Вокруг Multilevel Monte-Carlo. Приложения в финансовой математике и гидродинамике пористых сред

Работу подготовил: **Сунцов Демид Андреевич**

27 апреля 2023 г.

Стохастические ОДУ

Базовым уравнением является стохастическое ОДУ с начальным условием

$$dS(t) = a(S,t)dt + b(S,t)dW(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad S(0) = S_0, \tag{1}$$

- S — цена базового актива;
- $W(t)$ — винеровский процесс.
  Помимо нахождения решения задачи бывает необходимым предложить оценку для следующей величины

$$Y = \mathbb{E}\left[f(S(T))\right].$$

$f(S)$ — липшицева функция.

Метод Эйлера–Маруямы

Для получения численного решения вводится сетку $t_n = n\tau$, $n = \overline{0, N}$, $T = N\tau$. Для исходного уравнения записывается явная схема

$$\widehat{S}_{n+1} = \widehat{S}_n + a(\widehat{S}_n, t_n)\tau + b(\widehat{S}_n, t_n)\Delta W_n, \quad \widehat{S}_0 = S_0. \tag{2}$$

ΔW_n — приращения винеровского процесса.

Важное замечание

Схема Эйлера-Маруямы дает решение $\widehat{S}$, **слабо сходящееся к точному решению** S **в момент** T **с порядком аппроксимации** $\gamma = 1$ в классе функций $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, то есть для любой $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ найдется число $C > 0$, не зависящее от τ, и число $\tau_0 > 0$ такие, что

$$\left| \mathbb{E}\left[f(S(T)\right] - \mathbb{E}\left[f(\widehat{S}_N)\right] \right| \leqslant C\tau^\gamma, \quad \tau \in (0, \tau_0).$$

Классический Monte-Carlo (MC)

В качестве оценки Y предлагается взять по нескольким реализациям процессов $\{\widehat{S}_n^{(i)}\}$

$$\overline{Y} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(\widehat{S}_N^{(i)}). \tag{3}$$

В качестве метрики качества аппроксимации используется mean-squared error

$$\text{MSE} = \mathbb{E}|Y - \overline{Y}|^2. \tag{4}$$

Также введем величину

$$\widehat{Y} = \mathbb{E}\left[f(\widehat{S}_N)\right].$$

Разложение MSE

$$\mathsf{MSE} = \mathbb{E}\left[(\overline{Y} - \widehat{Y})^2\right] + \left(\widehat{Y} - Y\right)^2 = \frac{1}{M}\mathbb{D}\left[f(\widehat{S}_N^{(1)})\right] + \left(\widehat{Y} - Y\right)^2.$$

- первое слагаемое возникает из-за реализации эксперимента по методу Monte-Carlo;
- второй слагаемое (bias) связано с аппроксимацией исходного уравнения по схеме Эйлера-Маруямы.

Вычислительные затраты

$$\mathsf{TC} \sim MN.$$

Оценка MSE

$$\mathsf{MSE}(M, N) \sim \frac{C_1}{M} + \frac{C_2}{N^2} = \frac{C_1}{M} + \frac{C_2 M^2}{\mathsf{TC}^2}.$$

Баланс MSE и вычислительных затрат

Возникает два типа задач:

- Хотим поддерживать MSE на постоянном уровне $\sqrt{\text{MSE}} = O(\varepsilon)$ и минимизировать TC;
- Хотим поддерживать постоянной величину TC и минимизировать ошибку MSE;

Если от оценки требуется точность $\sqrt{\text{MSE}} = O(\varepsilon)$, то с точки зрения оптимального количества вычислительных операций эффективно подбирать параметры следующим образом

$$N = O(\varepsilon^{-1}), \quad M = O(\varepsilon^{-2}),$$

при этом $\text{TC} = O(\varepsilon^{-3})$.

Оптимизация асимптотики для ТС

Можно оптимизировать вычислительные ресурсы и привести число операций к асимптотике

$$\mathsf{TC} = O(\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2).$$

Для этого необходимо решать задачу на последовательно уточняющихся сетках с варьируемым шагом

$$\tau_l = q^{-l}\tau_0, \quad \tau_0 N_0 = T.$$

- q — некоторое натуральное число;
- $l = \overline{0, L}$, L — число уровней.

Вводятся payoff-функции

$$P = f(S(T)), \quad \widehat{P}_l^{(i)} = f(\widehat{S}_{N_l}^{(i)})$$

Multilevel Monte-Carlo

Распишем

$$\mathbb{E}\left[\widehat{P}_L\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{P}_0\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathbb{E}\left[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}\right].$$

Основная задача состоит в оценке слагаемых суммы по методу Monte-Carlo

$$\overline{Z}_l = \frac{1}{M_l} \sum_{i=1}^{M_l} \left(\widehat{P}_l^{(i)} - \widehat{P}_{l-1}^{(i)}\right), \quad \overline{Z}_0 = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \widehat{P}_0^{(i)}. \tag{5}$$

Используя независимые реализации для каждого уровня l, можно записать среднеквадратичную ошибку

$$\text{MSE} = \mathbb{D}\left[\sum_{l=0}^{L} \overline{Z}_l\right] = \sum_{l=0}^{L} \frac{V_l}{M_l}, \quad V_0 = \mathbb{D}\left[\widehat{P}_0\right], \quad V_l = \mathbb{D}\left[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}\right].$$

Вычислительные затраты в MLMC

Вычислительные затраты

$$\mathsf{TC} = \sum_{l=0}^{L} \mathsf{TC}_l = \sum_{l=0}^{L} M_l N_l.$$

Решая условную оптимизационную задачу о поддержании MSE $\sim \varepsilon^{-2}$, приходим к результату

$$\mathsf{TC} = \varepsilon^{-2} \left(\sum_{l=0}^{L} \sqrt{V_l N_l} \right) \sim \varepsilon^{-2} L^2 \text{ для липшицевой функции } f(S).$$

Если выбрать число уровней как

$$L = -\frac{\log_2 \varepsilon}{\log_2 q} + O(1),$$

то удовлетворена асимптотика

$$\mathsf{TC} = O(\varepsilon^{-2} (\log_2 \varepsilon)^2).$$

Приложения к уравнениям эллиптического типа

Рассмотрим закон Дарси и связанное с ним уравнение на скорость флюида $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} + k\nabla p = \mathbf{g}, \quad \nabla\mathbf{W} = 0, \text{ в области } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, 3. \tag{6}$$

с некоторыми граничными условиями (условия постоянного расхода или постоянного давления).

Приводим (6) к задаче Дирихле с комбинированными условиями на границе области $\mathcal{D} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$-\nabla(k(\mathbf{x})\nabla p(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \tag{7}$$

$$p\Big|_{\Gamma_1} = p_0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{8}$$

Дискретизация эллиптического уравнения

Воспользуемся методом конечных объемов для решения задачи Дирихле. Осуществим интегрирование по объему ячейки D_{ij}

$$-\oint\limits_{\partial D_{ij}} (k\nabla p)\cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{D_{ij}} f dV.$$

После применения двухточечной аппроксимации получим

$$-\overline{k}_{i,j-1/2}p_{i,j-1} - \overline{k}_{i-1/2,j}p_{i-1,j} - \overline{k}_{i+1/2,j}p_{i+1,j} -$$

$$-\overline{k}_{i,j+1/2}p_{i,j+1} - \overline{K}p_{i,j} = \frac{f_{i,j}}{m^2},$$

где

$$\overline{K} = \overline{k}_{i,j-1/2} + \overline{k}_{i-1/2,j} + \overline{k}_{i+1/2,j} + \overline{k}_{i,j+1/2}.$$

$\overline{k}_{i,j-1/2}$ — среднее гармоническое проницаемостей $k_{i,j-1}$ и $k_{i,j}$.

Моделирование случайного поля проницаемости

Основная неопределенность хранится в поле абсолютных проницаемостей $k(\mathbf{x},\omega)$, заданном в $\mathcal{D}\times\Omega$ (здесь Ω — вероятностное пространство). Введем $Z(\mathbf{x},\omega)=\log k(\mathbf{x},\omega)$. Представим поле Z в следующем виде

$$Z(\mathbf{x},\omega)=\mathbb{E}\left[Z(\mathbf{x},\cdot)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\theta_n}\xi_n(\omega)b_n(\mathbf{x}). \tag{9}$$

- $\xi_n(\omega)$ — центрированные нормально распредеденные независимые случайные величины;
- θ_n, $b_n(\mathbf{x})$ — собственные значения и нормированные собственные функции оператора ковариации с ядерной функцией плотности

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sigma^2\exp\left(\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_1}{\lambda}\right).$$