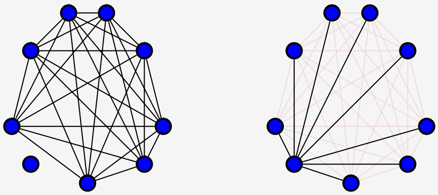
Anti-thickness geométrico para gráficas completas con hasta diez vértices.

David Gustavo Merinos Sosa
María Dolores Lara Cuevas (Ph. D)

13 de octubre de 2019

Thickness



En 1961, Harary propone un problema:

> *Demuestre la siguiente conjetura: Para cualquier gráfica G con 9 vértices, G o su gráfica complementaria $\overline{G}$ es no planar.*

Harary, Battle y Kodoma y Tutte probaron, de manera independiente, que K_9 no es la unión de dos *gráficas planares* (no es biplanar). En 1963, Tutte definió el *thickness* de una gráfica, generalizando el término de biplanaridad.

$\overline{G}$:La gráfica inducida resultante de remover todas las aristas de G de K_n

Gráfica geométrica

Una *gráfica geométrica* $G = (V, E)$ es un par de conjuntos V de puntos en el plano y E de segmentos de recta que unen pares de puntos de V. Llamamos vértices y aristas a estos conjuntos, respectivamente. Una gráfica geométrica es *completa* si contiene a todas las aristas entre pares de vértices de V.

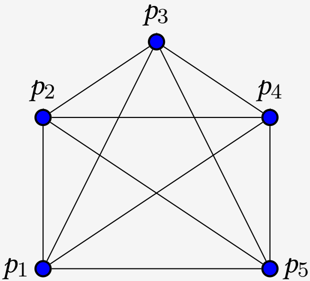
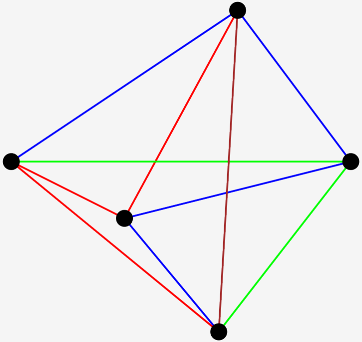


Figura: En esta gráfica geométrica $V = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ y $E = \{(p_1, p_2), (p_1, p_3), \ldots, (p_4, p_5)\}$. Esta gráfica geométrica es completa.

Descomposición de una gráfica

Una descomposición de una gráfica $G = (V, E)$ es una partición del conjunto de aristas E de G, denotado $E(G)$, en un conjunto $\mathcal{D} = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ de subgráficas de G de tal manera que cada elemento de $E(G)$ está en solamente un elemento de $\mathcal{D}$.

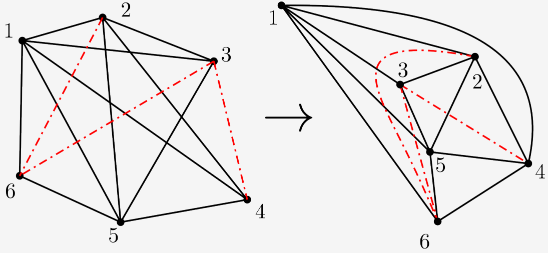


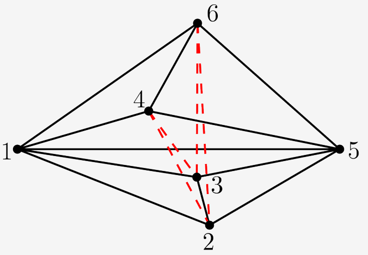
Thickness Geométrico

Entonces podemos definir el thickness $\theta(G)$ de una gráfica G como el mínimo número de gráficas planares en una descomposición de G.

Y el thickness geométrico $\bar{\theta}(G)$ como el número mínimo de gráficas *planas* que existen en una descomposición de G, para todos los *dibujos geométricos* de G.

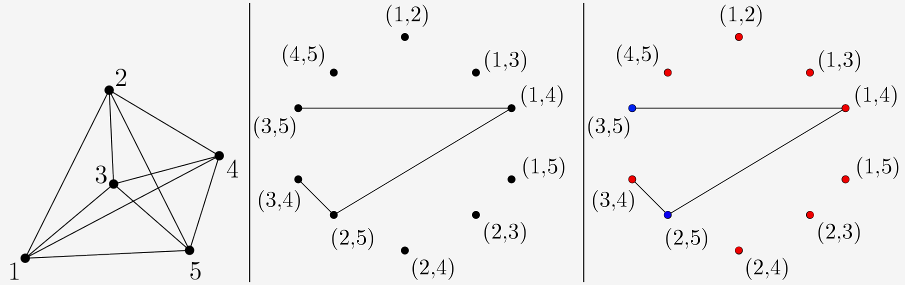
En el año 2000, Dillencourt *et al.* dan el valor exacto del *thickness geométrico* para gráficas completas.


1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6


6
4
1
5
3
2

Gráfica de cruce

Nosotros llamamos gráfica de cruce $E_{pp}(S)$ la gráfica cuyo conjunto de aristas es cada una de las aristas de $K_n(S)$ y cuyo conjunto de aristas contiene la información de los cruces de $K_n(S)$. Es decir, existe una arista entre dos vértices cuando sus aristas correspondientes en $K_n(S)$ se cruzan.



Si encontramos una coloración propia de $C(S)$ las clases cromáticas representan gráficas planas. Luego, el número cromático $\chi(C(S))$ nos dice el mínimo número de gráficas planas que hay en una descomposición de $K_n(S)$.

Por lo tanto: $\overline{\theta}(K_n(S)) = \text{mín}\{\chi(E_{pp}(S)) : S \subset \mathbb{R}^2, |S| = n\}$

El número cromático, $\chi(G)$, de G es el mínimo número de clases cromáticas en una coloración propia de G.

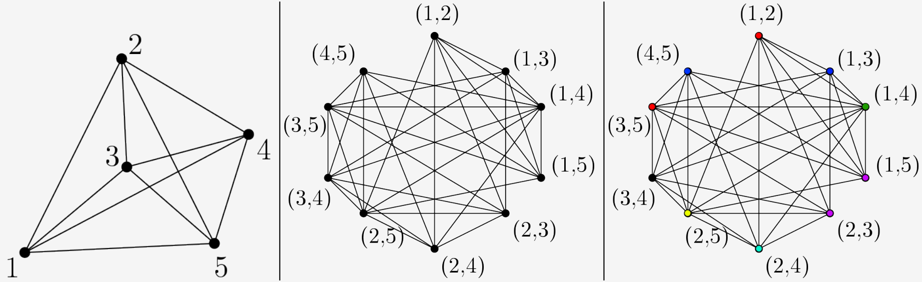
Gráficas de adyacencia

Es posible codificar la información de los cruces de las aristas de una gráfica geométrica usando un tipo de gráficas a las que llamamos *gráficas de adyacencia*.

- Las gráficas de adyacencia tienen como conjunto de vértices a las aristas de la gráfica completa que es inducida por algún conjunto S de n puntos.

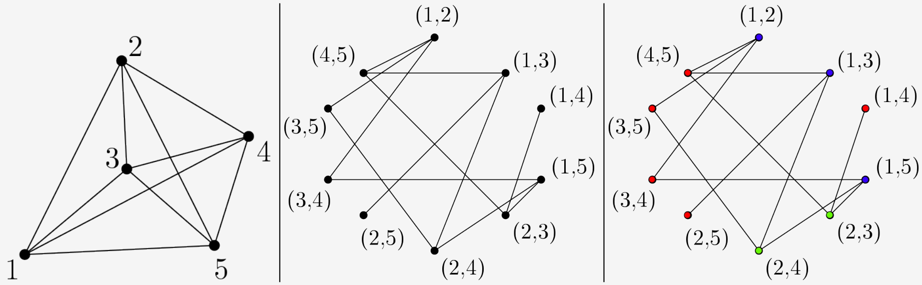
Existen otras gráficas de adyacencia a parte de $C(S)$, si consideramos otro criterio para definir las aristas de cada una podemos obtener diferentes resultados.

Gráficas de adyacencia



- $I(S)$: Existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes comparten un vértice o se cruzan. Las clases cromáticas son *emparejamientos planos.*

Gráficas de adyacencia



- $D(S)$: Existe una arista entre dos vértices si las aristas correspondientes son disjuntas. Las clases cromáticas son *thrackles*.

Descomposiciones de gráficas

En 2000, Dillencourt *et al.* estudiaron:

$$\min\{\chi(C(S)) : S \subset \mathbb{R}^2, \text{ está en posición general}, |S| = n\}$$

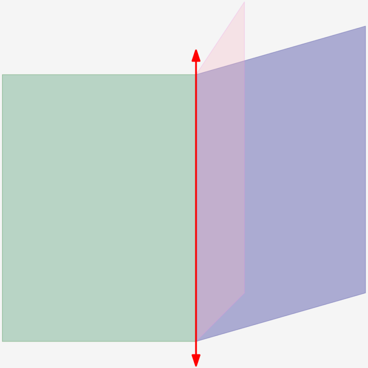
En 2005, Urrutia *et al.* estudiaron:

$$\max\{\chi(G(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general, |S|=n}\}$$

donde $G(S)$ es cada una de las gráficas $W(S), I(S), D(S)$. Ellos probaron cotas para estos parámetros. En otras palabras buscan el máximo número de crossing families, emparejamientos planos y thrackles necesarios en una descomposición de K_n.

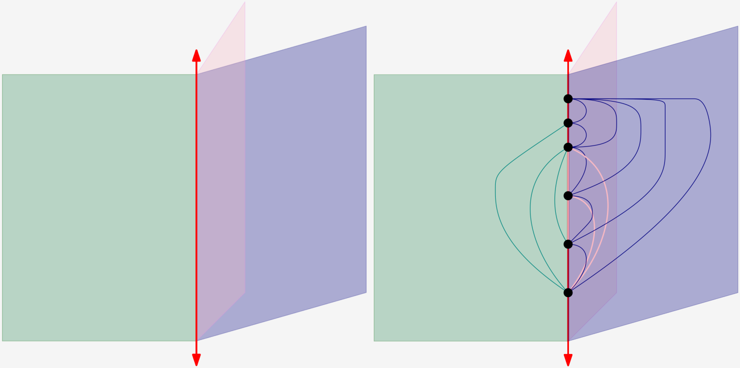
Descomposiciones de gráficas (Book thickness)

Una variante del problema del thickness se basa en colocar los puntos de la gráfica completa sobre un espacio geométrico diferente del plano, específicamente sobre una recta que es compartida por un número finito de semiplanos.



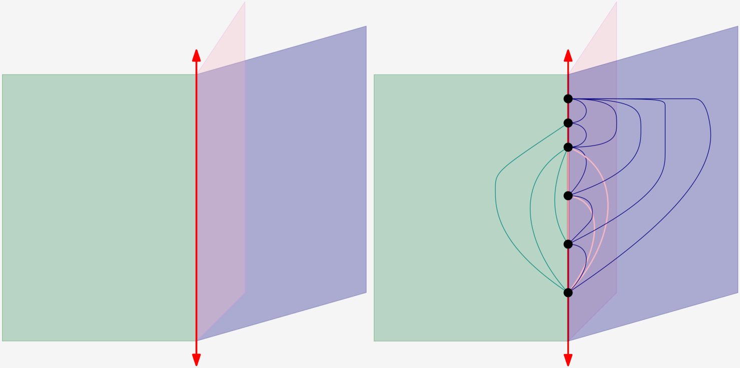
Descomposiciones de gráficas (Book thickness)

Una variante del problema del thickness se basa en colocar los puntos de la gráfica completa sobre un espacio geométrico diferente del plano, específicamente sobre una recta que es compartida por un número finito de semiplanos.



Descomposiciones de gráficas (Book thickness)

Una variante del problema del thickness se basa en colocar los puntos de la gráfica completa sobre un espacio geométrico diferente del plano, específicamente sobre una recta que es compartida por un número finito de semiplanos.

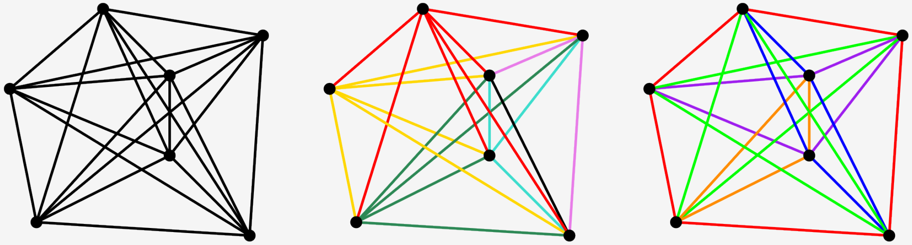


- El book-thickness es igual al thickness en posición convexa.

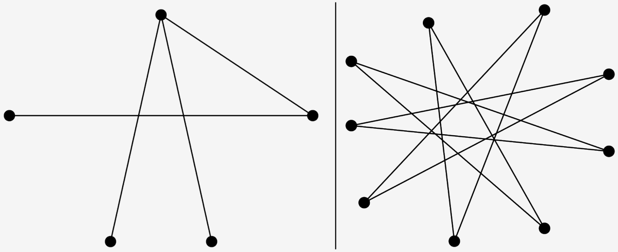
Otras decomposiciones de gráficas

Solo en el plano:

- Bosques
  - Star arboricity
  - Linear arboricity
- Hamiltoninan decomposition of complete graphs
- Cycle decomposition of complete graphs.
- *Thrackles*



Anti-thickness geométrico



- Un *thrackle* es una gráfica geométrica en el que cada par de aristas se cruza o comparten un extremo.

  Sea G una gráfica. El *anti-thickness geométrico* mide cuántos thrackles geométricos existen, como mínimo y para todos los dibujos de G, en una descomposición por thrackles geométricos de G.

Anti-thickness geométrico y el número cromático

Recordemos que $\chi(D(S))$ nos indica cuántos thrackles geométricos hay en una descomposición de la gráfica completa inducida por S.

$$\text{mín}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}$$

nos indica el mínimo numero de thrackles geométricos para todos los dibujos de alguna gráfica inducida por S, esto es, el anti-thickness geométrico.

Anti-thickness geométrico y el número cromático

Recordemos que $\chi(D(S))$ nos indica cuántos thrackles geométricos hay en una descomposición de la gráfica completa inducida por S.

$$\text{mín}\{\chi(D(S)) : S \subset \mathbb{R}^2 \text{ está en posición general}, |S| = n\}$$

nos indica el mínimo numero de thrackles geométricos para todos los dibujos de alguna gráfica inducida por S, esto es, el anti-thickness geométrico.

Notación de anti-thickness geométrico de K_n: $At_g(K_n)$.
Observe que $At_g(K_n) = \text{mín}\{\chi(D(S))\} = \text{máx}\{\chi(D(S))\} = d(n)$ cuando S es un conjunto de n vértices en *posición convexa.*

Anti-thickness geométrico

Para $3 \leq n \leq 10$:

$$At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Estado del arte

Para $n \geq 3$:

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Para encontrar alguna cota inferior es posible explotar alguna propiedad que se cumpla para todas las gráficas geométricas de K_n. Para encontrar una cota superior es posible ofrecer una descomposición de K_n en thrackles.

Estado del arte : cota inferior

Erdős *et al.*(1988) probaron que cada gráfica geométrica con n vértices en la cual no existen dos aristas disjuntas tiene a lo sumo n aristas.

Esto quiere decir que un thrackle máximo tiene a lo sumo n aristas.

Estado del arte : cota inferior

En el trabajo de Wood & Dujmovic se menciona que para $n \geq 3$:

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n).$$

[3] En el mejor caso, una descomposición por thrackles es inducida por una colección de thrackles máximos.

Estado del arte : cota inferior

En el trabajo de Wood & Dujmovic se menciona que para $n \geq 3$:

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n).$$

Esta cota inferior es la más sencilla, se basa en la noción del número máximo de aristas en un thrackle máximo.

Si la gráfica completa tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ aristas, ¿cuántos thrackles máximos son necesarios para *cubrir* todas las aristas? Si suponemos que k thrackles máximos[3] son necesarios la siguiente desigualdad nos otorga el resultado si resolvemos para k:

$$k \cdot n \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

[3]En el mejor caso, una descomposición por thrackles es inducida por una colección de thrackles máximos.

Estado del arte : cota inferior

En el trabajo de Wood & Dujmovic se menciona que para $n \geq 3$:

$$\frac{n-1}{2} \leq At_g(K_n).$$

Esta cota inferior es la más sencilla, se basa en la noción del número máximo de aristas en un thrackle máximo.

Si la gráfica completa tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ aristas, ¿cuántos thrackles máximos son necesarios para *cubrir* todas las aristas? Si suponemos que k thrackles máximos[3] son necesarios la siguiente desigualdad nos otorga el resultado si resolvemos para k:

$$k \cdot n \geq \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow k = \frac{n-1}{2}$$

[3]En el mejor caso, una descomposición por thrackles es inducida por una colección de thrackles máximos.

Estado del arte : cota superior

Fabila-Monroy *et al.* encuentran el anti-thickness exacto cuando S está en posición convexa. Ellos estudian el problema del anti-thickness desde número cromático de $D(S)$. Para la cota inferior establecen el número mínimo de colores necesarios en una coloración propia de $D(S)$ y para la cota superior dan una coloración propia para cualquier n, con $n > 3$.

Estado del arte : cota superior

Fabila-Monroy *et al.* encuentran el anti-thickness exacto cuando S está en posición convexa. Ellos estudian el problema del anti-thickness desde número cromático de $D(S)$. Para la cota inferior establecen el número mínimo de colores necesarios en una coloración propia de $D(S)$ y para la cota superior dan una coloración propia para cualquier n, con $n > 3$.

Ellos establecen que $\chi(D(S)) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$, cuando S está en posición convexa.

Estado del arte : cota superior

Fabila-Monroy *et al.* encuentran el anti-thickness exacto cuando S está en posición convexa. Ellos estudian el problema del anti-thickness desde número cromático de $D(S)$. Para la cota inferior establecen el número mínimo de colores necesarios en una coloración propia de $D(S)$ y para la cota superior dan una coloración propia para cualquier n, con $n > 3$.

Ellos establecen que $\chi(D(S)) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$, cuando S está en posición convexa.

Como la posición convexa es un dibujo de K_n tenemos:

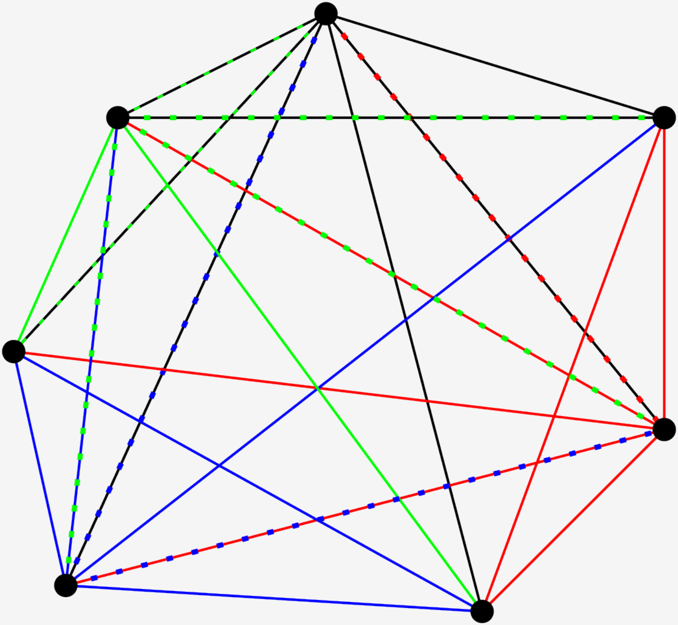
$$At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

Estado del arte : thrackles máximos en posición convexa

Un resultado del trabajo de Fabila-Monroy *et al.* es que prueban que dos thrackles máximos en posición convexa siempre comparten al menos una arista. Esto significa que, en posición convexa y en el mejor caso, una colección de k thrackles máximos cubre a lo sumo $kn - \binom{k}{2}$ aristas. Para obtener el valor más pequeño de k podemos resolver, para k, la siguiente desigualdad :

$$kn - \binom{k}{2} \geq \binom{n}{2}.$$

Usando la ecuación cuadrática encontramos que $k = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$.



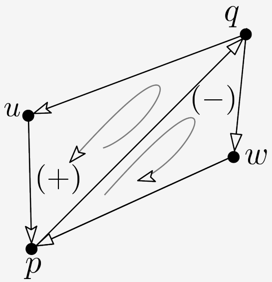
Estado del arte : thrackles máximos en posición general

Estado del arte : thrackles máximos en posición general

- En posición general es muy dificil dibujar thrackles máximos que sean disjuntos.
- La intuición nos dice que el resultado anterior es válido para posición general.
- ¿Cómo probamos *todas* las gráficas geométricas de K_n?

Tipo de orden

Aichholzer *et al.* definen el *tipo de orden* de un conjunto $S = \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ de puntos en posición general como una función que asigna a cada tripleta ordenada $i, j, k \in \{1, 2, \ldots n\}$ la orientación de la tripleta de puntos $\{p_i, p_j, p_k\}$.



Decimos que dos conjuntos de puntos S_1 y S_2 son combinatoriamente equivalentes cuando tienen el mismo tipo de orden.

Tipo de orden

Aichholzer *et al.* ofrecen una base de datos para los tipos de orden de $3 \leq n \leq 10$.

n	Número de tipos de orden	Tamaño (bytes)
3	1	6
4	2	16
5	3	30
6	16	192
7	135	1890
8	3315	53040
9	158817	5 717 412
10	14309547	572 381 880

Cuadro: Tipos de orden para cada $n \leq 10$.

Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

Para analizar cada par de thrackles máximos en algun dibujo de K_n, primero hay que encontrarlos. Por ello, construimos un algoritmo exhaustivo que usa *backtracking* para encontrar thrackles de cualquier tamaño. Nosotros llamamos $k-$thrackle a un thrackle de tamaño k.

Algoritmo de búsqueda de $k-$thrackles

Nosotros representamos un thrackle con una tupla de aristas y cada arista está representada con un entero entre 0 y $\binom{n}{2} - 1$. Por ejemplo, si suponemos que las aristas $1, 2, 3$ y 8 se intersectan a pares, entonces podemos definir un 4$-$thrackle, $T = \{1, 2, 3, 8\}$, compuesto por las aristas antes descritas.

Algoritmo de búsqueda de $k-$thrackles

- Para encontrar un thrackle de 4 aristas, incializamos un `vector` de tamaño 4.

Algoritmo de búsqueda de k—thrackles

- Para encontrar un thrackle de 4 aristas, incializamos un `vector` de tamaño 4.
- Inicializamos la primera posición del vector con un 0 y las demás con un valor nulo.
- Esto indica que el thrackle que estamos buscando actualmente, contiene a la arista 0. $T = \{0, \sim, \sim, \sim\}$
- Como la arista 0 se intersecta con el resto de las aristas en el thrackle, avanzamos a la segunda posición para aumentar el tamaño del thrackle actual.

Algoritmo de búsqueda de $k-$thrackles

- Para encontrar un thrackle de 4 aristas, incializamos un `vector` de tamaño 4.
- Inicializamos la primera posición del vector con un 0 y las demás con un valor nulo.
- Esto indica que el thrackle que estamos buscando actualmente, contiene a la arista 0. $T = \{0, \sim, \sim, \sim\}$
- Como la arista 0 se intersecta con el resto de las aristas en el thrackle, avanzamos a la segunda posición para aumentar el tamaño del thrackle actual.
- La segunda posición es inicializada con el siguiente número inmediato con respecto del contenido de la posición anterior. En este caso la segunda posición tendrá un valor de 1. $T = \{0, 1, \sim, \sim\}$.
- Para verificar que la arista 1 si pertence al thrackle es necesario verificar que esta intersecte a las aristas que ya están establecidas en el thrackle.

- Si la arista 1 no intersecta a la arista 0, entonces el thrackle $T = 0, 1, ..$ no existe, por lo tanto examinamos la siguiente arista disponible, en este caso 2. Supongamos que este es el caso y que la arista 2 sí intersecta a la arista 1. $T = \{0, 2, \sim, \sim\}$.
- Avanzamos a la siguiente posición y repetimos el proceso anterior. $T = \{0, 2, 3, \sim\}$
- Si la arista 3 intersecta a las aristas 0 y 2, entonces puede quedarse en el thrackle. En otro caso debemos examinar la arista 4.
- Repetimos este proceso iterativo hasta que lleguemos a la cuarta posición y encontremos una arista que intersecte al resto.

Supongamos que encontramos el thrackle $T = \{0, 2, 3, 5\}$, lo procesamos y ahora tenemos que buscar el siguiente thrackle de tamaño 4.

- Si la arista 1 no intersecta a la arista 0, entonces el thrackle $T = 0, 1, ..$ no existe, por lo tanto examinamos la siguiente arista disponible, en este caso 2. Supongamos que este es el caso y que la arista 2 sí intersecta a la arista 1. $T = \{0, 2, \sim, \sim\}$.
- Avanzamos a la siguiente posición y repetimos el proceso anterior. $T = \{0, 2, 3, \sim\}$
- Si la arista 3 intersecta a las aristas 0 y 2, entonces puede quedarse en el thrackle. En otro caso debemos examinar la arista 4.
- Repetimos este proceso iterativo hasta que lleguemos a la cuarta posición y encontremos una arista que intersecte al resto.

Supongamos que encontramos el thrackle $T = \{0, 2, 3, 5\}$, lo procesamos y ahora tenemos que buscar el siguiente thrackle de tamaño 4.
Para ello, incrementamos el valor de la última posición $T = \{0, 2, 3, 6\}$ y repetimos el proceso para verificar que la arista 6 intersecte a las aristas 0,2 y 3.

En caso positivo, repetimos el proceso. En caso negativo, incrementamos el valor de dicha posición.

En caso positivo, repetimos el proceso. En caso negativo, incrementamos el valor de dicha posición.

Si en algún momento, cualquiera de las posiciones alcanza el valor máximo $\binom{n}{2} - 1$, entonces hacemos *backtrack*. Regresamos una posición atrás, e incrementamos el valor de esa posición en uno. Esto es porque ya explotamos todas las posibles combinaciones que empiezan, por ejemplo, con $T = \{0, 2, 3, \sim\}$. En este punto el proceso continúa normalmente. $T = \{0, 2, 4, \sim\}$

¿Condición de paro? Operando de esta manera, el algoritmo encuentra todos los thrackles de 4 aristas, que empiecen con la arista 0, luego todos los que empiecen con la arista 1, los que empiecen con la arista 2, y así sucesivamente.

En caso positivo, repetimos el proceso. En caso negativo, incrementamos el valor de dicha posición.

Si en algún momento, cualquiera de las posiciones alcanza el valor máximo $\binom{n}{2} - 1$, entonces hacemos *backtrack*. Regresamos una posición atrás, e incrementamos el valor de esa posición en uno. Esto es porque ya explotamos todas las posibles combinaciones que empiezan, por ejemplo, con $T = \{0, 2, 3, \sim\}$. En este punto el proceso continúa normalmente.
$T = \{0, 2, 4, \sim\}$

¿Condición de paro? Operando de esta manera, el algoritmo encuentra todos los thrackles de 4 aristas, que empiecen con la arista 0, luego todos los que empiecen con la arista 1, los que empiecen con la arista 2, y así sucesivamente. Cuando la primera posición alcance el valor $\binom{n}{2} - 1$ el algoritmo intentará hacer backtrack pero no podrá acceder a la posición -1, aprovechamos esta característica para detener y finalizar el algoritmo.

Costo computacional

El peor caso es aquel en el que evaluamos todas las combinaciones de tamaño t con $t \leq k$. Analizar una combinación de tamaño t toma $O(t)$. Además existen $\left(\binom{\binom{n}{2}}{t}\right)$ combinaciones de tamaño t. Entonces necesitamos $t\left(\binom{\binom{n}{2}}{t}\right)$ operaciones para evaluar todas las combinaciones de tamaño t. En nuestro peor caso, $t \in [1, 10]$, por lo que el costo de nuestro algoritmo en el pero caso es:

$$O\left(\sum_{t=1}^{10} t\binom{\binom{n}{2}}{t}\right) = O\left(\binom{\binom{n}{2}}{1} + 2\binom{\binom{n}{2}}{2} + 3\binom{\binom{n}{2}}{3} + \cdots + 10\binom{\binom{n}{2}}{10}\right) =$$

$$= O(n^2) + O(n^4) + O(n^6) + \cdots + O(n^{20}) =$$

$$= O(n^{20})$$

Costo computacional - tiempos de ejecución

En realidad, el algoritmo tomó mucho menos tiempo de lo calculado. Esto es porque el peor caso no ocurre.

n	Tiempo teórico en cluster	Tiempo real en cluster
10	2113.99 años	3 días
9	257.01 años	12 minutos
8	24.36 años	6 segundos

Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

Una vez que hicimos las intersecciones de cada par de thrackles máximos en todos los dibujos de K_n, con $3 \leq n \leq 10$ encontramos los siguientes resultados:

- Para todo tipo de orden con al menos dos thrackles máximos, cada par de thrackles máximos tienen intersección no vacía en aristas.
- Existen tipos de orden con solo un thrackle máximo.
- Existen tipos de orden en los que no hay thrackles máximos.

Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

Esto nos permite calcular el número exacto de aristas cubiertas, en el mejor caso, por una descomposición que es inducida por una colección de thrackles máximos.

Nosotros probamos que, m thrackles máximos pueden cubrir a lo sumo:

$$-\frac{1}{2}m(m-2n-1)$$

aristas de la gráfica completa.

Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

Esto nos permite calcular el número exacto de aristas cubiertas, en el mejor caso, por una descomposición que es inducida por una colección de thrackles máximos.

Nosotros probamos que, m thrackles máximos pueden cubrir a lo sumo:

$$-\frac{1}{2}m(m-2n-1)$$

aristas de la gráfica completa.

n	$m = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$	$-\frac{1}{2}m(m-2n-1)$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	2	9	10
6	3	15	15
7	3	18	21
8	4	26	28
9	4	30	36
10	5	40	45

Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

De la misma manera, para saber cuántos thrackles son necesarios para cubrir todas las aristas de la gráfica completa, debemos resolver la siguiente desigualdad para m:

$$-\frac{1}{2}m(m-2n-1) \geq \binom{n}{2}.$$

Usando la ecuación cuadrática encontramos que

$$m = n - \left\lfloor \sqrt{2n+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Estado del arte : construyendo la nueva cota inferior

n	$m = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$	$-\frac{1}{2}m(m - 2n - 1)$	$\binom{n}{2}$
3	1	3	3
4	2	7	6
5	3	12	10
6	3	15	15
7	4	22	21
8	5	30	28
9	6	39	36
10	6	45	45

Tenemos una nueva cota inferior para $3 \leq n \leq 10$:

$$At_g(K_n) \geq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Anti-thickness geométrico de K_n para $3 \leq n \leq 10$

Con el resultado anterior y el resultado del estado del arte tenemos que, para $3 \leq n \leq 10$:

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Anti-thickness geométrico de K_n para $3 \leq n \leq 10$

Con el resultado anterior y el resultado del estado del arte tenemos que, para $3 \leq n \leq 10$:

$$n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \leq At_g(K_n) \leq n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$At_g(K_n) = n - \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Anti-thickness geométrico de K_n para $3 \leq n \leq 10$

Recordemos que la cota superior fue obtenida encontrando el anti-thickness de un dibujo específico, el que está en posición convexa.

Recordemos que si S es un conjunto de n vértices en posición convexa, entonces

$$At_g(K(S)) = \min\{D(S)\} = \max\{D(S)\} = d(n)$$

¿Qué pasa con el anti-thickness de dibujos en posición general no convexa?

Anti-thickness de dibujos en posición general no convexa

Nosotros encontramos dibujos, en posición general no convexa, que tienen anti-thickness igual al anti-thickness del dibujo en posición convexa. Esto lo hicimos para cada n con $3 \leq n \leq 10$. Con esto podemos dar el anti-thickness geométrico exacto para K_n, con n en el rango antes mencionado.

Para encontrar estos resultados empleamos un algoritmo exhaustivo que busca descomposiciones por thrackles en la que cada elemento sea un thrackle máximo.

Summary

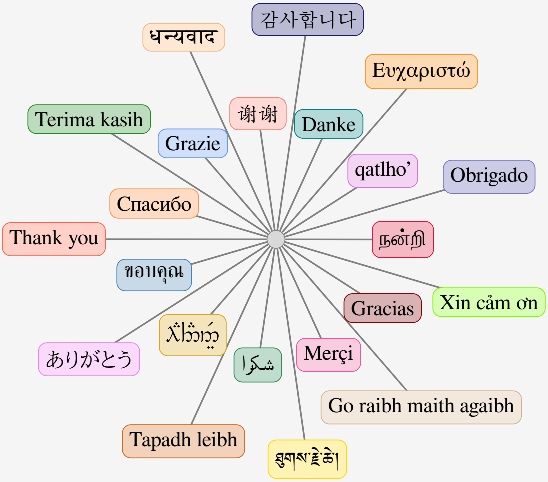
- LaTeX
  - a document preparation system
  - professional quality typesetting output

Summary

- $\LaTeX$
  - a document preparation system
  - professional quality typesetting output
- Output artefacts
  - Academic: papers, theses, books
  - Dedicated document types
  - Domain-specific material

Summary

- LaTeX
  - a document preparation system
  - professional quality typesetting output
- Output artefacts
  - Academic: papers, theses, books
  - Dedicated document types
  - Domain-specific material
- Usage scenario
  - Direct authoring
  - Automatic generation (via scripts etc)
  - As back-end of other applications



Questions?

liantze@gmail.com, support@overleaf.com

http://tex.stackexchange.com

Want to download this deck?