EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

KOCKÁZATI FAKTOR MODELLEK

Szakdolgozat

Demeter Adrienn

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc

Kvantitatív Pénzügy szakirány

Témavezetők:

Molnár-Sáska Gábor

Molnár Levente

Hajnal Áron

Budapest, 2024

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőimnek, Hajnal Áronnak, Molnár Leventének és Molnár-Sáska Gábornak, a sok segítséget, konzultációkat és jó tanácsokat, melyekkel nagyban hozzájárultak dolgozatom létrejöttéhez, valamint köszönöm, hogy bármikor bármilyen kérdéssel fordulhattam hozzájuk.

Ezenkívül köszönettel tartozom családomnak és barátaimnak, akik nem csak a szakdolgozat elkészülése alatt, hanem az egyetemi tanulmányaim során végig mellettem álltak, és támogattak mindenben.

Tartalomjegyzék

3. Faktor modellek az elméletben

Ebben a fejezben a faktor modellek matematikai hátterét fogom részletesen tárgyalni. Bemutatom, hogy milyen formában képzelhetjük el a faktor modelleket, valamint, hogy milyen feltevéseket alkalmazunk. Ezen kívül kitérek a különböző faktor modell típusokra, ismertetem ezek alkalmazásának előnyét és hátrányát. E fejezet célja, hogy betekintést nyújtson a faktor modellek elméleti alapjaiba.

3.1. Több-faktoros modellek szerkezete

A faktor modelleket regressziós alakban képzelhetjük el, melyek alapötlete, hogy az értékpapírok hozamai két részre bonthatóak: az egyik a közös faktorok által magyarázott komponens, a másik pedig az úgynevezett idioszinkratikus, vagy egyedi komponens. Matematikai képlettel felírva:

$$r_{nt} = \sum_{k=0}^{K} X_{nk} f_{kt} + \varepsilon_{nt} \tag{1}$$

ahol

- r_{nt} az n értékpapír hozama a t időpontban.
- X_{nkt} az n értékpapír kitettsége a k faktorra nézve a t időpontban
- f_{kt} a k faktor hozama a t időpillanatban
- ε_{nt} az n értékpapír egyedi hozama a t időpontban, azaz az a hozamrész, amelyet a modell nem magyaráz
- $n = 1, \dots, N,\ k = 0, \dots, K,\ t = 1, \dots, T$, melyben N az értékpapírok, K a faktorok, T pedig az időpontok számát jelölik

A fenti egyenletben r_{nt}-t ismerjük, ε_{nt}-t pedig úgy becsüljük, hogy minél kisebb legyen. X_{nkt} és/vagy f_{kt} ismertsége a faktormodell típusától függ.

3.2. Faktor modellek típusai

A faktor modelleknek 3 fajtáját különböztetjük meg, attól függően, hogy milyen statisztikai és ökonometriai technikákat használunk a faktorhozamok és/vagy faktorkitettségek becslésére. Ez a három a típus az explicit, az implicit és statisztikai faktor modell.

Explicit faktor modellek

Explicit faktor modell esetén input adatként ismerjük az értékpapírok hozamait, valamint a faktorhozamokat, és a faktorkitettségeket szeretnénk megbecsülni idősoros regresszióval. Szokás makroökonómiai faktor modellnek is nevezni, hiszen faktoroknak gyakran makrogazdasági változókat használnak, vagy exogén faktor modellnek, mert a faktorhozamok adottak, a modellen kívül határozzák meg őket, valamint idősoros faktor modellnek, ugyanis minden faktorkitettséget idősoros regresszióval becsülünk. Ebbe a típusba tartoznak például a Fama-French-féle modellek.

Ebben az esetben az (1) egyenletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$r_n = \mathbf{F}\mathbf{X}_n + \varepsilon_n, \tag{2}$$

ahol

$$\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} r_{1n} \\ \vdots \\ r_{Tn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & f_{11} & \dots & f_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f_{T1} & \dots & f_{TK} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Tn} \end{bmatrix}.$$

Az n alsóindex mutatja, hogy egy adott eszközre nézzük a formulát, azaz a független változó egyetlen értékpapír hozama különböző időpontokban, így egy idősoros regresszióról van szó. Az $\mathbf{F}$-ben megjelenő időindex a faktorok időbeli változását jelöli. A hiba kovariancia mátrixa szintén az idő függvényében írható fel:

$$\operatorname{cov}[\varepsilon_n] = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_T^2 \end{bmatrix}$$

Összefoglalva, N darab lineáris regressziót végzünk, hogy minden eszközre megbecsüljük az X_n vektort, azaz a faktorkitettségeket. Ha a becsült együtthatók szignifikánsak vagy ha a modell magyarázó ereje (R^2) magas, akkor valóban fontos faktorok szerepelnek a modellben.

Az explicit faktor modellek előnye, hogy tetszőleges számú faktorral dolgozhatuk a modellben, ameddig kellően hosszú idősoros adat áll rendelkezésünkre az egyes faktorokról. Hátránya viszont, hogy a faktorkitettségek gyakran nem intuitívak, valamint, hogy viszonylag adat igényes, hiszen az értékpapírok hozamai és a faktorhozamok is szükségesek a regresszió elvégzéséhez.

Implicit faktor modellek

Implicit faktor modellnél a faktorkitettségek és az értékpapír hozamok adottak, és a faktorhozamokat szeretnénk becsülni keresztmetszeti regresszióval. Ez annyiban különbözik az idősoros regressziótól, hogy egy adott időponthoz tartozóan regresszálunk különböző változókat, nem pedig egy változót egy meghatározott időintervallumon. Ezen faktor modell típus másik ismert elnevezései közé tartozik a fundamentális faktor modell, hiszen a faktorkitettségek gyakran az eszközök fundamentális adatait tartalmazzák, az endogén faktor modell, mert a faktorkittetségek a modellből származnak, valamint a keresztmetszeti faktor modell, amely az alkalmazott regresszió típusra utal. Ebben az esetben az (1) egyenletet az alábbi vektor formában írhatjuk fel:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{X}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{3}$$

ahol

$$\mathbf{r}_t = \begin{bmatrix} r_{1t} \\ \vdots \\ r_{Nt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & X_{11} & \dots & X_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_N & X_{N1} & \dots & X_{NK} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Nt} \end{bmatrix}$$

Implicit faktor modellek esetén tehát T darab regressziót futtatunk. A hiba kovariancia mátrixa szintén egy diagonális mátrix, hiszen a hibákról feltesszük, hogy korrelálatlanok (erről a következő alfejezetben lesz szó), viszont fontos különbség az explicit faktor modellekhez képest, hogy az index az eszközök számától függ, nem pedig az időtől:

$$\mathrm{cov}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_t\right] = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Az implicit faktormodelleknek számos előnye van, többek közt, hogy intuitívan lehet értelmezni a faktorkitettségeket. Továbbá, érzékenyen reagálnak az eszközök tulajdonságainak változására: egy fundamentális adatokban bekövetkező hirtelen változás, például egy vállalati intézkedés miatt, azonnal beépíthető a modellbe. Hátrányuk viszont, hogy a három típus közül ez a leginkább adat igényes, hiszen nagyon sok eszközhozam, illetve faktorkitettség adatra van szükség a számoláshoz.

Statisztikai faktor modellek

Statisztikai faktor modellek esetén a faktorhozamokat és a kitettségeket is ismeretlennek tekintjük, és egyidejűleg szeretnénk őket megbecsülni. Ehhez számos többváltozós statisztikai módszer áll rendelkezésre, az egyik leggyakrabban használt eljárás a főkomponens elemzés.

Ezen modellek előnye, hogy nem igényelnek sok input adatot, csak a részvények árfolyamát, valamint, hogy könnyű ilyen típusú modellt építeni. A statisztikai faktormodellek hátránya viszont, hogy nehezen értelmezhetőek a kapott faktorok. Például, nem egyértelmű, hogy mit csináljon egy portfólió menedzser, hogy ha a modell azt adja eredményül, hogy a negyedik főkomponens is még jelentős varianciát magyaráz, hiszen általában nem egyszerű gazdasági jelentést társítani az egyes komponensekhez.

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért az 1. táblázatban összefoglaltam az egyes faktor modell típusokhoz tartozó információkat [4].

Modell típus	Input adat	Output	Becslési módszer	Előnyök	Hátrányok
Explicit	eszközhozamok, faktorhozamok	faktorkitettségek	idősoros regresszió	tetszőleges számú faktor alkalmazása	nem intuitív faktorkitettségek
Implicit	eszközhozamok, faktorkitettségek	faktorhozamok	keresztmetszeti regresszió	könnyű értelmezhetőség, érzékeny reakció a változásokra	adatigényes
Statisztikai	eszközhozamok	faktorkitettségek, faktorhozamok	főkomponens elemzés, faktor analízis	nincs szükség sok adatra, könnyű modellépítés	nehezen értelmezhető eredmény

1. táblázat. Faktor modellek típusai összefoglalva

3.3. Faktor modellek feltevései

Szakdoglozatom során az implicit faktor modellekkel foglalkoztam, ezért a feltevéseket erre a típusra vezetem be és mutatom be a következményeit.

A faktor modellek építése során feltesszük, hogy az egyedi hozam várható értéke nulla, azaz $E[\varepsilon_{nt}] = 0$, valamint, hogy ezek a hozamok korrelálatlanok, azaz

$$\operatorname{cov}[\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{mt}] = \begin{cases} \sigma_n^2, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \tag{4}$$

Jelölje $\mathbf{f}_t$ a faktorhozamok vektorát a t időpillanatban. Feltesszük, hogy ezek várható értéke is nulla, azaz $E[\mathbf{f}_t] = \mathbf{0}$, valamint, hogy korrelálatlanok az egyedi hozammal. Ez azt jelenti, hogy a kovarianciájuk nulla:

$$\operatorname{cov}[\varepsilon_{nt}, \mathbf{f}_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_{nt}\mathbf{f}_t] - \mathbb{E}[\varepsilon_n]\mathbb{E}[\mathbf{f}_t] = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Mivel $\mathbb{E}[\varepsilon_{nt}] = 0$, ezért $\mathbb{E}[\varepsilon_{nt}\mathbf{f}_t] = \mathbf{0}$ kell legyen. Végül, jelölje $\mathbf{\Sigma}_f$ az $\mathbf{f}_t$ kovarianciamátrixát. Mivel feltettük, hogy $E[\mathbf{f}_t] = \mathbf{0}$, ezért

$$\mathbf{\Sigma}_f = \operatorname{cov}[\mathbf{f}_t, \mathbf{f}_t] = \mathbb{E}[\mathbf{f}_t\mathbf{f}_t^\top] \tag{6}$$

Ezen eredmények segítségével kiszámolhatjuk a részvényhozamok első és második momentumát. Legyen $\mathbf{X}_{nt}^\top$ az n eszköz faktorkitettség-vektora a t időpontban. Ekkor r_{nt} várható értéke

$$\mathbb{E}[r_{nt}] = \mathbf{X}_{nt}^\top \mathbb{E}[\mathbf{f}_t] = 0, \tag{7}$$

a hozamok közötti kovariancia pedig

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}[r_{nt}, r_{mt}] &= \mathbb{E}[r_{nt}r_{mt}] - \mathbb{E}[r_{nt}]\mathbb{E}[r_{mt}] \\
&= \mathbb{E}[r_{nt}r_{mt}] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\mathbf{X}_{nt}^\top\mathbf{f}_t + \varepsilon_{nt}\right)\left(\mathbf{X}_{mt}^\top\mathbf{f}_t + \varepsilon_{mt}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{X}_{nt}^\top\mathbf{f}_t\mathbf{f}_t^\top\mathbf{X}_{mt} + \varepsilon_{nt}\mathbf{X}_{mt}^\top\mathbf{f}_t + \mathbf{X}_{nt}^\top\mathbf{f}_t\varepsilon_{mt} + \varepsilon_{nt}\varepsilon_{mt}\right] \\
&= \mathbf{X}_{nt}^\top\mathbb{E}\left[\mathbf{f}_t\mathbf{f}_t^\top\right]\mathbf{X}_{mt} + \mathbf{X}_{mt}^\top\mathbb{E}[\varepsilon_{nt}\mathbf{f}_t] + \mathbf{X}_{nt}^\top\mathbb{E}[\mathbf{f}_t\varepsilon_{mt}] + \mathbb{E}[\varepsilon_{nt}\varepsilon_{mt}] \\
&= \mathbf{X}_{nt}^\top\mathbb{E}\left[\mathbf{f}_t\mathbf{f}_t^\top\right]\mathbf{X}_{mt} + \operatorname{cov}[\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{mt}].
\end{aligned} \tag{8}$$

Az $\mathbb{E}\left[\mathbf{f}_t\mathbf{f}_t^\top\right]$ kifejezés éppen a faktorhozamok $K \times K$-s kovarianciamátrixa a t időpontban. Minden n, m-re kiszámolva a kovarianciát, ahol $n, m = 1, \ldots, N$, az eszközök kovariancia mátrixát ($\mathbf{\Omega}$) kapjuk, melyet két komponens segítségével tudunk felírni:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{X}^\top + \mathbf{\Delta}. \tag{9}$$

Itt $\mathbf{X}$ jelöli az $N \times K$-s kiettség mátrixot, $\mathbf{F}$ a faktorhozamok $K \times K$ kovariancia mátrixát, $\mathbf{\Delta}$ pedig az idioszinkratikus (egyedi) kovariancia mátrixot. Utóbbi egy $N \times N$-es diagonális mátrix, amelynek N eleme az egyes értékpapírok idioszinkratikus szórásnégyzete. Tehát nem csak az értékpapírok hozamát tudjuk felbontani közös és egyedi komponensekre, hanem a kockázatukat is.

Ha a hozamok kovariancia mátrixát közvetlenül becsültük volna, akkor $N(N+1)/2$ paramétert kellett volna meghatároznunk. Ezzel a módszerrel viszont csak $K(K+1)/2+N$ paraméter becslésére volt szükségünk. Mivel N általában százas vagy ezres nagyságrendű változót jelent, K viszont csak több tucatot, ezért ez egy jelentős dimenziószám csökkentés.

4. Modellépítés S&P500-ra

Ebben a részben a faktormodelleket egy konkrét példán fogom bemutatni és az eredményeket elemezni. A gyakorlati rész megvalóstásához az S&P500 részvényeket, valamint a 2023.01.03-tól 2024.01.02-ig tartó időszakot választottam. Minden adatom napi rendszerességű, melyeket a Bloombergből töltöttem le. A modellezés során csak a munkanapokat vettem figyelembe. A felépített faktor modell az előző fejezetben említett típusok közül az implicit faktor modellek közé tartozik, amelynél piaci kapitalizációval súlyozott keresztmetszeti regressziót végeztem. Az egész feladatot Python nyelvben programoztam.

4.1. Hozam számolás

A modellépítés során az első lépés a hozamok kiszámolása volt. A vizsgált időszakra napvégi részvényárfolyamokat és osztalékokat töltöttem le, melyekből napi effektív hozamokat számoltam:

$$r_i = \frac{P_i + div_i}{P_{i-1}} - 1. \tag{10}$$

P_i jelöli a nap végi árfolyamot, div_i pedig az osztalékot. Ha az i. napon nem történt osztalék fizetés, akkor aznap $div_i = 0$. Ezután ebből levontam a kockázatmentes hozamot, így valójában többlethozamokkal dolgoztam:

$$r_{\text{többlet}} = r_i - r_f. \tag{11}$$

Kockázatmentes hozamnak az 1 éves amerikai kincstárjegyet választottam. A végén százalékosítást nem végeztem, mert a későbbiekben a többi adatom is tört alakban volt megadva.

4.2. Modellben szereplő faktorok

Második lépésben ki kellett választani, hogy milyen faktorokkal szeretnék dolgozni. A rendelkezésre álló adatok és számolási módszerek miatt a választásom a következőkre esett.

4.2.1. Iparág faktorok

A cégek iparágak szerinti csoportosításához a *Global Industry Classification Standard* (GICS) osztályozást használtam. Ezt az osztályozási formát a Standard & Poor's és az MSCI közösen fejlesztették ki 1999-ben [5]. A GICS a vállalatokat fő üzleti tevékenységük alapján csoportosítja, amelyhez a bevételt használja legfontosabb mutatóként. Ezen kívül figyelembe veszi a nyereséget, illetve a piac megítélését. A 4 szintes hierarchia rendszer első szintjén a szektorok, alatta az iparági csoportok, iparágak, majd aliparágak szerepelnek. Egy vállalatot abba az aliparágba sorolnak be, amely a legjobban tükrözi azokat az üzleti tevékenységeket, amelyek a vállalat bevételeinek túlnyomó részét biztosítják. Ha egy cég kettő vagy több, egymástól lényegesen eltérő üzleti tevékenységeket folytat, és ezek közül egyik sem járul hozzá a bevételek legalább 60%-ához, akkor kezdetben abba az alágazatba sorolják, amely a vállalat bevételeinek és nyereségeinek legnagyobb részét adja. Különböző üzleti tevékenységből származó bevételek esetén a jelenlegi GICS beosztás megváltoztatásához legalább a 60%-os küszöbértéket el kell érni egy adott üzleti tevékenységből. Egy vállalatot a nyilvánosan elérhető információk alapján kategorizálnak, mint például az éves jelentés, a vállalati honlapok, valamint az egyéb hivatalos bejelentések.

Az évek folyamán számos modósítás történt a GICS felépítésében. A legutolsó frissítés 2023-ban volt, amely szerint a GICS jelenleg 11 szektort, 25 iparági csoportot, 74 iparágat és 163 aliparágat tartalmaz. A szakdolgozatom során a legfrissebb struktúrát használtam. Mivel viszonylag kevés (503 db) eszközöm volt, ezért az értelmezhetőség miatt a szektor szintet választottam, hiszen a célom az volt, hogy a végső regresszióban legyenek szignifikáns iparág faktoraim is. Így az alábbi kategóriák kerültek a modellbe:

- Energia (Energy)
- Nyersanyagok (Materials)
- Ipari termékek (Industrials)
- Nem alapvető fogyasztási termékek (Consumer Discretionary)
- Alapvető fogyasztási termékek (Consumer Staples)
- Egészségügy (Health Care)
- Pénzügy (Financials)
- IT (Information Technology)
- Kommunikációs szolgáltatások (Communication Services)
- Közüzemek (Utilities)
- Ingatlan (Real Estate)

Ez alapján 11 bináris iparág faktorom lett. Amelyik kategóriába tartozik az adott eszköz, arra a faktorra nézve 1 a kitettsége, a többire 0, ezért ezek $0-1$ mátrix formájában építhetők be a modellbe. Az alábbi táblázat tartalmazza, hogy az $S\&P500$ esetén hány cég tartozott az egyes kategóriákba.

Iparágak	db	Iparágak	db
Energia	23	*Pénzügy*	72
Nyersanyagok	28	*IT*	64
Ipari termékek	78	*Kommunikációs szolgáltatások*	22
Nem alapvető fogyasztási termékek	53	*Közüzemek*	30
Alapvető fogyasztási termékek	38	*Ingatlan*	31
Egészségügy	64		

2. táblázat. Különböző kategóriákba kerülő cégek darabszáma

4.2.2. Stílus faktorok

A stílus faktorok már sokkal összetettebb faktorok, ugyanis ezek már nem bináris változók, hanem folytonosak, valamint egy-egy stílus faktor több alap elemből tevődik össze. A modellezéshez a Bloomberg [3] által közétett 10 darab stílus faktort választottam, melyeket az alábbiakban részletezek.

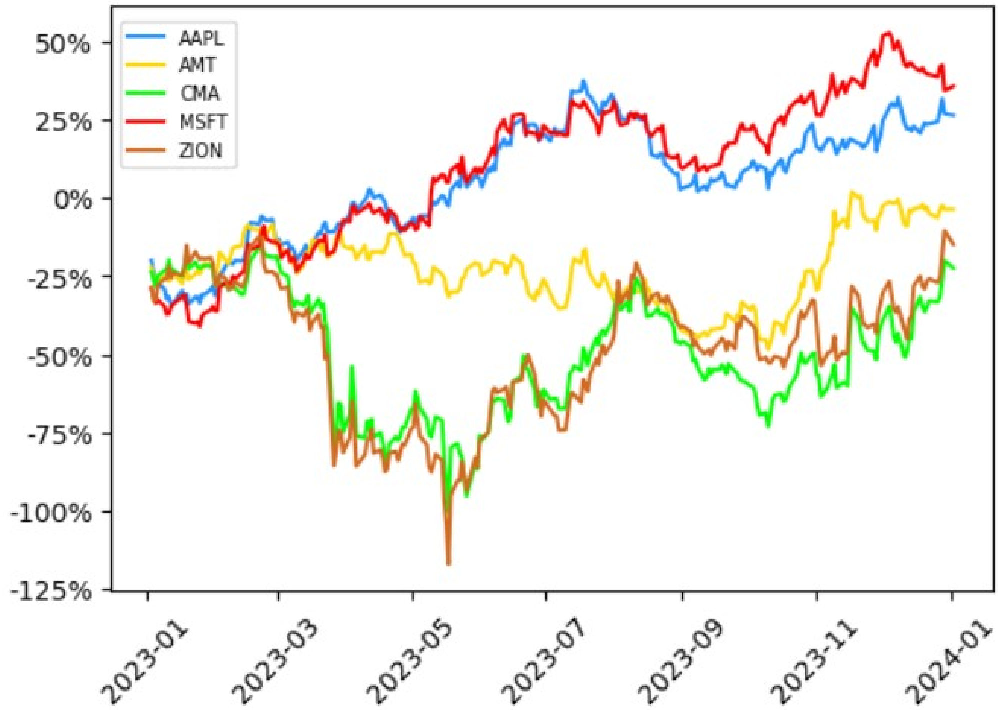
Momentum

A momentum faktor célja, hogy megragadja a dinamikát a részvények hozamában, így a jelentése lényegében az, hogy akik eddig jól teljesítettek, rövidtávon ezután is jól fognak, akik pedig rosszul, azok ezután is rosszul fognak teljesíteni. Ennek eredményeként elkülönülnek az elmúlt egy évben alul- és felülteljesítő részvények. Ez látható az 1. ábrán is, melyet saját eredményeim alapján készítettem: az *Apple* és a *Microsoft* az $S\&P500$ legjobban teljesítő 25 cége közé tartozik, a *Zions* és a *Comerica* a legrosszabb 25-be, az *American Tower* pedig a középmezőnybe.

Annak érdekében, hogy mérsékeljük az árfolyam-visszafordító hatást, az utolsó két heti hozamot kihagyjuk a számolásból. Ez alapján a formula a következő:

$$Momentum = \sum_{t=-270 \text{ nap}}^{t=-10 \text{ nap}} \log(1 + r_{n,t}), \tag{12}$$

ahol $r_{n,t}$ az n eszköz hozama a t időpontban. A momentum faktor érdekessége, hogy a többi faktortól eltérően, nem alap komponensek súlyozásából tevődik össze. Azok a részvények, amelyek az elmúlt évben jelentősen emelkedtek, nagy faktorkitettséggel rendelkeznek.



1. ábra. Az eszközök momentum faktorra vett kitettsége

Érték

Az érték faktor megkülönbözteti az érték alapú részvényeket (value stock) a növekedési részvényektől (growth stock). Érték alapú részvényeknek nevezzük azokat a részvényeket, amelyekkel a valódi értéküknél alacsonyabb áron kereskednek. Azaz, ezek a részvények alulértékeltek. A növekedési részvények viszont olyan részvények, amelyek a piacon tapasztalható átlagos növekedési ütemhez képest lényegesen magasabb növekedési rátával rendelkeznek. Ezáltal az ilyen részvények gyorsabb ütemben hoznak nyereséget. Az ebbe a csoportba tartozó részvények általában nem fizetnek osztalékot.

Ez a faktor a Fama-French-féle háromfaktoros modellben is szerepel HML néven, viszont mivel az egy idősoros regresszión alapuló modell, és nem keresztmetszetin, más jelentése lehet a faktornak. Ebben az esetben azt mutatja meg, hogy a magas *könyv szerinti érték/piaci érték* rátával rendelkező érték alapú részvények nagyobb hozamot biztosítanak, mint a növekedési részvények. Kiszámítása pedig a következőképpen alakul:

$$\begin{gathered}
\text{\textit{Érték}} = 0,13 * \frac{B}{P} + 0,18 * \frac{CF}{P} + 0,18 * \frac{E}{P} + 0,21 * \frac{EBITDA}{EV} + \\
+ 0,16 * \frac{E}{P} + 0,13 * \frac{Sales}{EV},
\end{gathered} \tag{13}$$

ahol a $\frac{B}{P}$ (book to price ratio) a vállalat aktuális részvényárfolyamának és a könyv szerinti értékének hányadosából számolt reciprok. Az árfolyam-könyv szerinti érték arány mutatja a vállalat piaci értékelését a könyv szerinti értékéhez képest. Az árfolyam-cash flow arány egy részvény árfolyamának értékét méri az egy részvényre jutó működési tevékenységből származó cash flow-hoz viszonyítva. Működési tevékenységből származó cash flow alatt egy vállalatnak a folyamatban lévő, rendszeres üzleti tevékenységeiből származó pénzösszegét értjük. Ennek reciprokaként kapjuk a $\frac{CF}{P}$ (cash flow to price) komponenst. A $\frac{P}{E}$ ráta méri, hogy egy adott vállalat részvényének a piaci ára mennyire drága az egy részvényre jutó nyereséghez képest. Ennek szintén a reciproka szerepel a képletben. Ezen kívül szükséges a nyereség 1 és 2 éves súlyozott előrejelzése, amelyekből megkapjuk az előrejelzett $\frac{E}{P}$ ($For\frac{E}{P}$) alap komponenst:

$$For\frac{E}{P} = \frac{w * EF1 + (1-w)EF2}{P} \tag{14}$$

A w-t az egyszerűség kedvéért $0,5$-nek szokás venni, de el lehetne tolni úgy, hogy a 2 éves előrejelzésnél legyen a nagyobb súly. *EF1* és *EF2* jelöli a nyereség 1, illetve 2 év múlvai becslését. 2 éves előrejelzéshez nem volt elérhető információ a Bloombergben, ezért azt én becsültem meg az elmúlt 5 év alapján rendelkezésre álló adatokból, illetve az 1 éves előrejelzésből. Mivel nem minden eszköz esetében volt megfigyelhető trend, ezért ennek a 6 pontnak vettem az átlagát, és azt használtam 2 éves becslésnek.
Az érték faktor képletében szereplő $\frac{EBITDA}{EV}$ reciproka mutatja, hogy a vállalat értékéhez képest mekkora az éves eredmény. A versenytársakhoz vagy az iparági átlaghoz viszonyított alacsony arányszám alulárazottságot, míg a magas túlárazottságot jelez. Az *EBITDA* a kamatok, adózás, értékcsökkenés és amortizáció előtti eredményt jelenti, az *EV* (enterprise value) pedig a vállalati értéket, azaz hogy mennnyi lenne a vállalat átvé-

teli költsége az adott pillanatban. Ezt a következőképp számoljuk:

$$EV = Market\ cap + LT\ Debt + \max(ST\ Debt - Cash, 0), \tag{15}$$

ahol a piaci kapitalizáció mutatja, hogy mennyit kellene fizetni a vállalatért tőzsdei felvásárlás esetén. Az *LT Debt* jelöli az 1 évnél hosszabb lejáratú adósságot, *ST Debt* pedig a rövid lejáratú adósságot, azaz azon pénzügyi kötelezettségeket, amelyek várhatóan 1 éven belül visszafizetésre kerülnek. *Cash* pedig ismét a működési tevékenységből származó pénzösszeg.
Végül, a fenti képletben szereplő utolsó alap elem reciproka azt mutatja, hogy hogyan kell értékelni egy vállalatot a bevétele alapján, figyelembe véve mind a vállalat saját tőkéjét, mind az adósságát.

Mindegyik alap elem számlálójában egy könyv szerinti, nevezőjében pedig egy piaci mérték szerepel, ezért egy olyan érték alapú részvénynek, amelynek nagy értékei vannak ezekre a mutatókra nézve, nagy lesz a faktorkitettsége is.

Osztalékhozam

Ez is egy érték faktor, de kellően nagy figyelmet kap ahhoz, hogy önálló faktorként szerepeljen. A faktorkiettség ebben az esetben a legutóbb bejelentett éves nettó osztalék és a piaci ár hányadosa. A magas osztalékhozamú részvényeknek nagy kitettsége van erre a faktorra nézve.

$$Osztalékhozam = \frac{Utolsó\ kifizetett\ osztalék}{Árfolyam} \tag{16}$$

Méret

Ez a másik olyan faktor, ami a háromfaktoros Fama-French-féle modellben is szerepel, csak ott SMB néven. Az érték faktornál említett különbség most is fennáll. Ebben az esetben egy olyan több tényezős mérőszám, amelynek segítségével megkülönböztethetők a kis- és nagyvállalatok. Azt mutatja meg, hogy a kis kapitalizációjú vállalatok tartósan magasabb hozamot érnek el, mint a nagy piaci kapitalizációval rendelkező cégek. E faktor 3 alap komponensből tevődik össze: piaci kapitalizáció, bevétel és teljes eszközállomány, kiszámítása pedig az alábbiak szerint alakul:

$$Méret = 0,28 * \log(Market\ cap) + 0,36 * \log(Sales) + 0,36 * \log(Total\ assets), \quad (17)$$

ahol a *Sales* jelöli a árbévetelt, azaz a szokásos üzleti tevékenységből származó pénzösszeget, amelyet az átlagos eladási ár és az eladott egységek számának szorzataként számolnak ki. A teljes eszközállomány, vagy más néven mérlegfőösszeg pedig az adott vállalat tulajdonában lévő összes eszköz könyv szerinti értékének összegeként számítódik.

Mivel a bevétel és a teljes eszközállomány csak negyedévente frissül, ezért a többi napon az adott időpontig rendelkezésre álló legfrissebb értékkel számoltam. A piaci kapitalizáció viszont naponta változik, ezért a kietettségek is naponta módosultak.

Kereskedési aktivitás

Ez a faktor azt próbálja megragadni, hogy a likviditás és a kereskedés gyakorisága milyen hatással van a részvények hozamaira. Szeretnénk elkerülni a méret faktorral történő korrelációt, hiszen az a keresztmetszeti regresszióban téves eredményhez vezetne, ezért ebben a faktorban a forgalmat számoljuk:

$$Kereskedési\ aktivitás = \sum_{t=-500\text{ nap}}^{t=-1\text{ nap}} exp\left(t * \frac{log(2)}{180}\right) * \frac{Volume}{Shares\ outstanding} \quad (18)$$

Ez az adott napon kereskedett részvények száma (*Volume*), valamint a forgalomban levő részvények (*Shares outstanding*) számának hányadosa az elmúlt 2 évre visszamenőleg összegezve. Minden megfigyelést exponenciálisan súlyozunk.

Növekedés

E faktor az elmúlt években eltérő ütemben növekedő részvények hozamai közötti különbséget próbálja megragadni. Hozam alapján megkülönbözteti a kis és nagy növekedést felmutató vállalatokat. A Bloomberg a faktorkitettségek kiszámolásához ebben az esetben historikus és elemzői adatokat is használ. Figyelembe veszi a teljes eszközállományban, a bevételben, illetve a nyereségben elért 5 éves növekedést, melyeket rendre *TAG* (Total Asset Growth), *SG* (Sales Growth) és *EG* (Earnings Growth) jelöl. Ezen kívül szükség van a rövidtávú bevétel és nyereség előrejelzésére, melyeket EFG-vel és SFG-vel jelölünk:

$$\textit{Növekedés} = 0,23 * TAG + 0,26 * SG + 0,15 * EG + 0,16 * EFG + 0,2 * SFG, \tag{19}$$

ahol

$$TAG = \frac{\textit{Teljes eszközállomány 5 éves átlagos növekedése}}{\textit{Átlagos teljes eszközállomány az elmúlt 5 évben}} \tag{20}$$

$$SG = \frac{\textit{Bevétel 5 éves átlagos növekedése}}{\textit{Átlagos teljes eszközállomány az elmúlt 5 évben}} \tag{21}$$

$$EG = \frac{\textit{Nyereség 5 éves átlagos növekedése}}{\textit{Átlagos teljes eszközállomány az elmúlt 5 évben}} \tag{22}$$

$$EFG = \frac{\textit{Részvényenkénti nyereség 2 éves előrejelzése}}{\textit{Részvényenkénti nyereség 1 éves előrejelzése}} \tag{23}$$

$$SFG = \frac{\textit{Bevétel 2 éves előrejelzése}}{\textit{Bevétel 1 éves előrejelzése}} \tag{24}$$

Mivel 2 éves előrejelzés ehhez a faktorhoz sem állt rendelkezésemre, ezért ezeket az érték faktornál említett módon becsültem itt is.

Tőkeáttétel

Ez a faktor a vállalatok tőkeáttételének szintjét mutatja, amelyet három mutató átlaga határoz meg. Az egyes cégek eladósodottsági szintjének kiszámításához használt tőkeáttételi mutatók a könyv szerinti tőkeáttétel (*BLev*), amely a vállalat könyv szerinti értékéhez viszonyított adósságát mutatja, a piaci tőkeáttétel (*MLev*), azaz a vállalat piaci értékéhez viszonyított adósság, valamint a teljes eszközállományhoz viszonyított adósság (*D2TA*). Mindhárom mutatót közel azonos súllyal vesszük figyelembe:

$$\textit{Tőkeáttétel} = 0,34 * BLev + 0,33 * MLev + 0,33 * D2TA, \tag{25}$$

ahol

$$BLev = \frac{LT\ Debt + \max(ST\ Debt - Cash, 0)}{Book\ Value + LT\ Debt + \max(ST\ Debt - Cash, 0)} \tag{26}$$

$$MLev = \frac{LT\ Debt + \max(ST\ Debt - Cash, 0)}{Market\ cap + LT\ Debt + \max(ST\ Debt - Cash, 0)} \tag{27}$$

$$D2TA = \frac{LT\ Debt + \max(ST\ Debt - Cash, 0)}{Total\ Assets} \tag{28}$$

A faktorkitettségek napi változása a piaci kapitalizációnak köszönhető, hiszen minden más mutató csak negyedévente változik.

Jövedelmezőség

A jövedelmezőség faktor haszonkulcsokat (profit margins) használ az egyes vállalatok teljesítményének mérésére. A haszonkulcsok olyan pénzügyi mutatók, amelyek a vállalatok árbevételének azt a részét mutatják meg, amelyet az összes költség levonása után nyereségként megtarthatnak. Az értéküket százalékban fejezik ki. Ezeket felhasználva számolják ki a sajáttőke-arányos nyereséget (*ROE*), a lekötött tőkével arányos megtérülést (*ROCE*), az eszközarányos nyereséget (*ROA*) és az EBITDA-marzsot (*EBITDA margin*).

A sajáttőke-arányos nyereség azt mutatja meg, hogy mennyire hatékonyan használja fel a vállalat a sajáttőkét profittermelésre. Minél magasabb ez az érték, annál jobban tudja a cég a sajáttőkét nyereséggé alakítani. Az eszközarányos nyereség méri, hogy egy vállalat mennyire hatékonyan tud profitot előállítani a gazdasági erőforrásaiból vagy a mérlegében szereplő eszközeiből. A lekötött tőkével arányos megtérülés azt vizsgálja, hogy egy vállalat mennyire eredményesen teremt hasznot a tőke felhasználásával. A sajáttőke-arányos nyereségtől abban különbözik, hogy ebbe már a felvett hitelek is beletartoznak. Végül, az EBITDA-marzs jelentése, hogy mekkora egy vállalat kamatok, adók, értékcsökkenés és amortizáció előtti eredménye a bevétel százalékában kifejezve. Ezeket az alábbi módon tudjuk kiszámolni:

$$ROE = \frac{Nett\acute{o}\ j\ddot{o}vedelem}{Saj\acute{a}t\ t\H{o}ke\ k\ddot{o}nyv\ szerinti\ \acute{e}rt\acute{e}ke} \tag{29}$$

$$ROA = \frac{Nett\acute{o}\ j\ddot{o}vedelem}{Teljes\ eszk\ddot{o}z\acute{a}llom\acute{a}ny} \tag{30}$$

$$ROCE = \frac{Nett\acute{o}\ j\ddot{o}vedelem}{Lek\ddot{o}t\ddot{o}tt\ t\H{o}ke} \tag{31}$$

$$EBITDA\ margin = \frac{EBITDA}{Bev\acute{e}tel} \tag{32}$$

Az első három képlet az egyszerűsítés utáni alakban van felírva, emiatt ezekben a haszonkulcsok közvetlenül nem jelennek meg. Ezen mutatók súlyozásával a következő formulával tudjuk meghatározni a jövedelmezőségi faktort:

$$\begin{aligned} J\ddot{o}vedelmez\H{o}s\acute{e}g = 0,26 * ROE + 0,28 * ROCE + 0,28 * ROA+ \\ + 0,18 * EBITDA\ margin \end{aligned} \tag{33}$$

Eredmény változékonysága

Ez a faktor a cash flow, az árbevétel és a nyereség stabilitását méri az elmúlt 5 évre vonatkozóan. Kiszámítása a következőképpen néz ki:

$$Eredm\acute{e}ny\ v\acute{a}ltoz\acute{e}konys\acute{a}ga = 0,34 * EarnVol + 0,35 * CFVol + 0,31 * SalesVol, \tag{34}$$

ahol az egyes komponensek az említett mutatók volatilitását jelölik, és az alábbiak szerint alakulnak:

$$EarnVol = \frac{Nyeres\acute{e}g\ volatilit\acute{a}sa\ az\ elm\acute{u}lt\ 5\ \acute{e}vre\ n\acute{e}zve}{Teljes\ eszk\ddot{o}z\acute{a}llom\acute{a}ny\ medi\acute{a}nja\ az\ elm\acute{u}lt\ 5\ \acute{e}vre\ n\acute{e}zve} \tag{35}$$

$$CFVol = \frac{Cash\ flow\ volatilit\acute{a}sa\ az\ elm\acute{u}lt\ 5\ \acute{e}vre\ n\acute{e}zve}{Teljes\ eszk\ddot{o}z\acute{a}llom\acute{a}ny\ medi\acute{a}nja\ az\ elm\acute{u}lt\ 5\ \acute{e}vre\ n\acute{e}zve} \tag{36}$$

$$SalesVol = \frac{Bev\acute{e}tel\ volatilit\acute{a}sa\ az\ elm\acute{u}lt\ 5\ \acute{e}vre\ n\acute{e}zve}{Teljes\ eszk\ddot{o}z\acute{a}llom\acute{a}ny\ medi\acute{a}nja\ az\ elm\acute{u}lt\ 5\ \acute{e}vre\ n\acute{e}zve} \tag{37}$$

Volatilitás

E faktor feladata a volatilitás mérése az egyes értékpapírok esetén. Különböző volatilitás mérőszámok alkalmazásával megkülönbözteti a volatilis, valamint a kevésbé volatilis részvényeket.

$$Volatilitás = 0,30 * VLRT + 0,14 * \beta + 0,29 * \sigma + 0,26 * CRNG \tag{38}$$

Az itt megjelenő β a CAPM béta, a σ a CAPM reziduálisok szórása, *CRNG* pedig az elmúlt 1 év alatt bekövetkező árfolyamok maximumának és minimumának hányadosa. *VLRT* jelöli a hozamok volatilitását az elmúlt 252 kereskedési napra nézve.

A CAPM képlet alapján

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_M) - r_f) \tag{39}$$

látszik, hogy regresszióval tudjuk kiszámolni a bétát. Először meg kell határozzuk a piaci hozamot. Ehhez én az S&P500 indexet választottam, és abból számoltam effektív hozamot a 4.1. szakaszban leírtak szerint. Ezután idősoros regressziót alkalmazva az első lépésben kiszámolt részvényhozamokat regresszáltam a piaci többlethozammal. A regressziót 5 éves időintervallumon futtattam, hiszen a bétát általában az elmúlt 5 év alapján határozzák meg. Az ily módon létrejövő regressziós koefficiens éppen a béta. Ezt követően kiszámoltam a reziduálisok szórását, amiből megkaptam a σ-t.

Miután minden faktorkitettséget meghatároztunk, a volatilitás kitettségét regresszáljuk a többi faktorkitettséggel. Az ebből kapott reziduális kerül a keresztmetszeti regresszióba volatilitás faktorkitettségként. Erre a módosításra azért van szükség, hogy a keresztmetszeti regresszió magyarázó változói ne korreláljanak egymással.

Felmerülhet a kérdés, hogy az egyes stílus faktorok esetén miért pont úgy súlyozzuk az alap elemeket, ahogyan az a képletben szerepel, és miért van minden stílus faktorban más és más súly. Mi alapján változik? A Bloomberg [4] kifejlesztett egy algoritmust, melynek alapötlete, hogy egy adott stílus faktoron belül közös dimenziót találjon az alap komponensek számára. Az azonos súlyozás lenne a legegyszerűbb megoldás, de az nem feltétlenül optimális, hiszen figyelmen kívül hagyja a komponensek közötti korrelációt.

Az eljárás első lépéseként kiszámoljuk az alap elemek Spearman-féle rangkorrelációs mátrixát. Ezután erre a mátrixra futtatunk egy főkomponens elemzést, és kiválasztjuk az első főkomponenst, hiszen ez magyarázza a variancia legnagyobb részét. Végül, az első fokomponensben kapott loadingokat összegezzük, és megnézzük hogy egy-egy loading hány százalékát teszi ki az összegnek. Ezek a százalékban kifejezett értékek lesznek a végső súlyok, melyekkel az alap elemeket szorozzuk.

4.2.3. Ország faktor

Az ország faktor szintén egy bináris változó, ahol az adott eszköznek egységnyi kitettsége van a hozzátartozó országra, és nulla a többire. Ez alapján ezt is egy $0-1$ mátrix formájában tudjuk beépíteni a modellbe, ahol a sorok az értékpapírok és az oszlopok az egyes országok. Mivel a szakdolgozatom során csak amerikai cégek részvényeivel dolgoztam, azaz egy úgynevezett egy-országos faktormodellt építettem, ezért ennek a faktornak nem volt jelentősége.

4.3. Keresztmetszeti regresszió

Miután az összes faktorkitettséget kiszámoltam minden eszközre és időpontra, standardizáltam a a kapott értékeket, hogy minden faktorkitettség egységes skálán legyen mérve. A standardizálás során átlagot és szórást számoltam, majd minden értékből levontam a kiszámolt átlagot, és elosztottam a szórással:

$$X_{\text{standardizált}} = \frac{X - E(X)}{D(X)}. \tag{40}$$

Ezután keresztmetszeti regresszió segítségével meghatároztam a faktorhozamokat. Emlékeztetőként, hogy hogyan is nézett ki a keresztmetszeti regresszió:

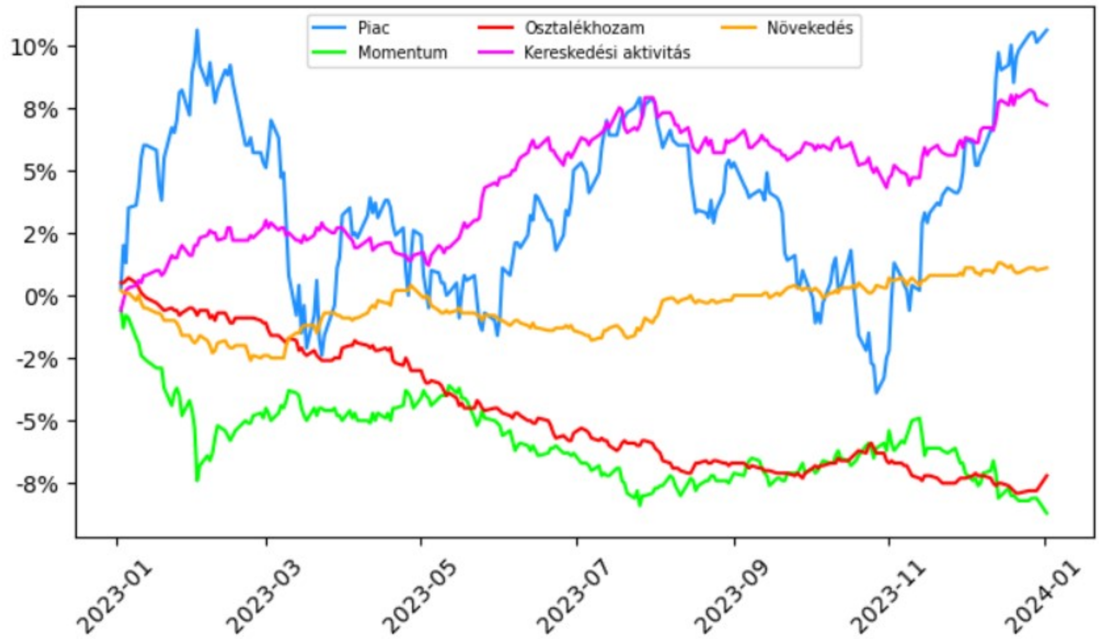
$$\begin{bmatrix} r_{1t} \\ \vdots \\ r_{Nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & X_{11} & \dots & X_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_N & X_{N1} & \dots & X_{NK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ f_{1t} \\ \vdots \\ f_{Kt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Nt} \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Vektor/mátrix alakban felírva pedig

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{X}\mathbf{f}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \tag{42}$$

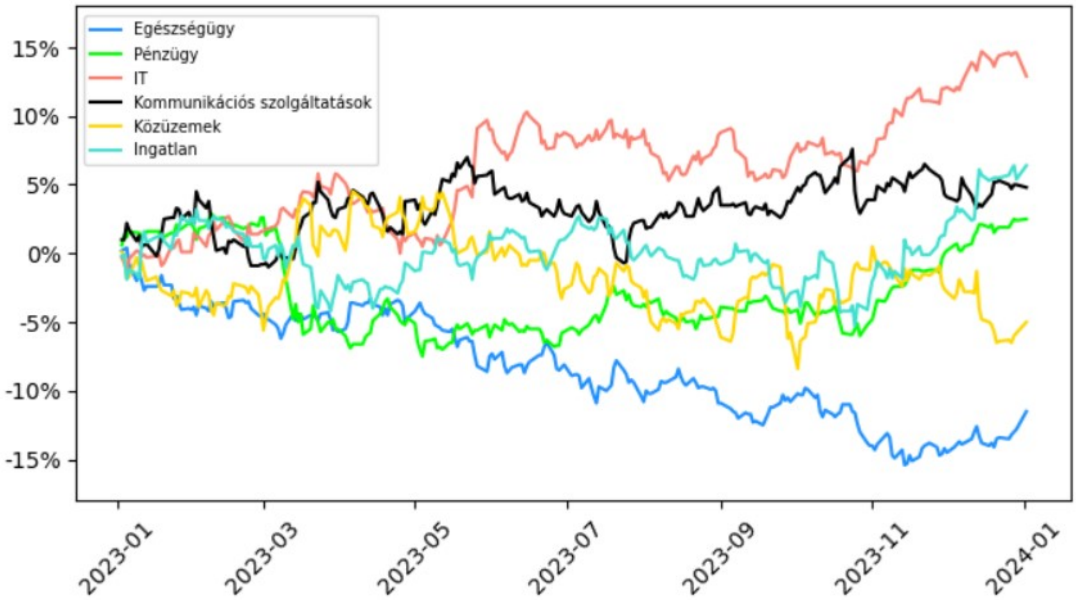
Tehát T darab regressziót végzünk, melyek segítsével az f_{kt} értékeket szeretnénk kiszámolni. Nálam a független változók az első lépésben kiszámolt többlethozamok voltak, a magyarázó változók pedig a 10 stílus, és a 11 iparág faktorok. A faktorhozamok becslési hibájának csökkentése érdekében súlyozott keresztmetszeti regressziót futtattam. Súlynak az adott részvény piaci kapitalizációjának és a teljes univerzum piaci kapitalizációjának hányadosából számolt négyzetgyököt használtam.

A keresztmetszeti regressziók során kapott együtthatók éppen a faktorhozamok különböző időpontokban. Ezek közül kiválasztottam néhányat, és a kumulált hozamokat ábrázoltam az idő függvényében. A regresszióban szereplő konstansra kapott értékeket tekintjük piac faktornak. A 2. ábra mutatja, hogy ezek közül a piac és a kereskedési aktivitás faktor teljesítettek a legjobban. A piac faktor láthatóan sokkal volatilisebb volt, mint a többi faktor, néhányszor a negatív tartományba is átlépett, az év végére viszont $10,6\%$-os hozamot eredményezett. Pozitív hozamot eredményezett még a növekedés faktor is. Negatívan teljesített viszont a momentum és az osztalékhozam faktor, mindkettő -8% körüli eredményt ér el.



2. ábra. Stílus faktorok kummulált teljesítménye

A 3. ábrán jól látszik, hogy a vizsgált 1 év alatt az ábrázolt iparág faktorok közül az IT faktor teljesített a legjobban. Ez talán annyira nem meglepő, hiszen ez az egyik leggyorsabban fejlődő ágazat. (Az összes faktor hozama egy ábrán megjelenítve megtalálható az A függelékben.)



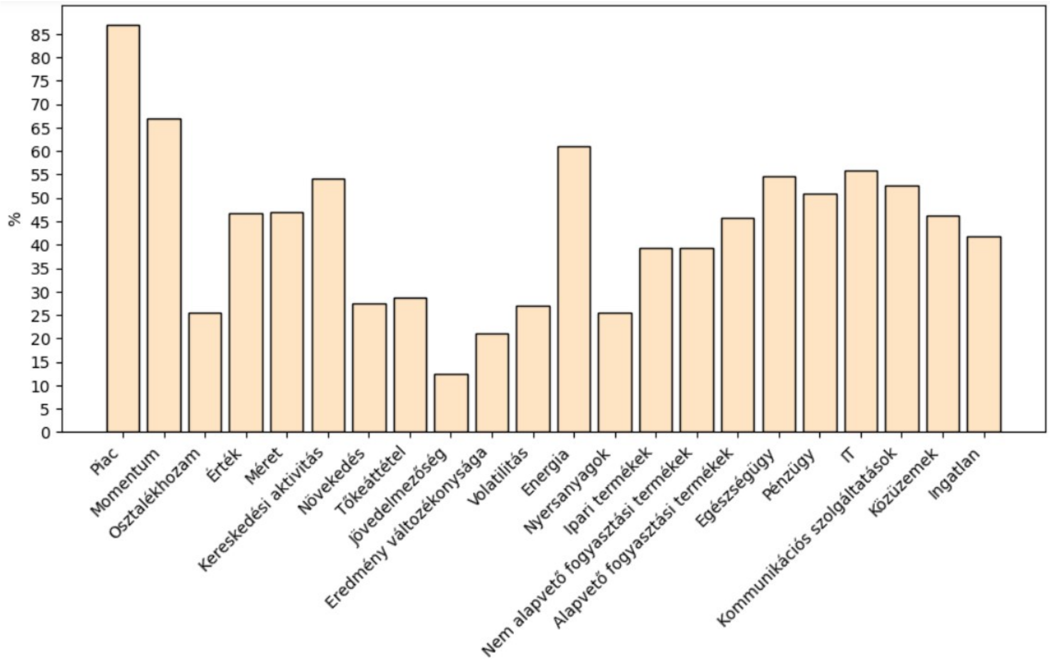
3. ábra. Iparág faktorok kummulált teljesítménye

A faktorok szignifikanciájának vizsgálata segít megállapítani, hogy releváns faktorokat használtunk-e a modellben. Ehhez a keresztmetszeti regresszióval kapott p-értékeket használhatjuk. Az elemzéshez a szokásos 5%-os szignifikancia szintet választottam. Az eredményeket a következő táblázat foglalja össze. A könnyebb átláthatóság kedvéért oszlopdiagramon is megjelenítettem.

Faktorok	%	Faktorok	%
Piac	86.85	*Energia*	60.96
Momentum	66.93	*Nyersanyagok*	25.50
Osztalékhozam	25.50	*Ipari termékek*	39.44
Érték	46.61	*Nem alapvető fogyasztási termékek*	39.44
Méret	47.01	*Alapvető fogyasztási termékek*	45.82
Kereskedési aktivitás	54.18	*Egészségügy*	54.58
Növekedés	27.49	*Pénzügy*	51.00
Tőkeáttétel	28.69	*IT*	55.78
Jövedelmezőség	12.35	*Kommunikációs szolgáltatások*	52.59
Eredmény változékonysága	21.12	*Közüzemek*	46.22
Volatilitás	27.09	*Ingatlan*	41.83

3. táblázat. A faktorok a vizsgált időszak hány százalékában szignifikánsak

Ahogy az ábrán is látható, a piac faktor volt a vizsgált időszak alatt legtöbbször szignifikáns, az idő $86,85\%$-ban. Elsőre ez meglepő lehet, hiszen jelentősen magasabb szá-

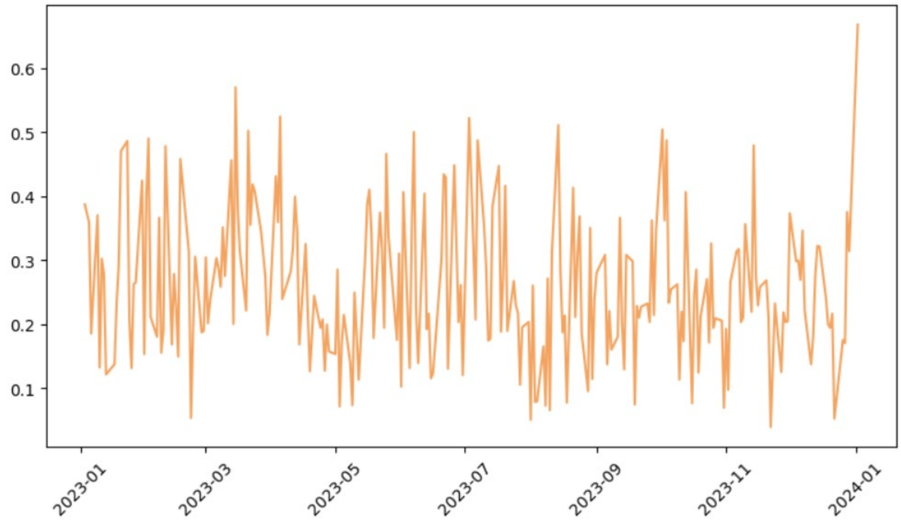


4. ábra. A faktorok a vizsgált időszak hány százalékában szignifikánsak

zalékot mutat, mint a többi faktor, de hasonló eredményt publikált *Ercument Cahan* és *Lei Ji* [4]. Ezt követte a momentum $66,93\%$-kal, majd az energia, az IT, az egészségügy és a kereskedési aktivitás. A felsoroltak mindegyike 50% fölötti értéket mutatott. 1%-os szignifikancia szintet vizsgálva a piac faktor után a momentum és az energia faktorok voltak a legszignifikánsabbak, mindkettő több, mint 45%-ot mutatott. E két faktor közül a momentum erős szignifikanciája talán annyira nem meglepő, hiszen már a Fama-French-féle hat faktoros modellben is szerepel, jelentőségét tehát már korábban is felismerték. Érdekes viszont, hogy ahhoz képest, hogy milyen kevés vállalat tartozott az energia szektorba, ez a faktor elég lényegesnek bizonyult. Ennek oka a 2022-es energia válság hatása lehet.

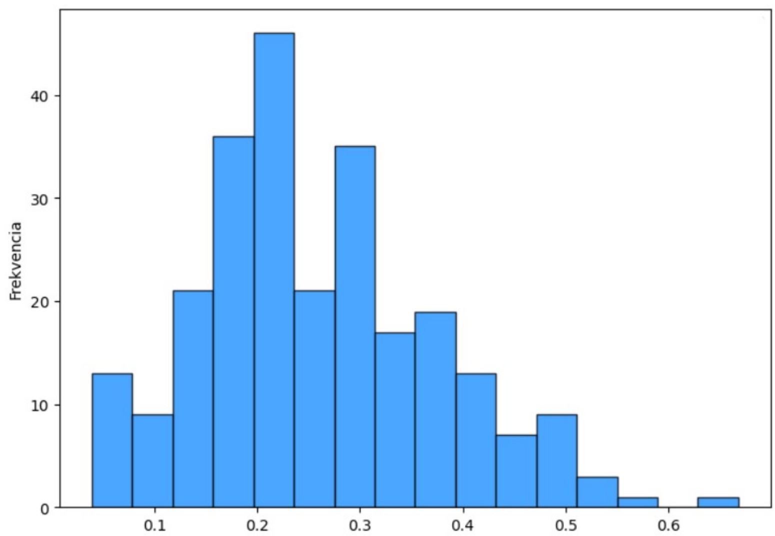
Kirajzoltattam a modell magyarázó erejének időbeli változását is. Az 5. ábrán látható, hogy a korrigált R^2 értéke a vizsgált időszak alatt többnyire $0,15$ és $0,35$ között mozgott. Az értékek pontos eloszlását a 6. ábrán szereplő hisztogram mutatja. A korrigált R^2-re átlagot számolva $0,2596$ értéket kaptam, ami azt jelenti, hogy a modell átlagosan a variancia $25,96\%$-át magyarázza. Szintén hasonló eredményt tett közzé *Thomas G. Stephan*, *Raimond Maurer* és *Martin Dürr* [9].

Érdemes megemlíteni, hogy az R^2 statisztika nem tükrözi pontosan az modell teljesít-



5. ábra. Korrigált R^2 időbeli változása

ményét. Valójában az R^2 napról napra jelentősen változhat, melyet részben a kumulált piaci hozam indokol. Ha a piaci hozam nagyon jelentősen eltér a 0-tól, akkor az R^2 értéke is nagyon magas lehet.



6. ábra. Korrigált R^2 hisztogramja

Feljebb láttuk, hogy mekkora hozamot lehetett elérni az egyes faktorokkal. Fontos viszont megnézni, hogy az adott hozam eléréséhez mekkora kockázatot kell vállalnunk.

A faktorok teljesítményének mérésére ezért használhatjuk a Sharpe-rátát, amely az egységnyi kockázatra jutó kockázatmentes hozamon felüli prémiumot mutatja:

$$\text{Sharpe-ráta}_i = \frac{r_i - r_f}{\sigma_i}. \tag{43}$$

ahol, r_i az i faktor évesített hozama, r_f az évesített kockázatmentes hozam, σ_i pedig az i faktor hozamának évesített szórása.

Faktorok	Sharpe-ráta(%)	Faktorok	Sharpe-ráta(%)
Piac	0.499	*Energia*	0.007
Momentum	-2.247	*Nyersanyagok*	-0.251
Osztalékhozam	-4.532	*Ipari termékek*	0.375
Érték	-1.509	*Nem alapvető fogyasztási termékek*	-0.093
Méret	1.517	*Alapvető fogyasztási termékek*	-2.192
Kereskedési aktivitás	1.011	*Egészségügy*	-1.870
Növekedés	-0.989	*Pénzügy*	-0.154
Tőkeáttétel	-2.542	*IT*	0.986
Jövedelmezőség	-5.101	*Kommunikációs szolgáltatások*	0.089
Eredmény változékonysága	-2.088	*Közüzemek*	-0.698
Volatilitás	-1.701	*Ingatlan*	0.226

4. táblázat. Sharpe-ráta

A 4. táblázatból látható, hogy hiába az IT faktor érte el a legnagyobb hozamot, volatilisebb volt, mint például a méret vagy a kereskedési aktivitás, ezért a Sharpe-rátája kisebb lett. Egységnyi kockázat vállalása mellett a legnagyobb hozamra a méret faktorral tehettünk szert.

5. Alkalmazások

Az eddigiekben bemutattam, hogy hogyan néznek ki a faktormodellek, és hogyan tudjuk őket megkonstruálni. Fontos kérdés viszont, hogy mire használjuk őket a való életben. Ebben a fejeztben 2 ismert alkalmazását fogom részletezni, a kockázat felbontást, valamint a porfólió építést.

5.1. Kockázat felbontása

A kockázati faktor modellek segítségével a teljes portfólió kockázatát többféleképpen is felbonthatjuk, hogy azonosítani tudjuk a kockázat legfontosabb forrásait. Egyik leggyakrabban használt módszer, amikor a kockázatot egy benchmarkhoz viszonyítjuk, ezáltal azonosítható az úgynevezett aktív kockázat. Az aktív kockázat, amelyet a portfólió követési hibájának is neveznek, a portfólió és a benchmark közötti hozamkülönbség volatilitása.

A kockázat elemzése mind az aktív, mind a passzív menedzsment számára fontos. A passzív menedzserek portfóliójuk hozamát egy adott benchmarkhoz próbálják igazítani, de az ők portfóliói nem feltétlenül tartalmazzák a benchmarkban szereplő összes részvényt. Ennek oka, hogy például egy passzív kisrészvény-kezelőnek óriási tranzakciós költséget jelentene, ha egy terjedelmes kisrészvény benchmarkban szereplő több ezer eszközt tartana. A kockázat ily módon történő felbontásával a passzív menedzser tudni fogja a követési hibát, ezáltal pedig minimalizálni tudja.

Az aktív menedzserek célja viszont nem az, hogy a lehető legjobban kövessék a benchmarkot, hanem az, hogy felülmúlják azt. A kockázat felbontásával ők is tudatában lesznek az aktív kockázatuknak, így tudni fogják, hogy miért és hogyan változtassanak a portfóliójukon.

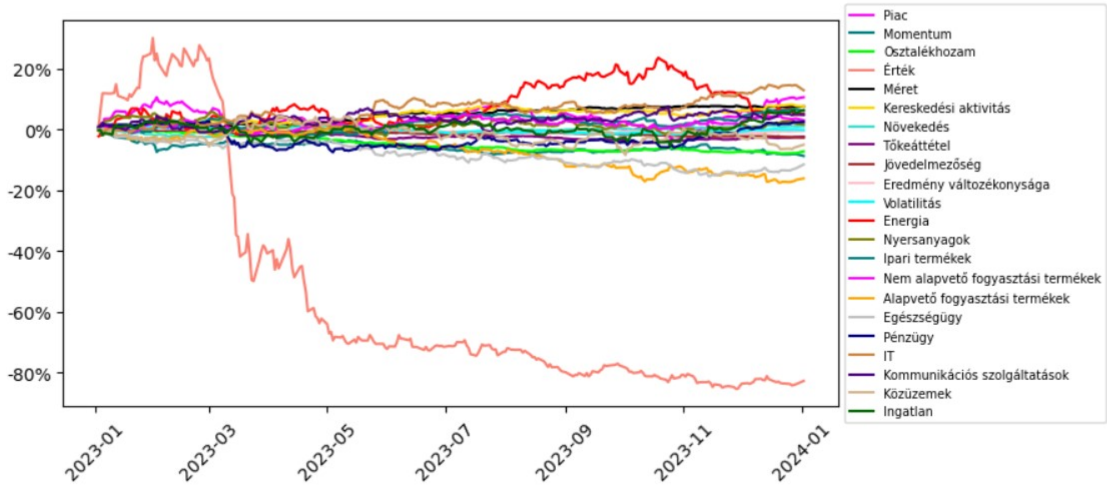
5.2. Portfólió építés

A várható hozamokra vonatkozó előrejelzések ismeretében, a faktormodellek segítségével olyan portfóliókat konstruálhatunk, amelyek megvalósítják a várható hozamokkal kapcsolatos elképzeléseinket. Az alapötlet az, hogy maximalizáljuk a hasznosságot, melyet a kockázattal korrigált várható hozam segítségével fejezünk ki:

$$U = \sum_{n=1}^{N} h_n r_n - \lambda \sum_{n,m=1}^{N} h_n V_{n,m} h_m.$$

Itt h_n jelöli az n eszköz darabszámát a portfólióban, r_n az n eszköz várható hozamát, λ pedig a kockázatkerülési paramétert. $V_{n,m}$ a kockázati faktormodellből származó kovariancia. Az optimális portfóliósúlyok meghatározásához egy kvadratikus optimalizálási feladatot kell megoldani. (Kvadratikus optimalizálásnál négyzetes tagok is szerepelhetnek a célfüggvényben és a korlátokban.) Természetesen, a való életben a probléma megoldása során figyelembe kell venni a tranzakciós költségeket is.

A. Függelék



7. ábra. Az összes faktorhozam

Az érték faktor jelentős esésének oka lehet, hogy 2023. március-május időszakban jelentősen csökkentek az eszközök piaci ár-könyv szerinti érték arányai, amely az érték faktor egyik alap komponense.

Kiemelném, hogy *Fain Máté* és *Naffa Helena* [6], illetve *Ercument Cahan* és *Lei Ji* [4] publikációjában is az érték faktor teljesítménye jelentősen eltér a többi faktorétól.

Hivatkozások

[1] Barr Rosenberg. Extra-Market Components of Covariance in Security Returns. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 9, No. 2, pp. 263-274, 1974.

[2] Edwin Burmeister, Richard Roll, Stephen A. Ross. A Practitioner's Guide to Factor Models. *The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysts*, 1994.

[3] Rita Sousa Costa, Miguel Marques Mendes. Understanding Multi-Asset Factor Models: Factor Exposure Interpretation, 2016.

[4] Ercument Cahan, Lei Ji. Global Equity Fundamental Factor Model, *A Bloomberg Professional Service Offering*, pp. 1-35, 2016.

[5] S&P Down Jones Indices. Global Industry Classification Standard (GICS) Methodology, 2023.

[6] Fain Máté, Naffa Helena. Aktív befektetési stratégiák teljesítményének mérése tiszta faktorportfóliókkal. *Hitelintézeti Szemle*, 18. évf. 2. szám, 52–87.o, 2019.

[7] `https://gregorygundersen.com/blog/2022/04/12/factor-models/`

[8] Fundamentális adatok jelentése: `https://www.investopedia.com/`

[9] Thomas G. Stephan, Raimond Maurer, Martin Dürr. A multiple factor model for European stocks. *Working Paper Series: Finance & Accounting*, No. 57, 2000.