

# 1 Completar un thrackle no máximo a un thrackle máximo.

## 1.1 Posición convexa

Un thrackle  $t$  no máximo siempre puede ser completado a un thrackle máximo. Sea  $n$  el número de puntos en la gráfica, entonces un thrackle  $h$  necesita  $n$  aristas para ser máximo. Sea  $|t| = k < n$  puede pasar una de las siguientes:

1.  $t$  tenga un ciclo impar  $C_t$ .
2.  $t$  no contenga un ciclo impar.

Si sucede 1), entonces simplemente agregamos las aristas que salen de los vértices ápice de cada cuña definida por  $C_t$ . Si sucede 2), entonces para cada vértice  $v$  de  $t$  añadimos una arista saliente de  $v$  que cruce a las demás aristas de  $t$  incluidas las nuevas hasta que el grado de  $v$  sea exactamente 2. Al final estaremos en el caso 1).

## 1.2 Posición general

No todos los thrackles no maximos pueden ser completados a un thrackle máximo. Observemos el tipo de orden 3 para  $n = 5$ , en este caso no hay ningún thrackle maximo, el thrackle de mayor tamaño tiene 4 aristas. Tomemos cualquiera de estos thrackles de 4 aristas, y no es posible agregar una arista de tal manera que la condición de thrackle se mantenga.

En un caso más general: para que un thrackle sea maximo necesita contener un ciclo impar, un ciclo impar de tamaño  $k$  requiere  $k$  vértices en posición convexa.

Tomemos un thrackle  $t$  que no sea máximo, entonces sucede una de las siguientes:

1.  $t$  tiene un ciclo impar de tamaño  $k$
2.  $t$  no tiene un ciclo impar.

Si sucede 1) y los  $n - k$  vértices restantes están en posición convexa entonces puede suceder una de las siguientes:

1. Los vértices restantes están contenidos en cuñas definidas por los vértices ápice del ciclo. En este caso  $t$  puede ser completado a un thrackle máximo.
2. No todos los vértices restantes están contenidos en cuñas definidas por los vértices del ápice del ciclo. En este caso  $t$  no puede ser completado a un thrackle máximo

Si sucede 2) podemos intentar completar el ciclo impar de manera asimilar al caso en posición convexa, esto nos dejaría en el caso 1) de posición general.