Geometrik Dağılım

Tanım: Bağımsız Bernoulli denemelerine ilk sonuç bulununcaya kadar devam edilirse yapılan denemelerin sayısına geometrik tesadüfi değişken denir. Her bir bağımsız Bernoulli denemelerinde başarılı sonucun gerçekleşme olasılığı p, gerçekleşmeme olasılığı q ile gösterilirse X geometrik tesadüfi değişkenin alacağı değerler $X = x \; ve \; x \in Z^+$ olmak üzere istenen sonucun gerçekleşmesi için yapılacak olan deneme sayısı en az birdir. Buna göre X geometrik tesadüfi değişeninin olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = p(x) = \begin{Bmatrix} q^{x-1}p, & x \in Z^+ \\ 0, & d.d \end{Bmatrix}$$

Beklenen Değer ve Varyans

$E(X) = \sum_{D_x} xP(X = x)$

$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x)$

$= \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}p$

$= p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^x$

$= p\frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} q^x$

$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)$

$= p\frac{1}{(1-q)^2}$

$= \frac{1}{p}$

Türevlerin toplamı, toplamların türevine eşittir.

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq}=q^x = \frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^x$$

$E(X^2) = \sum_{D_x} x^2P(X=x)$

$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2q^{x-1}p$

$= \sum_{x=1}^{\infty}(x(x-1) + x]q^{x-1}p$

$= pq \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-2} + \frac{1}{P}$

$= pq\sum_{x=2}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}\sum_{x=2}^{\infty} q^x + \frac{1}{p}$

$$=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{p}$$

$$Var\ (X) = E(\mathrm{X}^2) - [\mathrm{E(X)}]^2$$

$$=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{p^2}$$

$$=\frac{q}{p^2}$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t)=\sum_{D_X} e^{tx}P(X=x)$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}q^{x-1}p$$

$$=\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty}(qe^t)^x$$

Eğer $|qe^t| < 1$ ise bulunacak toplam yakınsaktır. Bu koşul altında geometrik dağılımın moment çıkaran fonksiyonu mevcuttur. Böylece

$$\mathrm{M_X(t)}\ =\frac{p}{q}\left(\frac{qe^t}{1-q^{et}}\right)$$

$$=\frac{pe^t}{1-qe^t}$$

elde edilir.

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s)=\sum_{D_X} S^x P(X=x)$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty} s^x q^{x-1}p$$

$$=\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty}(sq)^x$$

$$=\frac{sp}{1-sq}$$

elde edilir.

Geometrik Dağılımın Belleksizlik Özelliği

Geometrik dağılımın belleksizlik özelliği aşağıdaki teorem yardımı ile veriliyor.

Teorem : X tesadüfi değişkeni geometrik dağılıma sahip ve $\forall\, m, n \in Z^{+}$ olmak üzere

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$$

olarak yazılır.

İspat. $X \sim Geometrik\ (p)$ iken olasılık fonksiyonu

$$p(x) = \begin{cases} q^{x-1}p, & x = 1,2, \dots . \\ 0, & d.d \end{cases}$$

ve dağılım fonksiyonu da

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$= \sum_{s=1}^{x} q^{s-1} p$$

$$= p \sum_{s=1}^{x} q^{s-1}$$

$$= p\left(\frac{1-q^x}{1-q}\right)$$

$$= 1 - p^x$$

olur. Yani

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - q^x, & x = 1,2, \dots . \\ 1, & x \to \infty \end{cases}$$

olarak elde edilir. Böylece dağılım fonksiyonunun kuyruğu

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - (1 - q^x) = q^x$$

olarak ifade edilir.

$$P(X > m + n \mid X > m) = \frac{P(X > m + n, X > m)}{P(X > m)}$$

olur. Pay'da tanımlanan iki olaydan $(X > m)$ $olayı$ $(X > m + n)$ olayını kapsadığı için kesişim değeri $(X > m + n)$ olayına denktir.

$$P(X > m + n \mid X > m) = \frac{P(x_{>} m + n)}{P(X > m)}$$

$$P(X > m + n \mid X > m) = \frac{q^{m+n}}{q^m} = qn = P(X > n)$$

Örnek : Bir okçu hedefi tam 12 den vurana kadar atış yapmaktadır. Bu okçunun hedefi 12 den vurma olasılığı %35 tir. Bu bilgiye göre

a) X~Geometrik (0,35) olduğu bilinirken,

$$P(X = 1) = (0{,}65)1 - 1\ (0{,}35) = 0{,}35\ olur.$$

b) E(X) = $\frac{1}{0{,}35} \cong 2.86$

Örnek : Bir kutuda 12 adet sağlam 15 adet de bozuk elektronik parça bulunmaktadır. İadeli olarak bu kutudan elektronik parça seçilmektedir. Bir sağlam parça seçene kadar iadeli seçime devam edilecektir. İlk sağlam parçayı bulana kadar yapılan seçimlerin sayısı X tesadüfi değişkeni geometrik dağılım göstermektedir.

a) İlk sağlam parçanın yedinci seçimde bulunması olasılığı nedir?
b) $P(X > 25|X > 9) = P(\ X > 16)$ eşitliğinin doğruluğunu sayısal olarak gösteriniz.
c) İlk sağlam parçanın en çok 20 seçimde elde edilmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm.

a) $p = \frac{12}{27}$ ve q = $\frac{15}{27}$ olmak üzere

$$P(X = 7) = (\frac{15}{27})^{7-1}\left(\frac{12}{27}\right)$$

b) $P(X\ > 25|X > 9)\ = \frac{P(X>25)}{P(X>9)}$

Dağılım fonksiyonunun kuyruğundan

$$P(X > 25|X > 9) = \frac{\left(\frac{15}{27}\right)^{25}}{\left(\frac{15}{27}\right)^{9}} = \left(\frac{15}{27}\right)16$$

olur.

$$P(X > 16) = (15/27)^{16}$$

Olduğundan b)'deki eşitliğin doğruluğu sayısal olarak gösterildi.

c) $$P(X \leq 20) = F_X(20)$$

$$=1 - \left(\frac{15}{17}\right)^{20}$$

Negatif Binom Dağılımı

Tanım : Bağımsız Bernoulli denemelerine ilk $k(k \geq 1)$ kez "başarı sonucunun" elde edilmesine kadar devam edilirse, yapılan bu denemelerin sayısına Negatif Binom tesadüfi değişkeni denir. $i = 1,2, \dots, k$ için bağımsız X_i tesadüfi değişkenlerinin her biri $Xi \sim Geometrik$ (p) olmak üzere,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

X, Negatif Binom dağılımına sahiptir denir ve $X \sim N\ Binom\ (k, p)$ olarak gösterilir, bununla birlikte bu dağılıma eksi iki terimli dağılım veya Pascal dağılımı da denir. X, Negatif Binom tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdadır:

$$P(X = x) = \begin{Bmatrix} \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} i & x = k, k+1, \dots \\ 0, & d.d \end{Bmatrix}$$

Beklenen Değer ve Varyans

Negatif binom tesadüfi değişkeni bağımsız $X_i \sim Geometrik\ (p)$ tesadüfi değişkenlerin toplamı olduğundan

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_k)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

bulunur.

$$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)$$

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_k)$$

$$= \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} + \dots + \frac{q}{p^2} = \frac{kq}{p^2}$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$\mathrm{M_X(t) = E(e^{tX})}$$

$$= \mathrm{E}(e^{t(X_1 + X_2 + \cdots . + X_k)})$$

$$= E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots . E(e^{tX_k})$$

$$= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots . . M_{X_k}(t)$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\cdots\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{k}$$

Negatif Binom dağılımında istenen sonuç sayısı sabit deneme sayısı tesadüfi değişken iken binom dağılımında ise istenen sonuç sayısı tesadüfi değişken deneme sayısı sabittir.

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = E(s^X)$$

$$= E(s^{(X_1+X_2+\cdots..+X_k)})$$

$$= E(s^{X_1})E(s^{X_2})\ldots..E(s^{X_k})$$

$$= g_{X_1}(s)g_{X_2}(s)\ldots..g_{X_k}(s)$$

$$= \left(\frac{sp}{1-sq}\right)\left(\frac{sp}{1-sq}\right)\ldots..\left(\frac{sp}{1-sq}\right)$$

$$= \left(\frac{sp}{1-sq}\right)^{k}$$

Örnek : Örnek 5.3'teki iki petrol kuyusu bulmak için

a) Şirketin iki petrol kuyusuna rastlaması için 30 sondaj açma olasılığı nedir?
b) 3 doğal gaz kuyusuna rastlaması için 50 sondaj açması olasılığı nedir?
c) 100 sondaj yapıldığında beklenilen petrol kuyusu sayısı nedir?
d) 10 petrol kuyusu bulana kadar yapılan denemelerin beklenen sayısı nedir?

Çözüm

Petrol çıkma olasılığı: $p_{pet.} = 0{,}08$

Doğal gaz çıkarma olasılığı: $p_{dg.} = 0{,}13$

Kuyunun kuru çıkma olasılığı: $p_{kuru.} = 0{,}79$

a) $k = 2,\ x = 30$ olduğunda

$P(X = 30) = \binom{29}{1}(0{,}08)^2(0{,}92)^{28}$

$= 0{,}0179$

b) $P(X = 50) = \binom{49}{2}(0{,}13)^3(0{,}87)^{47}$

$=0{,}00371$

c) Burada Y~Binom (100; 0,08) olduğundan

$$E(Y) = np = 100(0{,}08) = 8 \text{ petrol kuyusu}$$

d) Burada ise $X \sim N\ Binom$ (10; 0,08) olduğundan

$$E(X) = \frac{10}{0{,}08} = 125\ kuyu$$

Örnek : Bir kutuda 10 yeşil 5 mavi bilye vardır. Kutudan tesadüfi ve iadeli olarak bilye çekildiğinde

a) 2 yeşil bilyenin en az 10. çekilişte bulunma olasılığı nedir?
b) 1 mavi bilyenin 4. çekilişte bulunulması olasılığı nedir?
c) 3 mavi bilyenin çekilmesi beklendiğinde kaç denemeye ihtiyaç vardır?

Çözüm: 10 yeşil 5 mavi bilye vardır.

Yeşil bilye çekilme olasılığı: p_y = 2/3

Mavi bilye çekilme olasılığı: p_m = 1/3

a) $k = 2,\ X$ yapılan denemede sayısı olmak üzere

$$P\ (X \leq 10) = \sum_{x=2}^{10} \binom{x \quad -1}{2 \quad -1} \left(\frac{2}{3}\right)^{1} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

$$= 0{,}9997$$

b) $k = 1, x = 4$ için,

$$P(X = 4) = \binom{4-1}{1-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

$$= 0{,}024691$$

c) $k = 3$

$$E(X) = \frac{k}{pm} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

9 denemeye ihtiyaç vardır.

Hipergeometrik Dağılım

Tanım : N birimden oluşan bir kitleden a tanesi istenen özelliğe sahip, $N - a$ tanesinde ise istenen özellik yoktur. Bu kitleden n genişliğinde iadesiz olarak bir örneklem çekildiğinde istenen özellikteki birimlerin sayısı X tesadüfi değişkeni ile gösterildiğinde X'e hipergeometrik tesadüfi değişken denir ve $X \sim HGeometrik(n, a, N)$ ile gösterilir. X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$P(X = x) = \begin{Bmatrix} \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x = 0,1, \dots, n \\ 0, & d.d \end{Bmatrix}$$

Bu dağılım özellikle örnekleme kuramı ve kalite denetiminde sıkça kullanılır.

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \sum_{D_x} x P(X=x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{na}{N}$$

$$E(X^2) = \sum_{D_x} x^2 P(X=x)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{na}{N(N-1)}[(a-1)(n-1) + (N-1)]$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))2$$

$$= \frac{N-n}{N(N-1)} n \frac{a}{N}\left(1 - \frac{a}{N}\right)$$

Moment çıkaran fonksiyonun çıkarılışı karışık olduğundan burada verilmeyecektir.

Örnek : 150 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin %20 si Karadeniz bölgesindendir. Bu sınıftan tesadüfi olarak 6 öğrenci seçildiğinde bu öğrencilerden,

a) İkisinin Karadeniz bölgesinden olması olasılığı nedir?
b) En az üçünün Karadeniz bölgesinden olması olasılığı nedir?
c) En çok dördünün Karadeniz bölgesinden olmaması olasılığı nedir?
d) Seçilen bu 6 öğrenciden kaçının Karadeniz bölgesinden olması beklenilir.
e) Karadeniz bölgesinden olmayanların sayısının varyansını hesaplayınız.

Çözüm. X ve Y sırasıyla Karadeniz bölgesinden olanların ve olmayanların sayısını göstersin. $N = 150,\ a = 30\ ve\ n = 6$ olmak üzere,

a) $P(X = 2) = \frac{\binom{30}{2}\binom{120}{4}}{\binom{150}{6}}$

$=0,067$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$

$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{\binom{3U}{x}\binom{120}{6-x}}{\binom{150}{6}} = 0,0946$$

c) $\bar{a} = 120$ olmak üzere Y tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(Y = y) = \begin{cases} \dfrac{\binom{\bar{a}}{y}\binom{N-\bar{a}}{n-y}}{\binom{N}{n}}, & y = 0,1,\ldots,n \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$P(Y \leq 4) = 1 - P(Y > 4)$

$= 1 - [P(Y = 5) + P(Y = 6)]$

$$=1 - \left[\frac{\binom{120}{5}\binom{30}{1}+\binom{120}{6}\binom{30}{0}}{\binom{150}{6}}\right]$$

$=0,3446$

d) $E(X) = \frac{6.30}{150} = \frac{6}{5}$

e) $Var(Y) = \frac{N-1}{N(N-1)} n \frac{\bar{a}}{N}(1 - \frac{\bar{a}}{N}) = 0,93$

Örnek : Bir firma bir üreticiden 500 kasa kiraz alacaktır. Bunun için tesadüfi olarak seçtiği 100 kasa kirazı kontrol etmek istiyor ve en çok iki kasa kirazın bozuk olabileceğini hoş görüyor. Bu bağlamda %1, %2, %3, %4, %5, %8, %10 bozuk oranı için kirazların (parti mallarının) kabul edilme olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm. $X \sim HGeometrik\ (n, a, N)$ olmak üzere burada belli özelliğe sahip birim sayısı $a = Np$ alınır ve X tesadüfi değişkeni de bozuk kiraz kasası sayısını gösterir.

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & x=0,1,\dots,n\\ 0, & d.d\end{cases}$$

En çok 2 kasa bozuk kirazın hoş görülebileceği kabul edildiğinden istenen olasılık

$$P(X\leq 2) = \sum_{x=0}^{2}\frac{\binom{500\cdot\rho}{x}\binom{500.1}{100-x}}{\binom{500}{100}}$$

$a = Np\ ve\ N = 500$

$p = \%0\ için\ a = 0$

$$P(X=0) = 1,\ P(X=1) = 0, P(X=2) = 0$$

olduğundan

$$P(X\leq 2) = 1$$

bulunur.

$p = 0.01\ için\ a = 5$

$$P(X\leq 2) = \sum_{x=0}^{2}\frac{\binom{500\cdot\rho}{x}\binom{500.q}{100-x}}{\binom{500}{100}}$$

$$=\frac{\binom{5}{0}\binom{495}{100}}{\binom{500}{100}}+\frac{\binom{5}{1}\binom{495}{99}}{\binom{500}{100}}+\frac{\binom{5}{2}\binom{495}{98}}{\binom{500}{100}}$$

$$= 0,3260 + 0,4116 + 0,2053$$

$$= 0,9429$$

$p = 0.02\ için\ a = 10$

$$P(X\leq 2) = \sum_{x=0}^{2}\frac{\binom{500\cdot\rho}{x}\binom{500.q}{100-x}}{\binom{500}{100}}$$

$$=\frac{\binom{10}{0}\binom{490}{100}}{\binom{500}{100}}+\frac{\binom{10}{1}\binom{490}{99}}{\binom{500}{100}}+\frac{\binom{5}{2}\binom{490}{98}}{\binom{500}{100}}$$

$$=0,678$$

$p = 0.03 \; için \; a = 15$

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{\binom{15}{x}\binom{485}{100-x}}{\binom{500}{100}}$$

$$= 0{,}3830$$

$p = 0{,}04 \; için \; a = 20 \;\; P(X \leq 2) = 0{,}1985$

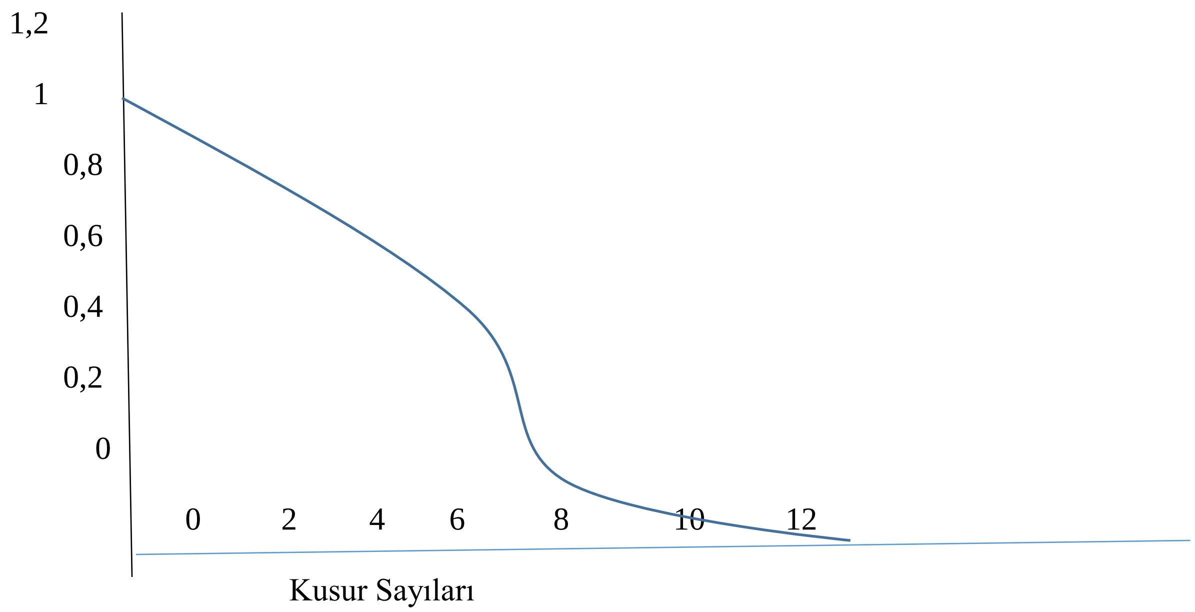
$p = 0{,}05 \; için \; a = 25 \;\; P(X \leq 2) = 0{,}0920$

$p = 0{,}08 \; için \; a = 40 \;\; P(X \leq 2) = 0{,}0062$

$p = 0{,}10 \; için \; a = 50 \;\; P(X \leq 2) = 0{,}0001$

Verilen kusur oranları ve bulunan olasılıklar aşağıdadır:

Kusur % si	0	1	2	3	4	5	8	10
Kabul olasılığı	1	0,9429	0,6780	0,3830	0,1985	0,0920	0,062	0,0001



Şekil. İşlem Eğrisi Grafiği

Grafikten görüldüğü gibi parti mallarında (kirazlarda) hiç kusurlu mal yoksa parti malının kabul edilme olasılığı kesindir. %1 kusurlu mal varsa kabul edilme olasılığı 0,9429, %2 kusurlu mal varsa kabul edilme olasılığı 0,678, %3 ve daha fazlası için de alınacak malların kabul edilme olasılığı %50'nin altındadır. Yani 2 den çok kusurlu parti malları reddedilmektedir.

Çok Değişkenli Hipergeometrik Dağılım

Tanım . k farklı özelliğe sahip ve N biriminden oluşan bir kitle göz önüne alınıyor: N_1 tanesi 1. özelliğe, N_2 tanesi 2. özelliğe sahip ve bunun gibi N_k tanesi de k. özelliğe sahiptir.

$$N = \sum_{k=1}^{k} N_k$$

olur. Her bir alt kitleden sırasıyla $n_1, n_2, \dots \dots n_k$birimlik örneklem iadesiz olarak çekilmek istendiğinde

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

ve X_i tesadüfi değişkenleri şöyle tanımlanıyor:

$$X_i = \left\{ \begin{array}{cc} n_i\,; & Çekilen\ birimlerdem\ i.\text{özelliğe}\ sahip\ birim\ sayısı \\ N_i - n_i\,; & Çekilen\ birimlerden\ i.\text{özelliğe}\ sahip\ olmayan\ birim\ sayısı \end{array} \right\}$$

Bu bağlamda $X_1, X_2, \dots., X_k$ tesadüfi değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, .., X_k = n_k = p(n_1, n_2, .., n_k) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}..\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

Beklenen Değer ve Varyans

X_i tesadüfi değişkeninin beklenen değer ve varyansı

$$E(X_i) = \frac{nn_i}{N}$$

$$Var(X_i) = \frac{N-n}{N(N-1)} n \frac{n_i}{N}\left(1 - \frac{n_i}{N}\right)$$

Örnek : Bir çocuk, içinde 10 mavi, 10 yeşil, 10 sarı ve 20 kırmızı boncuğun olduğu bir torbadan tesadüfi olarak 6 boncuk çekmektedir. Çektiği bu boncukların 1 mavi, 2 yeşil, 2 sarı ve 1 kırmızı olma olasılığı nedir?

Çözüm: $N_1 = 10$, $N_2 = 10, N_3 = 10 \; ve \; N_4 = 20$ olmak üzere $X_1, X_2, X_3 \; ve \; X_4$ tesadüfi değişkenleri de sırasıyla çocuğun çektiği mavi, yeşil, sarı ve kırmızı boncukların sayısını göstermek üzere istenen olasılık aşağıdadır.

$$P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2 \; ve \; X_4 = 1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{2}\binom{10}{2}\binom{20}{1}}{\binom{50}{6}} = 0{,}0255$$

Düzgün(Uniform) Dağılım

Bir deneyin sonucunda meydana gelen sonlu sayıdaki farklı durumun eşit olasılığa sahip olduğunu düşünelim. Örneğin bir paranın atılması, bir zarın atılması veya n hacimli bir kitleden oluşturulan n hacimli örneklemlerden herhangi birinin seçilmesi deneyleri sonucu eşit olasılıklı durumlar oluşur.

Tanım: X tesadüfi değişkenin alabileceği sonlu sayıda farklı $x_1, x_2, \dots, x_k$ değerlerini eşit olasılıklarla alıyor ise bu tesadüfi değişkene düzgün kesikli tesadüfi değişken denir ve olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & x = x_1, x_2, \dots, x_k \\ 0, & d.d \end{cases}$$

dur. X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x}{k}, & 1 \le x \le k \\ 1, & x > k \end{cases}$$

Olur.

Beklenen Değer ve Varyans

$E(X) = \sum_{D_x} xP(X = x)$

$E(X) = \sum_{x=1}^{k} x\left(\frac{1}{k}\right)$

$= \frac{k+1}{2}$

$E(X^2) = \sum_{D_x} x^2 P(X=x)$

$E(X^2) = \sum_{x=1}^{k} x^2\left(\frac{1}{k}\right)$

$= \frac{(k+1)(2k+1)}{6}$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \frac{(k-1)(k+1)}{12}$

Ayrıca $x_1 = a, x_2 = a + 1, \dots\dots, x_k = a + k - 1 = b$ olarak alınırsa

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad Var(X) = \frac{(b-a+2)(b-a)}{12}$$

olur.

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$= \sum_{x=1}^{k} e^{tx}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} e^{tx}$$
$$= \frac{1}{k}(e^t + e^{2t} + \cdots + e^{kt})$$
$$= \frac{1}{k}\left[\frac{e^t - e^{(k+1)t}}{1-e^t}\right]$$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = E(s^X)$$
$$= \sum_{x=1}^{k} s^x\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} s^x$$
$$= \frac{1}{k}(s + s^2 + \cdots + s^k)$$
$$= \frac{s}{k}\left[\frac{1-s^k}{1-s}\right]$$

Örnek : Kesikli bir X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$p(x) = \begin{cases} c, & x = 1, \ldots, 5 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

Buna göre $Var(X)$'ı bulunuz.

Çözüm.

$$\sum_{x=1}^{5} p(x) = 1$$
$$\sum_{x=1}^{5} c = 1$$

olduğundan

$$c = \frac{1}{5}$$

olur.

Dağılım düzgün olduğundan

$$Var(X) = \frac{24}{12} = 2 \qquad dir.$$

Örnek : X tesadüfi değişkeni 10,11, ... ,20 tamsayıları üzerinde düzgün dağılıma sahip ise, bu tesadüfi değişkenin bir çift tamsayı değeri alması olasılığı nedir?

Çözüm.

$$p(x) = \begin{cases} c, & x = 10,11,\ldots.,20 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$\sum_{x=10}^{20} p(x) = \sum_{x=10}^{20} c = 1$$

$$c = \frac{1}{11}$$

olarak elde edilir.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{11}, & x = 10,11,\ldots.,20 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$P(X = 10) + P(X = 12) + P(X = 14) + P(X = 16) + P(X = 18) + P(X = 20) = \frac{6}{11}$$