Отчет по лабораторной работе №5

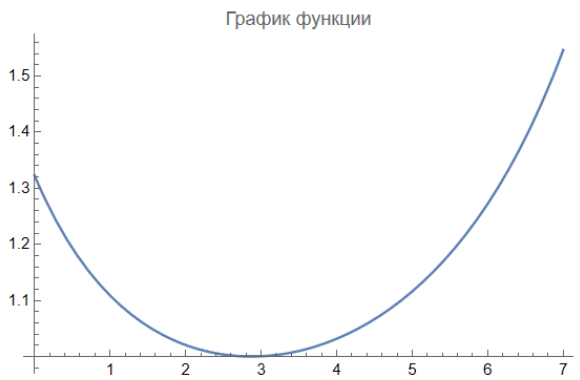
“Численное дифференцирование и интегрирование”

Демидовец Д.В. Вариант 7

Задание 1.

Найти приближенные значения производных первого и второго порядков функции $f(x)$ в точке x_0, используя: **а)** функцию **D** системы **Mathematica**; **б)** формулы численного дифференцирования $y_i' \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_i - \frac{1}{2}\Delta^2 y_i + \frac{1}{3}\Delta^3 y_i\right)$ и $y_i'' \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i\right)$ для шага $h_1 = 0{,}1$ и шага $h_2 = 0{,}01$. Сравнить полученные значения.

```
(*задание 1*)

f[x_] = Cosh[Tan[Sqrt[x + 7]]]^2;
x0 = 2.21;
Graphic = Plot[f[x], {x, 0, 7}, PlotLabel → "График функции"]
```




```
(*пункт а*)
D[f[x], x]
D[f[x], {x, 2}]
```

$$\frac{\text{Cosh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]\,\text{Sec}[\sqrt{7+x}]^2\,\text{Sinh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]}{\sqrt{7+x}}$$

$$\frac{\text{Cosh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]^2\,\text{Sec}[\sqrt{7+x}]^4}{2\,(7+x)} - \frac{\text{Cosh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]\,\text{Sec}[\sqrt{7+x}]^2\,\text{Sinh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]}{2\,(7+x)^{3/2}} + \frac{\text{Sec}[\sqrt{7+x}]^4\,\text{Sinh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]^2}{2\,(7+x)} + \frac{\text{Cosh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]\,\text{Sec}[\sqrt{7+x}]^2\,\text{Sinh}[\text{Tan}[\sqrt{7+x}]]\,\text{Tan}[\sqrt{7+x}]}{7+x}$$

```
d1 = D[f[x], x] /. x → x0 (*производная первого порядка*)
```

-0.0360047

```
d2 = D[f[x], {x, 2}] /. x → x0 (*производная второго порядка*)
     дифференцировать

0.0600518

(*пункт б*)
deltaY1[y_, y1_] := y1 - y;
deltaY2[y_, y1_, y2_] := y2 - 2 y1 + y;
deltaY3[y_, y1_, y2_, y3_] := y3 - 3 y2 + 3 y1 - y;
(*функции конечных разностей*)
```

$$h = 0.1;\ (*\text{шаг}*)$$

$$y1 = \frac{1}{h}\left(\text{deltaY1}[f[x0], f[x0+h]] - \frac{1}{2} * \text{deltaY2}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h]] + \frac{1}{3} * \text{deltaY3}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h], f[x0+3h]]\right)$$

(*производная первого порядка*)

```
-0.0359986
```

$$y2 = \frac{1}{h^2}(\text{deltaY2}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h]] - \text{deltaY3}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h], f[x0+3h]])$$

(*производная второго порядка*)

```
0.059825

Abs[d1 - y1]
абсолютное значение

6.1344×10^-6

Abs[d2 - y2]
абсолютное значение

0.000226893
```

$$h = 0.01;\ (*\text{шаг}*)$$

$$y1 = \frac{1}{h}\left(\text{deltaY1}[f[x0], f[x0+h]] - \frac{1}{2} * \text{deltaY2}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h]] + \frac{1}{3} * \text{deltaY3}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h], f[x0+3h]]\right)$$

(*производная первого порядка*)

```
-0.0360047
```

$$y2 = \frac{1}{h^2}(\text{deltaY2}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h]] - \text{deltaY3}[f[x0], f[x0+h], f[x0+2h], f[x0+3h]])$$

(*производная второго порядка*)

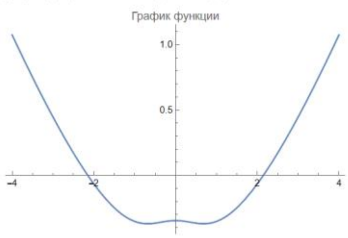
```
0.0600494

Abs[d1 - y1]
абсолютное значение

6.68247×10^-9

Abs[d2 - y2]
абсолютное значение

2.45246×10^-6
```

Задание 2. а) Вычислить с помощью формулы второго порядка точности и составить таблицу приближенных значений y′ производной функции f (x) на отрезке [–1, 3] с шагом h = 0,2; б) Изобразить на одном чертеже (на отрезке [–1, 3]) график функции f ′(x), полученной с помощью функции D пакета Mathematica, и точки (x, y′), соответствующие приближенным значениям производной, найденные в пункте а.

```
(*Задание 2*)
(*пункт а*)
```

$$f[x\_] := \text{Log}\left[\frac{\text{Cosh}[x]}{\text{Sqrt}[1 + x^2 + \text{Sqrt}[(1 + x^2)^3]]}\right];$$

```
Plot[f[x], {x, -4, 4}, PlotLabel → "График функции"]
график функции               пометка графика
```




```
a = -1;
b = 3;
h = 0.2;
```

```
table = Table[{x, (f[x + h] - f[x - h])/(2 h)}, {x, a, b, h}];
        таблица значений
TableForm[table]
табличная форма
(*xi, y'i*)
```

Out[•]//TableForm=

-1.	-0.115263
-0.8	-0.0415313
-0.6	0.0177314
-0.4	0.047124
-0.2	0.0378828
0.	0.
0.2	-0.0378828
0.4	-0.047124
0.6	-0.0177314
0.8	0.0415313
1.	0.115263
1.2	0.190923
1.4	0.261415
1.6	0.323935
1.8	0.37813
2.	0.424755
2.2	0.464916
2.4	0.499712
2.6	0.530106
2.8	0.556885
3.	0.580682

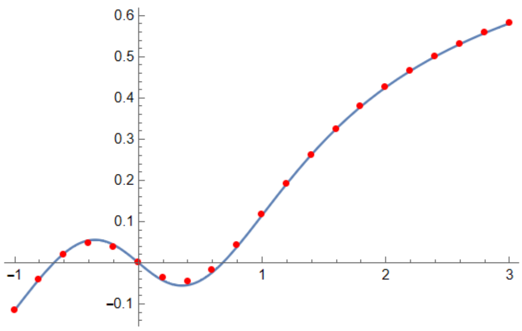
```
(*пункт б*)
diff = D[f[x], x]
       дифференци
```

Out[•]=

$$\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}\ \mathrm{Sech}[x]\left(-\frac{\left(2x+\frac{3x(1+x^2)^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right)\mathrm{Cosh}[x]}{2\left(1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}\right)^{3/2}}+\frac{\mathrm{Sinh}[x]}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\right)$$

```
graphic = Plot[diff, {x, -1, 3}];
          график функции
points = ListPlot[table, PlotStyle → {Red}];
         диаграмма разброс·· стиль графика красный
Show[graphic, points]
показать

(*График производной функции и точки,
соответствующие приближенным значениям производной,
найденные в пункте а*)
```

Out[•]=



Задание 3. Вычислить определенный интеграл: а) по формуле средних прямоугольников; б) по формуле трапеций. В обоих случаях использовать двойной просчет при n1 = 8 и n2 = 10 для уточнения значения интеграла по Ричардсону.

```
(*Задание 3*)
(*пункт а - Метод средних прямоугольников*)
```

$$f[x\_] = \frac{0.1x+\sqrt[4]{x+2.7}}{5+\sqrt{3x+0.1}};$$

```
a = 0.8;
b = 2.4;
```

x_0 = a;

(*разбиваем на n=8 отрезков*)

n1 = 8;

(*шаг*)

$$h = \frac{(b - a)}{n1};$$

6]:= For[i = 1, i ≤ n1, i++, x_i = h + x_{i-1};]

цикл ДЛЯ

$$averageRectangleMethod1 = \frac{(b - a)}{n1} * \sum_{i=1}^{n1} f\left[x_{i-1} + \frac{(b - a)}{2 * n1}\right] \ // N$$

ч

37]= 0.354416

8]:= (*разбиваем на n=10 отрезков*)

n2 = 10;

$$h = \frac{(b - a)}{n2};$$

0]:= For[i = 1, i ≤ n2, i++, x_i = h + x_{i-1};]

цикл ДЛЯ

$$averageRectangleMethod2 = \frac{(b - a)}{n2} * \sum_{i=1}^{n2} f\left[x_{i-1} + \frac{(b - a)}{2 * n2}\right] \ // N$$

ч

41]= 0.35554

:= (*по Ричардсону*)

k = 2;

RichardsonMethod =

$$averageRectangleMethod2 + \frac{n1^k}{n2^k - n1^k}(averageRectangleMethod2 - averageRectangleMethod1)$$

]= 0.357538

:= (*пункт 6 - Метод трапеций*)

n1 = 8;

x_0 = a;

$$h = \frac{(b - a)}{n1};$$

:= For[i = 1, i ≤ n1, i++, x_i = h + x_{i-1};]

цикл ДЛЯ

$$trapezoidMethod1 = \frac{(b - a)}{n1} * \left(\sum_{i=1}^{n1-1} f[x_i] + \frac{f[x_0]}{2} + \frac{f[x_{n1}]}{2}\right)$$

]= 0.355575

:= n2 = 10;

x_0 = a;

$$h = \frac{(b - a)}{n2};$$

:= For[i = 1, i ≤ n2, i++, x_i = h + x_{i-1};]

цикл ДЛЯ

$$trapezoidMethod2 = \frac{(b - a)}{n2} * \left(\sum_{i=1}^{n2-1} f[x_i] + \frac{f[x_0]}{2} + \frac{f[x_{n2}]}{2}\right)$$

]= 0.355566

:= (*по ричардсону*)

RichardsonMethod =

$$trapezoidMethod2 + \frac{n1^k}{n2^k - n1^k}(trapezoidMethod2 - trapezoidMethod1)$$

]= 0.355549

Задание 4. Вычислить определенный интеграл от таблично заданной функции по формуле Симпсона (парабол) для разбиений отрезка интегрирования на 8 и на 16 частей.

(*Задание 4*)

```
data = {{0.5, 0.4431}, {0.56, 0.4697}, {0.62, 0.5096}, {0.68, 0.5234}, {0.74, 0.5519}, {0.8, 0.5517}, {0.86, 0.5667}, {0.92, 0.5517}, {0.98, 0.5513}, {1.04, 0.5212}, {1.1, 0.5039}, {1.16, 0.4586}, {1.22, 0.4234}, {1.28, 0.3633}, {1.34, 0.3095}, {1.4, 0.2355}, {1.46, 0.1630}};
```

$$data = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4431 \\ 0.56 & 0.4697 \\ 0.62 & 0.5096 \\ 0.68 & 0.5234 \\ 0.74 & 0.5519 \\ 0.8 & 0.5517 \\ 0.86 & 0.5667 \\ 0.92 & 0.5517 \\ 0.98 & 0.5513 \\ 1.04 & 0.5212 \\ 1.1 & 0.5039 \\ 1.16 & 0.4586 \\ 1.22 & 0.4234 \\ 1.28 & 0.3633 \\ 1.34 & 0.3095 \\ 1.4 & 0.2355 \\ 1.46 & 0.1630 \end{pmatrix};$$

a = 0.5;
b = 1.46;
(*Разбиение отрезка на 8 частей*)
n = 4;

$h = \frac{(b - a)}{2n}$

For[i = 0, i ≤ 2*n, i++, y_i = data[[i + 1, 2]];]
цикл ДЛЯ

= 0.12

$$SimpsonMethod = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} * (y_{2i} + 4 y_{2i+1} + y_{2i+2})$$

= 0.505472

$$data = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4431 \\ 0.56 & 0.4697 \\ 0.62 & 0.5096 \\ 0.68 & 0.5234 \\ 0.74 & 0.5519 \\ 0.8 & 0.5517 \\ 0.86 & 0.5667 \\ 0.92 & 0.5517 \\ 0.98 & 0.5513 \\ 1.04 & 0.5212 \\ 1.1 & 0.5039 \\ 1.16 & 0.4586 \\ 1.22 & 0.4234 \\ 1.28 & 0.3633 \\ 1.34 & 0.3095 \\ 1.4 & 0.2355 \\ 1.46 & 0.1630 \end{pmatrix};$$

a = 0.5;
b = 1.46;
(*Разбиение отрезка на 16 частей*)
n = 8;

$h = \frac{(b - a)}{2n}$

For[i = 0, i ≤ 2*n, i++, y_i = data[[i + 1, 2]];]
цикл ДЛЯ

= 0.06

$$SimpsonMethod = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} * (y_{2i} + 4 y_{2i+1} + y_{2i+2})$$

= 0.442782

Задание 5. Вычислить определенный интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса с n узлами.

```
(*Задание 5*)

:= f[x_] = Sinh[2 x - 3]/(x + 1);
   a = 0.4;
   b = 3;
   n = 4;
   LegendreP[n, x]
   [P-функция Лежандра первог

|= 1/8 (3 - 30 x^2 + 35 x^4)

:= solution = NSolve[LegendreP[n, x] == 0, x];
                [числе··· [P-функция Лежандра первого р

:= xx = x /. solution

|= {-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136}

:= T = Table[If[i == 1, 1, (xx[[j]])^(i-1)], {i, n}, {j, n}]; MatrixForm[T]
       [табл··· [условный оператор                               [матричная форма

|//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.861136 & -0.339981 & 0.339981 & 0.861136 \\ 0.741556 & 0.115587 & 0.115587 & 0.741556 \\ -0.638581 & -0.0392974 & 0.0392974 & 0.638581 \end{pmatrix}$$

```
= B = Table[If[EvenQ[i] == True, 0, 2/i], {i, n}] // N
      [табл··· [··· [чётное чис··· [истина              [ч

= {2., 0., 0.666667, 0.}

= A = LinearSolve[T, B]
      [решить линейные урав

= {0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855}
```

$$\text{integralSolution} = \frac{(b-a)}{2} * \sum_{i=1}^{n} A[[i]] * f\left[\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} * xx[[i]]\right]$$

```
= 0.208291
```