LİNEER

CEBİR

-Zeynep Çevik

Matrisler

\# $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m \times n$ tane reel veya kompleks sayıdan meydana gelen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$m \rightarrow$ satır

$n \rightarrow$ sütun

tablosuna bir $m \times n$ matris denir.

A matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $(i = 1, 2, \ldots m \,;\, j = 1, 2 \ldots n)$ şeklinde gösterilir.

a_{ij}' lere matrisin elemanları, $m \times n$' ye de matrisin mertebeleri ya da tipi denir.

\# a_{ij} sayılarının her birine A matrisinin bir elemanı denir.

Ayrıca $a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ elemanlarının oluşturduğu yatay sıraya A matrisinin i. satırı

$a_{ij}, a_{2j}, \ldots a_{mj}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

elemanlarının oluşturduğu dikey sıraya da A matrisinin j. sütunu veya kolonu denir.

Bir matris, yalnız bir satır veya sütundan meydana gelebilir.

Bu durumda matris, sırasıyla satır matrisi veya sütun matrisi adını alır.

→ Eğer bir matrisin bütün elemanları sıfır ise bu matrise sıfır matris denir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisleri için eğer $\forall\ i, j$ için

$$a_{ij} = b_{ij}$$

ise A ve B matrislerine eşit denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

Matrislerde Toplama ve Skalerle Çarpma işlemi

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin toplamı bu matrislerin karşılıklı bileşenleri toplanarak elde edilen yeni bir matristir.

NOT: iki matrisin farkı da toplamın bir özel hali olduğundan

$C = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde tanımlı

Bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisi verilsin.

$-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine A'nın toplamsal tersi denir.

Bir k skaleri ile A matrisinin çarpımı, A'nın her bir elemanının k ile çarpımından elde edilen yeni bir C matrisidir. Yani,

$C = k.A = [k.a_{ij}]_{m \times n}$ 'dir.

Matrislerde Çarpma İşlemi

A matrisi $m \times n$ tipinde, B matrisi $n \times p$ tipinde olsun $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ olduğunu varsayalım

$$C = i.k = \sum_{j=1}^{n} = a_{ij} \, b_{jk}$$

eşitliğiyle tanımlı olan $[c_{ij}]_{m \times p}$ matrisine A ile B matrisinin çarpımı denir ve AB ile gösterilir.

! UYARI : Herhangi A ve B matrisleri için çarpım tanımlı değildir. Bu matrislerin çarpımları olabilmesi için A'nın sütun sayısının B'nin satır sayısına eşit olmalıdır.

→ A matrisinin 1. satır elemanı B matrisinin 1. sütun elemanları ile karşılıklı olarak çarpılarak toplanır. Böylece A.B çarpım matrisinin a_{11} elemanı bulunur. Bu işlem A matrisinin bütün satırları B matrisinin bütün sütunlarıyla çarpılıncaya kadar devam ettirilip AB bulunur.

ÖRNEK :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3.5 + 1(-1) & 3(-2) + 1.0 \\ 0.5 + (-2)(-1) & 0(-2) + (-2).0 \\ 4.5 + 3(-1) & 4(-2) + 3.0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Bir Matrisin Transpozu

A matrisi $m \times n$ tipinde olsun. A'nın satırları sütun yapılarak elde edilen yeni matrise A'nın transpozu denir. A^T şeklinde gösteri

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ise

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Uyarı :

1) A matrisi $m \times n$ tipindeyse A^T $n \times m$ tipindedir.

2) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ ise

$$b_{ij} = a_{ij}$$

3) $(A^T)^T = A$

ÖRNEK :
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Teorem :

1) A ve B matrisleri $m \times n$ tipinde ve C bir skaler ise $(A+B)^T = A^T + B^T$ $\rightarrow$ $(c.A)^T = c.A^T$

2) A matrisi $m \times n$ tipinde B matrisi $n \times p$ tipinde ise $B^T A^T$ tanımlı olup

$$(AB)^T = B^T . A^T \quad \text{dur.}$$

\# Bir A matrisi için eğer

$A^T = A$ ise A'ya simetrik matris ;

$A^T = -A$ ise A'ya antisimetrik (tersmatris) denir.

Karesel Matrisler

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrislere kare ya da karesel matris denir.

n. mertebeden bir kare matriste $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ sayılarının oluşturduğu sıralı sayı n lisine kare matrisin köşegeni denir.

n. mertebeden bir kare matrisin köşegenindeki elemanlarının tümü bir (1), köşegen dışındaki elemanların tümü sıfır (0) ise bu matrise n. mertebeden birim matris denir. I_n ile gösterilir.

A $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1\times1}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$

A, n. mertebeden bir kare matris olmak üzere $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine köşegen matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Köşegen Matris
(diagonal)

Bir köşegen matrisin köşegendeki elemanları eşit ise bu matrise skaler matris denir.

$$\begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix}_{n\times n}$$

skaler Matris

($c = 1$ ise → birim matris)

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matris olmak üzere

$i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise A üst üçgensel

$i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise A alt üçgensel matristir.

Bir Kare Matrisin Determinantı

det A veya $|A|$ ile gösterilir. Sadece kare matrislerin determinantı hesaplanabilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (-) \quad (+)$$

2. mertebeden matris ise determinantı

$$|A| = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$$

Sarrus Kuralı : 3. mertebeden bir determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ilk iki satırı determinantın altına ilave ederek yeniden yaz.

Determinantın Laplace Açılımı

Bu metod en basit şekliyle yüksek mertebeden bir determinantı alt determinantların toplamı şeklinde ifade etmektedir. Örneğin 1. dereceden bir determinant 2. mertebeden alt determinantların toplamı olarak yazılabilir.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verilsin M_{ij} ile A'nın i. satırı ve j. sütununun silinmesiyle elde edilen $(n-1) \times (n-1)$. mertebeden bir matris gösterilsin.

M_{ij} matrisinin determinantına A'nın a_{ij} elemanının minörü ve

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$ değerine de a_{ij} elemanının kofaktörü (işaretli minör veya eş çarpan) denir.

Laplace Açılımı

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ $(n \geq 2)$ kare matrisi verilsin.

A'nın herhangi bir i. satırına göre Laplace Det. Açılımı :

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

ÖRNEK:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= -2 \quad\quad = 4$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= -2$

$\det A = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2)$

$= 0$

ÖRNEK: deter.? 2. sütuna göre

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$|B| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$

Determinantların Özellikleri

- Bir determinantın herhangi bir satırını veya sütununu bir sayıyla çarparsan determinantı da aynı sayıyla çarp.
- Bir determinantın bir satırını veya sütununun tamamı sıfır (0) ise determinantın sonucu sıfır olur.
- Herhangi iki satırı veya sütunu yer değiştirirsek determinantın işareti değişir.
- iki satırı veya sütunu birbirinin aynısı veya katı olan determinantın değeri sıfırdır.
- Bir determinantın bir satır veya sütununun elemanları iki ya da daha fazla terimin toplamı ise bu determinant iki ya da daha fazla determinantın toplamı şeklinde yazılabilir.
- Bir determinantta herhangi bir satırın veya sütunun elemanları aynı bir sayı ile çarpılıp başka bir sütuna eklenirse determinantın değeri değişmez.
- Bir determinantın herhangi bir satıra veya sütuna ait elemanları başka bir satıra veya sütuna ait elemanların kofaktörüyle (eş çarpanıyla) çarpılıp toplanırsa sonuç sıfır olur.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$

$\det(A.B) = \det A \,.\, \det B$

UYARI

A $n\times n$ tipinde ortagonal bir matris ise $\det A = \mp 1$

Eğer $\det A = 1$ ise pozitif ortagonal ;

$\det A = -1$ ise negatif ortagonal matris denir.

Özel Matrisler

Determinantı sıfıra eşit olan bir karesel matrise singüler matris, determinantı sıfırdan farklı olan bir karesel matrise de regüler matris denir.

Yani A, karesel bir matris olmak üzere ;

$\det A = 0 \Rightarrow$ A'ya singüler ,

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ A'ya regüler denir.

Bir A matrisinin determinantı, sıfırdan farklı olan en yüksek mertebeden alt matrisinin mertebesine A matrisinin rankı denir.

n. mertebeden bir karesel matrisin rankı en fazla n olabilir. Eğer karesel bir matrisin determinantı sıfırdan farklı ise rankı karesel matrisin mertebesine eşittir.

(Rank 0 olamaz. En az 1 olur. Matrisler en az 1 x 1 olduğundan 1. mertebe olabilir.

Adjoint Matris

$A = [a_{ij}]$ bir kare matris ve bu kare matrisin a_{ij} elemanının eş çarpanı (kofaktörü) da A_{ij} olsun. A_{ij}'lerden elde edilen $[A_{ij}]$ matrisinin transpozu olan $[A_{ji}]$ matrisine A kare matrisinin adjoint matrisi denir. adj A veya $\tilde{A}$ sembolüyle gösterilir.

→ Özellikleri

A ve B n. mertebeden bir kare matrisler I_n de bir birim matris olmak üzere

- $A(\text{adj} A) = |A| I_n$
- $\text{adj}(A.B) = \text{adj} B . \text{adj} A$

Ters Matrisin Bulunması

A, n. dereceden bir karesel matris ve I_n birim matris olmak üzere;

$$A.B = B.A = I_n$$

bağıntısını sağlayan B matrisine A'nın tersi (inversi) ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Böylece

$$A.A^{-1} = I_n$$ olduğu görülür.

A'nın tersi de n. mertebeden bir karesel matristir.

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|}$$

Ters Matrisin Hesaplanması

Bir karesel matrisin tersinin bulunmasında iki farklı yol izlenecektir.

1) n. mertebeden bir A matrisinin tersi B matrisi ise $A.B = I_n \ldots (*)$ yazılır ve bu işlem yapılarak B ters matrisinin elemanları bulunur.

Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Yardımıyla Çözümü

$$a_{11}.x_{11} + a_{12}.x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n} = b_1$$
$$a_{21}.x_{21} + a_{22}.x_{22} + \dots + a_{2n}x_{2n} = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}.x_{n1} + a_{n2}.x_{n2} + \dots + a_{nn}x_{nn} = b_n$$

denklem sistemini göz önüne alalım. Bilinmeyenlerin katsayılar matrisini A, bilinmeyenlerin matrisini x ve eşitliğin sağındaki sabit sayıların matrisini de B ile gösterirsek

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ dir.

Böylece soldaki denklem sistemi $Ax = B$ şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan A^{-1} ters matrisi ile çarpılırsa $x = A^{-1}.B$ elde edilir. Matris eşitliği tanımından $x_1, x_2, \dots x_n$ bilinmeyenleri bulunur.

ÖRNEK:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = -5$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 2$$

verilen denklem sistemini çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 36 \neq 0$$ olduğundan tersi vardır.

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

Bir Matrisin Eşolon Formu

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise A'ya satırca indirgenmiş eşolon formda bir matris denir.

- A'nın sıfır satırları (bütün elemanları sıfır olan satırları) varsa bunlar matrisin en alt satırlarıdır.

- Sıfırdan farklı bir satırın soldan itibaren sıfırdan farklı ilk elemanı 1'dir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

- Sıfırdan farklı her satırı için ilk 1 önceki satırların herhangi ilk 1'lerinin sağında ve altında yer alır.

- Bir sütun bir ilk 1 içeriyorsa bu sütundaki diğer bütün elemanları 0 (sıfır)'dır.

Satırca indirgenmiş eşolon formdaki bir matris, bu matrisin üst sol köşesinden azalan ilk 1'lerin merdiven (eşolon) örneği olarak düşür.

NOT: Yukarıdaki tanımda 1. 2. ve 3. özellikleri sağlayan mxn tipindeki bir matris satırca eşolon formdadır. Bu tanımlarda hiç sıfır satırı olmayabilir. Benzer tanım sütunca eşolon form için de geçerlidir.

ÖRNEK:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Satırca 'indirgenmiş' eşolon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$ Satırca eşolon form

Elemanter Operasyonlar

Bir $A \in \mathbb{R}_n^m$ ($A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin satırlarını ; $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ve sütunlarını $\beta_1, \beta_2, \dots$ ile gösterelim. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir;

\# Bir $m\times n$ tipinde A matrisi üzerinde tanımlanan aşağıdaki işlemlere matrisler için elemanter satır (sütun) operasyonu denir ve ε ile gösterilir.

- A matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek

$$\varepsilon : \alpha_i \longleftrightarrow \alpha_j$$

- A matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak

$$\varepsilon : \alpha_i \longrightarrow c.\alpha_j$$

- A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) bir sayı ile çarpıp diğer bir satırına (veya sütununa) eklemek

$$\varepsilon : \alpha_i \longrightarrow \alpha_i + c.\alpha_j$$

Bir A matrisine sonlu sayıda satır veya sütun elemanter operasyonu uygulayarak bir B matrisi elde ediliyorsa ; A ve B matrislerine satırca veya sütunca denk matrisler denir $A \approx B$ şeklinde gösterilir.

- Her matris kendisine denktir.
- Eğer B , A matrisine satırca denk ise A 'dan B'ye satırca denktir.
- Eğer C , B'ye satırca denk ise B'de A'ya denk ise A ve C de satırca denktir.

Elemanter Operasyonların Uygulamaları

Bir matrisin tersinin bulunması A nxn matrisi I_n matrisine satırca denk olsun. Yani $\varepsilon_k(\cdots \varepsilon_2(\varepsilon_1 A)) = I_n$ olsun.

Şimdi $\varepsilon_k \dots \varepsilon_1$ elemanter operasyonları $[A : I_n]$ matrisine uygulayalım.

Bu durumda

$$\varepsilon_k(\cdots \varepsilon_2(\varepsilon_1 [A : I_n])) = [\varepsilon_k(\varepsilon_2(\varepsilon_1 A))\cdots]$$

Dolayısıyla $[A : I_n] \approx [I_n : A^{-1}]$ elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}\right\} \quad 1$$

yani $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{ij} = b_i \qquad (1 \leq i \leq m)$

şeklinde bir sisteme n bilinmeyenli m tane denklemden lineer denklem sistemi denir. Eğer b_i değerlerinin hepsi 0 ise sisteme homojen; en az biri 0'dan farklı ise sisteme homojen olmayan lineer denklem sistemi denir.

Gösterimi 1 ile verilen denklem sistemini matris yardımıyla $Ax = B$ şeklinde gösterilir.

↳ katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

→ $$[A : B] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m \times (n+1)}$$

- matrisine lineer denklem sistemi ilaveli katsayılar matrisi denir.

NOT : ifade edilen (1) denklem sistemi için eğer;

- $\text{rank } A \neq \text{rank } [A:B]$ ise sistemin çözümü yoktur ve bu denklem sistemine tutarsız denklem sistemi denir.
- $\text{rank } A = \text{rank } [A:B]$ ise sistemin çözümü vardır. Bu denklem sistemine tutarlı denklem sistemi denir.

Bu durumda $\text{rank } A = r$;

$\rightarrow$ $r = n$ ise tek çözüm var.

$\rightarrow$ $r < n$ ise sonsuz çözüm var. Bu çözümler $n-r$ parametreye bağlı olarak bulunur. (n bilinmeyen)

ÖRNEK :

$$-x + 3y = 2$$
$$2x - 6y = c$$

lineer denk. sistemi verilsin.

C'nin hangi değeri için denklem sistemi tutarsız olur?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad [A:B] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & c \end{array}\right]$$

$\text{rank } A = 1$

denklem sisteminin tutarlı olması yani ilaveli katsayılar matrisinin 1 olması için $c = -4$ olmalıdır;

o halde $c \in \mathbb{R} - \{-4\}$ tutarsız olur.

CRAMER DENKLEM SİSTEMLERİ

A $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $Ax = B$ lineer denklem sistemi verilsin. Eğer $m = n$ ve $\det A \neq 0$ ise $Ax = B$ lineer denk sistemine cramer denklem sistemi denir.

$Ax = B$ daha açık şekilde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

denklem sistemi verilsin $\det A \neq 0$ ise bu lineer denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

$x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ olacak şekilde ve bu çözüm

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n \end{vmatrix}$$

olmak üzere $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\det A}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\det A}$

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}$$

ÖRNEK : $2x + y = 5$ lineer denklem sisteminin
$-x + 3y = 1$ çözümünü bulalım.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\det A = 7 \neq 0$ olduğundan cramer yöntemiyle tek bir çözümü vardır.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \det = 14$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \det = 7$

$x_1 = \frac{14}{7} = 2$ $x_2 = \frac{7}{7} = 1$