.UBA200
CNBA

TRABAJO PRÁCTICO N°1: SIMULACIÓN COMPUTACIONAL CONSIGNA 4.

Física

Prof. Francisco G. Pinto

Joaquín Margenat, Facundo Madera, Demian Montes de Oca y Julián Rugo.

Consigna 4:

Simular el movimiento en dos dimensiones de una partícula de masa m unida a un resorte de longitud natural l_0 distinta de cero y constante elástica k con un extremo fijo en un punto y el otro unido a la partícula. Adopten valores de masa y constante elástica, condiciones iniciales del movimiento y dimensiones de la región en la que se desarrollará el movimiento que les permitan apreciar correctamente cómo es el movimiento de la partícula. Analicen el efecto que tiene modificar el valor de la constante elástica y el que presenta modificar la masa de la partícula. Analizar distintas órbitas variando los valores de la posición y/o velocidad inicial. Discutir si este movimiento puede describirse como una simple superposición de un movimiento circular uniforme con un movimiento armónico simple en la dirección radial.

Cada grupo deberá elaborar un escrito, no muy extenso, en el que expongan y analicen los sistemas propuestos en cada consigna, acompañados de los gráficos e imágenes que consideren necesarios para ilustrar sus explicaciones.

Introducción.

Al comienzo de este TP no nos era evidente que tipo de movimiento deberíamos simular, particularmente no entendíamos bien cómo funcionaba la unión entre un MCU y un MAS. Para encarar la interpretación de la consigna descompusimos el movimiento. Primero estudiamos el MCU que estaba ya programado entendiendo cómo funcionaba cada una de sus componentes. De esta manera observamos que partíamos de un movimiento con una velocidad inicial en el eje X igual a 10 m/s. Para que esto no resulte en un movimiento rectilíneo deberíamos agregarle una aceleración centrípeta (ya que en un MCU $\Sigma F \neq 0$). A partir de esto interpretamos el origen de las componentes *Fx* y *Fy* expresadas de la siguiente manera en el código inicial:

```
Fx = 25*(-posx/sqrt(posx**2+posy**2))
Fy = 25*(-posy/sqrt(posx**2+posy**2))
```

En el principio de nuestro razonamiento se nos hizo extremadamente difícil comprender el funcionamiento de esta ecuación. Después de un largo rato e interpretaciones varias, llegamos a la conclusión de que la fuerza representada se trata de la fuerza centrípeta, con lo cual la ecuación de la fuerza centrípeta resultaría de la siguiente forma:

$$F_{centrípeta} = m \cdot a_c \Rightarrow F_c = 25\,N \Rightarrow F_c = 5\,kg \cdot a_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\,N/5\,kg = a_c \Rightarrow a_c = 5m/s^2$$

A partir de esto, comprendimos el origen de 25, pero aún nos quedaba por entender la segunda parte de la ecuación. Recordando Pitágoras, entendimos que el segundo factor sirve para obtener su componente en el eje *x* y en el eje *y* en cada caso. Ese fue nuestro "¡Eureka!".

Exactamente. Se puede pensar trigonométricamente o como las coordenadas de un versor (vector unitario) que apunta en la dirección de la partícula.

Ahora era necesario incorporar un resorte a la simulación. En un principio era más sencillo que la fuerza del resorte fuera igual a la fuerza centrípeta necesaria para conservar el MCU original. Para eso, calculamos las características necesarias del resorte para que cumpla con las siguientes condiciones:

$$F_c = F_r \Rightarrow F_r = k \cdot A \Rightarrow 25\,N = k \cdot A$$

Para completar la fórmula se debe determinar una constante *k* y una amplitud (*A*). Estas se mantendrían constantes a lo largo del movimiento, ya que la fuerza del resorte debe ser constante por tratarse de un MCU.

Para que la fuerza del resorte sea igual a la fuerza centrípeta original, es decir *25 N*, lo más fácil es usar un resorte ideal de longitud natural igual a 0 m. Si bien esto no es lo que nos pide la consigna, permite entender mejor el movimiento. De esta manera, obtenemos un MCU de igual radio, de igual velocidad tangencial y de igual velocidad angular al original, con una fuerza centrípeta definible como $F_c = k \cdot A$. Es decir, reemplazamos un hilo tenso por un resorte ideal de longitud natural igual a *0 m,* estirado. Por lo tanto, nos interesa que la amplitud del resorte sea equivalente al radio de la circunferencia. Si esto no fuera así, el radio de la circunferencia cambiaría, y por lo tanto la velocidad angular también si partimos de la misma velocidad tangencial. Esto impone otro problema, que es determinar el valor del radio. Sin embargo, es posible obtener esto a partir de la velocidad tangencial y su aceleración centrípeta.

$$a_c = |v_t \cdot \omega| \Rightarrow 5\, m/s^2 = |10\, m/s \cdot \omega| \Rightarrow \omega = 0.5\, rad/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_c = \omega^2 \cdot R \Rightarrow 5\, m/s^2 = (0.5\, rad/s)^2 \cdot R \Rightarrow R = 20\, m$$

Por lo tanto, la amplitud es igual al radio, siendo su valor 20 m ($A = R = 20\, m$).

Dadas estas condiciones, nos hallamos frente a un movimiento circular uniforme cuya fuerza centrípeta es constante y está dada por la fuerza del resorte que se encuentra estirado 20 m. Lo que nos queda por conocer es la constante *k*.

Muy bien.

$$F_r = k \cdot A \Rightarrow 25\, N = k \cdot 20\, m \Rightarrow k = 1.25\, N/m$$

Con eso ya tenemos el marco teórico necesario para volcarnos al programa en sí.

En primer lugar, declaramos las variables globales de l_0 (0) y *k* (1.25), ya que éstas son intrínsecas a nuestro resorte, mientras que por ahora *A* va a ser constante. Sin embargo, en el futuro, cuando nuestro resorte tenga una fuerza distinta a la fuerza centrípeta necesaria para sostener un MCU, la amplitud del resorte deberá variar con el tiempo, y por lo tanto deducimos que la sumatoria de las fuerzas presentes también cambia. De esta forma, es necesario describir *A* como el resultado de una ecuación pitagórica. La amplitud es, entonces, equivalente al vector posición menos la longitud natural del resorte.

```
A = sqrt(posx**2+posy**2)-l0
```

muy bien.

Cálculo de la amplitud.

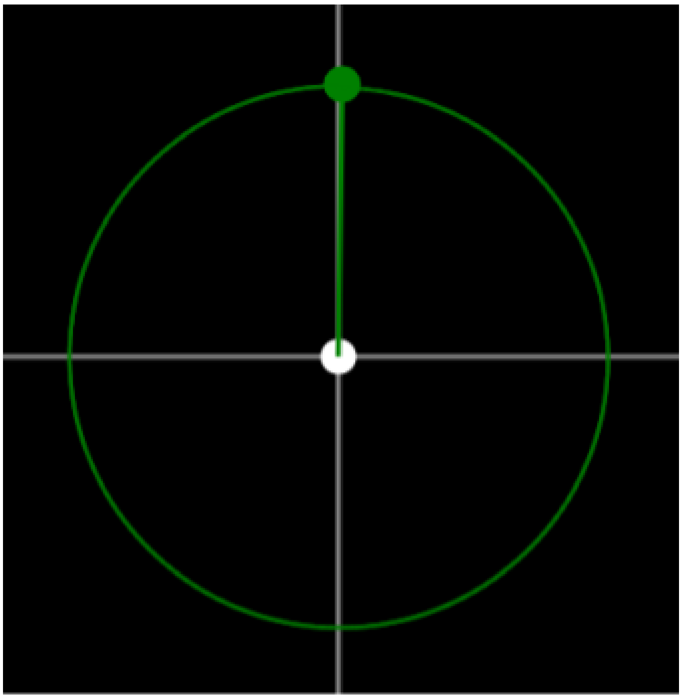
A esta altura, debemos actualizar el valor de la fuerza centrípeta (*25 N*), para que varíe con la amplitud. Esto lo obtenemos realizando el producto de *k* por *A*. En este caso inicial donde la longitud natural del resorte es 0 m, la amplitud no va a variar, y por lo tanto la fuerza tampoco. Ésta va a ser siempre igual a *25 N*. Luego, reemplazamos este valor por una variable llamada *F*, que *por ahora* es constantemente igual a *25 N*. *Por ahora...*

```
# Cálculo de las componentes de la fuerza neta
F = k*A

Fx = F*(-posx/sqrt(posx**2+posy**2))
Fy = F*(-posy/sqrt(posx**2+posy**2))
```

Fx y Fy son las componentes de F en su respectivo eje.

El resultado es un perfecto MCU, cuya fuerza centrípeta está dada por la fuerza de un resorte estirado:



Trayectoria de la partícula en MCU en las condiciones descriptas.

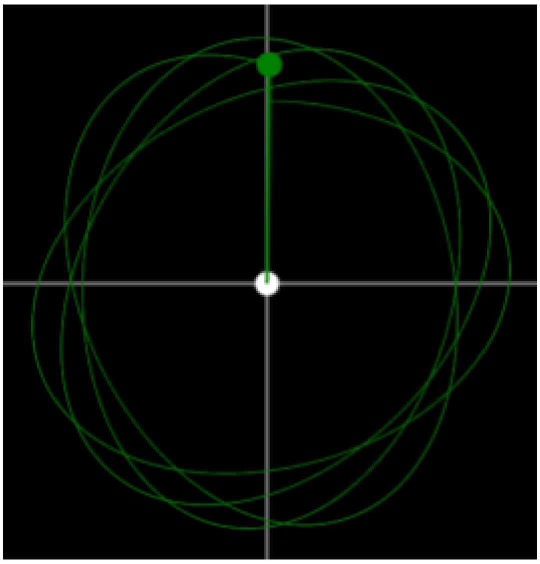
¡Ahora sí! Nos toca hacer lo que realmente nos pide la consigna.

Análisis.

<u>¡Atención! El código que le pasamos fue escrito en [CodeSkulptor en su versión de Python 3](), por lo que le recomendamos que lo corra en dicho programa para evitar posibles errores.</u>

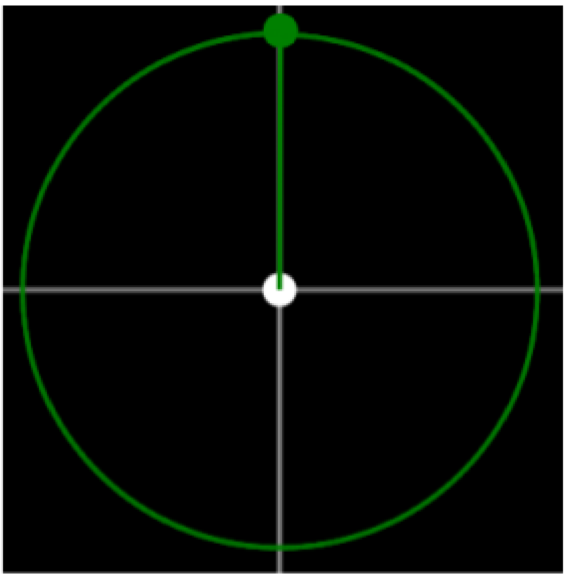
Empezamos analizando el efecto que tiene modificar el valor de la constante elástica y el que presenta modificar la masa de la partícula.

Pero antes, tenemos que cambiar la longitud natural del resorte, para hacerla distinta de 0, y arrancar con un modelo de base que cumpla con la consigna. Digamos, que sea igual a la mitad del radio. Es decir que a partir de ahora las condiciones iniciales de nuestra simulación son las siguientes:

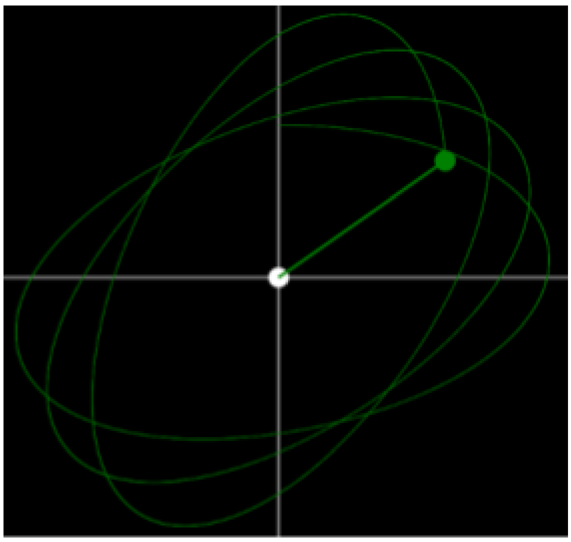


Simulación 1: l_o=10 m; k =1.25 N/m; m = 5 kg; $vel_o x$ = 10 m/s; $pos_0 y$ = 20 m

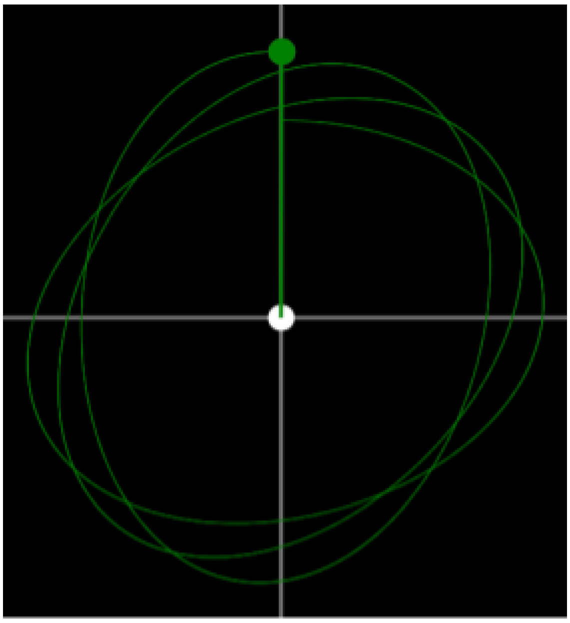
A partir de esas condiciones iniciales, podemos realizar algunas mínimas variaciones:



Simulación 2: l_o=10 m; k =2.5 N/m; m = 5 kg; $vel_o x$ = 10 m/s; $pos_0 y$ = 20 m



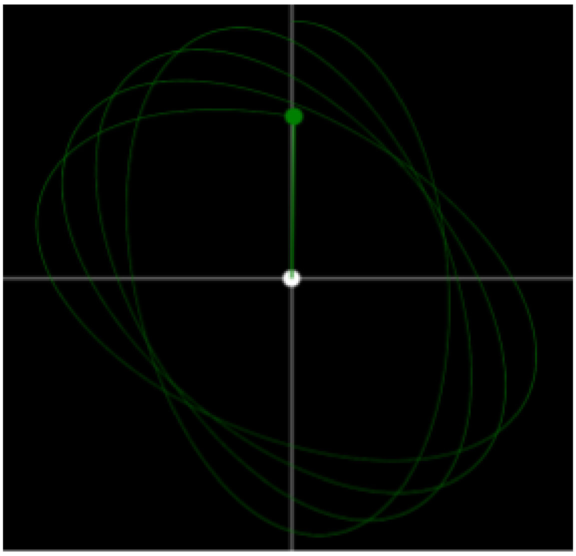
Simulación 3: l_o=10 m; k =1.25 N/m; m = 10 kg; $vel_o x$ = 10 m/s; $pos_0 y$ = 20 m



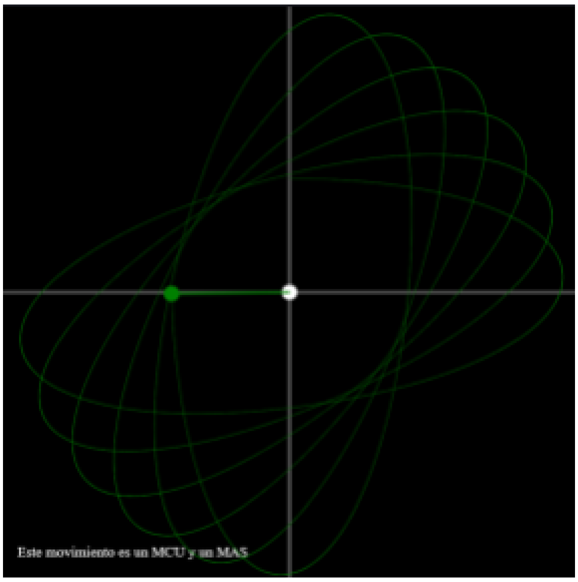
Simulación 4: l_o=10 m; k =2.5 N/m; m = 10 kg; $vel_o x$ = 10 m/s; $pos_0 y$ = 20 m

Observamos que la constante elástica tiene una relación directa con la fuerza centrípeta y que al aumentar la masa la velocidad tangencial inicial es más costosa de contrarrestar. Esto no sé si me queda 100% claro. Creo que entiendo qué están tratando de decir, pero no estoy seguro...

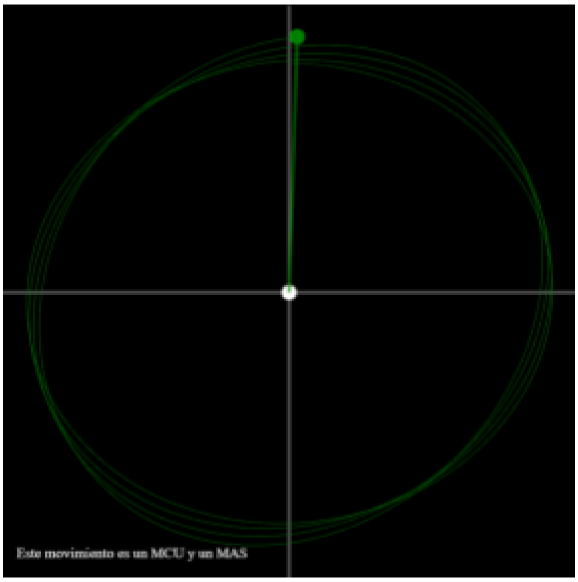
Procedemos a analizar distintas órbitas variando los valores de la posición y/o velocidad inicial.



Simulación 5: l_o=10 m; k =1.25 N/m; m = 5 kg; $vel_o x$ = 10 m/s; $pos_0 y$ = 40 m



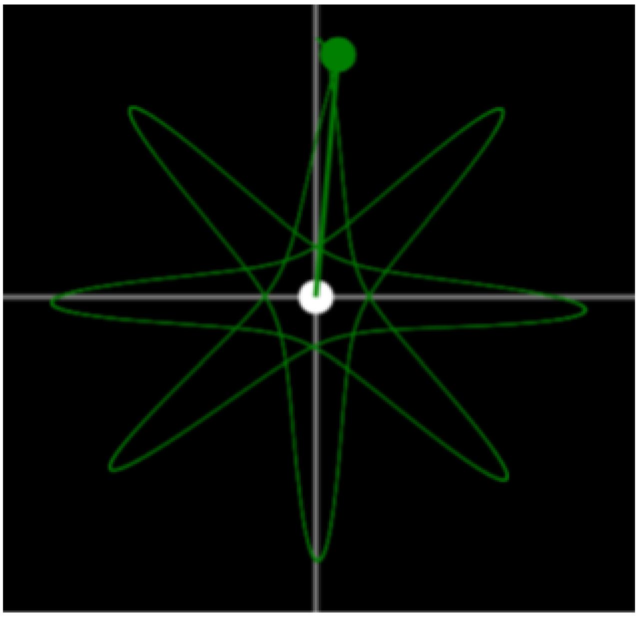
Simulación 6: l_o=10 m; k =1.25 N/m; m = 5 kg; $vel_o x$ = 20 m/s; $pos_0 y$ = 20 m



Simulación 7: l_o=10 m; k =1.25 N/m; m = 5 kg; $vel_o x$ = 20 m/s; $pos_0 y$ = 40 m

Observamos que modificar los valores de la posición inicial de forma que la amplitud del resorte aumenta, como en las simulaciones 5 y 7, o se mantiene, en la simulación 6, hace que la fuerza centrípeta aumente o se mantenga igual respectivamente. Y por otro lado, observamos que modificar los valores de la velocidad inicial de forma que aumenta, en las simulaciones 5 y 7, o se mantiene, en la simulación 6, hace que el movimiento tenga curvas más pronunciadas.

Esas fueron algunas pruebas sencillas donde lo que realizamos fue duplicar los valores por separado, o los pares de valores. Sin embargo, existen combinaciones cuyas gráficas resultan mucho más atractivas a la vista e interesantes. Uno de esos casos es el movimiento que resulta de cambiar la constante elástica, la velocidad inicial y otras variables.



Simulación 8: l_o=10 m; k =2,5 N/m; m = 5 kg; $vel_o x$ = 1 m/s; $pos_0 y$ = 20 m

Cuanto más se alejan de las condiciones iniciales que, para los valores de longitud natural y constante elástica elegidos, dan lugar a un movimiento circular, más movimientos de este estilo encontrarán Aquí tienen una situación en la que el período de oscilación radial es bastante menor que el orbital. Si fuese al revés, dominaría el movmiento orbital y en una revolución la distancia radial habría cambiado poco. Fíjense que la clave aquí es que la velocidad "tangencial" inicial es muy chica en conparación con los otros casos y por lo tanto la velocidad angular será baja y el período del movimiento orbital será mucho mayor.

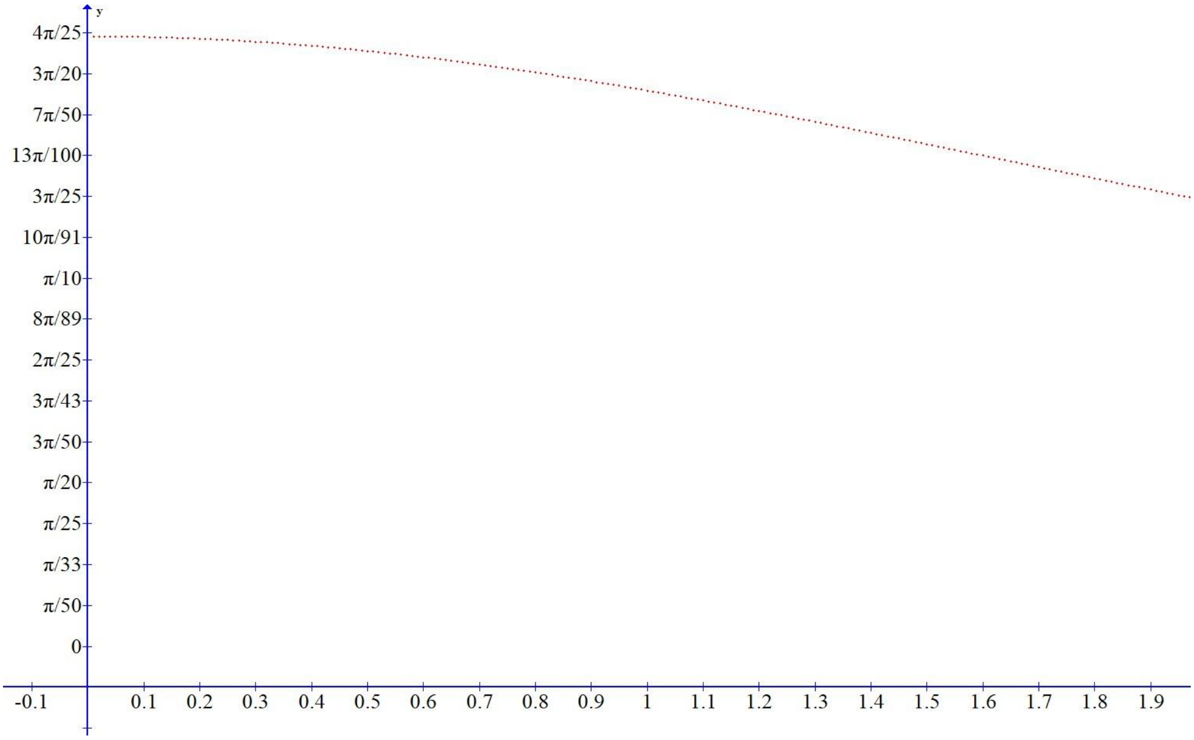
Conclusión.

Interpretamos la idea de superposición de movimientos como un sistema donde se pueden encontrar dos movimientos, en este caso un MCU y un MAS, que pueden ser analizados de manera individual y se rigen con las ecuaciones conocidas de cada movimiento. El ejemplo más común sería un caso de tiro oblicuo en el que los ejes cartesianos pueden ser analizados de forma separada y la conjunción entre ambos cálculos separados resulta en el movimiento real.

Tomando esta definición, en principio, podemos afirmar que la unión entre un MCU y un MAS nunca va a resultar en una superposición de movimientos.

Después de incorporar un MAS al MCU observamos cómo se comporta la velocidad angular en función del tiempo. Si pensamos en un MCU y en un MAS por separado, las velocidades de cada movimiento son constantes. Por lo tanto, si nos encontráramos frente a una verdadera superposición de dichos movimientos, la velocidad angular debería conservar su propiedad de ser constante. Para saber si el movimiento simulado representa una superposición u otra cosa, lo más práctico es graficar la velocidad angular de la combinación entre ambos movimientos en función del tiempo. El resultado de hacer esto fue el siguiente gráfico:

muy bien. Sería interesante ver, para los mismos instantes de tiempo, cuál es la distancia de la partícula al origen (centro de fuerzas).



A partir de la observación del gráfico podemos concluir que el movimiento resultante no se trata de una superposición entre un MCU y un MAS, ya que su velocidad angular no se mantiene constante con el paso del tiempo.

Sin embargo, y un gran sin embargo, es que se nos ocurre una única excepción a todo esto, la cual sería el conjunto de casos en los que se cumpla el siguiente par de condiciones:

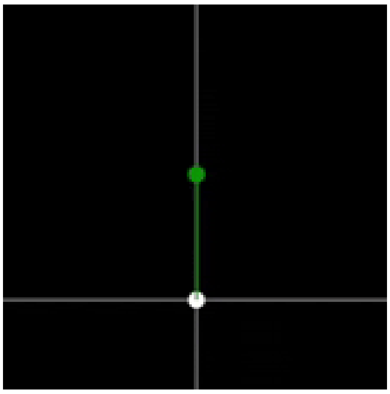
- Primero:

$$\Sigma F_c = m.a_c = \Sigma F_r = k.A$$

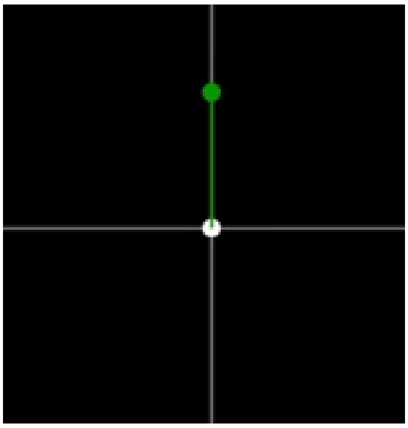
F_c corresponde a la fuerza centrípeta de un MCU cualquiera sin resorte, mientras que F_r corresponde a la fuerza del resorte. (En ambos casos los vectores ΣF tienen la misma dirección y sentido). Este es un requisito necesario, pero no suficiente.

- Segundo:

Este requisito, a su vez, puede satisfacerse de dos maneras. Una ocurre cuando la velocidad tangencial inicial (que correspondería al MCU) que se le da al movimiento es cero en toda dirección excepto en la propia del vector posición. De esta manera, nos encontramos con un MAS visible, mientras que el MCU queda "invisible".



El segundo caso sigue la misma idea pero con los sistemas invertidos: cuando la amplitud del resorte es igual a 0, en este caso tenemos un MCU visible, mientras que el MAS queda "invisible".



¿Podrían considerarse estos casos superposiciones de un MAS y un MCU? La respuesta a esta incógnita existencial nos excede en capacidades para la resolución de este trabajo, por lo que nos limitamos a exponer todas las posibilidades.

Muy bien. Muy buen trabajo.