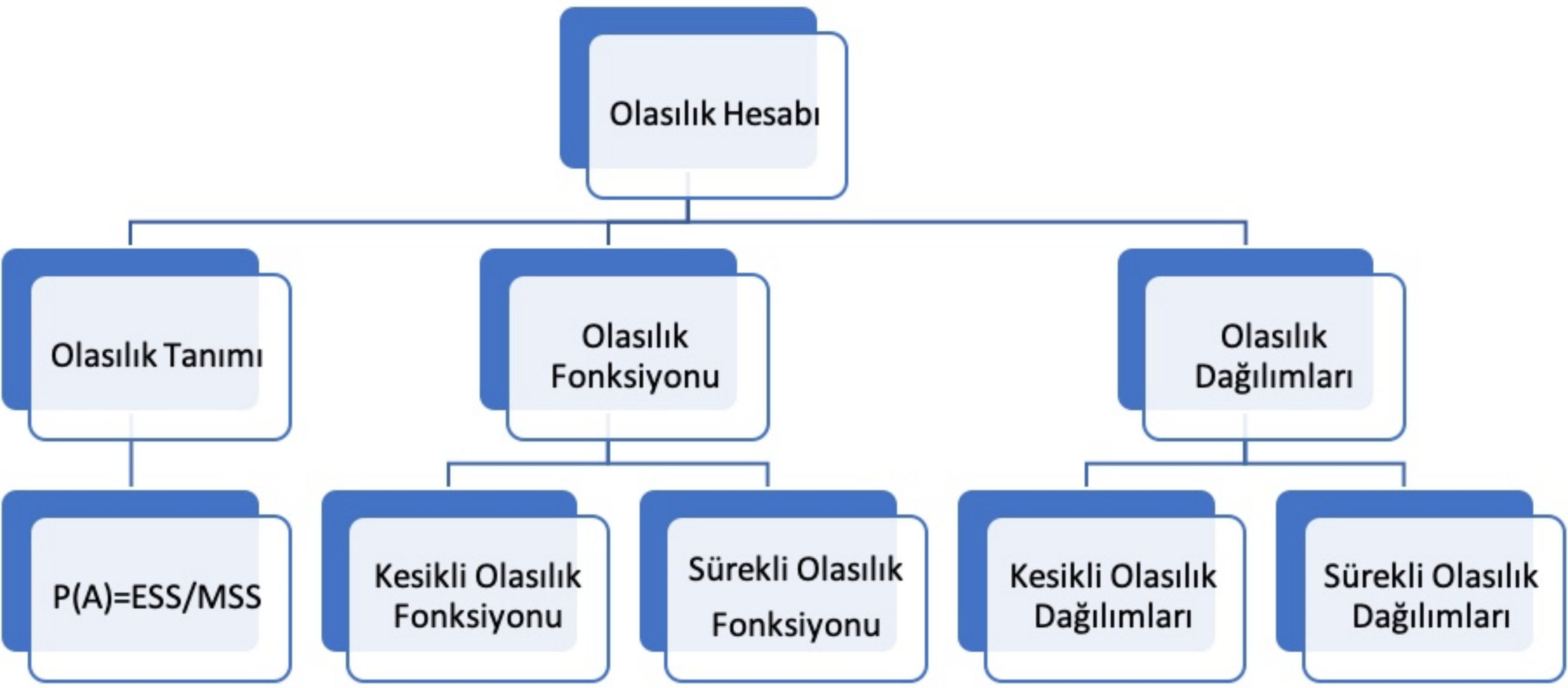
Olasılık Hesabı
Olasılık Tanımı
Olasılık Fonksiyonu
Olasılık Dağılımları
P(A)=ESS/MSS
Kesikli Olasılık Fonksiyonu
Sürekli Olasılık Fonksiyonu
Kesikli Olasılık Dağılımları
Sürekli Olasılık Dağılımları

Kesikli Şans Değişkenlerinin Olasılık Fonksiyonları

X, şans değişkeni ve $x_1, x_2, .., x_n$ ise bu tesadüfi değişkenin alabileceği değerler olsun. X tesadüfi değişkeninin herhangi bir x değerini alma olasılığı

$$\mathbf{Pr\{X = x\}}$$

şeklinde gösterilir. Bu olasılık X in dağılım ya da olasılık kanunu diye adlandırılır. Kesikli X değişkeninin hangi değerleri hangi olasılıklarla alacağını gösteren fonksiyona **olasılık fonksiyonu** denir. Bir dağılımın kesikli olasılık fonksiyonu olabilmesi için

1. $P(x) \geq 0$, tüm x değerleri için
2. $\sum_{Tümx} P(x) = 1$

şartlarını sağlaması gerekir.

Örnek: Hilesiz bir zar atıldığında x şans değişkeni üst yüze gelen sayıyı ifade etmek üzere bu x şans değişkeninin olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

S = { x / 1,2,3,4,5,6 } $P(X = x_i) = 1/6$

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6

$$P(X = x) = \begin{cases} 1/6 & x = 1 \\ 1/6 & x = 2 \\ 1/6 & x = 3 \\ 1/6 & x = 4 \\ 1/6 & x = 5 \\ 1/6 & x = 6 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

İki farklı şekilde ifade edilen x şans değişkeninin dağılımına bakıldığında $P(X_i) \geq 0$ ve tüm x değerleri için $\sum P(X=x) = 1$ şartları sağlandığı görülmektedir. P(X=x) ‘in bir olasılık fonksiyonu olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

Örnek: Bir otomobil bayisinin günlük otomobil satışlarının dağılımının aşağıdaki gibi olduğunu ifade etmektedir.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X)	0,02	0,08	0,15	0,19	0,24	0,17	0,10	0,04	0,01

Bu dağılışa göre bayinin;

a) 5 ten fazla araba satması olasılığını bulunuz

P(X = 6) + P (X = 7) + P (X = 8) = 0.10+0.04+0.01=0,15

b) Satışların beklenen değerini hesaplayıp yorumlayınız.

$E(X) = \sum x P(x_i)$ = (0)(0,02)+(1)(0,08)+(2)(0,15)+….+(8)(0,01) =3,72

Bayinin 100 günde 372 araba satışı yapması beklenir.

c) Satışların varyansını bulunuz.

$E(X^2) = \sum x^2 P(x_i)$ =$(0^2)(0,02)+(1^2)(0,08)+\ldots \ldots + (8^2)(0,01) = 16,68$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 16,68 - (3,72)^2 = 2,84$

Örnek : Bir madeni paranın iki defa atılması deneyinde rassal değişkenimiz paranın üste gelen yüzleri olsun. Rassal değişkenin alabileceği değerleri ve olasılıkları şöyledir: Paranın bir atılışında mümkün iki durum vardır. Bir para iki defa atılıyorsa $2.2=4$ durumla karşı karşıyayız demektir. Bu durumlar YY, YT, TY, TT olarak yazılabilir. Bu durumlardan her birinin olasılığı $\frac{1}{4}$'tür. Buna göre rassal değişken değerleri, beklenen frekanslar ve olasılıklar;

X_i	f_i	$P(X_i)$
YY	1	$\frac{1}{4}$
YT	1	$\frac{1}{4}$
TY	1	$\frac{1}{4}$
TT	1	$\frac{1}{4}$
-	4	1

olur. Burada da, frekansların toplamı 4, olasılıkların toplamı 1'dir.

Rassal değişkenler kesikli ya da sürekli olabilir. Yukarıda verilen iki örnek kesikli rassal değişkendir. Kesikli değişkenin her bir değerine karşı gelen olasılık yazılabilirken, sürekli değişkenin her bir değerine karşı gelen olasılık çok küçük olacağından, ancak fonksiyon olarak yazılabilir. Sürekli bir değişkene ait olasılık değeri olasılık fonksiyonunun integrali ile bulunur. X sürekli değişkeninin a ve b arasında bir değer alması ihtimali:

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

~~**Örnek :** Elektronik bir parçanın dayanıklılık süresi (x yıl) aşağıdaki şekilde $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.~~

$$\cancel{f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} \qquad x>0}$$

Sürekli Şans Değişkenlerinin Olasılık Fonksiyonları

•Sürekli değişkenlerdeki olasılık fonksiyonuna sürekli olasılık fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonu, veya sadece yoğunluk fonksiyonu denir.

• Sürekli bir şans değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) ile gösterilir. Herhangi bir fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için;

1) X'in tanım aralığı için $f(x_i) \geq 0$,

2) $\int_{tüm\,x} f(x)dx = 1$ şartlarını sağlaması gereklidir.

Sürekli Şans Değişkenleri İçin Olasılık

- Sürekli bir değişkenin tanımlı olduğu aralıkta sonsuz sayıda değer vardır.
- Değişkenin bunlar içinden belirli bir değeri alma olasılığı $1/\infty = 0$ olur.

- Bu sebepten sürekli değişkenlere ait olasılık fonksiyonları, kesikli değişkenlerin aksine bu değişkenin belirli bir değeri alma olasılıklarının hesaplanmasına imkan vermez.

Bu fonksiyonlarda değişkenin belirli bir değer yerine belirli bir aralıkta değer alma olasılığının hesaplanması yoluna gidilir.

Sürekli bir x şans değişkenin a ile b arasında olma olasılığı;

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek: f(x) fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanıyor olsun

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & 1 \le x \le 2 \\ 0 \quad , & diger\ x'ler\ icin \end{cases}$$

a) f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?

$\int\limits_{tümx} f(x)dx = 1$ ise f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$\int_1^2 \frac{3}{7}x^2 dx = \left.\frac{x^3}{7}\right|_1^2 = \frac{8}{7} - \frac{1}{7} = 1$$

olduğundan f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) P (1,5 < x < 1,8) = ?

$$P(1,5 < x < 1,8) = \int_{1,5}^{1,8} \frac{3}{7}x^2 dx = \left.\frac{x^3}{7}\right|_{1,5}^{1,8} = \frac{(1,8)^3}{7} - \frac{(1,5)^3}{7} \approx 0,351$$

Örnek : Elektronik bir parçanın dayanıklılık süresi (x yıl) aşağıdaki şekilde $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$$f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} \qquad x>0$$

Bu parçalardan herhangi birinin ömrünün 5 yıldan fazla olması ihtimali:

$$P(x>5)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}dx=-e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_5^{\infty}$$

$$=\left(-e^{-\infty}\right).\left(-e^{-\frac{5}{4}}\right)=-0+0.29=0.29$$

olarak bulunur. Bu olasılık fonksiyonuna ilişkin toplam olasılığın 1 olduğu görülebilir. Fonksiyon tanımlı olduğu bölgede integrallenirse;

$$P(x>0)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_0^{\infty}=1.00$$

bulunur.

Beklenen Değer ve Varyans

Bir rassal değişken beklenen (ortalama) değer ve varyansı ile karakterize edilebilir, yani betimlenebilir. Beklenen değer, bir rassal değişkenin alabileceği değerlerin ortalaması olup, $E(X)$ ile gösterilir[1]. Kesikli rassal değişken için beklenen değer, her bir değerin karşı gelen olasılıklarla çarpımının toplamıdır.

$$E(X)=\sum X_i P(X_i)$$

Sürekli bir rassal değişkenin beklenen değeri ise bu değişkenin olasılık fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki,

$$E(X)=\int x.f(x)dx$$

integrali ile tanımlanır. Kesikli veya sürekli olsun, bir X rassal değişkeninin varyansı ise beklenen değerler cinsinden şu şekilde tanımlanmaktadır[2]:

$$Var(X)=E\left[X-E(x)\right]^2$$

Bu ifade açıldığında varyans için daha pratik bir tanım;

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ile elde edilmektedir. Yukarıdaki tanımlardan a sabit sayı olmak üzere beklenen değer ve varyans için şu özellikler çıkarılabilir:

$$E(a) = a$$

$$E(aX) = a.E(X)$$

$$E(E(X)) = E(X)$$

$$Var(a) = 0$$

$$Var(aX) = a^2 Var(x)$$

Örnek : X kesikli değişkeni bir zar atma deneyinde, gelen rakamlar olsun. Zar atma deneyinde gelen rakamların beklenen değeri;

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= (1+2+3+4+5+6)\frac{1}{6} = 3.5$$

olarak bulunur. Bu şekilde tamsayılı bir değişken kesirli bir beklenen değere sahip olabilir. Zar atılışında gelen rakamların varyansını bulmak için önce karelerin beklenen değerini bulalım.

$$E(X) = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 9\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= (1+4+9+16+25+36)\frac{1}{6} = 15.2$$

Öte yandan $E(X) = 3.5$ olarak daha önce bulunmuştu. Buradan varyans,

$$Var(X) = E(X^2) = [E(X)]^2 = 15.2 - (3.5)^2 = 2.9$$

olarak hesaplanır.

Örnek : Sürekli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu;

$$f(X)=2X, \quad 0<X<1$$

ile verilmiştir. *X* değişkeninin beklenen değerini bulalım.

$$E(X)=\int_0^1 x.f(x).dx=\int_0^1 x.2x.dx=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}=0.67$$

olarak bulunur. Varyans hesabı için yine ilk önce karesel beklenen değeri bulmalıyız. Karesel beklenen değer;

$$E(X)=\int_0^1 x^2.f(x).dx=\int_0^1 x^2.2x.dx=2\int_0^1 x^3dx=\frac{2}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}=0.50$$

olarak bulunur. Buradan varyans hesabı,

$$Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=0.50-(0.67)^2=0.05$$

olarak hesaplanır.

Sürekli Şans Değişkenleri İçin Beklenen Değer ve Varyans

Örnek: f(x) fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanıyor olsun

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{7}x^2, & 1\le x\le 2\\ 0\ , & diger\ x'ler\ icin\end{cases}$$

a) X rassal değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

$$E(x)=\int x.f(x)=\int_1^2 x.\left(\frac{3}{7}x^2\right)dx=\frac{3}{7}\int_1^2 x^3dx$$

$$=\frac{3}{7}\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2=\frac{3}{7}\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{28}$$

•**b)** X rassal değişkeninin varyans değerini bulunuz

$$\mathrm{Var}(x) = \int x^2.f(x) - \left(\int x.f(x)\right)^2$$

$$= \int_1^2 x^2.\left(\frac{3}{7}x^2\right)dx - \left(\int_1^2 x.\left(\frac{3}{7}x^2\right)dx\right)^2$$

$$= \frac{3}{7}\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2 - \left(\frac{3}{7}\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2\right)^2$$

$$= \frac{3}{7}\left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{3}{7}\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right)\right)^2$$

$$= \frac{93}{35} - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = 1.0287$$