

## FRACTALES

### DEFINICIÓN DE FRACTAL

La Geometría Fractal es la rama de las matemáticas que ha sido creada más recientemente, concretamente a finales del siglo XX. Hasta ese momento se intentaba aplicar la geometría tradicional para estudiar puntos, líneas, planos y volúmenes, describiendo y estudiando objetos de la vida cotidiana y elementos contruidos por los seres humanos, como por ejemplo los mostrados en estas imágenes:



Sin embargo, de poco nos valen las herramientas tradicionales cuando queremos describir elementos y fenómenos de la naturaleza. En la introducción de su libro «Geometría Fractal de la Naturaleza», (publicado en 1982), el matemático Benoit Mandelbrot, dice:

*«Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta»*

Benoit Mandelbrot está considerado como el padre de la geometría fractal.



La geometría fractal trata de modelar y describir muchos fenómenos naturales y experimentos científicos, y se ha transformado en pocos años en una herramienta multidisciplinar utilizada por científicos, médicos, artistas, sociólogos, economistas, meteorólogos, músicos, informáticos...

*«La geometría fractal es un nuevo idioma que, una vez aprendido, nos permitirá describir la caprichosa forma de una masa nubosa tan precisamente como un arquitecto describe en sus planos la casa a construir».*

## TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I

TURNO MATUTINO

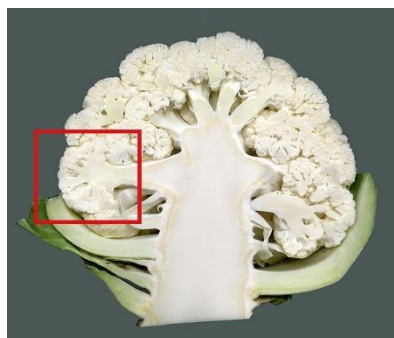
CICLO ESCOLAR 2025-2025

Mandelbrot expuso sus primeras ideas sobre fractales en su artículo ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?, publicado en la revista Science, en el año 1967. En él argumenta que la longitud de una línea costera (como por ejemplo, la costa de Gran Bretaña) depende de la regla con la que la midamos. En líneas generales, la costa tendrá mayor longitud cuanto menor sea la unidad de medida utilizada.



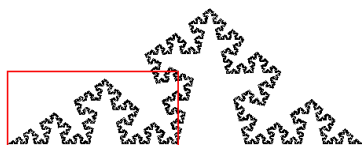
Mandelbrot intentaba encontrar alguna explicación para los patrones por los que se rigen la rugosidad o las grietas y fracturas en la naturaleza, además del comportamiento aparentemente caótico de muchos fenómenos. Es posible que por ello buscara un nuevo término: fractal (del latín fractus: quebrado, fracturado), que acuñó en 1975.

Es difícil dar una definición clara y asequible a todo el mundo de lo que es un fractal, pero podemos decir que muchos de ellos son objetos cuya estructura se repite a diferentes escalas, es decir, tienen la propiedad de la autosimilitud. (Una figura geométrica es autosimilar si al ver una de sus partes con lupa reconocemos la forma de toda la figura de nuevo).



En ambas imágenes, una coliflor y la «curva de Koch», la región en el cuadrado rojo es una copia pequeña de toda la figura. Por lo tanto, la figura se repite en sí misma una y otra vez.

Las costas son un ejemplo también de autosimilitud, ya que la estructura quebradiza de las mismas hace que si vemos una porción de costa y después hacemos zoom en esa zona, lo que vemos en ese momento tiene una forma semejante a la primera porción que observamos.



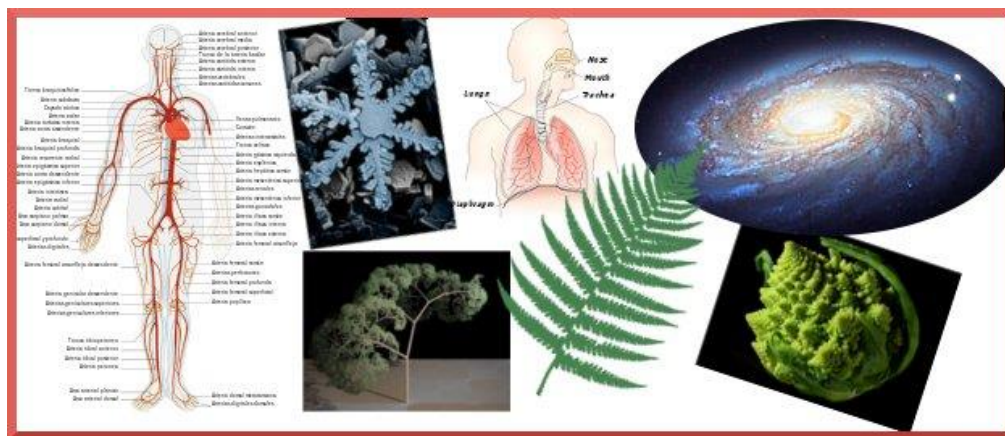
## TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I

TURNO MATUTINO

CICLO ESCOLAR 2025-2025

Sin embargo, existen objetos fractales que no tienen autosimilitud. Por ello, en la definición de fractal, hay que hacer uso del concepto de dimensión. Poniendo un ejemplo, una línea recta tiene dimensión 1 y un plano tiene dimensión 2; pero en la imagen de la «curva de Koch» podemos ver que la figura está a caballo entre una línea y un área. Diremos entonces que los fractales se comportan de manera diferente: son «más que líneas» y al mismo tiempo «menos que áreas», o «más que puntos» y al mismo tiempo «menos que líneas». Por eso se dice que su dimensión es fraccionaria o no entera.

Retomando el tema de la costa occidental de Gran Bretaña, se ha calculado que tiene, aproximadamente, dimensión 1.25.



Pero, ¿cómo se halla la dimensión de un objeto de manera que en este cálculo recoja el concepto tradicional e intuitivo de dimensión y que incluya en sentido más amplio las nuevas ideas de la geometría fractal?

Intentaremos responder esta pregunta de manera no demasiado compleja y pensando en que muchos lectores no son especialistas en matemáticas, aunque sí se necesitarán algunos conocimientos básicos para poder entender los razonamientos.

1º caso: si estamos hablando de objetos con autosimilitud, la dimensión  $D$  del objeto se obtiene observando el número  $n$  de reducciones a escala  $1:r$ . Entonces se define:

$$D = \log n / \log r$$

## TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS I

TURNO MATUTINO

CICLO ESCOLAR 2025-2025

Ejemplo: Calcularemos la dimensión de la llamada curva de Koch. Para construir este fractal se toma un segmento, se lo divide en tres partes iguales, se reemplaza la parte central por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de 60 grados. Luego, con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da lugar a 16 segmentos más pequeños en la segunda iteración. Y así sucesivamente. La figura representa las cuatro primeras etapas de la construcción, pero el proceso se puede seguir indefinidamente.

En este caso  $n = 4$ , pues hemos hecho 4 iteraciones, a una escala 1:3. Por tanto nuestro objeto tiene una dimensión de :

$$D = \log 4 / \log 3 = 1.261$$

2º caso: Cuando estamos ante objetos fractales que no sean tan regulares se utiliza la llamada dimensión de Hausdorff, la cual puede calcularse siguiendo el «método de las cajas»:

Colocamos el objeto del cual se quiere conocer su dimensión fractal en una cuadrícula, cuyas subdivisiones tengan longitud  $1/s$ , donde  $s$  puede tomar valores a partir de 1. Luego contamos el número de cuadrículas que contienen algún punto de nuestro objeto y llamamos a este número  $n(s)$ . Ahora representaremos en unos ejes cartesianos el punto  $(\log(s), \log n(s))$ .

Este proceso lo repetiremos varias veces cambiando el valor de  $s$ , de manera que vamos obteniendo una nube de puntos. Buscamos la recta que más se aproxime a la nube de puntos y la pendiente de esta recta es la dimensión buscada

