica minimizando el número de thrackles utilizados estamos buscando el anti-thickness de la gráfica. Dicho concepto será explicado formalmente en seguida.

2.2. Anti-thickness y anti-thickness geométrico

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Dujmovic & Wood (2017).

n	Número de conjuntos	Tamaño
3	1	6
4	2	16
5	3	30
6	16	192
7	135	1890
8	3315	53040
9	158817	5 717 412
10	14309547	572 381 880

Tabla 2.1: Tipos de orden para cada $n \leq 10$.

Definición 1. *Anti-thickness de una gráfica.* El anti-thickness de una gráfica G es el entero k más pequeño tal que existe una partición de $E(G)$, de tamaño k, en la que cada elemento de la partición es una gráfica thrackleable.

La figura 2.12 ilustra un ejemplo del anti-thickness de K_5.

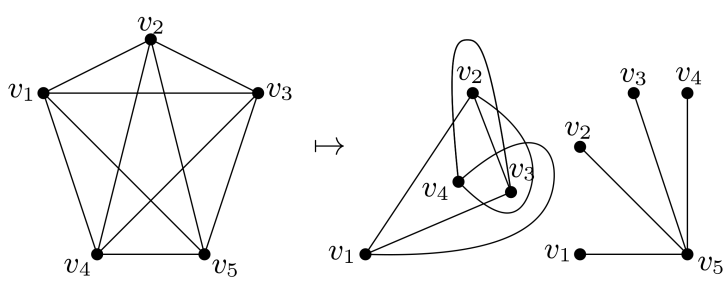


Figura 2.12: La figura muestra a K_5 a la izquierda y a la derecha dos thrackles cuya unión es K_5. Consideremos las aristas de la gráfica completa inducida por los vértices $1, 2, 3, 4$, estas aristas inducen un thrackle mientras que las aristas con un extremo en el vértice 5 inducen otro thrackle. El anti-thickness de K_5 es precisamente igual a dos. Este resultado se discute en el capítulo de resultados.

Cuando deseamos que los thrackles usados en la descomposición de la gráfica sean específicamente geométricos, debemos buscar el anti-thickness geométrico. Esta es la principal diferencia entre el anti-thickness y el anti-thickness geométrico. Adicionalmente en el anti-thickness los vértices no requieren ser congruentes de acuerdo a las posiciones en el plano de los thrackles de la descomposición mientras que en el anti-thickness geométrico si se requiere la congruencia de la posición de los vértices entre las thrackles de la descomposición. A continuación definimos el anti-thickness geométrico de una gráfica y posteriormente presentamos un ejemplo.

Definición 2. *Anti-thickness geométrico de una gráfica.* El anti-thickness geométrico de una gráfica G es el entero k más pequeño tal que existe un dibujo G de G para el cual hay una partición de $E(\mathsf{G})$, de tamaño k, en la que cada elemento de la partición induce un thrackle.

En la figura 2.13 damos un ejemplo del anti-thickness geométrico de K_5.

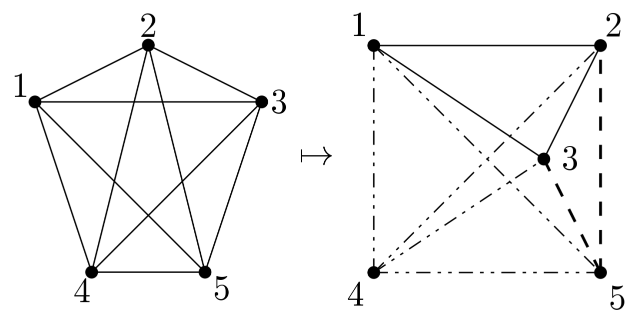


Figura 2.13: En esta figura podemos observar una descomposición de K_5 en 3 thrackles geométricos. Esta descomposición se muestra en la figura del lado derecho, cada thrackle está dibujado con diferentes patrones de línea. El anti-thickness geométrico de K_5 es exactamente tres, esto es demostrado en la sección de resultados.

Dar una descomposición de una gráfica en thrackles es equivalente a encontrar conjuntos independientes de aristas que comparten ciertas propiedades. A su vez, encontrar los conjuntos independientes de una gráfica está ligado a encontrar el *número cromático* de una gráfica (abstracta). Por ello es pertinente estudiar este concepto.

2.3. Número cromático

Las siguientes definiciones fueron tomadas de Chartrand & Zhang (2008).

Una *coloración propia* de los vértices de una gráfica G es la asignación de colores a los vértices de G tal que cada vértice tiene un solo color asignado y dos vértices adyacentes tienen diferentes colores. Un color puede ser un color como rojo, verde, amarillo, etc. cuando el número de colores a usar es pequeño, de otra forma se usan enteros $1, 2, \ldots, k$ para algún entero positivo k. Si la coloración propia usa k colores diferentes de esta manera decimos que tenemos una *k-coloración* de la gráfica G. Dada una k-coloración de una gráfica G, sea V_i el conjunto de vértices de G que tienen el color i asignado llamamos a V_i una *clase cromática*. El conjunto $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ genera una *partición* en conjuntos independientes de los vértices de G.

Una gráfica G es *k-colorable* si existe una coloración propia de G de tamaño k. El entero positivo k más pequeño para el cual G es k-colorable recibe el nombre de *número cromático* de G. Lo denotamos como $\chi(G)$.

La figura 2.14 muestra un ejemplo de una coloración propia de una gráfica G. En este ejemplo ilustramos cada clase cromática dibujando los vértices con diferentes colores representados por una cruz, un círculo y un cuadrado.

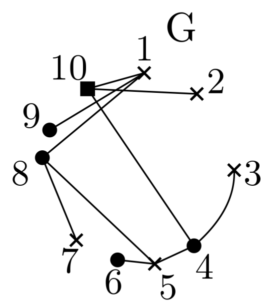


Figura 2.14: Una coloración propia de una gráfica G. Esta coloración es de tamaño 3, por lo tanto decimos que es una 3-coloración de G. Para esta gráfica en particular no existe una coloración más pequeña, por lo que su número cromático es 3. Nótese que los conjuntos independientes son formados por vértices que tienen el mismo color asignado y no son adyacentes entre sí.

Capítulo 3

Estado del arte

En este capítulo hablaremos de un concepto que cronológicamente fue definido antes que el anti-thickness además discutirmos su relación. Mencionamos algunos resultados acerca de dicho concepto. Explicaremos de qué manera el número cromático de una gráfica puede otorgar una descomposición de una gráfica geométrica. Finalmente discutimos los resultados actuales para el anti-thickness.

Un concepto que está estrechamente relacionado con el de anti-thickness es el de thickness, que se define como sigue:

Definición 3. [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness.* Sea G una gráfica, el thickness $\theta(G)$ de G es el mínimo entero k para el cual existe una partición de $E(G)$, de tamaño k, en la que cada elemento de la partición induce una gráfica planar.

Este concepto también puede extenderse a gráficas geométricas, en cuyo caso estaremos hablando del thickess de una gráfica geométrica, definido a continuación:

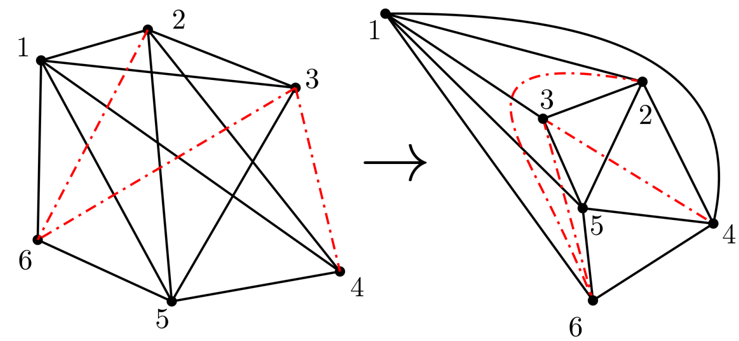
Definición 4. *Thickness de una gráfica geométrica.* Sea G una gráfica geométrica, el thickness $th(\mathsf{G})$ de G es el mínimo entero k para el cual existe una partición de $E(\mathsf{G})$, de tamaño k, donde cada elemento de la partición induce una gráfica (geométrica) plana.

Finalmente podemos definir el thickness geométrico de una gráfica G.

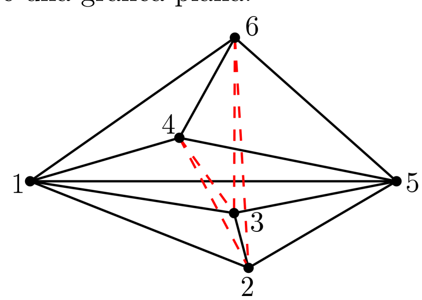
Definición 5. [Dillencourt et al. (2004)] *Thickness geométrico.* Sea G una gráfica, el thickness geométrico $\bar{\theta}(G)$ de G es :

$$\bar{\theta}(G) = \text{mín}\{th(\mathsf{G}) : \mathsf{G} \text{ es una gráfica geométrica de G}\}.$$

En la figura 3.1 ilustramos un ejemplo del thickness teórico de la gráfica completa de 6 vértices



(a) La gráfica K_6 con una descomposición de tamaño 2 de sus aristas. Cada una induce una gráfica plana.



(b) La gráfica K_6 con una descomposición en dos gráficas geométricas planas.

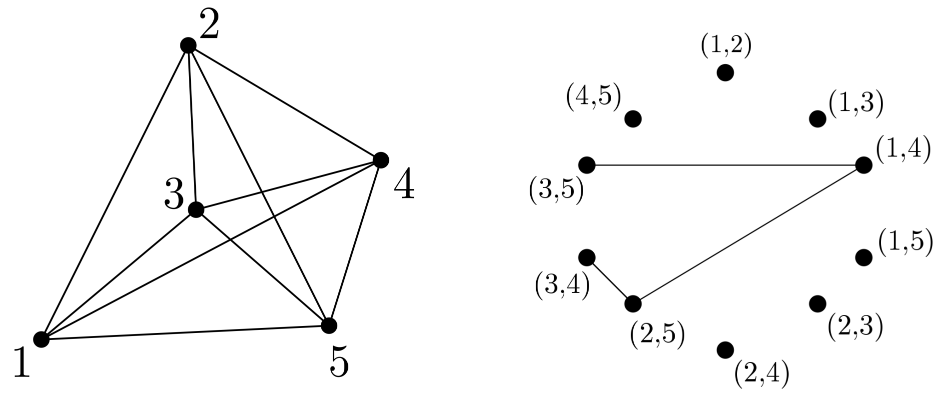
Figura 3.1: La figura (a) muestra que el thickness teórico de K_6 es 2. La figura (b) muestra que el thickness geométrico de K_6 es 2.

Dillencourt et al. (2004) demuestran que el thickness geométrico está acotado por:

$$\left\lceil \frac{n}{5.646} + 0.342 \right\rceil \leq \bar{\theta}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil .$$

En el mismo artículo encuentran el valor exacto del thicknes geométrico de cada gráfica completa con n vértices, para $n \leq 12$, así como para K_{15} y K_{16}. También estudian el thickness geométrico para gráficas completas bipartitas y demuestran la siguiente cota:

$$\left\lceil \frac{ab}{2a+2b-4} \right\rceil \leq \theta(K_{a,b}) \leq \bar{\theta}(K_{a,b}) \leq \left\lceil \frac{min(a,b)}{2} \right\rceil .$$



(a) Un dibujo geométrico de K_5 cuyo conjunto de vértices es $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) La gráfica $E_{pp}(S)$.

Figura 3.2: Una instancia de K_5 y su respectiva gráfica de cruce $E_{pp}(S)$.

Para explicar la relación entre el thickness y el anti-thickness es necesario hablar de coloraciones de vértices de gráficas de adyacencia. La gráfica de adyacencia de una gráfica geométrica dada es construida a partir de la información de adyacencia de las aristas de la gráfica geométrica. Existen 4 criterios de adyacencia para dos aristas en el plano. Estos se enlistan a continuación:

1. Dos aristas se cruzan.
2. Dos aristas no se cruzan.
3. Dos aristas se cruzan o comparten un vértice.
4. Dos aristas son totalmente disjuntas.

Ahora definimos una gráfica de adyacencia a la que llamamos *gráfica de cruce*.

Definición 6. *Gráfica de cruce.* Sea S un conjunto de n puntos en posición general en el plano y sea $K_n(S)$ la gráfica completa asociada a S. La gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ de S es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de $K_n(S)$ y una arista entre dos vértices de $E_{pp}(S)$ si sus aristas correspondientes se cruzan en $K_n(S)$.

La gráfica $E_{pp}(S)$ es construida a partir del criterio 1.

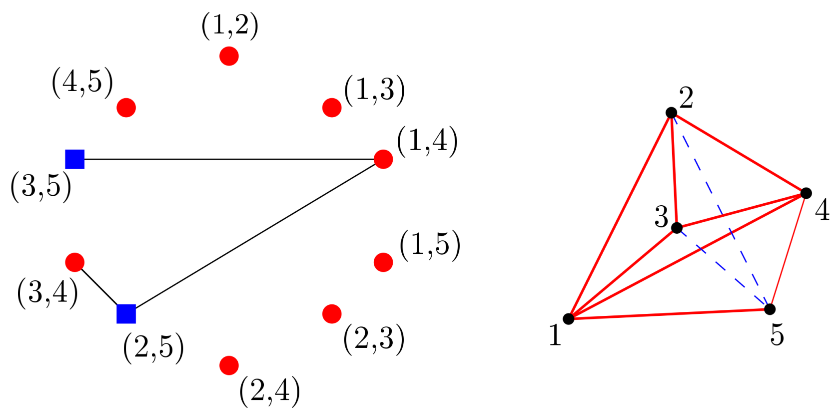


Figura 3.3: De izquierda a derecha: Una coloración propia de los vértices de $E_{pp}(S)$ con dos clases cromáticas indicadas como círculos y cuadros. Una descomposición de un dibujo de K_5 en dos gráficas planas cuyas aristas corresponden a cada una de las clases cromáticas de la coloración de $E_{pp}(S)$.

En la figura 3.2 aparece un ejemplo de la gráfica de cruce $E_{pp}(S)$. Podemos notar que dado que en el dibujo de K_5 hay 3 cruces, en la gráfica $E_{pp}(S)$ hay 3 aristas.

Los conjuntos independientes de $E_{pp}(S)$ corresponden a conjuntos de aristas de $K_n(S)$ que inducen gráficas planas. Luego, una coloración propia de los vértices de $E_{pp}(S)$ corresponde a una descomposición de $K_n(S)$ en gráficas planas. Por lo tanto encontrar el número cromático $\chi(E_{pp}(S))$ de la gráfica $E_{pp}(S)$ es equivalente a encontrar el thickness geométrico de $K_n(S)$. La figura 3.3 ilustra esta relación. El thickness geométrico de la gráfica completa de n vértices K_n se puede definir en estos términos como sigue:

Definición 7. *Thickness geométrico de una gráfica.*

$$\bar{\theta}(n) = \text{mín}\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general }, |S| = n\}.$$

De la misma manera que definimos la gráfica de cruce podemos definir otras gráficas de adyacencia. Para esto basta con usar un criterio de adyacencia diferente para construir la gráfica. En este sentido, en el trabajo de Araujo et al. (2005) se definen las gráficas de incidencia que se listan en seguida. Sea S un conjunto de n puntos en posición general y $K_n(S)$ la gráfica completa asociada a S:

- $W(S)$: Es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de $K_n(S)$ y

Gráfica	Conjuntos independientes en $K_n(S)$
$W(S)$	*Emparejamientos de cruces*
$I(S)$	*Emparejamientos planos*
$D(S)$	*Thrackles*
$E_pp(S)$	*Gráfica planar*

Tabla 3.1: Esta tabla muestra qué representan los conjuntos independientes en $K_n(S)$ para cada una de las gráficas definidas en Araujo et al. (2005) y para $E_pp(S)$.

una arista entre dos vértices de $W(S)$ si sus aristas correspondientes en $K_n(S)$ cumplen con el criterio 2.

- $I(S)$: Es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de $K_n(S)$ y una arista entre dos vértices de $I(S)$ si sus aristas correspondientes en $K_n(S)$ cumplen con el criterio 3.
- $D(S)$ Es la gráfica que tiene un vértice por cada arista de $K_n(S)$ y una arista entre dos vértices de $D(S)$ si sus aristas correspondientes en $K_n(S)$ cumplen con el criterio 4.

Es fácil darse cuenta que la condición de existencia de aristas de $W(S)$ es complementaria a la condición en $E_{pp}(S)$ y viceversa. De la misma forma, las condiciones de $I(S)$ y $D(S)$ son complementarias entre sí. En la tabla 3.1 mostramos esta relación y las estructuras geométricas que representan, en $K_n(S)$, los conjuntos independientes para cada gráfica de adyacencia.

Open problem garden es un sitio web en el que investigadores de diferentes áreas de las matemáticas como algebra, combinatoria, teoría de números o teoría de gráficas publican problemas abiertos para que la comunidad pueda leerlos libremente. En este sitio web Hurtado (2009) presenta un problema en el que se requiere asignar un color a cada arista de una gráfica geométrica completa bajo cada una de los cuatro criterios de adyacencia mencionados antes.

En el artículo de Araujo et al. (2005) buscan el número cromático de cada una de las gráficas de adyacencia mencionadas anteriormente, los autores estudian los siguientes parámetros:

$$
\begin{aligned}
w(n) &= \text{máx}\{\chi(W(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}.\\
i(n) &= \text{máx}\{\chi(I(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}.\\
d(n) &= \text{máx}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}.
\end{aligned}
$$

Para el caso en el que S está en posición convexa se denotan a estos valores como $w_c(n)$, $i_c(n)$ y $d_c(n)$. Los autores demuestran las siguientes cotas:

- $w_c(n) = \Theta(n \log n)$.
- $c_1 n \log n \leq w(n) \leq c_2 n^2 \frac{\log \log n}{\log n}$, para $c_1, c_2 > 0$.
- $i_c(n) = n$.
- $n \leq i(n) \leq Cn^{3/2}$ para $C > 0$.
- $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor - 1 \leq d_c(n) \leq \text{mín}\left(n - 2, n - \frac{\lfloor \log n \rfloor}{2}\right)$.
- $5\lfloor \frac{n}{7} \rfloor \leq d(n) \leq \text{mín}\left(n - 2, n + \frac{1}{2} - \frac{\lfloor \log \log n \rfloor}{n}\right)$.

A pesar de que en el trabajo de Araujo et al. (2005) se busca el número cromático de la gráfica $D(S)$ y con ello, de manera implicita, buscar el anti-thickness de una gráfica geométrica asociada a S, es importante notar que la definición $d(n)$ no es equivalente a la de anti-thickness. Dada una gráfica G: en $d(n)$ se busca el máximo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de G mientras que en el anti-thickness se busca el mínimo de todos los números cromáticos para todas las gráficas geométricas de G.

Podemos dar una definición del anti-thickness geométrico usando la gráfica $D(S)$ como sigue:

Definición 8. *Anti-thickness geométrico de una gráfica.*

$$
At_g(n) = \text{mín}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}.
$$

De manera análoga si los puntos de S están en posición convexa definimos el anti-thickness convexo:

Definición 9. *Anti-thickness convexo de una gráfica.*

$$At_c(n) = \text{mín}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición convexa}, |S| = n\}.$$

El anti-thickness convexo de la gráfica completa de n vértices es equivalente a $d_c(n)$.

Los autores de Dujmovic & Wood (2017) presentan resultados respecto a el anti-thickness para familias específicas de gráficas como árboles, gráficas outerplanar, y algunos dibujos como 2-tracks, books, k-queues, entre otros.

En su trabajo definen en anti-thickness como sigue:

Definición 10. *Anti-thickness de una gráfica.* Sea G una gráfica el anti-thickness $At(G)$ de G es el mínimo entero k para el cual existe una partición de $E(G)$ de tamaño k en la que cada elemento de la partición induce una gráfica thrackleable.

Además dan una relación entre el thickness y anti-thickness de cualquier gráfica. Concretamente los autores prueban la siguiente cota para toda gráfica con anti-thickness k y thickness t:

$$k \leq t \leq \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil.$$

Acerca del anti-thickness de gráficas completas, en el mismo artículo prueban que

$$\frac{n}{3} \leq At(K_n) \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Ellos conjeturan que el anti-thickness de una gráfica completa es exactamente $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

En los siguientes párrafos describimos cómo los autores de Fabila-Monroy et al. (2018a) encuentran el anti-thickness geométrico exacto para gráficas cuyo conjunto de vértices está en posición convexa.

Los autores prueban que bajo esta condición dos thrackles máximos siempre comparten al menos una arista. Por lo anterior la unión de k thrackles máximos tiene a lo sumo $kn - \binom{k}{2}$ aristas. Entonces, como una gráfica completa de n vértices tiene $\binom{n}{2}$ aristas la resolución de la desigualdad

$$\binom{n}{2} \leq kn - \binom{k}{2}.$$

otorga el resultado de la cota inferior para el anti-thickness convexo. Esta cota es:

$$At_c(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

La cota superior se obtiene dando una coloración propia de los vértices de la gráfica $D(S)$. Recordemos que una coloración propia de $D(S)$ equivale a encontrar el antithickness de la gráfica completa asociada a S. En el articulo logran la coloración trazando caminos en una estructura conocida como poliominó Fabila-Monroy et al. (2018b) en la que los vértices de $D(S)$ son las filas y las columnas de dicha estructura. En dicho trabajo cada camino representa un conjunto independiente de vértices en $D(S)$ y por lo tanto, respresenta un thrackle en K_n. Los autores concluyen dando el número máximo de caminos posibles en el polyomino, dicho número coincide con el de la cota inferior y luego se tiene que el anti-thickness convexo tiene exactamente el siguiente valor:

$$At_c(n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

A continuación hablamos del trabajo de Fabila-Monroy et al. (2017) en donde encuentran el anti-thickness geométrico de la doble cadena convexa. La doble cadena convexa es una configuración de puntos conformada por una $k{-}cup$ y una $l{-}cap$. La $k{-}cup$ es una cadena de k puntos en posición convexa donde la parte superior de su cubierta está delimitada por un solo segmento. La $l - cap$ es una cadena de l puntos en posición convexa donde la parte inferior de su cubierta está delimitada por un solo segmento. En el artículo la doble cadena convexa $C_{k,l}$ que definen tiene las siguientes características:

- Para $l \geq k$ la doble cadena convexa es la unión una $k - cup\ U$ y una $l - cap\ L$.
- Cada punto de L está por debajo de cada segmento de recta definido por dos puntos de U.
- Cada punto de U está por arriba de cada segmento de recta definido por dos puntos de L.

El resultado al que se llega en el trabjo es que el anti-thickness geométrico de la doble cadena convexa con k puntos en la cadena convexa superior y l

puntos en la cadea convexa inferior es:

$$At_g(K_{l,k}) = k + l - \left\lfloor \sqrt{2l + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Dujmovic & Wood (2017) mencionan que encontrar el anti-thickness geométrico de gráficas completas en posición general es un problema abierto. Hasta ahora las mejores cotas conocidas son :

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

La cota superior se sigue del caso convexo y la cota inferior se sigue del hecho de que una gráfica de n vértices con anti-thickness geométrico k tiene a lo sumo kn aristas.

Los trabajos mencionados en este capítulo muestran cómo el problema original del thickness está relacionado con problema del anti-thickness. Mostramos de qué manera un problema de descomposición de gráficas geométricas equivale a un problema de coloración de gráficas. Los artículos más recientes tratan al anti-thickness como un problema de coloración. En este trabajo no construimos la gráfica $D(S)$ y no coloreamos ninguna gráfica. Nuestro enfoque es más geométrico y computacional.

Es importante notar que en el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018a) las descomposiciones de la gráfica completa están conformadas por thrackles máximos. Esta es una de las ideas que usamos en este trabajo para intentar ajustar las cotas del anti-thickness en posición general.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Descomposiciones por thrackles máximos.

En este capítulo reportaremos el pseudocódigo de algoritmos usados durante el desarrollo del proyecto así como los resultados que obtuvimos con dichos algoritmos. Asímismo presentamos la prueba de que un thrackle que no es máximo no siempre puede ser completado a uno máximo en posición general, mientras que en posición convexa sí es posible.

En el trabajo de Fabila-Monroy et al. (2018a) se encuentran descomposiciones de gráficas geométricas en posición convexa usando thrackles máximos que comparten aristas a pares. Usando esta idea y los datos de la tabla 4.1 decidimos buscar descomposiciones de K_n para $n \leq 10$ en las que los thrackles son todos máximos y cuyo tamaño sea el mismo del anti-thickness convexo para K_n.

En resumen: para cada n tomamos las combinaciones de $cat(n)$ thrackles máximos y verificamos si alguna de estas combinaciones es una descomposición de K_n. Este proceso lo repetimos para cada uno de los tipos de orden que hay para cada n. Encontramos que sí existen tipos de orden que no corresponden al de posición convexa que también alcanzan el anti-thickness convexo. Los resultados se muestran en la tabla 4.2.

Para los casos de $n \in \{3, 4, \ldots, 7\}$ no pudimos encontrar una descomposición que cumpliera con las caracteristicas antes descritas, esto es porque existen pocos tipos de orden cuya unión de thrackles máximos cubran las aristas de la gráfica completa. Los resultados fueron obtenidos con un algoritmo que primero evalúa cuáles son los tipos de orden que podrían tener

n	Anti-thickness convexo de K_n ($cat(n)$)
3	1
4	2
5	3
6	3
7	4
8	5
9	6
10	6

Tabla 4.1: Anti-thickness convexo para $n \leq 10$ basado en el resultado de Fabila-Monroy et al. (2018a).

una descomposición por thrackles máximos; se seleccionan aquellos que tengan suficientes thrackles máximos para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, en otras palabras que la unión de los thrackles máximos en determinado tipo de orden cubran las $\binom{n}{2}$ aristas. Los pseudocódigos de los algoritmos usados se encuentra en el algoritmo 1 y el algoritmo 2.

Algorithm 1 Pseudocódigo del algoritmo que encuentra descomposiciones por thrackles máximos para todos los tipos de orden de una n dada.

```
procedure MaxThrackleDecom(n)
    vectorOT ← valid-thrackles()
    k ← convexAt(n)
    for each ot ∈ vectorOT do
        n_thr ← number of max thrackles on order type ot
        find-all-decomposition-of-size(n_thr,k)
```

Algorithm 2 Pseudocódigo del algoritmo que encuentra combinaciones de k thrackles máximos, si la combinación es una descomposición se visita.

```
procedure find-all-decomposition-of-size(n_thr, k)
    while There is a combination c of size k from {0, 1, ..., n_thr} do
        if c is a decomposition then
            visit c
```

Ejecutamos la implementación del algoritmo en el cluster: para $n = 8$

n	Tipo de Orden	k_n
8	12	5
8	54	5
9	12	6
9	52	6
9	54	6
9	80	6
9	696	6
9	1080	6
9	1287	6
10	81	6
10	1328	6
10	2243	6

Tabla 4.2: Tipos de orden para los que existe al menos una descomposición en thrackles máximos de tamaño igual al anti-thickness del tipo de orden convexo.

el resultado es obtenido en menos de un segundo mientras que para $n = 9$ y $n = 10$ se necesitaron al rededor de 1 día y 6 días respectivamente. Las decomposiciones encontradas pueden verse con más detalle en el apéndice XXXXX.

En el desarrollo del trabajo nos preguntamos por qué existen otros tipos de orden diferente del convexo que tienen el mismo anti-thickness. Algo en lo que pensamos fue en analizar de alguna manera la estructura de los thrackles en dichos tipos de orden y por ello calculamos, para las descomposiciones obtenidas mediante el método anteriormente descrito, el número de cruce de cada uno de los thrackles de la descomposición. Se observa que en la mayoría de los casos la mitad de los thrackles de las descomposiciones tienen el número de cruce mínimo para n vértices y la otra mitad es más cercano al mayor número de cruce para n vértices. Estos resultados pueden estudiarse con más detalle een el apéndice XXXXXX.

4.2. Anti-thickness geométrico exacto de K_n con $3 \leq n \leq 9$.

Dado que la cota superior está dada por el anti-thickness convexo decidimos tratar de ajustar la cota inferior ya que creemos que el anti-thickness geométrico es igual al anti-thickness convexo. Un enfoque para ajustar la cota inferior es obtener el anti-thickness de cada dibujo de K_n, esto es, obtener el anti-thickness de cada tipo de orden para K_n y seleccionar el menor de todos. Sin embargo, el algoritmo exhaustivo para encontrar el anti-thickness tarda al rededor de 7 horas para un solo tipo de orden cuando $n = 8$, si para $n = 8$ hay 3315 tipos de orden requeririamos cerca de 960 días para acabar dicha tarea.

Por esta razón decidimos analizar la estructura de las posibles descomposiciones; como K_n tiene $\binom{n}{2}$ aristas y los thrackles de la descomposición deben cubrirlas todas podemos buscar particiones de enteros de la forma $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \binom{n}{2}$.

A manera de ejemplo, mostraremos como se ajusta la cota inferior del anti-thickness geométrico para K_5. En K_5 existen 10 aristas. Las siguientes son particiones del entero 10:

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$2+1+1+1+1+1+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1+1+1$	$2+2+1+1+1+1+1+1$
$4+1+1+1+1+1+1$	$3+2+1+1+1+1+1$
$2+2+2+1+1+1+1$	$5+1+1+1+1+1$
$4+2+1+1+1+1$	$3+3+1+1+1+1$
$3+2+2+1+1+1$	$2+2+2+2+1+1$
$6+1+1+1+1$	$5+2+1+1+1$
$4+3+1+1+1$	$4+2+2+1+1$
$3+3+2+1+1$	$3+2+2+2+1$
$2+2+2+2+2$	$7+1+1+1$
$6+2+1+1$	$5+3+1+1$
$5+2+2+1$	$4+4+1+1$
$4+3+2+1$	$4+2+2+2$
$3+3+3+1$	$3+3+2+2$
$8+1+1$	$7+2+1$
$6+3+1$	$6+2+2$
$5+4+1$	$5+3+2$
$4+4+2$	$4+3+3$
$9+1$	$8+2$
$7+3$	$6+4$
$5+5$	

Ahora bien, algunas de estas particiones pueden ser usadas como guía para encontrar una descomposición en thrackles para K_5. Si tomamos, por ejemplo, la partición $5+4+1$ estaríamos buscando una descomposición por 3 thrackles: uno de tamaño 5, uno de tamaño 4 y otro de tamaño 1. Es importante notar que como las particiones de un entero k suman exactamente k, los thrackles de la descomposición tienen que ser disjuntos en aristas cuando los tamaños corresponden a los enteros de la partición de k. La partición $5+4+1$ podría ser posible de encontrar, sin embargo, podemos deshacernos de ciertas particiones que estamos seguros jamás encontraremos como son aquellas particiones que tienen un entero mayor a 5 puesto que para un conjunto de 5 vértices el thrackle geométrico más grande tiene 5 aristas, esto también se cumple para todo n. Desaparecerían entonces particiones como $7+2+1$ o $9+1$ por mencionar algunas.

Nuestro conjunto de particiones posibles se ve ahora de la siguiente manera:

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$2+1+1+1+1+1+1+1+1$
$3+1+1+1+1+1+1+1$	$2+2+1+1+1+1+1+1$
$4+1+1+1+1+1+1$	$3+2+1+1+1+1+1$
$2+2+2+1+1+1+1$	$5+1+1+1+1+1$
$4+2+1+1+1+1$	$3+3+1+1+1+1$
$3+2+2+1+1+1$	$2+2+2+2+1+1$
$5+2+1+1+1$	$4+3+1+1+1$
$4+2+2+1+1$	$3+3+2+1+1$
$3+2+2+2+1$	$2+2+2+2+2$
$5+3+1+1$	$5+2+2+1$
$4+3+2+1$	$4+4+1+1$
$3+3+3+1$	$4+2+2+2$
$5+4+1$	$3+3+2+2$
$4+4+2$	$5+3+2$
$5+5$	$4+3+3$

Sin embargo, como buscamos ajustar la cota inferior del anti-thickness no nos interesa encontrar descomposiciones cuyo tamaño sea mayor a la cota superior del anti-thickness dada por $n - \lfloor \sqrt{2n+1/4} - 1/2 \rfloor$, en el caso de $n = 5$, evitaremos buscar descomposiciones con un tamaño mayor a 3. Dejando así las siguientes particiones disponibles:

$5+4+1$	$4+4+2$
$4+3+3$	$5+3+2$
$5+5$	

Finalmente, vamos a remover las particiones cuyo tamaño sea igual al anti-thickness convexo de K_5, esto porque sabemos que en efecto la posición convexa otorga descomposiciones de ese tamaño. Esto nos deja con una única partición posible :

$$5+5$$

Esto significa que debemos averiguar si existe una descomposición de K_5 por dos thrackles de tamaño 5, en este caso dos thrackles máximos. No obstante, al buscar las thrackles máximos para todos los tipos de orden de K_5 encontramos que no existen dos thrackles máximos que sean disjuntos en aristas, por esto no es posible dar una descomposición de K_5 en dos thrackles máximos. Y luego, el anti-thickness de K_5 es mayor a 2. Como la cota superior del anti-thickness de K_5 es 3 podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_5 es exactamente 3.

De esta manera podemos acotar el anti-thickness geométrico de K_n: examinar particiones del entero $\binom{n}{2}$ con las siguientes condiciones:

- La longitud de la partición es menor que el anti-thickness convexo de K_n.
- Solo existe una ocurrencia del entero n en la partición.

Siguiendo las condiciones anteriores buscamos las particiones válidas para K_n con $n \in [3, 9]$. Encontramos que para $n \in [3, 7]$ no existen particiones que cumplan las condiciones, por lo que podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_n para $n \in [3, 7]$ es igual al anti-thickness convexo.

Para K_8 encontramos las siguientes particiones válidas:

$$8+7+7+6 \quad 7+7+7+7$$

No fue posible encontrar una descomposición en thrackles usando alguna de estas particiones, por lo que podemos decir que K_8 tiene anti-thickness geométrico mayor a 4 y luego el anti-thickness geométrico de K_8 es exactamente 5.

Por otro lado para ajustar la cota inferior del anti-thickness de K_9, tenemos las siguientes particiones válidas:

$$\begin{array}{ll}
9+8+8+8+3 & 9+8+8+7+4 \\
9+8+8+6+5 & 9+8+7+7+5 \\
9+8+7+6+6 & 9+7+7+7+6 \\
8+8+8+8+4 & 8+8+8+7+5 \\
8+8+8+6+6 & 8+8+7+7+6 \\
8+7+7+7+7 &
\end{array}$$

Para cada una de las particiones se diseñó un algoritmo que evalúa todos los thrackles de tamaño 9, 8, 7 y 6. Los resultados fueron los siguientes:

- 9 + 8 + 8 + 8 + 3 - Probado con 9+8+8.
- 9 + 8 + 8 + 7 + 4 - Probado con 9+8+8.
- 9 + 8 + 8 + 6 + 5 - Probado con 9+8+8. 150000ms

- $9 + 8 + 7 + 7 + 5$ - Probado con 9+8+7+6+6
- $9 + 8 + 7 + 6 + 6$ - Probado con 9+8+7+6+6. 981709 ms.
- $9 + 7 + 7 + 7 + 6$ - Probado con 9+7+7+7+6. 2.11354e+06 ms.
- $8 + 8 + 8 + 8 + 4$ - Probado con 8+8+8+8. 300888 ms.
- $8 + 8 + 8 + 7 + 5$ - Probado con 8+8+8+6+6.
- $8 + 8 + 8 + 6 + 6$ - Probado con 8+8+8+6+6. 569735 ms.
- $8 + 8 + 7 + 7 + 6$ - Probado con 8+8+7+7+6. 6.39485e+06 - 1 Hora, 46 minutos.
- $8 + 7 + 7 + 7 + 7$ - Probado con 8+7+7+7+7. 1.23716e+08 - 34 Horas, 21 minutos.

En la mayoría de los casos no fue necesario examinar toda la partición, por ejemplo para la partición $9 + 8 + 8 + 8 + 3$, encontramos que no hay 3 thrackles, para ningún tipo de orden diferente del convexo, donde uno sea de tamaño 9 y los otros dos de tamaño 8 que sean disjuntos en aristas y por esta razón no es necesario seguir examinando la partición a fondo.

Como para ninguna partición fue posible encontrar una descomposición en thrackles podemos decir que el anti-thickness geométrico de K_9 es mayor a 5. Y como la cota superior del anti-thickness geométrico es 6 decimos que el anti-thickness de K_9 es exactamente 6.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Bibliografía

Aichholzer, O., Aurenhammer, F., & Krasser, H. (2002). Enumerating order types for small point sets with applications. *Order*, *19*(3), 265–281.

Araujo, G., Dumitrescu, A., Hurtado, F., Noy, M., & Urrutia, J. (2005). On the chromatic number of some geometric type kneser graphs. *Comput. Geom.*, *32*(1), 59–69.

Chartrand, G., & Zhang, P. (2008). *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, 1 ed.

Dillencourt, M. B., Eppstein, D., & Hirschberg, D. S. (2004). Geometric thickness of complete graphs. In *Graph Algorithms And Applications 2*, (pp. 39–51). World Scientific.

Dujmovic, V., & Wood, D. R. (2017). Thickness and antithickness of graphs. *CoRR*, *abs/1708.04773*.

Fabila-Monroy, R., Hidalgo-Toscano, C., Leaños, J., & Lomelí-Haro, M. (2017). The chromatic number of the disjointness graph of the double chain. *arXiv preprint arXiv:1711.05425*.

Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018a). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*.

Fabila-Monroy, R., Jonsson, J., Valtr, P., & Wood, D. R. (2018b). The exact chromatic number of the convex segment disjointness graph. *arXiv preprint arXiv:1804.01057*, (p. 6).

Fulek, R., & Pach, J. (2011). A computational approach to conway's thrackle conjecture. *Computational Geometry*, *44*(6-7), 345–355.

Hurtado, F. (2009). Edge colouring geometric complete graphs. http://www.openproblemgarden.org/op/edge_colouring_geometric_complete_graphs.

Lara, D., & Rubio-Montiel, C. (2019). On crossing families of complete geometric graphs. *Acta Mathematica Hungarica*, *157*(2), 301–311.

Pach, J. (2013). *The Beginnings of Geometric Graph Theory*, (pp. 465–484). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-39286-3_17

Pach, J., & Sterling, E. (2011). Conway's conjecture for monotone thrackles. *The American Mathematical Monthly*, *118*(6), 544–548.
URL https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.118.06.544

Schaefer, M. (2018). *Crossing numbers of graphs*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press.