Отчет по лабораторной работе №6

“Численное решение задачи Коши для ОДУ первого порядка и их систем”

Демидовец Д.В. Вариант 7

Задание 1.

1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка на отрезке $[0,1]$:

а) методом Эйлера-Коши с шагом $h_1 = 0{,}1$ и $h_2 = 0{,}05$, построить графики полученных решений;

б) методом Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом $h_1 = 0{,}1$ и $h_2 = 0{,}05$, построить графики полученных решений;

в) с помощью функций **DSolve** и **NDSolve,** построить графики.

Сравнить все полученные решения. Сделать выводы о точности методов в зависимости от шага сетки.

```
(*задание 1*)
f[x_, y_] = Cos[x + y] - x - y;
            косинус
x0 = 0;
y0 = 0;
a = 0;
b = 1;
h1 = 0.1;
h2 = 0.05;
n1 = Floor[(b - a) / h1];
     округление вниз
n2 = Floor[(b - a) / h2];
     округление вниз
(*пункт а*)
```

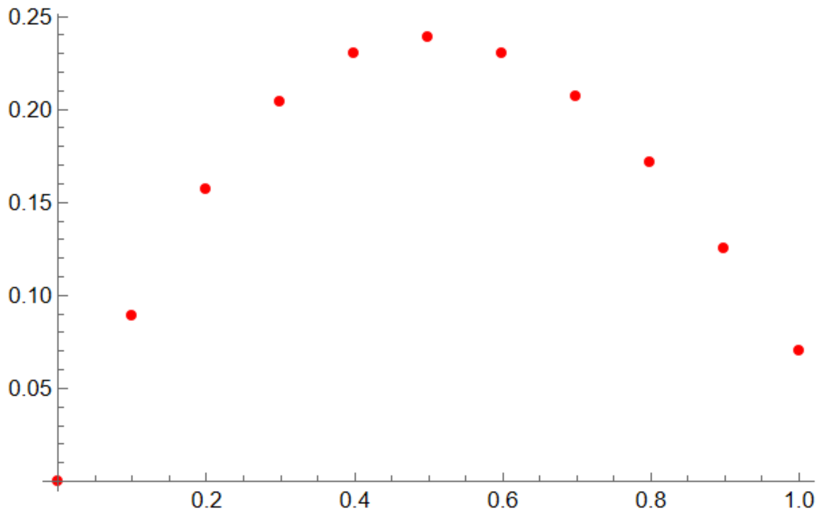
```
(*шаг = h1*) x = 0; y = 0;
eilerCoshi1 =
  Table[
  таблица значений
   {x, y} = {x + h1, y + h1 / 2 * (f[x, y] + f[x + h1, y + h1 * f[x, y]])},
   {i, n1}];
eilerCoshi1 = Prepend[eilerCoshi1, {x0, y0}];
              добавить в начало
MatrixForm[eilerCoshi1]
матричная форма
```

//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.0890033 \\ 0.2 & 0.156893 \\ 0.3 & 0.20367 \\ 0.4 & 0.230311 \\ 0.5 & 0.238435 \\ 0.6 & 0.22999 \\ 0.7 & 0.207021 \\ 0.8 & 0.171515 \\ 0.9 & 0.125311 \\ 1. & 0.0700556 \end{pmatrix}$$

```
graphic1 = ListPlot[eilerCoshi1, PlotStyle → Red]
           диаграмма разброса данных  стиль графика  красн
```

7]=



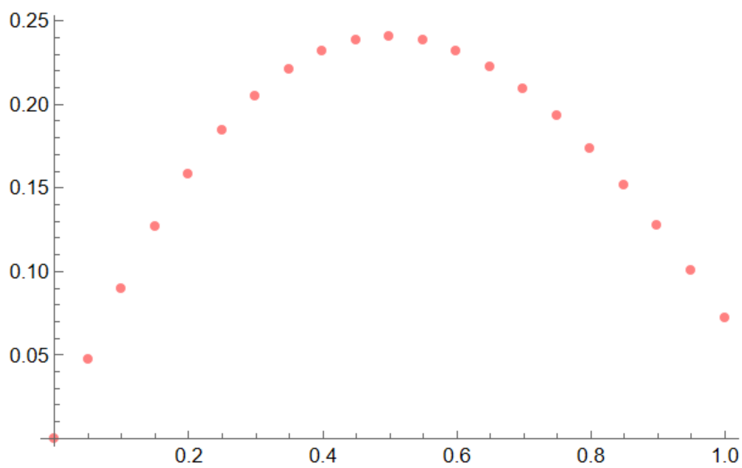

```
:= (*шаг = h2*) x = 0; y = 0;
  eilerCoshi2 =
    Table[
    таблица значений
     {x, y} = {x + h2, y + h2 / 2 * (f[x, y] + f[x + h2, y + h2 * f[x, y]])},
     {j, n2}];
  eilerCoshi2 = Prepend[eilerCoshi2, {x0, y0}];
                добавить в начало
  MatrixForm[eilerCoshi2]
  матричная форма
```

'/MatrixForm=

0	0
0.05	0.0473751
0.1	0.0895549
0.15	0.126421
0.2	0.157935
0.25	0.184132
0.3	0.205111
0.35	0.221019
0.4	0.232048
0.45	0.238416
0.5	0.240365
0.55	0.238146
0.6	0.23202
0.65	0.222244
0.7	0.209074
0.75	0.192757
0.8	0.173532
0.85	0.151624
0.9	0.127247
0.95	0.100603
1.	0.07188

```
|:= graphic2 = ListPlot[eilerCoshi2, PlotStyle → Pink]
              диаграмма разброса данных  стиль графика  розовы
```

8]=



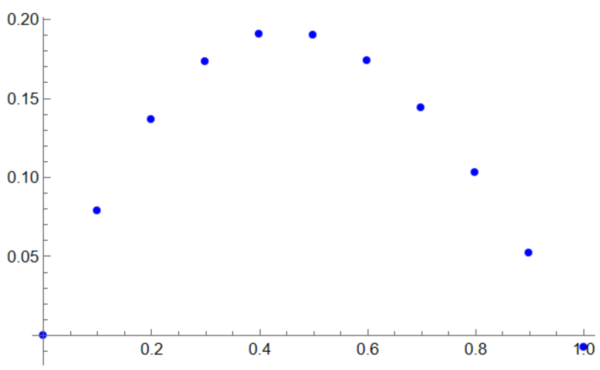
```
(*пункт б*)
(*шаг = h1*) solution1 = List[{x0, y0}];
                         список
x = 0; y = 0;
For[k = 1, k < n1 + 1, k++,
цикл ДЛЯ
 k1[x_, y_] := h1 * f[x, y];
 k2[x_, y_] := h1 * f[x + h1 / 2, y + k1[x, y] / 2];
 k3[x_, y_] := h1 * f[x + h1 / 2, y + k2[x, y] / 2];
 k4[x_, y_] := h1 * f[x + h1, y + k3[x, y]];
 x = x + h1;
 y = y + (k1[x, y] + 2 * k2[x, y] + 2 k3[x, y] + k4[x, y]) / 6;
 solution1 = Append[solution1, {x, y}]]
             добавить в конец
MatrixForm[solution1]
матричная форма
```

/MatrixForm=

0	0
0.1	0.0789217
0.2	0.136484
0.3	0.173204
0.4	0.190424
0.5	0.189974
0.6	0.173893
0.7	0.144234
0.8	0.102937
0.9	0.051765
1.	−0.00772476

```
graphic3 = ListPlot[solution1, PlotStyle → Blue]
           диаграмма разброса да⋯  стиль графика  синий
```

]=



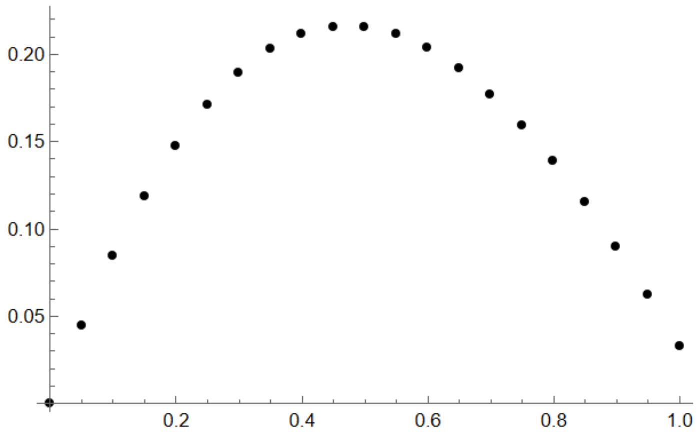

```
(*шаг = h2*) solution2 = List[{x0, y0}];
                         список
x = 0; y = 0;
For[k = 1, k < n2 + 1, k++,
цикл ДЛЯ
 k1[x_, y_] := h2 * f[x, y];
 k2[x_, y_] := h2 * f[x + h2 / 2, y + k1[x, y] / 2];
 k3[x_, y_] := h2 * f[x + h2 / 2, y + k2[x, y] / 2];
 k4[x_, y_] := h2 * f[x + h2, y + k3[x, y]];
 x = x + h2;
 y = y + (k1[x, y] + 2 * k2[x, y] + 2 k3[x, y] + k4[x, y]) / 6;
 solution2 = Append[solution2, {x, y}]]
             добавить в конец
MatrixForm[solution2]
матричная форма
```

//MatrixForm=

0	0
0.05	0.0448492
0.1	0.0844281
0.15	0.118658
0.2	0.14754
0.25	0.171139
0.3	0.189581
0.35	0.203037
0.4	0.211712
0.45	0.21584
0.5	0.215667
0.55	0.211452
0.6	0.203453
0.65	0.19193
0.7	0.177134
0.75	0.159309
0.8	0.138687
0.85	0.11549
0.9	0.0899259
0.95	0.062189
1.	0.0324616

```
graphic4 = ListPlot[solution2, PlotStyle → Black]
```

диаграмма разброса да··· | стиль графика | чёрный




```
(*пункт в*)
Clear[x, y]
```

очистить

```
solution3 = DSolve[{y'[x] == f[x, y[x]], y[x0] == y0}, y[x], x];
```

решить дифференциальные уравнения

```
y1[x_] = y[x] /. Flatten[solution3]
```

уплостить

••• ReplaceAll: {Solve[$\int_0^x$(−1 − Power[≪2≫]) ⅆK[1] + $\int_0^{y[x]}$(−Power[≪2≫] − ≪1≫[≪2≫]) ⅆK[2] == 0, y[x]]} is neither a list of replacement rules nor a valid dispatch table, and so cannot be used for replacing.

$$y[x]\ /.\ \text{Solve}\left[\int_0^x\left(-1-\frac{1}{-1-\text{Cos}[K[1]+y[x]]+K[1]+y[x]}\right)dK[1]+\int_0^{y[x]}\left(-\frac{1}{-1+x-\text{Cos}[x+K[2]]+K[2]}-\int_0^x\frac{1+\text{Sin}[K[1]+K[2]]}{(-1-\text{Cos}[K[1]+K[2]]+K[1]+K[2])^2}dK[1]\right)dK[2]==0,\ y[x]\right]$$

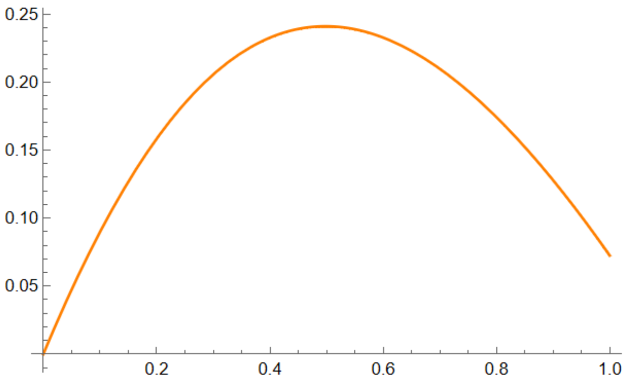
```
solution4 = NDSolve[{y'[x] == f[x, y[x]], y[x0] == y0},
    y[x], {x, a, b}];
```

численно решить ДУ

```
graphic5 = Plot[y1[x], {x, a, b}, PlotStyle → Green]
           |график функции         |стиль графика |зелёный
```

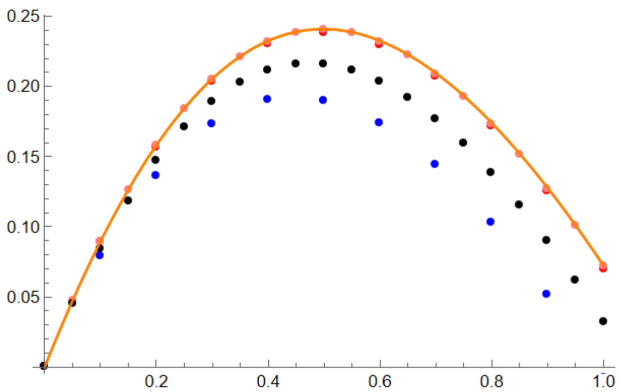
Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients or the system obtained by direct rationalization of inexact numbers present in the system. Since many of the methods used by Solve require exact input, providing Solve with an exact version of the system may help.

```
graphic6 = Plot[Evaluate[y[x]] /. solution4, {x, a, b},
           |гр···  |вычислить
  PlotStyle → Orange]
  |стиль графика |оранжевый
```




```
Show[graphic1, graphic2, graphic3, graphic4, graphic6]
|показать
```


```
Show[graphic1, graphic2, graphic3, graphic4, graphic6]
|показать
```

Вывод : в ходе выполнения данного задания, мы воспользовались разными методами решения дифференцированного уравнения . Как видно по графику выше оба графика построенных методом Эйлера совпали, так же как и графики полученных с помощью метода Рунге-Кутта, следовательно метод Рунге - Кутта более точный .

2. Решить задачу Коши для системы двух дифференциальных уравнений на отрезке $[0,1]$:

а) методом Эйлера с шагом $h_1 = 0{,}1$ и $h_2 = 0{,}05$, построить графики полученных решений;

б) методом Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом $h_1 = 0{,}1$ и $h_2 = 0{,}05$, построить графики полученных решений;

в) с помощью функций **DSolve** и **NDSolve,** построить графики.

```
:= (*задание2*)
  f1[x_, y_, z_] := 1 - z;
  f2[x_, y_, z_] := Log[x + 1] - 2 y / (x + 1)^2;
                    |натуральный логарифм
  x0 = 0; y0 = -1; z0 = 1.5;
  a = 0; b = 1; h1 = 0.1; h2 = 0.05;
  n1 = Floor[(b - a) / h1];
       |округление вниз
  n2 = Floor[(b - a) / h2];
       |округление вниз

:= (*шаг = h1*) eilera1 = List[{x0, y0}];
                          |список
  eilera2 = List[{x0, z0}];
            |список
  For[i = 0; x1 = x0; y1 = y0; z1 = z0, i < n1, i++,
  |цикл ДЛЯ
    y1 = y1 + h1 * f1[x1, y1, z1];
    z1 = z1 + h1 * f2[x1, y1, z1];
    x1 = x1 + h1;
    eilera1 = Append[eilera1, {x1, y1}];
              |добавить в конец
    eilera2 = Append[eilera2, {x1, z1}]];
              |добавить в конец
  MatrixForm[eilera1]
  матричная форма
  MatrixForm[eilera2]
  матричная форма
```

]//MatrixForm=

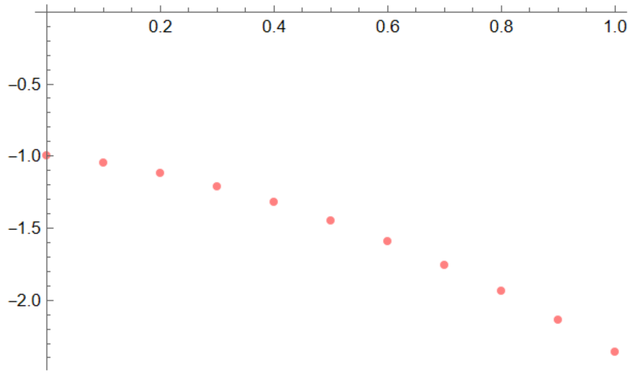
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0.1 & -1.05 \\ 0.2 & -1.121 \\ 0.3 & -1.21148 \\ 0.4 & -1.32061 \\ 0.5 & -1.448 \\ 0.6 & -1.59352 \\ 0.7 & -1.75726 \\ 0.8 & -1.93944 \\ 0.9 & -2.14034 \\ 1. & -2.36032 \end{pmatrix}$$

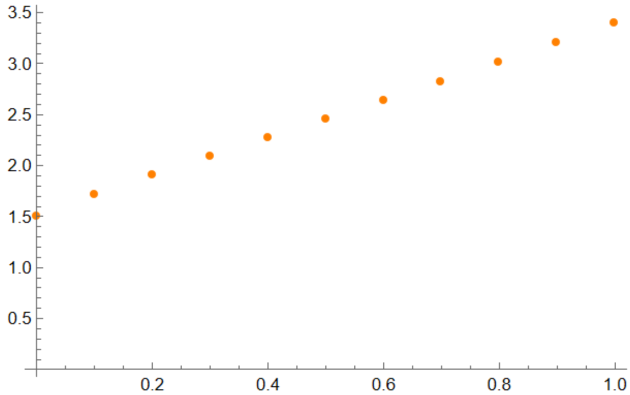
]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.5 \\ 0.1 & 1.71 \\ 0.2 & 1.90482 \\ 0.3 & 2.09131 \\ 0.4 & 2.27384 \\ 0.5 & 2.45524 \\ 0.6 & 2.63743 \\ 0.7 & 2.82172 \\ 0.8 & 3.009 \\ 0.9 & 3.1999 \\ 1. & 3.39485 \end{pmatrix}$$

```
ListPlot[eilera1, PlotStyle → Pink]
|диаграмма разброса данных |графика |розовый
ListPlot[eilera2, PlotStyle → Orange]
диаграмма разброса ··· |стиль графика |оранжевы
```

Диаграмма разброса   стиль графика оранжевый





```
eiler3 = List[{x0, y0}];
         список
eiler4 = List[{x0, z0}];
         список
```

```
For[i = 0; x2 = x0; y2 = y0; z2 = z0, i < n2, i++,
цикл ДЛЯ
  y2 = y2 + h2 * f1[x2, y2, z2];
  z2 = z2 + h2 * f2[x2, y2, z2];
  x2 = x2 + h2;
  eiler3 = Append[eiler3, {x2, y2}];
           добавить в конец
  eiler4 = Append[eiler4, {x2, z2}]];
           добавить в конец
```

```
MatrixForm[eiler3]
матричная форма
MatrixForm[eiler4]
матричная форма
```

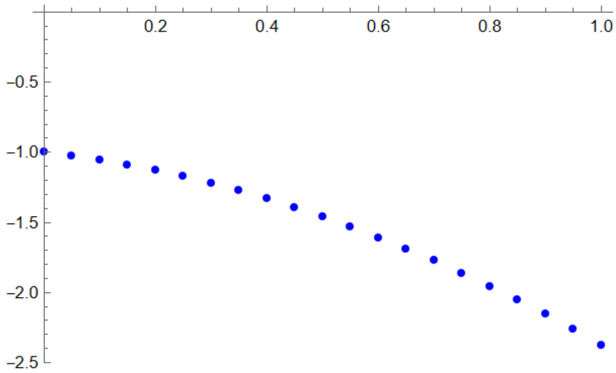
//MatrixForm=

0	-1
0.05	-1.025
0.1	-1.05512
0.15	-1.09016
0.2	-1.12993
0.25	-1.17433
0.3	-1.22326
0.35	-1.27666
0.4	-1.3345
0.45	-1.39674
0.5	-1.46339
0.55	-1.53445
0.6	-1.60994
0.65	-1.68987
0.7	-1.77427
0.75	-1.86319
0.8	-1.95665
0.85	-2.05471
0.9	-2.15741
0.95	-2.2648
1.	-2.37693

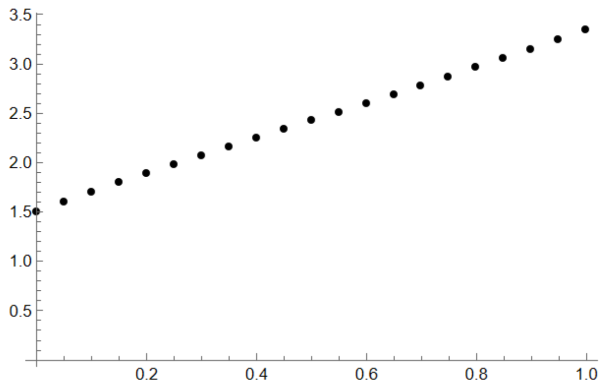
//MatrixForm=

0	1.5
0.05	1.6025
0.1	1.70064
0.15	1.7955
0.2	1.88793
0.25	1.9786
0.3	2.06804
0.35	2.1567
0.4	2.24493
0.45	2.33302
0.5	2.4212
0.55	2.50967
0.6	2.59859
0.65	2.6881
0.7	2.77831
0.75	2.86932
0.8	2.96119
0.85	3.05399
0.9	3.14779
0.95	3.24262
1.	3.33852

```
= graphic3 = ListPlot[eiler3, PlotStyle → Blue]
```
диаграмма разброс··· стиль графика синий

=



```
:= graphic4 = ListPlot[eiler4, PlotStyle → Black]
```
диаграмма разброс··· стиль графика чёрный

|=


```
(*пункт б*)
solution1 = List[{x0, y0}];
            список
solution2 = List[{x0, z0}];
            список


For[x3 = x0; y3 = y0; z3 = z0; i = 0, i < n1, i++,
цикл ДЛЯ
  k1 = h1 * f1[x3, y3, z3];
  r1 = h1 * f2[x3, y3, z3];
  k2 = h1 * f1[x3 + h1 / 2, y3 + k1 / 2, z3 + r1 / 2];
  r2 = h1 * f2[x3 + h1 / 2, y3 + k1 / 2, z3 + r1 / 2];
  k3 = h1 * f1[x3 + h1 / 2, y3 + k2 / 2, z3 + r2 / 2];
  r3 = h1 * f2[x3 + h1 / 2, y3 + k2 / 2, z3 + r2 / 2];
  k4 = h1 * f1[x3 + h1, y3 + k3, z3 + r3];
  r4 = h1 * f2[x3 + h1, y3 + k3, z3 + r3];
  x3 = x3 + h1;
  y3 = y3 + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
  z3 = z3 + (r1 + 2 * r2 + 2 * r3 + r4) / 6;
  solution1 = Append[solution1, {x3, y3}];
              добавить в конец
  solution2 = Append[solution2, {x3, z3}]];
              добавить в конец

MatrixForm[solution1]
матричная форма
```

//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0.1 & -1.05971 \\ 0.2 & -1.13794 \\ 0.3 & -1.23384 \\ 0.4 & -1.34699 \\ 0.5 & -1.47726 \\ 0.6 & -1.62473 \\ 0.7 & -1.7896 \\ 0.8 & -1.97217 \\ 0.9 & -2.17279 \\ 1. & -2.39187 \end{pmatrix}$$

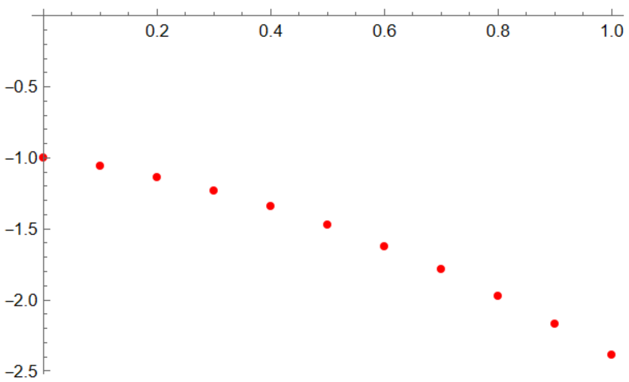
```
]:= MatrixForm[solution2]
    матричная форма
```

//MatrixForm=

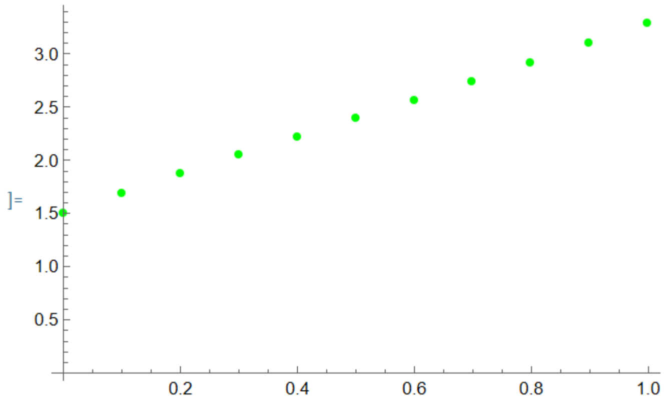
$$\begin{pmatrix} 0 & 1.5 \\ 0.1 & 1.69163 \\ 0.2 & 1.87166 \\ 0.3 & 2.04564 \\ 0.4 & 2.21712 \\ 0.5 & 2.38846 \\ 0.6 & 2.56127 \\ 0.7 & 2.73663 \\ 0.8 & 2.9153 \\ 0.9 & 3.09781 \\ 1. & 3.28452 \end{pmatrix}$$

```
:= ListPlot[solution1, PlotStyle → Red]
   диаграмма разброса да··· стиль графика красн
```

]=




```
:= ListPlot[solution2, PlotStyle → Green]
   диаграмма разброса да··· стиль графика зелёный
```




```
:= solution3 = List[{x0, y0}];
               список
   solution4  = List[{x0, y0}];
                список

For[x4 = x0; y4 = y0; z4 = z0; i = 0,  i < n2, i++,
цикл ДЛЯ
  k1 = h2 * f1[x4, y4, z4];
  r1 = h2 * f2[x4, y4, z4];
  k2 = h2 * f1[x4 + h2 / 2, y4 + k1 / 2, z4 + r1 / 2];
  r2 = h2 * f2[x4 + h2 / 2, y4 + k1 / 2, z4 + r1 / 2];
  k3 = h2 * f1[x4 + h2 / 2, y4 + k2 / 2, z4 + r2 / 2];
  r3 = h2 * f2[x4 + h2 / 2, y4 + k2 / 2, z4 + r2 / 2];
  k4 = h2 * f1[x4 + h2, y4 + k3, z4 + r3];
  r4 = h2 * f2[x4 + h2, y4 + k3, z4 + r3];
  x4 = x4 + h2;
  y4 = y4 + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
  z4 = z4 + (r1 + 2 * r2 + 2 * r3 + r4) / 6;
  solution3 = Append[solution3, {x4, y4}];
              добавить в конец
  solution4 = Append[solution4, {x4, z4}]];
              добавить в конец

MatrixForm[solution3]
матричная форма
```

//MatrixForm=

0	-1
0.05	-1.02746
0.1	-1.05971
0.15	-1.09658
0.2	-1.13794
0.25	-1.18372
0.3	-1.23384
0.35	-1.28827
0.4	-1.34699
0.45	-1.40998
0.5	-1.47726
0.55	-1.54883
0.6	-1.62473
0.65	-1.70497
0.7	-1.7896
0.75	-1.87865
0.8	-1.97216
0.85	-2.07019
0.9	-2.17279
0.95	-2.27999
1.	-2.39187

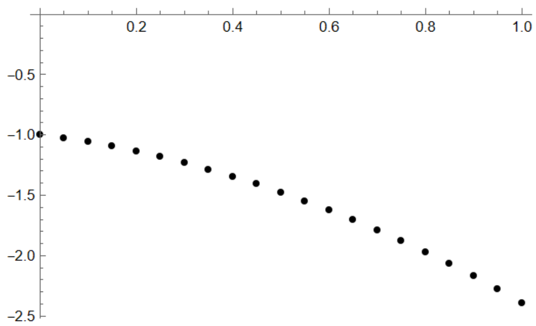
```
:= MatrixForm[solution4]
   матричная форма
```

```
MatrixForm[solution4]
```
матричная форма

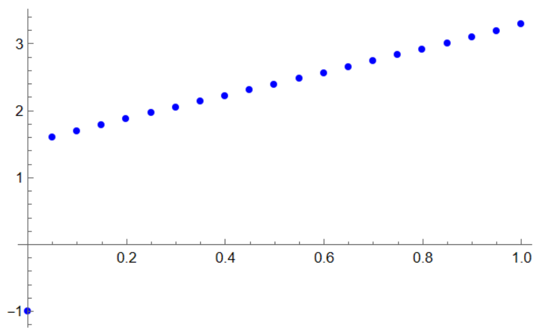
'MatrixForm=

0	-1
0.05	1.59772
0.1	1.69163
0.15	1.78269
0.2	1.87166
0.25	1.95915
0.3	2.04563
0.35	2.13152
0.4	2.21712
0.45	2.30269
0.5	2.38846
0.55	2.4746
0.6	2.56127
0.65	2.64857
0.7	2.73663
0.75	2.82551
0.8	2.9153
0.85	3.00605
0.9	3.09781
0.95	3.19062
1.	3.28452

```
ListPlot[solution3, PlotStyle → Black]
```
диаграмма разброса да··· стиль графика чёрный




```
ListPlot[solution4, PlotStyle → Blue]
```
диаграмма разброса да··· стиль графика синий

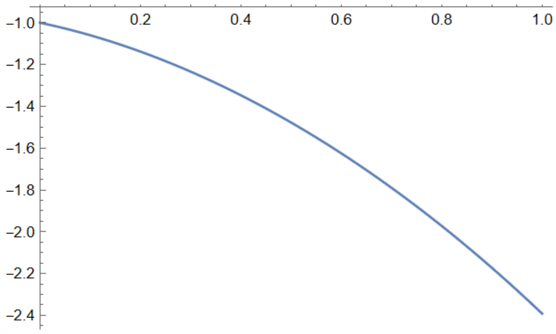



```
(*пункт в*)
dsolv = DSolve[{y'[x] == f1[x, y[x], z[x]], y[x0] == y0,
     z'[x] == f2[x, y[x], z[x]], z[x0] == z0}, {y[x], z[x]}, x];
```
решить дифференциальные уравнения

```
yd[x_] = y[x] /. Flatten[dsolv]
```
уплостить

$$\frac{1}{1.+x}\,0.166667\left(-6.-9.66667\,x-9.66667\,x^{2}-3.22222\,x^{3}+0.666667\,\mathrm{Log}[1+x]+2.\,x\,\mathrm{Log}[1+x]+2.\,x^{2}\,\mathrm{Log}[1+x]+0.666667\,x^{3}\,\mathrm{Log}[1+x]-1.\,\mathrm{Log}[1+x]^{2}-3.\,x\,\mathrm{Log}[1+x]^{2}-3.\,x^{2}\,\mathrm{Log}[1+x]^{2}-1.\,x^{3}\,\mathrm{Log}[1+x]^{2}\right)$$

```
Plot[yd[x], {x, 0, 1}]
```
график функции

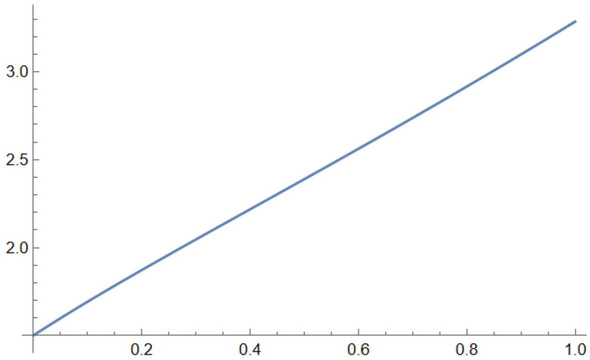



```
zd[x_] = z[x] /. Flatten[dsolv]
```
уплостить

$$\frac{1}{(1.+x)^2}\,0.333333\,\left(4.5+14.6667\,x+11.6667\,x^2+2.88889\,x^3+0.333333\,\mathrm{Log}[1+x]+x\,\mathrm{Log}[1+x]+x^2\,\mathrm{Log}[1+x]+0.333333\,x^3\,\mathrm{Log}[1+x]+\mathrm{Log}[1+x]^2+3.\,x\,\mathrm{Log}[1+x]^2+3.\,x^2\,\mathrm{Log}[1+x]^2+x^3\,\mathrm{Log}[1+x]^2\right)$$

```
Plot[zd[x], {x, 0, 1}]
```
график функции

```
Plot[zd[x], {x, 0, 1}]
```
график функции




```
ndsolv = NDSolve[{y'[x] == f1[x, y[x], z[x]], y[x0] == y0,
    z'[x] == f2[x, y[x], z[x]], z[x0] == z0}, {y[x], z[x]},
   {x, 0, 1}];
```
численно решить ДУ

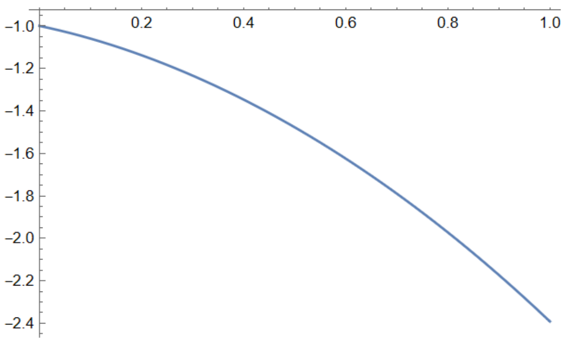
```
ynd[x_] = y[x] /. Flatten[ndsolv]
```
уплостить

```
InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.}} Output: scalar ][x]
```

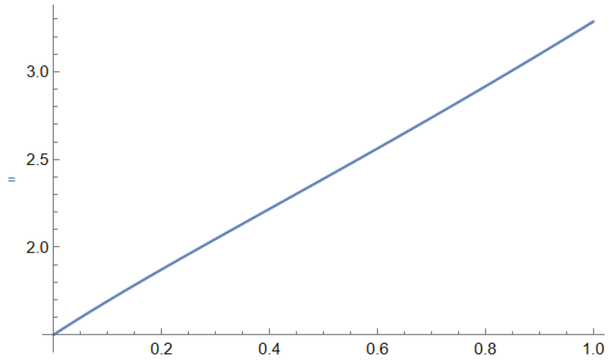
```
znd[x_] = z[x] /. Flatten[ndsolv]
```
уплостить

```
InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.}} Output: scalar ][x]
```

```
Plot[ynd[x], {x, 0, 1}]
```
график функции




```
Plot[znd[x], {x, 0, 1}]
```
график функции



Вывод: в ходе выполнения данного задания, мы подтвердили выводы, сделанные в задании 1, о том, что метод Рунге-Кутта более точно отражает решение дифференциальных уравнений.