

ВВЕДЕНИЕ

Под названием “транспортная задача” объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Классическая транспортная задача – задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов производства в пункты потребления, встречается чаще всего в практических приложениях линейного программирования. Линейное программирование является одним из разделов математического программирования – области математики, разрабатывающей теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Огромное количество возможных вариантов перевозок затрудняет получение достаточно экономного плана эмпирическим или экспертным путем. Применение математических методов и вычислительных в планировании перевозок дает большой экономический эффект. Транспортные задачи могут быть решены симплексным методом однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальное решение. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.

В зависимости от способа представления условий транспортной задачи она может быть представлена в сетевой (графовой) или матричной (табличной) форме.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1 Общая задача линейного программирования

Линейное программирование является одной из основных частей того раздела современной математики, который получил название математического программирования. В общей постановке задачи этого раздела выглядят следующим образом.

Имеются какие-то переменные $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и функция этих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G :

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{extr}_x \\ x \in G. \end{cases}$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ и области G и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д.

Линейное программирование характеризуется тем, что

а) функция $f(x)$ является линейной функцией переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

б) область G определяется системой линейных равенств или неравенств.

Имеются некоторые стандартные формы задач линейного программирования, к которым и приводят различные конкретные задачи.

Первая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид:

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n &\Rightarrow \max \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &\leq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m, \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots; \quad x_n &\geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Вторая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид:

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &\Rightarrow \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\ &..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m, \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots; \quad x_n &\geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Канонической формой задачи линейного программирования называется задача вида:

$$\begin{aligned}
 & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \min \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\
 & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\
 & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \dots; \quad x_n \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{3) }$$

Функцию $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ называют целевой функцией.

Любой набор чисел $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, удовлетворяющий ограничениям задачи, называют планом, а множество всех планов \square допустимой областью. Тот план, который доставляет экстремум (минимум или максимум) целевой функции, называют оптимальным планом или просто решением задачи линейного программирования.

Правила приведения задач линейного программирования к стандартной и канонической формам

Рассмотрим теперь те приёмы, которые позволяют произвольные формы задач линейного программирования приводить к указанным выше стандартным формам.

1. Превращение max в min и наоборот.

Если целевая функция в задаче линейного программирования задана в виде $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \min$, то, умножая её на (-1) , приведем её к виду $(-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \dots + (-c_n)x_n \Rightarrow \max$, так как смена знака приводит к смене \min на \max . Аналогично можно заменить \max на \min .

2. Смена знака неравенства.

Если ограничение задано в виде $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$, то, умножая на (-1), получим: $(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \dots + (-a_{in})x_n \geq -b_i$. Аналогично, неравенство вида больше либо равно можно превратить в неравенство вида меньше либо равно.

3. Превращение равенства в систему неравенств.

Если ограничение задано в виде $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, то его можно заменить эквивалентной системой двух неравенств $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$, $(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \dots + (-a_{in})x_n \leq -b_i$, или такой же системой неравенств со знаками больше либо равно. Указанные выше приемы позволяют приводить задачи линейного программирования к стандартной форме.

4. Превращение неравенств в равенства.

Пусть исходная форма задачи линейного программирования имеет вид

[illegible]

Здесь первые r ограничений имеют вид неравенств со знаком меньше либо равно $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$, $i = \overline{1, r}$, затем идет группа неравенств со знаком больше либо равно $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$, $i = \overline{r+1, p}$, и, наконец, группа ограничений со знаком $=$. Для приведения задачи к канонической форме, где все ограничения имеют вид равенств, вводят дополнительные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p}$, которые тоже считаются неотрицательными и записывают исходную задачу в виде:

5)

Для решения прикладных задач линейного программирования разработаны специальные методы линейного программирования, учитывающие регулярный характер задач данного типа и указанное свойство множества допустимых решений.[3]

1.2 Транспортная задача линейного программирования

Под названием “транспортная задача” объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены симплексным методом. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные

методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение. Различают два типа транспортных задач: по критерию стоимости (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию) и по критерию времени (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).

Пусть имеется некоторый однородный продукт, сосредоточенный на m пунктах отправления (складах), так что на i -м складе находится a_i единиц этого продукта.

Этот продукт необходимо доставить в n пунктов назначения (потребления), причем на j -й пункт необходимо доставить b_j единиц продукта. Запасы и потребности сбалансированы, то есть

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (6)$$

то есть наличие продукта равно потребности в нем.

Пусть стоимость перевозки единицы продукта из i -го склада в j -й пункт назначения равна c_{ij} . Пусть x_{ij} есть то количество продукта, которое перевозится из i -го склада в j -й пункт потребления.

Тогда общие транспортные расходы составят величину

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}. \quad (7)$$

Из каждого склада весь продукт должен быть вывезен. Это значит, что должно быть выполнено условие

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i. \quad (8)$$

С другой стороны, потребности j -го пункта назначения должны быть полностью удовлетворены. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j. \quad (9)$$

Желание минимизировать транспортные расходы приводит нас к следующей задаче:

$$\begin{cases} \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

являющейся типичной задачей линейного программирования, с условиями-равенствами (8), (9) и минимизируемой линейной функцией (10). Особенностью этой задачи является то, что все коэффициенты в условиях (8) и (9) равны единице – это позволяет решить задачу довольно простыми способами.

1.3 Приведение несбалансированной транспортной задачи к сбалансированной

Транспортная задача называется несбалансированной транспортной задачей, если условие баланса нарушаются; в случае выполнения условия баланса она называется сбалансированной транспортной задачей. Очевидно, в случае сбалансированной модели весь имеющийся в наличии груз развозится полностью, и все потребности заказчиков полностью удовлетворены; в случае же открытой модели либо все заказчики удовлетворены и при этом на некоторых базах остаются излишки груза ($a > b$), либо весь груз оказывается израсходованным, хотя потребности полностью не удовлетворены ($a < b$). Если в реальной задаче условия баланса не выполняются, то можно добиться его выполнения искусственными приемами:

1. Превышение запасов над потребностями.

В этом случае вводится “фиктивный” $n+1$ потребитель с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $n+1$ потребителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.

2. Превышение потребностей над запасами.

Вводим “фиктивного” $m+1$ производителя с потребностями равными абсолютной величине разности между общим количеством запасов и общим количеством требуемых единиц. Стоимость по доставке будет для $m+1$ производителя равна 0, т.к. поставки фактически нет.[5]

Так же существуют одноэтапные модели задач, где перевозка осуществляется напрямую от, например, пункта отправления к потребителю, и двухэтапные, где между ними имеется “перевалочный пункт”, например – склад.

План перевозок с указанием запасов и потребностей удобно записывать в виде следующей таблицы 1, называемой таблицей перевозок:

Таблица 1 – Таблица перевозок

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_n	$a = b$ или $a \neq b$

Условие $a = b$ или $a \neq b$ означает, с какой задачей мы имеем дело, со сбалансированной моделью или несбалансированной моделью транспортной задачи.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

2.1 Методы нахождения опорных планов

Опорный план является допустимым решением транспортной задачи и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения транспортной задачи. План перевозок является *допустимым*, если он удовлетворяет условиям (14) и (15) (все заявки удовлетворены, все запасы исчерпаны). Допустимый план называется *опорным*, если в нём отличны от нуля не более $m + n - 1$ базисных

перевозок, а остальные перевозки равны нулю. План (x_{ij}) будет называться *оптимальным*, если он, среди всех допустимых планов, приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок (16).

Наиболее известные методы нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента, метод двойного предпочтения и метод аппроксимации Фогеля.

Рассмотрим систему ограничений (16) транспортной задачи. Она содержит m неизвестных и $m+n$ уравнений, связанных соотношением (12). Если сложить почленно уравнения подсистем (16), то получим два одинаковых уравнения. В таблице 1 такое сложение равнозначно соответственно почленному сложению столбцов и почленному сложению строк.

Наличие в системе ограничений двух одинаковых уравнений говорит об ее линейной зависимости. Если одно из этих уравнений отбросить, то в общем случае система ограничений должна содержать $m + n - 1$ линейно независимых уравнений, следовательно, невырожденный опорный план транспортной задачи содержит $m + n - 1$ положительных компонент или перевозок.

Таким образом, если каким-либо способом получен невырожденный опорный план транспортной задачи, то в матрице (x_{ij}) ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) значений его компонент (таблица 1) положительными являются только $m + n - 1$, а остальные равны нулю.

Если условия транспортной задачи и её опорный план записаны в виде таблицы (таблица 1), то клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки, называются занятыми, остальные — незанятыми. Занятые клетки соответствуют базисным неизвестным, и для невырожденного опорного плана их количество равно $m + n - 1$. Если ограничения транспортной задачи записаны в виде (16), то, как известно, базисным неизвестным, включенным в опорный план, соответствует система линейно независимых векторов (Система векторов a_1, a_2, \dots, a_k называется *линейно независимой*, если равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$). Опорность плана при записи условий транспортной задачи в виде таблицы (таблица 1) заключается в его ацикличности, т. е. в таблице нельзя построить замкнутый цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках.

Циклом называется набор клеток вида $(i_1 j_1) (i_1 j_2) (i_2 j_2) \dots (i_l j_m)$, в котором две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или одной строке таблицы, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая. Построение циклов начинают с какой-либо занятой клетки и переходят по столбцу (строке) к другой занятой клетке, в которой делают поворот под прямым углом и движутся по строке (столбцу) к следующей занятой клетке и т. д., пытаясь возвратиться к первоначальной клетке (таблица 2). Найдем цикл в таблице 2, первая

вершина которого лежит в свободной клетке $A_1 B_5$, а остальные – все в базисных клетках. Получаем цикл, который заканчивается опять же в клетке $A_1 B_5$. Нечетные вершины цикла отмечены плюсом – это значит, что перевозки в этих клетках увеличиваются, четные – знаком минус (перевозки уменьшаются). Если такой возврат возможен, то получен цикл и план не является опорным. Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют вершины цикла. В противном случае план является опорным.

Таблица 2 – Построение циклов

Пункты назначения	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
Пункты отправления						
A_1	13 18	- 7 12	14	7	+ 5	30
A_2	11	+ 8 15	12 22	- 6 11	8	48
A_3	6	10	10 20	8	11	20
A_4	14	8	10	+ 10 4	- 15 26	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128

Всякий, план транспортной задачи, содержащий более $m + n - 1$ занятых клеток, не является опорным, так как ему соответствует линейно зависимая, система векторов. При таком плане в таблице всегда можно построить замкнутый цикл, с помощью которого уменьшают и число занятых клеток до $m + n - 1$.

Если к занятым клеткам, определяющим опорный невырожденный план, следовательно, и ациклический, присоединить какую-либо незанятую клетку, то план становится неопорным, появляется единственный цикл, все вершины которого, за исключением одной, лежат в занятых клетках.

Все существующие методы нахождения опорных планов отличаются только способом выбора клетки для заполнения. Само заполнение происходит одинаково независимо от используемого метода. Следует помнить, что перед нахождением опорного плана транспортная задача должна быть сбалансирована.

2.1.1 Метод северо-западного угла

Пусть условия транспортной задачи заданы таблицей 3. Не учитывая стоимости перевозки единицы груза, начинаем удовлетворение потребностей первого потребителя B_1 за счет запаса поставщика A_1 . Для этого сравниваем $a_1 = 50$ с $b_1 = 100$, $a_1 < b_1$, меньший из объемов, т. е. равный 50 единицам записываем в левый нижний угол клетки $A_1 B_1$. Запасы первого поставщика полностью израсходованы, по этому остальные клетки первой строки прочеркиваем. Потребности B остались неудовлетворенными на $100 - 50 = 50$ единиц. Сравниваем этот остаток с запасами поставщика A_2 : так как $50 < 125$, то 50 единиц записываем в клетку $A_2 B_1$, чем полностью удовлетворяем потребности потребителя B_1 , а оставшиеся клетки в первом столбце прочеркиваем.

Таблица 3 – Построение опорного плана методом северо-западного угла

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 50	7 -	4 -	1 -	4 -	50
A_2	2 50	7 75	10 -	6 -	11 -	125
A_3	8 -	5 25	3 50	2 25	2 -	100
A_4	11 -	8 -	12 -	16 25	13 125	150
Потребности	100	100	50	50	125	425

У поставщика A_2 осталось 75 ед. груза. Удовлетворяем потребителя B_2 за счет оставшегося у поставщика A_2 груза. Для этого сравниваем этот остаток с потребностями потребителя B_2 : $75 < 100$, записываем 75 ед. в клетку $A_2 B_2$ и, так как запасы A_2 полностью израсходованы, прочеркиваем остальные клетки второй строки. Потребности B_2 остались неудовлетворенными на 25 единиц. Удовлетворяем их за счет поставщика A_3 и переходим к удовлетворению B_3 за счет остатка, имеющегося у поставщика A_3 и так далее. Процесс продолжаем до тех пор, пока не удовлетворим всех потребителей за счет запасов поставщиков. На этом построение первоначального опорного плана заканчивается.

Таким образом, в таблице 3 в правых верхних углах клеток стоят числа, определяющие стоимость перевозки единицы грузов, а в левых

нижних углах — числа, определяющие план перевозок, так как их сумма по строкам равна запасам соответствующего поставщика, а сумма по столбцам — потребности соответствующего потребителя.

Проверим, является ли план, построенный в таблице 3, опорным. Видим, что, начиная движение от занятой клетки $A_1 B_1$ вернуться не только в нее, но и в любую другую занятую клетку, двигаясь только по занятым клеткам, невозможно. Следовательно, план является опорным. В то же время план невырожденный, так как содержит точно $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ занятых клеток.

При составлении первоначального опорного плана методом северо-западного угла стоимость перевозки единицы груза не учитывалась, поэтому построенный план далек от оптимального.

Найдем общую стоимость составленного плана как сумму произведений объемов перевозок, стоящих в левом углу занятых клеток, на соответствующие стоимости в этих же клетках:

$$Z = 50 \cdot 10 + 50 \cdot 2 + 75 \cdot 7 + 25 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 25 \cdot 2 + 25 \cdot 16 + 125 \cdot 13 = 3475$$
(единиц стоимости).

Если при составлении опорного плана учитывать стоимость перевозки единицы груза, то, очевидно, план будет значительно ближе к оптимальному.

2.1.2 Метод минимальной стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i или b_i . Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Составим с помощью этого метода опорный план уже рассмотренной задачи. Запишем ее условие в таблицу (таблица 4). Выбираем в таблице наименьшую стоимость (это стоимость, помещенная в клетке $A_1 B_4$), так как $a_1 = b_4$, 50 единиц груза помещаем в этой клетке и исключаем из рассмотрения первую строку и четвертый столбец. В оставшейся таблице стоимостей наименьшей является стоимость, расположенная в клетке $A_2 B_1$ и в клетке $A_3 B_5$. Заполняем любую из них, например $A_2 B_1$. Имеем $100 < 125$, следовательно, записываем в нее 100 и исключаем из рассмотрения столбец B_1 . В клетку $A_3 B_5$ записываем 100 ед. и исключаем из рассмотрения строку

A_3 . В оставшейся таблице стоимостей снова выбираем наименьшую стоимость и продолжаем процесс до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Таблица 4 – Построение опорного плана методом минимальной стоимости

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 50	4 -	50
A_2	2 100	7 25	10 -	6 -	11 -	125
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 100	100
A_4	11 -	8 75	12 50	16 -	13 25	150
Потребности	100	100	50	50	125	425

План не содержит циклов и состоит из семи положительных перевозок, следовательно, является вырожденным опорным планом. Определим его стоимость:

$Z = 50 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 25 \cdot 7 + 100 \cdot 2 + 75 \cdot 8 + 50 \cdot 12 + 25 \cdot 13 = 2150$
(единиц)

Стоимость плана перевозок значительно меньше, следовательно, он ближе к оптимальному.

2.1.3 Метод двойного предпочтения

Если таблица стоимостей велика, то перебор всех элементов затруднителен. В этом, случае используют метод двойного предпочтения, суть которого заключается в следующем.

В каждом столбце отмечают знаком V клетку с наименьшей стоимостью. Затем то же проделывают в каждой строке. В результате некоторые клетки имеют отметку VV. В них находится минимальная стоимость как по столбцу, так и по строке. В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок, каждый раз исключая из рассмотрения соответствующие столбцы или строки. Затем распределяют перевозки по клеткам, отмеченным знаком V. В оставшейся части таблицы перевозки распределяют по наименьшей стоимости.

Применим метод двойного предпочтения к задаче, условия которой записаны в таблице 5.

Таблица 5 – Построение опорного плана методом двойного предпочтения

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	VV 1 50	4 -	50
A_2	VV 2 100	7 -	10 25	6 -	11 -	125
A_3	8 -	V 5 -	V 3 -	V 2 -	VV 2 100	100
A_4	11 -	V 8 100	12 25	16 -	13 25	150
Потребности	100	100	50	50	125	425

Сначала заполняем клетки $A_2 B_1$, $A_1 B_4$, $A_3 B_5$, а затем клетку $A_4 B_2$. В оставшейся части таблицы последовательно заполняем клетки по минимальной стоимости $A_2 B_3$, $A_4 B_3$, $A_4 B_5$. План, полученный в таблице 4, является вырожденным опорным планом. Найдем его стоимость:

$$Z = 50 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 25 \cdot 10 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 8 + 25 \cdot 12 + 25 \cdot 13 = 2125 \text{ (единиц).}$$

Таким образом, наименьшую стоимость имеет опорный план, полученный методом двойного предпочтения, следовательно, он наиболее близок к оптимальному плану.

2.1.4 Метод аппроксимации Фогеля

При определении опорного плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля находят разность по всем столбцам и по всем строкам между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице 6. Среди указанных разностей выбирают максимальную. В нашем случае максимальная разность равна 6. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальная стоимость (клетка $A_2 B_1$). Переносим 100 единиц из запасов в эту клетку таблицы. Теперь самая наибольшая разность равна 4. Минимальная стоимость находится в $A_2 B_4$. Сюда переносим остаток - 25 единиц запасов из строки A_2 . Максимальная разность равна теперь 3, и она одинаковая, как в строке A_1 , так и в A_4 . При

наличии двух одинаковых наибольших разностей загрузку записывают в клетку, имеющую наименьшую стоимость. Это значит, что происходит загрузка в клетку $A_1 B_4$ в количестве 25 единиц, так как стоимость перевозки в ней равна 1. Такой алгоритм действий продолжается до тех пор, пока не будет составлена допустимая программа распределения.

Найдем стоимость полученного опорного плана:

$$Z = 100 \cdot 2 + 100 \cdot 8 + 25 \cdot 4 + 25 \cdot 12 + 25 \cdot 1 + 25 \cdot 6 + 100 \cdot 2 + 25 \cdot 13 = 2100 \text{ (единиц)}$$

Таблица 6 – Получение опорного плана методом аппроксимации Фогеля

Поставщики	Потребители					Запасы	Разности						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5								
A_1	10 -	7 -	4 25	1 25	4 -	50	3	3	3	3			
A_2	2 100	7 -	10 -	6 25	11 -	125	4	4					
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 100	100	1	1	1	1	1	1	1
A_4	11 -	8 100	12 25	16 -	13 25	150	3	3	3	3	3	3	3
Потребности	100	100	50	50	125	425							
Разности	6	2	1	1	2								
		2	1	1	2								
		2	1	1	2								
		2	2		2								
		2	2		2								
			2		2								
					2								

2.2 Методы нахождения оптимального опорного плана

2.2.1 Венгерский метод

Идея метода была высказана венгерским математиком Эгервари и состоит в следующем: строится начальный план перевозок, не удовлетворяющий в общем случае всем условиям задачи (из некоторых

пунктов производства не весь продукт вывозится, потребность части пунктов потребления не полностью удовлетворена). Далее осуществляется переход к новому плану, более близкому к оптимальному. Последовательное применение этого приема за конечное число итераций приводит к решению задачи.

Алгоритм венгерского метода состоит из подготовительного этапа и из конечного числа итераций. На подготовительном этапе строится матрица $X_0 = (x_{ij}[0])_{m,n}$ (матрица с неотрицательными элементами, в каждом столбце которой имеется, по крайней мере, один нуль), элементы которой удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij}[0] &\leq a_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij}[0] &\leq b_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

Если эти условия являются равенствами, то матрица X_0 - решение транспортной задачи. Если среди условий имеются неравенства, то осуществляется переход к первой итерации. На k -й итерации строится матрица $X_k = (x_{ij}[k])_{m,n}$. Близость этой матрицы к решению задачи характеризует число Δ_k — суммарная невязка матрицы X_k :

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}[k]. \quad (11)$$

В результате первой итерации строится матрица X_1 , состоящая из неотрицательных элементов. При этом $\Delta_1 < \Delta_0$. Если $\Delta_1 = 0$, то X_1 - оптимальное решение задачи. Если $\Delta_1 > 0$, то переходят к следующей итерации. Они проводятся до тех пор, пока Δ_k при некотором k не станет равным нулю. Соответствующая матрица X_k является решением транспортной задачи.

Венгерский метод наиболее эффективен при решении транспортных задач с целочисленными объемами производства и потребления. В этом случае число итераций не превышает величины $\Delta_0/2$ (Δ_0 - суммарная невязка подготовительного этапа).

Достоинством венгерского метода является возможность оценивать близость результата каждой из итераций к оптимальному плану перевозок. Это позволяет контролировать процесс вычислений и прекратить его при достижении определенных точностных показателей. Данное свойство существенно для задач большой размерности.

Найти решение транспортной задачи со следующими условиями (таблица 7):

Таблица 7 – Условия транспортной задачи

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	5	3	11
A_2	2	4	5	9	11
A_3	6	3	1	2	8
Потребности	5	9	9	7	30

Проверим условие баланса $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = 30$

Предварительный этап. В каждом из столбцов матрицы транспортных издержек отыскивают минимальный элемент, который вычитают из всех элементов этого столбца. Вычитаем из элементов первого столбца 2, из второго - 3, из третьего - 1, из четвертого - 2. Приходим к таблице 8. Далее, вычитая минимальный элемент из элементов каждой строки, получаем таблицу 9.

Строим начальную матрицу перевозок (таблица 10). Все элементы первого столбца, которым соответствуют ненулевые элементы в матрицы, заполняют нулями, а остальные элементы этого столбца заполняют по методу северо-западного угла.

Таблица 8 – Предварительный этап венгерского метода (шаг 1)

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	5	4	1	11
A_2	0	1	4	7	11
A_3	4	0	0	0	8
Потребности	5	9	9	7	30

Таблица 9 – Предварительный этап венгерского метода (шаг 2)

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	4	3	0	11
A_2	0	1	4	7	11
A_3	4	0	0	0	8
Потребности	5	9	9	7	30

Таблица 10 – Начальная матрица перевозок

Поставщики	Потребители				Запасы	Невязка для строк
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 0	8 0	5 0	3 7	11	4
A_2	2 5	4 0	5 0	9 0	11	6
A_3	6 0	3 8	5 0	2 0	8	0
Потребности	5	9	9	7	30	
Невязка для столбцов	0	1	9	0		

Суммарная невязка равна 20.

Первая итерация. Первый этап. Отмечаем знаком '+' сверху первый и четвертый столбцы, которым соответствуют нулевые невязки, а знаком 'x' слева первую и вторую строки, которым отвечают ненулевые невязки, черточкой - существенные нули (существенным нулем называется такой элемент стоимости для таблицы 11, который равен 0 и для которого количество перевозимого товара (таблица 10) больше 0).

Таблица 11 – Первая итерация (первый этап)

Поставщики	Потребители				Запасы	Невязка для строк
	$B_1 +$	B_2	B_3	$B_4 +$		
A_1 x	4	4	3	0 -	11	4
A_2 x	0 -	1	4	7	11	6
$A_3 +$	4	0' -	0	0	8	0
Потребности	5	9	9	7	30	
Невязка для столбцов	0	1	9	0		

Просматриваем невыделенный второй столбец таблицы 11, находим в нем невыделенный нуль $A_3 B_2$ и отмечаем его штрихом. Так как невязка для строки A_3 равна 0, то выделяем третью строку знаком '+'. Просматриваем третью строку относительно выделенных столбцов. Там существенных нулей нет. Поскольку в таблице 11 больше не осталось невыделенных нулей (все нули расположены в выделенных строках или столбцах), то переходим к третьему этапу.

Третий этап. Среди элементов невыделенных строк и столбцов таблицы 11 находим минимальный элемент, он равен 1, прибавляем его ко всем элементам выделенных столбцов и вычитаем из всех элементов невыделенных строк. Получим таблицу 12.

Таблица 12 – Первая итерация (третий этап)

Поставщики	Потребители				Запасы	Невязка для строк
	$B_1 +$	B_2	B_3	$B_4 +$		
A_1 x	4	3	2	0	11	4
A_2 x	0	0'	3	7	11	6
A_3	5	0	0	0	8	0
Потребности	5	9	9	7	30	
Невязка для столбцов	0	1	9	0		

Переходим к первому этапу.

Первый этап. Среди невыделенных столбцов находим нулевой элемент $A_2 B_2$, который расположен в строке с ненулевой невязкой, а потому переходим ко второму этапу.

Второй этап. Цепочка состоит из одного элемента $A_2 B_2$ равного 0. Находим минимальную невязку, она равна 1 и прибавляем её к элементу $A_2 B_2$ в таблице 10. Получим таблицу 13.

Таблица 13 – Первая итерация (второй этап)

Поставщики	Потребители				Запасы	Невязка для строк
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 0	8 0	5 0	3 7	11	4
A_2	2 5	4 1	5 0	9 0	11	5
A_3	6 0	3 8	5 0	2 0	8	0
Потребности	5	9	9	7	30	
Невязка для столбцов	0	0	9	0		

Вторая итерация. Первый этап. В таблице 14 отмечаем знаком '+' первый, второй и четвертый столбцы, которым отвечают нулевые невязки. Находим в третьем столбце нуль $A_3 B_3$ и отмечаем его штрихом.

Так как невязка в третьей строке равна нулю, то выделяем ее знаком '+'. Просматриваем эту строку, находим в ней существенный нуль $A_3 B_2$, расположенный в выделенном столбце. Отмечаем его звездочкой и уничтожаем знак выделения второго столбца.

Далее просматриваем второй столбец и отыскиваем в нем невыделенный нуль $A_2 B_2$. Так как невязка по строке больше 0, то, отметив этот нуль штрихом, переходим ко второму этапу.

Второй этап. Строим цепочку в таблице 14 вида $A_2 B_2 - A_3 B_2 - A_3 B_3$, а затем аналогичную цепочку в таблице 13. В результате получаем таблицу 15 (минимальная привязка 5).

Далее, просмотрев вторую строку, находим в ней существенный нуль $A_2 B_1$ в выделенном первом столбце. Поэтому выделяем этот нуль звездочкой и уничтожаем знак '+' над первым столбцом.

Таблица 16 – Третья итерация (первый этап)

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	$B_4 +$	
A_1	4	3	2	0 -	11
$A_2 +$	0 *	0 '	3	7	11
A_3	5	0 *	0 '	1	8
Потребности	5	9	9	7	30

На этом процесс выделения нулей заканчиваем. Так как больше выделенных нулей не имеется, то переходим к третьему этапу.

Третий этап. Находим минимальный невыделенный элемент в таблице 16, он равен 2, вычитаем 2 из всех элементов невыделенных строк и прибавляем ко всем элементам выделенных столбцов (т.е. прибавляем к четвертому столбцу и вычитаем из первой строки). В результате получим таблицу 17, в которой появился новый невыделенный нуль ($A_1 B_3$).

Таблица 17 – Третья итерация (первый этап)

Поставщики	Потребители				Запасы	Невязка для строк
	$B_1 +$	$B_2 +$	B_3	$B_4 +$		
A_1	2	1	0 '	0 -	11	4
A_2	0 -	0 -	3	9	11	0
A_3	5	0 -	0 -	3	8	0
Потребности	5	9	9	7	30	
Невязка для столбцов	0	0	4	0		

Четвертая итерация. Первый этап. В таблице 18 находим невыделенный нуль $A_1 B_3$. Так как невязка больше 0, то переходим ко второму этапу.

Четвертая итерация. Второй этап. Цепочка состоит из одного элемента $A_1 B_3$ равного 0. Находим минимальную невязку, она равна 4 и прибавляем её к элементу $A_1 B_3$ в таблице 8. Получим таблицу 19.

Таблица 18 – Четвертая итерация (первый этап)

Поставщики	Потребители				Запасы	Невязка для строк
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 0	8 0	5 0 ,	3 7	11	4
A_2	2 5	4 6	5 0	9 0	11	0
A_3	6 0	3 3	5 5	2 0	8	0
Потребности	5	9	9	7	30	
Невязка для столбцов	0	0	4	0		

Таблица 19 - Четвертая итерация (второй этап)

Поставщики	Потребители				Запасы	Невязка для строк
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	7 0	8 0	5 0+4=4	3 7	11	0
A_2	2 5	4 6	5 0	9 0	11	0
A_3	6 0	3 3	5 5	2 0	8	0
Потребности	5	9	9	7	30	
Невязка для столбцов	0	0	0	0		

Так как все невязки теперь равны 0, то таблица 19 является оптимальным планом. Соответствующее значение целевой функции равно 89.

2.2.2 Метод потенциалов

1. Построение системы потенциалов. Для построения системы потенциалов используем условие:

$$U_i + V_i = C_{ij}, \quad (12)$$

где U_i и V_i называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей, а C_{ij} - стоимость перевозки единицы груза занятой клетки в i -й строке и j -м столбце.

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана. Такой план содержит $m + n - 1$ занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из $m+n-1$ линейно независимых уравнений вида (12) с $m + n$ неизвестными. Уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому система является неопределенной и одному неизвестному (обычно U_1) придают нулевое значение. После этого остальные потенциалы определяются однозначно.

Пусть известен потенциал U_i ; тогда из равенства (12) следует $V_i = C_{ij} - U_i$.

Если известен потенциал V_i , то из того же равенства имеем: $U_i = C_{ij} - V_i$. Таким образом, для определения неизвестного потенциала от величины C_{ij} занятой клетки следует вычесть известный потенциал.

В таблице 20 опорный план вырожденный, так как не хватает одной занятой клетки. Поэтому выбираем строку, которая содержит наибольшее количество занятых клеток (строка A_4), и полагаем $U_4 = 0$. В строке A_4 три занятых клетки ($A_4 B_2$, $A_4 B_3$ и $A_4 B_5$), которые связывают соответственно потенциал U_4 с потенциалами V_2 , V_3 , V_5 . Определим эти потенциалы: $V_2 = C_{42} - U_4 = 8 - 0 = 8$, $V_3 = C_{43} - U_4 = 12 - 0 = 12$, $V_5 = C_{45} - U_4 = 13 - 0 = 13$. С помощью потенциала U_4 определить еще какой-нибудь неизвестный потенциал невозможно, поэтому отмечаем его знаком V . Теперь поочередно просматриваем столбцы B_2 , B_3 и B_5 , для которых потенциалы уже определены. В столбце B_2 имеются две занятые клетки ($A_2 B_2$ и $A_4 B_2$), которые связывают потенциал V_2 с потенциалами U_2 и U_4 ; потенциал U_4 уже определен. Переходим к клетке $A_2 B_2$ и с помощью C_{22} определим неизвестный потенциал: $U_2 = C_{22} - V_2 = 7 - 8 = -1$. Отмечаем потенциал V_2 знаком V и переходим к столбцу B_3 . В этом столбце нет занятых клеток, которые бы связывали V_3 с неизвестными потенциалами строк. Отмечаем потенциал V_3 знаком V и переходим к столбцу B_5 . В нем одна занятая клетка

($A_3 B_5$), которая связывает V_5 с неизвестным потенциалом U_3 . Определим его:
 $U_3 = C_{32} - V_5 = 2 - 13 = -11$.

Таблица 20 – Построение системы потенциалов

Матрица планирования		Потребители					Запасы
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Поставщики	Потенциалы	V $V_1=3$	V $V_2=8$	V $V_3=12$	V $V_4=13$	V $V_5=13$	
A_1	V $U_1=-12$	10	7	4	1 50	4	50
A_2	V $U_2=-1$	2 100	- 7 25	10 1	+ 6 6	11 1	125
A_3	V $U_3=-11$	8	5	3	- 2 0	+ 2 100	100
A_4	V $U_4=0$	11	+ 8 75	12 50	16	- 13 25	150
Потребности		100	100	50	50	125	425

Отмечаем потенциал V_3 знаком V и, так как неизвестные потенциалы столбцов использованы, переходим к известным потенциалам строк, которые еще не отмечены знаком V , затем просматриваем соответствующие им строки.

Потенциал U_2 занятой клеткой $A_2 B_1$ связан с неизвестным потенциалом V_1 . Находим этот потенциал: $V_1 = 2 - (-1) = 3$ и отмечаем потенциал U_2 знаком V .

В строке A_3 нет занятых клеток, которые связывали бы потенциал U_3 с неизвестным потенциалом столбца; потенциал U_3 отмечаем знаком V .

Переходим к известным потенциалам столбцов, которые не отмечены знаком V (это потенциал V_1). Но в столбце B_1 нет занятых клеток, которые связывали бы V_1 с неизвестным потенциалом строки, поэтому потенциал V_1 отмечаем знаком V . Построение системы потенциалов прервалось, потенциалы U_1 и V_4 остались неопределенными. Это произошло потому, что опорный план вырожденный (отсутствует одна занятая клетка). Для устранения вырожденности дополняют количество занятых клеток до $m + n - 1$, вводя нулевые перевозки. Клетки, в которые введены нулевые перевозки, называются фиктивно занятыми.

Чтобы определить потенциалы U_1 и V_4 , необходимо сделать фиктивно занятой одну из незанятых клеток либо строки A_1 , либо столбца B_4 , для которых один из потенциалов определен. Задача решается на минимизацию линейной функции, поэтому целесообразно сделать фиктивно занятой клетку, в которой стоит наименьшая стоимость.

Просматривая стоимости, стоящие в незанятых клетках строки A_1 и столбца B_4 , выбираем наименьшую ($\min C_{ij} = 2$), которая соответствует клетке $A_3 B_4$, в нее записываем нуль и считаем занятой. Теперь клетка $A_3 B_4$ связывает потенциал V_4 с потенциалом U_3 , $V_4 = C_{34} - U_3 = 2 - (-11) = 13$. Затем находим $U_1 = C_{34} - V_4 = 1 - 13 = -12$.

Система потенциалов построена, знаки V , которыми отмечались потенциалы, следует стереть. Проверяем правильность построения системы. Для этого просматриваем занятые клетки строк и для каждой из них определяем сумму потенциалов. Если для всех занятых клеток выполняется равенство (17), то система построена правильно, в противном случае ее надо построить заново или изменить так, чтобы условие (17) выполнялось.

2. Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток. Просматриваем строки и для каждой незанятой клетки проверяем выполнение условия

$$U_i + V_j \leq C_{ij}, \quad (13),$$

т. е. суммируем потенциалы, на пересечениях которых стоит незанятая клетка, сумму сравниваем со стоимостью, стоящей в ней. Если для всех незанятых клеток $U_i + V_j \leq C_{ij}$, то план оптимальный. Если для некоторых клеток $U_i + V_j > C_{ij}$, то план является неоптимальным. Тогда для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину разности $(U_i + V_j) - C_{ij}$ и записываем ее значение в левый нижний угол этой же клетки.

В таблице 20 для незанятых клеток последовательно получаем: для строки A_1 : $-9 < 10$, $-4 < 7$, $0 < 4$, $-8 < 4$; для строки A_2 : для клетки $A_2 B_3$ имеем $11 > 10$ или $11 - 10 = 1$; условие оптимальности нарушено, разность, равную единице, записываем в эту клетку; для клетки $A_2 B_4$ имеем $12 > 6$, $12 - 6 = 6$, условие также нарушено, разность, равную шести, записываем в эту клетку; для клетки $A_2 B_5$ имеем $12 > 11$, $12 - 11 = 1$, разность, равную единице, записываем в клетку; для строки A_3 : $-8 < 8$, $-3 < 5$, $1 < 3$; для строки A_4 : $3 < 11$, $13 < 16$.

Таким образом, имеются три клетки, в которых нарушено условие оптимальности; разности соответственно равны 1, 6 и 1.

3. Выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку.

Загрузке подлежит в первую очередь клетка, которой соответствует $\max ((U_i + V_i) - C_{ij})$.

Таким образом, в рассматриваемом примере $\max (1; 6; 1) = 6$, клетку $A_2 B_4$ необходимо сделать занятой. Для этого сначала необходимо определить, сколько единиц груза должно быть перераспределено в нее.

4. Построение цикла и определение величины перераспределения груза. Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком «+» незанятую клетку, которую надо загрузить. Это означает, что клетка присоединяется к занятым клеткам. В таблице занятых клеток стало $m + n$, поэтому появляется цикл, все вершины которого, за исключением клетки, отмеченной знаком «+», находятся в занятых клетках, причем этот цикл единственный. Отыскиваем цикл и, начиная движение от клетки, отмеченной знаком «+», поочередно проставляем знаки «-» и «+». Затем находим $\tau = \min x'_{ij}$, где x'_{ij} — перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком «-». Величина τ определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Значение τ записываем в незанятую клетку, отмеченную знаком «+», двигаясь по циклу, вычитаем τ из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые отмечены знаком «-», и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+». Если τ соответствуют несколько минимальных перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы во вновь полученном опорном плане занятых клеток было $m - n - 1$.

В рассматриваемом примере клетку $A_2 B_4$ отмечаем знаком «+» и находим цикл, приведенный в таблице 20. Имеем $\tau = \min (25; 25; 0) = 0$, т. е. нулевую перевозку необходимо переместить в клетку $A_2 B_4$ остальные числа при вычитании и прибавлении нуля, очевидно, не изменятся.

5. В результате перераспределения τ получен новый опорный невырожденный план (таблица 21), который снова подлежит проверке на оптимальность. Для проверки на оптимальность нового опорного плана можно вновь построить систему потенциалов и проверить выполнение условия оптимальности для каждой незанятой клетки.

Если полученный план снова окажется неоптимальным, то следует выполнить вычисления, приведенные в пункте 4. Процесс повторяют до тех пор, пока все незанятые клетки не будут удовлетворять условию (18).

Построение новой системы потенциалов и проверка всех незанятых клеток на оптимальность требуют значительных затрат времени, поэтому рассмотрим порядок изменения системы потенциалов, позволяющий значительно сократить объем вычислительных работ.

Таблица 21 – Изменение системы потенциалов (этап 1)

Матрица планирования		Потребители					Запасы
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Поставщики	Потенциалы	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=13=7$	$v_5=13$	
A_1	$U_1=-12=-6$	10	7	4 2	- 1 50	+ 4 3	50
A_2	$U_2=-1$	2 100	- 7 25	10 1	+ 6 0	11 1	125
A_3	$U_3=-11$	8	5	3	2	2 100	100
A_4	$U_4=0$	11	+ 8 75	12 50	16	- 3 25	150
Потребности		100	100	50	50	125	425

6. Изменение системы потенциалов. В новом опорном плане, записанном в таблице 21, пока указаны старые потенциалы. Клетка $A_2 B_4$ прежде свободная, теперь стала занятой. Для занятой клетки должно выполняться условие $U_i + V_i = C_{ij}$. В действительности же $U_2 + V_4 = -1 + 13 = 12 \neq 6$. Следовательно, необходимо либо U_2 , либо V_4 уменьшить на шесть. Очевидно, что уменьшать следует тот потенциал, уменьшение которого приводит к наименьшему изменению остальных потенциалов. Так, если изменить V_4 , а потенциал U_2 оставить без изменения, то изменению подлежит только потенциал U_1 ; в противном случае изменяются все остальные потенциалы. Отмечаем потенциал U_2 знаком «!», а потенциал V_4 — знаком «-». Изменение потенциала V_4 , так как клетка $A_1 B_4$ занята, потребует изменения потенциала U_1 (отмечаем его знаком «+»); на этом цепочка изменений обрывается.

Таким образом, значения потенциалов, отмеченных знаком «-», уменьшаются, а знаком «+» — увеличиваются (в данном случае на 6 единиц). В результате для всех занятых клеток выполняется соотношение (17). Значение потенциала V_4 уменьшилось на 6 единиц, поэтому свободные клетки в столбце B_4 не удовлетворяющие условию оптимальности, появиться не могут. Если же такие клетки были, то они могут исчезнуть, так как разность, равная шести, максимальна для всех клеток, в которых нарушено это

условие. Свободные клетки, не удовлетворяющие условию оптимальности, могут появиться только в строке (столбце), потенциал которой увеличился. Потенциал U_1 увеличился на 6 единиц, поэтому незанятые клетки строки A_1 следует проверить на оптимальность: $-3 < 10$; $2 < 7$; $6 > 4$; $7 > 4$. Клетки $A_1 B_3$ и $A_1 B_5$ не удовлетворяют этому условию; находим для них величины разностей $(U_i + V_j) - C_{ij}$ и записываем их в левый нижний угол соответствующих клеток.

Определяем $\max(2; 3; 1; 1) = 3$. Клетка $A_1 B_5$ подлежит загрузке, отмечаем ее знаком «+» и устанавливаем цикл перераспределения, показанный в таблице 21. Отмечаем вершины цикла попеременно знаками «-» и «+» и находим $\tau = \min(25; 25; 50) = 25$. По циклу перераспределяем 25 единиц груза в клетку $A_1 B_3$ и получаем опорный план, приведенный в таблице 22.

Таблица 22 – Изменение системы потенциалов (этап 2)

Матрица планирования		Потребители					Запасы
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Поставщики	Потенциалы	$V_1=3$	$V_2=8$	$V_3=12$	$V_4=7$	$V_5=13=10$	
A_1	$U_1 = -6$	10	7	+ 4 2	- 1 25	4 25	50
A_2	$U_2 = -1$	2 100	- 7 0	10 1	+ 6 25	11	125
A_3	$U_3 = -11 = -8$	8	5	3	2	2 100	100
A_4	$U_4 = 0$	11	+ 8 100	- 12 50	16	3	150
Потребности		100	100	50	50	125	425

Так как значение $\tau = 25$ достигается для двух клеток цикла, отмеченных знаком «-», то в полученном опорном плане в клетке $A_2 B_2$ оставлена нулевая перевозка.

Заметим, что план в результате последней итерации улучшился на 75 ед. стоимости. Это улучшение находится как произведение количества

единиц груза, перемещенного в свободную клетку, на величину разности в этой клетке. Величина

разности $(U_i + V_i) - C_{ij} > 0$ в незанятой клетке показывает, на сколько уменьшится стоимость плана перевозок, если единицу груза перераспределить в эту клетку.

В полученном опорном плане изменяем систему потенциалов и проверяем его на оптимальность. Условию оптимальности не удовлетворяют две клетки с разностями, равными двум и единице, следовательно, груз надо перераспределить в клетку $A_1 B_3$. Отмечаем ее знаком «+» и строим цикл перераспределения, который показан в таблице 20. Циклы могут иметь различную конфигурацию, быть даже самопересекающимися (таблица 22).

Отмечаем вершины цикла знаками «-» или «+» и находим величину перераспределения: $\tau = \min(25; 0; 50) = 0$. Нулевую перевозку перемещаем в клетку $A_1 B_3$, получаем новый опорный план и вносим изменения в систему потенциалов. Построенная система потенциалов позволяет сделать вывод, что план, приведенный в таблице 23, является оптимальным. Его стоимость равна $Z = 25 \cdot 1 + 25 \cdot 4 + 100 \cdot 2 + 25 \cdot 6 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 8 + 50 \cdot 12 = 2075$ единиц стоимости.

Таблица 23 – Оптимальный план (метод потенциалов)

Матрица планирования		Потребители					Запасы
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
Поставщики	Потенциалы	$V_1=3$	$V_2=8=6$	$V_3=12=10$	$V_4=7$	$V_5=10$	
A_1	! $U_1 = -6$	10	7	4	1 25	4 25	50
A_2	$U_2 = -1$	2 100	7	10	6 25	11	125
A_3	$U_3 = -8$	8	5	3	2	2 100	100
A_4	+ $U_4 = 0 = 2$	11	8 100	12 50	16	3	150
Потребности		100	100	50	50	125	425

2.2.3 Дельта-метод

При составлении плана перевозок, с помощью транспортной задачи линейного программирования большое значение имеет время, затраченное на ее решение.

Применение метода двойного предпочтения и метода потенциалов для решения транспортной задачи с 10—15 поставщиками и 15—20 потребителями требует 4—5 часов непрерывных вычислений. Это происходит потому, что существующие методы составления первоначального опорного плана позволяют получить план, далекий от оптимального. Как показала практика, использование дельта-метода совместно с методом потенциалов дает возможность найти оптимальный план в 3—4 раза быстрее, причем чем больше размеры таблицы, тем ощутимее разница во времени. Это объясняется тем, что в результате применения дельта-метода всегда находится оптимальный план. Если построенный план оказался неоптимальным, то это произошло только в результате допущенных в процессе построения плана ошибок. Алгоритм дельта-метода рассмотрим на примере транспортной задачи, записанной в таблице 24.

1. Преобразуем таблицу C_{ij} в таблицу приращений ΔC_{ij} , выбирая в каждом столбце наименьшую стоимость и вычитая ее из всех стоимостей столбца. Значения ΔC_{ij} записываем под соответствующими значениями C_{ij} .

2. Таблицу ΔC_{ij} преобразуем в таблицу $\Delta \bar{C}_{ij}$, выбирая в каждой строке наименьшее приращение и вычитая его из всех приращений строки; результаты записываем под значениями ΔC_{ij} . Если в какой-нибудь строке уже имеется нулевое приращение после первого преобразования, то в этой строке приращения оставляем без изменения и преобразуем приращения строк, не содержащих нулевых приращений.

В таблице 24 преобразованию подлежат приращения строки A_4 , где $\min \Delta C_{ij} = 1$. Появившиеся в таблице нули указывают на наименьшие приращения стоимостей по отношению к наименьшим стоимостям, выбранным в столбцах.

3. Просматриваем столбцы, содержащие одно нулевое приращение, и в клетки, содержащие его, записываем потребности b_j , не обращая внимания на величину запасов поставщиков. Затем просматриваем столбцы, содержащие два нулевых приращения, и клетки, содержащие их, заполняем, учитывая ранее произведенное закрепление и запасы поставщиком. Потом переходим к столбцам, содержащим три, четыре и так далее нулевых приращения; процесс закрепления потребителей за поставщиками продолжаем до тех пор, пока все объемы потребностей не будут закреплены за поставщиками.

Таблица 24 – Получение оптимального опорного плана дельта-методом (1 этап)

Матрица планирования	Потребители						a_i	Δa_i	$\min \Delta \bar{C}_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Поставщики		V	V						
A_1	200 10 0	19 8	17 10	18 1	16 1	21 5	450	+ 250	8
A_2	13 3	14 3	11 4	+ 17 100 0	18 3	- 19 3	400	+ 300	3
A_3	15 5	- 11 300 0	7 400 0	19 2	19 4	22 6	150	- 550	
A_4	14 4 3	+ 13 2 1	12 5 4	18 1 150 0	21 6 5	23 7 6	150	0	1
A_5	21 11	23 12	10 3	20 3	15 150 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140 0	-	-

В таблице 24 в столбцах B_1, B_2, B_3, B_5 и B_6 по одной клетке с нулевыми приращениями; записываем в эти клетки потребности соответствующих потребителей. В столбце B_4 два нулевых приращения, стоящие в клетках $A_2 B_4$ и $A_4 B_4$. За поставщиком A_4 , следует закрепить 150 единиц потребностей, а за поставщиком A_2 — 400 единиц. Имеется же всего 250 единиц, поэтому планируем полное удовлетворение поставщика A_4 и 100 единиц закрепляем за поставщиком A_2 .

В результате получено первоначальное закрепление потребителей на поставщиками по нулевым приращениям стоимостей.

4. Подсчитываем для строк $\Delta a_i = a_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Если все $\Delta a_i = 0$, то построение плана закончено. Он же является оптимальным, так как все грузы перевозятся с наименьшими приращениями стоимостей.

В общем случае получаем: а) для одних строк $\Delta a_i = 0$ (такие строки называются нулевыми); б) для других $\Delta a_i < 0$ (такие строки называются избыточными и отмечаются знаком «-»); в) для третьих $\Delta a_i > 0$ (такие строки называются недостаточными и отмечаются знаком «+»).

В рассматриваемом примере $\Delta a_1 = 450 - 200 = 250$; $\Delta a_2 = 400 - 100 = 300$; $\Delta a_3 = 150 - 700 = -550$; $\Delta a_4 = 150 - 150 = 0$; $\Delta a_5 = 250 - 250 = 0$, т. е. A_1 и A_2 — недостаточные, A_3 — избыточная, A_4 и A_5 — нулевые строки. Для закрытой модели сумма Δa_i избыточных строк всегда должна быть равна сумме Δa_i недостаточных строк. Так как $\Delta a_1, \Delta a_2$ и Δa_3 не равны нулю, то первоначальное закрепление не является планом. Чтобы получить план, необходимо избыточные 550 единиц потребностей, закрепленных за поставщиком A_3 , закрепить за поставщиками A_1 и A_2 соответственно в количестве 250 и 300 единиц.

В первоначальном закреплении потребности распределены по нулевым приращениям, поэтому дальнейшее их перезакрепление связано с увеличением суммарной стоимости планируемых перевозок. Необходимо 550 единиц потребностей перезакрепить за поставщиками A_1 и A_2 таким образом, чтобы получить при этом минимальное приращение стоимости на единицу перезакрепленных потребностей. Для этого выполняем следующие операции.

5. Отмечаем знаком \vee столбцы, имеющие занятые клетки в избыточных строках. В таблице 24 это столбцы B_2 и B_3 .

6. Для каждой недостаточной и нулевой строки сравниваем $\Delta \bar{C}_{ij}$, стоящие в отмеченных столбцах, выбираем наименьшее и проставляем в последнюю графу таблицы. Имеем: $\min(8; 10) = 8$ (для недостаточной строки A_1); $\min(3; 4) = 3$ (для недостаточной строки A_2); $\min(1; 4) = 1$ (для нулевой строки A_4); $\min(12; 3) = 3$ (для нулевой строки A_5). Эти значения оказывают, какое приращение стоимости на данном шаге будет

получено, если единицу потребности непосредственно перезакрепить от поставщика A_3 соответственно к поставщикам A_1, A_2, A_4, A_5 .

7. В последней графе таблицы просматриваем $\Delta\bar{C}_{ij}$ недостаточных строк, выбираем наименьшее и сравниваем его с $\Delta\bar{C}_{i_0j}$ для нулевых строк. При этом могут быть два случая: а) для каждой нулевой строки $\min \Delta\bar{C}_{ij} \leq \Delta\bar{C}_{i_0j}$; б) для некоторых нулевых строк $\min \Delta\bar{C}_{ij} > \Delta\bar{C}_{i_0j}$.

Если выполняется условие (а), то производится непосредственное перераспределение потребности из избыточной строки в недостаточную в клетку отмеченного столбца, которой соответствует $\min \Delta\bar{C}_{ij}$. Величина перераспределения равна $\min(x_{ij}; |\Delta a_{i_r}|)$, где x_{ij} — величина перевозки, стоящая в отмеченном столбце избыточной строки; Δa_{i_r} — величина разностей, находящихся в избыточной и недостаточной строках.

9. Если для некоторой нулевой строки выполняется условие (б), то перераспределение проверяем по цепочкам, идущим через эту нулевую строку из избыточной строки в недостаточную. Для построения цепочки в нулевой строке в отмеченном столбце находим клетку, для которой $\Delta\bar{C}_{i_0j} < \min \Delta\bar{C}_{ij}$, и отмечаем ее знаком «+», в этом же столбце находим занятую клетку, стоящую в избыточной строке, и отмечаем ее знаком «-» — начало цепочки. Начиная движение по построенному звену цепочки от «-» к «+» попадаем в нулевую строку, затем передвигаемся по нулевой строке к занятой клетке и отмечаем ее знаком «-», далее по столбцу переходим в клетку недостаточной строки и отмечаем ее знаком «+». Цепочка построена.

Если матрица содержит большое число нулевых строк, то цепочки перераспределения могут проходить через несколько нулевых строк и их количество значительно возрастает, поэтому руководствуемся следующим правилом. При переходе из одной нулевой строки в другую определяем полученную сумму приращений и сравниваем ее с минимумом приращений в выделенных столбцах данной строки. Если полученная сумма превышает этот минимум, то продолжение цепочки по данной строке не рассматриваем. Очевидно также, что если сумма приращений, полученная при переходе в недостаточную строку, меньше, чем при переходе в любую другую нулевую строку, то не следует рассматривать продолжение цепочки переходом в нулевую строку.

Составляем для каждой цепочки алгебраическую сумму приращений $\sum_i \sum_j \Delta\bar{C}_{ij}$, считая их отрицательными, если они стоят в клетке, отмеченной знаком «-», и положительными, если клетка отмечена знаком «+».

Полученную сумму сравниваем с $\min \Delta\bar{C}_{ij}$: а) если $\sum_i \sum_j \Delta\bar{C}_{ij} \geq \min \Delta\bar{C}_{ij}$ для всех построенных цепочек, то отбрасываем их и производим

непосредственно перераспределение; б) если $\sum_i \sum_j \Delta \bar{C}_{ij} < \min \Delta \bar{C}_{ij}$, то перераспределение производим по цепочке, для которой эта сумма наименьшая. При этом возможный объём перераспределения по цепочке равен $\min(x_{i_k j_p}; |\Delta a_{i_r}|)$, где $x_{i_k j_p}$ — числа, указывающие на перевозки, которые стоят в клетках, отмеченных знаком «-», $1 \leq k \leq m$, $1 \leq p \leq n$; Δa_{i_r} — разности, стоящие в избыточной и недостаточной строках, в которых начинается и заканчивается цепочка, $1 \leq r \leq m$. Следуя по цепочке, вычитаем величину перераспределения из чисел, помещенных в клетках, отмеченных знаком «-», и прибавляем к числам, которые стоят в клетках, отмеченных знаком «+», на эту же величину изменяем Δa_{i_r} . В результате получаем новое закрепление потребителей за поставщиками.

В таблице 24 в последней графе находим для недостаточных строк $\min \Delta \bar{C}_{ij} = \min(8; 3) = 3$. Сравниваем это значение с $\Delta \bar{C}_{i_0 j}$ нулевых строк. Для нулевой строки A_4 выполняется условие (б) пункта 7 алгоритма, поэтому перераспределение проводим по цепочке. Для построения цепочки находим в строке A_4 приращение $\Delta \bar{C}_{4,2} = 1$, стоящее в отмеченном столбце, и эту клетку отмечаем знаком «+», в столбце B_2 находим занятую клетку $A_3 B_2$, которая находится в избыточной строке, и отмечаем ее знаком «-». Начинаем движение по звену цепочки $A_3 B_2 - B_2 A_4$ и приходим в нулевую строку A_4 ; находим в ней занятую клетку $A_4 B_4$ и отмечаем ее знаком «-»; затем по столбцу B_4 переходим в клетку недостаточной строки. В данном случае цепочку можно окончить в двух клетках ($A_1 B_4$ и $A_2 B_4$), которые и отмечаем знаками «+». Получены две цепочки: $A_3 B_2 - B_2 A_4 - A_4 B_4 - B_4 A_1$ и $A_3 B_2 - B_2 A_4 - A_4 B_4 - B_4 A_2$. Подсчитаем по цепочкам сумму приращений:

$$\sum_i \sum_j \Delta \bar{C}_{ij} = -0 + 1 - 0 + 1 = 2 \text{ (для первой цепочки),}$$

$$\sum_i \sum_j \Delta \bar{C}_{ij} = -0 + 1 - 0 + 0 = 1 \text{ (для второй цепочки).}$$

Для обеих цепочек сумма меньше трех, следовательно, обе они годятся. Для перераспределения выбираем вторую цепочку, так как для нее $1 < 2$. Определяем величину перераспределения: $\min(300; 150; 550; 300) = 150$. Двигаясь по цепочке, перераспределяем 150 единиц, затем Δa_1 и Δa_3 изменяем на это же число. В результате получаем новое закрепление, приведенное в таблице 25.

11. После перераспределения проверяем возможность исключения отмеченных столбцов. Столбцы исключаем из отмеченных в том случае, если занятая клетка избыточной строки стала незанятой или избыточная строка превратилась в нулевую. В этом случае следующую итерацию следует начинать с пункта 6 алгоритма.

Если количество отмеченных столбцов осталось без изменения, то следующая итерация начинается с пункта 7 алгоритма.

12. Процесс перезакрепления продолжаем до тех пор, пока все строки не превратятся в нулевые. Полученный план перевозок проверяется на оптимальность методом потенциалов. В таблице 25 после первой итерации количество отмеченных столбцов и недостаточных строк осталось без изменения, поэтому, как и прежде $\min \Delta \bar{C}_{ij} = 3$ и для строки A_4 имеем $1 < 3$. Проверяем перераспределение по цепочке, которая начинается в клетке $A_2 B_2$ и проходит через клетку $A_4 B_2$ нулевой строки A_4 . Но из клетки $A_4 B_2$ движение по нулевой строке A_4 продолжать невозможно, так как в ней нет других занятых клеток. Для нулевой строки A_5 имеем $\min \Delta \bar{C}_{ij} = \Delta \bar{C}_{i_0 j} = 3$, поэтому производим непосредственное перезакрепление из строки A_3 в клетку $A_2 B_2$, в которой находится $\min \Delta \bar{C}_{ij}$.

Определяем теперь величину перераспределения $\min (150; 400; 150) = 150$ и производим его, внося изменения в таблицу 25.

В результате получаем новое закрепление, приведенное в таблице 26.

В результате перераспределения клетка $A_3 B_2$ стала свободной, столбец B_2 выбыл из отмеченных, строка A_2 стала нулевой.

Таблица 25 - Получение оптимального опорного плана дельта-методом (2 этап)

Матрица планиро- вания	Потребители						a_i	Δa_i	$\min \Delta \bar{C}_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Постав- щики		V	V						
A_1	10 200 0	19 8	17 10	18 1	16 1	21 5	450	+ 250	8
A_2	13 3	14 3	11 4	17 250 0	18 3	19 3	400	+ 150	3
A_3	15 5	11 150 0	7 400 0	19 2	19 4	22 6	150	- 400	
A_4	14 4 3	13 2 150 1	12 5 4	18 1 0	21 6 5	23 7 6	150	0	1
A_5	21 11	23 12	10 3	20 3	15 150 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140 0	-	-

Таблица 26 - Получение оптимального опорного плана дельта-методом (3 этап)

Матрица планиро- вания	Потребители						a_i	Δa_i	$\min \Delta \bar{C}_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Постав- щики			V						
A_1	10 200 0	19 8	17 10	18 1	+ 16 1	21 5	450	+ 250	10
A_2	13 3	14 150 3	11 4	17 250 0	18 3	19 3	400	0	4
A_3	15 5	11 0	- 7 400 0	19 2	19 4	22 6	150	- 250	
A_4	14 4 3	13 2 150 1	12 5 4	18 1 0	21 6 5	23 7 6	150	0	4
A_5	21 11	23 12	+ 10 3	20 3	- 15 150 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140 0	-	-

Подсчитываем $\min \Delta \bar{C}_{ij}$ в отмеченных столбцах для избыточных и нулевых строк и помещаем эти значения в последнюю графу таблицы 26. Находим для недостаточных строк $\min \Delta \bar{C}_{ij} = 10$. Любое из значений $\Delta \bar{C}_{i_0j}$, стоящих в нулевых строках, меньше десяти, поэтому возможность перераспределения по цепочкам надо проверить для всех нулевых строк. Проверку начинаем с нулевой строки A_5 , так как ей соответствует $\min \Delta \bar{C}_{i_0j} = 3$. Клетку $A_5 B_3$ отмечаем знаком «+» и строим цепочку из клетки $A_3 B_3$, отмечая ее знаком «-». В строке A_5 две занятые клетки, поэтому строим цепочку через каждую из них и составляем сумму приращений:

$$A_3 B_3 - B_3 A_5 - A_5 B_5 - B_5 A_1, -0+3-0+1 = 4;$$

$$A_3 B_3 - B_3 A_5 - A_5 B_6 - B_6 A_1, -0+3-0+5 = 8.$$

Так как для первой цепочки сумма приращений равна четырем и в остальных нулевых строках $\Delta \bar{C}_{i_0j} = 4$, то проверять возможность перераспределения через них нецелесообразно. Перераспределение $\min(400; 150; 150) = 160$ производим по первой цепочке. В результате получаем таблицу 27, в которой построение цепочек снова начинаем с клетки $A_5 B_3$ нулевой строки A_5 . Цепочки

$$A_3 B_3 - B_3 A_5 - A_5 B_6 - B_6 A_1, -0+3-0+5 = 8;$$

и

$$A_3 B_3 - B_3 A_5 - A_5 B_6 - B_6 A_2 - A_2 B_4 - B_4 A_1, -0+3-0+3-0+1 = 7$$

дают сумму приращений значительно больше четырех, поэтому проверяем возможность перераспределения через остальные нулевые строки. Для строки A_2 :

$$A_3 B_3 - B_3 A_2 - A_2 B_4 - B_4 A_1, -0+4-0+1 = 5;$$

$$A_3 B_3 - B_3 A_2 - A_2 B_2 - B_2 A_1, -0+4-3+8 = 9.$$

Перераспределение $\min(250; 250; 100; 100) = 100$ производим по третьей цепочке. В результате получаем таблицу 28, в которой все строки преобразованы в нулевые. Следовательно, в результате последней итерации получен план. Построенная система потенциалов показывает, что этот план является оптимальным.

Таблица 27 - Получение оптимального опорного плана дельта-методом (4 этап)

Матрица планиро- вания	Потребители						a_i	Δa_i	$\min \Delta \bar{C}_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6			
Постав- щики			V						
A_1	10 200 0	19 8	17 10	+ 18 1	16 150 1	21 5	450	+ 100	10
A_2	13 3	14 150 3	+ 11 4	- 17 250 0	18 3	19 3	400	0	4
A_3	15 5	11 0	- 7 250 0	19 2	19 4	22 6	150	- 100	
A_4	14 4 3	13 2 150 1	12 5 4	18 1 0	21 6 5	23 7 6	150	0	4
A_5	21 11	23 12	10 150 3	20 3	15 0	16 100 0	250	0	3
b_j	200	300	400	250	150	100	140 0	-	-

Таблица 28 – Оптимальный план (дельта-метод)

Матрица планирования		Потребители						a_i	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6		
Постав- щики	Поте- н- циал ы	10	15	12	18	16	18		
A_1	0	10 200 0	19 8	17 10	18 100 1	16 150 1	21 5	450	
A_2	-1	13 3	14 150 3	11 100 4	17 150 0	18 3	19 3	400	
A_3	-5	15 5	11 0	7 150 0	19 2	19 4	22 6	150	
A_4	-2	14 4 3	13 2 150 1	12 5 4	18 1 0	21 6 5	23 7 6	150	
A_5	-2	21 11	23 12	10 150 3	20 3	15 0	16 100 0	250	
b_j		200	300	400	250	150	100	140 0	-

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Транспортная задача в сетевой постановке является частным случаем задачи распределения.

Для решения задачи распределения необходимо воспользоваться моделью потока минимальной стоимости.

Пусть задана транспортная сеть, содержащая вершины с весами (запас, если вес положительный, и спрос, если вес отрицательный). Вершины с запасом, соответствуют складам, вершины со спросом – розничным торговым точкам, ребра – маршруты перевозок, величины запаса или спроса соответствуют количеству поставляемого или получаемого материала. Естественной интерпретацией стоимости каждого ребра может служить стоимость перевозки единицы товара по этому ребру. Если задан поток, то стоимость потока через то или иное ребро составляет некоторую

часть стоимости продвижения потока по всей сети, которое мы можем приписывать этому ребру. Если задано количество материала, который должен быть доставлен по некоторому заданному ребру, то мы можем вычислить стоимость доставки, умножив стоимость доставки единицы товара на его количество. Выполняя такие вычисления для каждого ребра и складывая полученное произведение, мы получим общую стоимость доставки товара, которую мы намерены минимизировать.

На рисунке 1 представлен пример задачи распределения. В данном примере мы имеем:

- три вершины снабжения (вес положительный) – вершины от 0 до 2;
- три вершины потребления (вес ресурсов отрицателен) – вершины от 7 до 9;
- четыре распределительных пункта – вершины от 3 до 6;
- двенадцать каналов доставки.

Задача заключается в том, чтобы минимизировать стоимость доставки материалов по каналам доставки таким образом, чтобы общий объем материал, поставляемого из каждой вершины снабжения, соответствовал количеству запаса материала; чтобы общий объем материала, доставляемый в вершины потребления, соответствовал уровню его потребления.

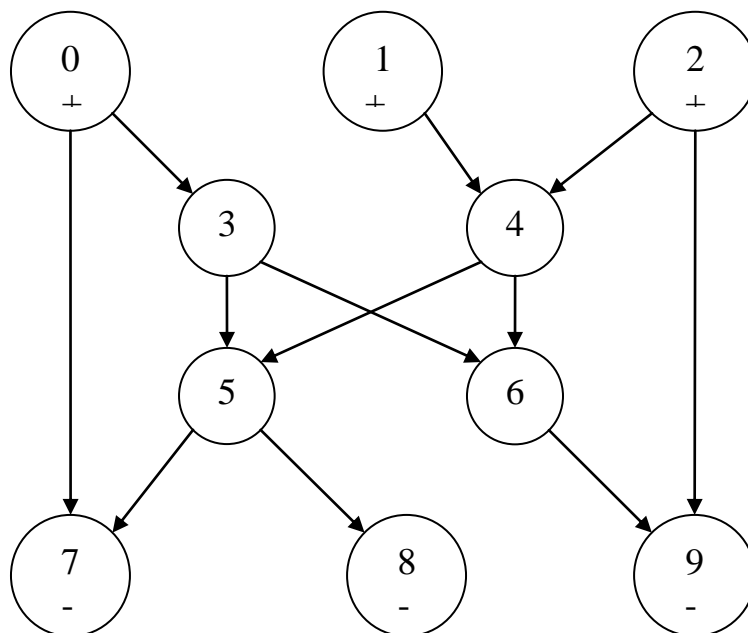


Рисунок 1 - Пример задачи распределения.

Решение задачи распределения сводится к нахождению потока минимальной стоимости.

3.1. Метод вычеркивания циклов

Для решения задачи распределения необходимо ознакомиться с несколькими определениями.

Допустимым потоком в транспортной сети называется поток, сумма вершин которого равна 0, и разность между притоком и истечением из нее также равна 0.

Остаточной сетью потока в транспортной сети со стоимостями ребер является сеть, которая содержит те же вершины что и исходная сеть, и одно или два ребра этой остаточной сети соответствуют каждому ребру в исходной сети и определяется следующим образом: пусть для каждого ребра $u-v$ в исходной сети f есть поток, x – стоимость. Если f положителен, ребро $u-v$ включается в остаточную сеть, при этом ему присваивается стоимость $-x$.

Ребра в остаточной сети, представляющие ребра исходной сети имеют отрицательную стоимость. Обход обратных ребер соответствует удалению потока из соответствующего ребра в исходной сети, так что стоимость изменяется на соответствующую величину. В связи с наличием стоимости ребер, эти сети могут иметь циклы с отрицательной стоимостью.

Основное свойство остаточной заключается в следующем: допустимый поток является «потоком с минимальной стоимостью» тогда и только тогда, если его остаточная сеть не содержит ориентированного цикла с отрицательной стоимостью.

Это свойство не медленно приводит к простому обобщенному алгоритму решения задачи о потоке минимальной стоимости (а следовательно и транспортной задачи в сетевой постановке):

- найти допустимый поток;
- увеличить поток в произвольном цикле с отрицательной стоимостью в остаточной сети;
- продолжать процедуру до тех пор, пока не останется ни одного цикла с отрицательной стоимостью в остаточной сети.

3.2 Метод потенциалов

Для отыскания циклов с отрицательной стоимостью используют метод потенциалов. Суть метода заключается в том, что каждой вершине назначается число, такое что:

$$U_i + V_i = c_i;$$

где i – индекс дуги соединяющей вершины; c_i – стоимость перемещения груза по данной дуге; U_i и V_i – потенциалы вершин данной дуги.

Также как и в методе потенциалов линейного программирования уравнений всего $m+n-1$, а число неизвестных равно $m+n$. Следовательно, одну из этих неизвестных можно задать произвольно.

Алгоритм назначения потенциалов заключается в следующем:

- назначить первой вершине произвольный потенциал (обычно равный сумме стоимостей перемещения груза по всем дугам), что бы не иметь дело с отрицательными потенциалами;

- для данной вершины просмотреть все дуги допустимого потока и назначить потенциалы инцидентным вершинам, увеличивая потенциал на величину стоимости дуги, если поток приходит в инцидентную вершин, уменьшая потенциал на величину стоимости дуги, если поток приходит в инцидентную данной вершину;

- продолжать назначать потенциалы до тех пор, пока все вершины графа не будут иметь потенциал.

Расставив потенциалы, необходимо проверить выполнение условия $|V_i - U_i| \leq c_i$. Если для какой-то из них данное условие не выполняется то это говорит о наличии цикла отрицательной стоимости в остаточной сети потока. Для данной дуги необходимо найти цикл в допустимом потоке и увеличить поток в данном цикле на наименьшую стоимость в данном цикле. При этом поток в дуге с наименьшей стоимостью будет ликвидирован, тем самым исключив цикл отрицательной стоимости из остаточной сети допустимого потока.

После исключения найденного таким образом цикла отрицательной стоимости из остаточной сети допустимого потока мы получим новый допустимый поток, и необходимо вновь рассчитать потенциалы всех вершин.

Процесс необходимо повторять до тех пор, пока на каждой из не участвующих в допустимом потоке дуг не будет выполняться условие $|V_i - U_i| \leq c_i$, что в свою очередь будет говорить об отсутствии циклов отрицательной связи в остаточной сети допустимого потока.

Полученный таким образом допустимый поток и будет искомым потоком минимальной стоимости.

4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

На таблице 29 и 30 представлена соответственно сравнительная характеристика методов нахождения опорного плана и методов получения оптимального опорного плана.

У каждого из методов есть свои достоинства и недостатки. Для нахождения первоначального опорного плана желательно использовать метод двойного предпочтения, который находит близкое к оптимальному решение “транспортной задачи”, так как учитывает стоимость и по столбцу и по строке матрицы. А использование дельта – метода вместе с методом потенциалов дает возможность быстро найти оптимальный план, причем, чем больше размеры таблицы, тем это ощутимее. В результате применения дельта-метода всегда находится оптимальный план.

Таким образом, получаем общий вид решения транспортной задачи, который представлен на рисунке 2.

Таблица 29 – Сравнительная таблица методов нахождения опорного плана

Название метода	Достоинства	Недостатки
Метод северо-западного угла	Самый быстрый и простой способ получения опорного плана	Совсем не учитывается стоимость.
Метод минимального элемента	В отличие от метода северо-западного угла учитывается стоимость.	Стоимость учитывается только или по столбцу , или по строке матрицы.
Метод двойного предпочтения	Стоимость учитывается и по столбцу, и по строке матрицы.	Во многих случаях все равно остается не оптимальным.
Метод аппроксимации Фогеля	Стоимость учитывается.	Не является оптимальным

Таблица 30 – Сравнительная таблица методов получения оптимального опорного плана

Название метода	Достоинства	Недостатки
Метод потенциалов	Не надо искать циклов с отрицательной ценой. Достаточно быстро определяет оптимальный план.	При использовании этого метода необходимо иметь допустимый опорный план, полученный каким либо способом.
Венгерский метод	Возможность оценивать близость результата каждой из итераций к оптимальному плану перевозок.	Довольно трудоемкий процесс.
Дельта – метод	Всегда определяется оптимальный план. Возможность найти план оптимальный очень быстро.	Довольно трудоемкий процесс. При использовании этого метода необходимо иметь допустимый опорный план.

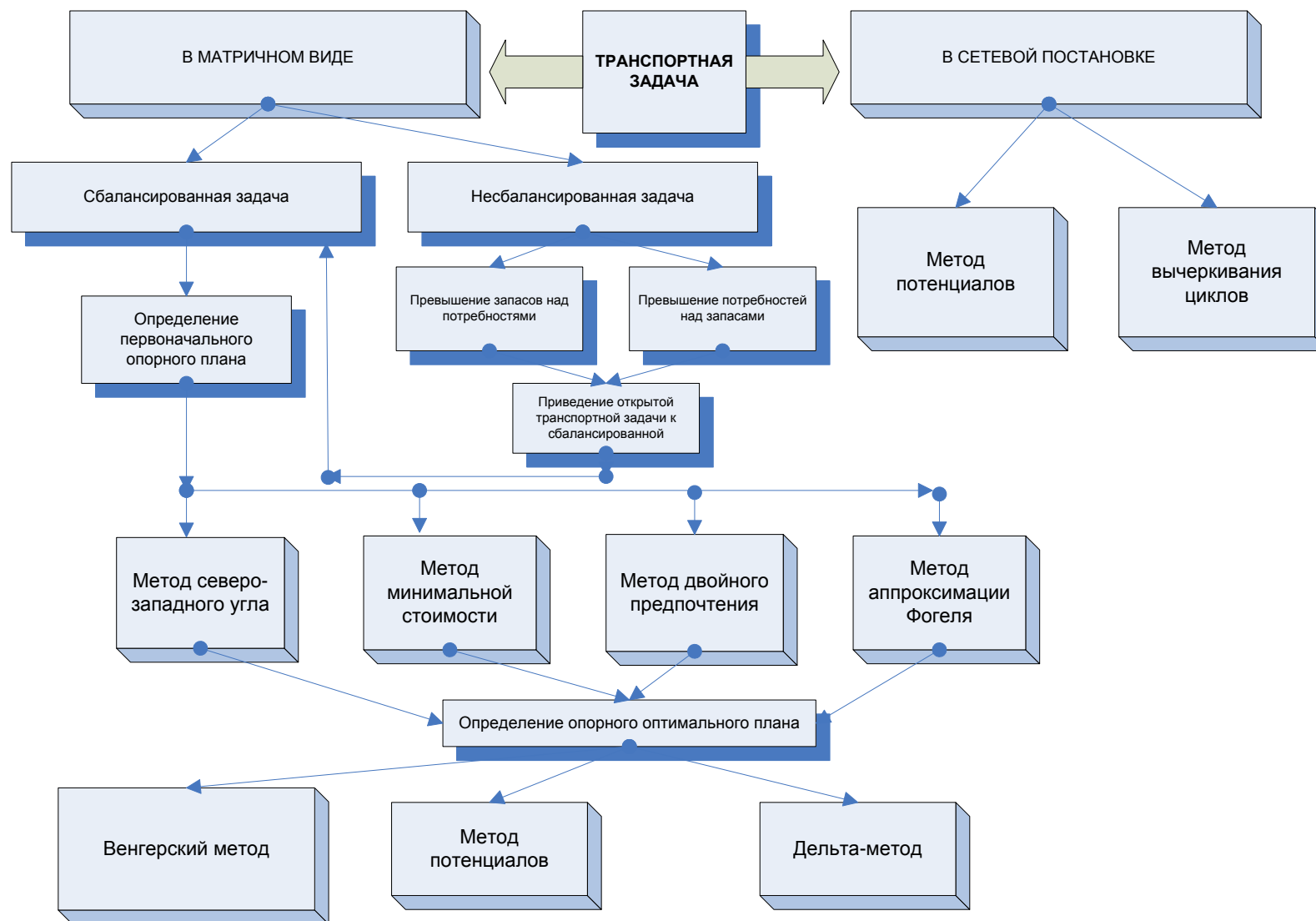


Рисунок 2 – Постановка транспортной задачи

ПРИМЕРЫ.....

.....

.....

ЛИТЕРАТУРА

1	Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. – М.: Советское радио, 1969. – 736с.
2	Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: Учебник для вузов – М.: Дрофа 2004 – 208с.
3	Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 264с.
4	Козлов В.Н. Колесников Д.Н. Сиднев А.Г. Решение задач математического программирования. СПб.: СПбГТУ, 1992 – 112с.
5	Хемди А.Т. Введение в исследование операций. – М.: Издательство “Вильямс”, 2005 – 912с.
6	Касьянов В.Н. Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
7	Сэджевик Роберт Фундаментальные алгоритмы на С++. Алгоритмы на графах / Пер. с англ. – СПб.: ООО «ДиаСофтЮп», 2002. – 496 с.

