KESİKLİ DAĞILIMLAR

Olasılık teorisinde, istatistik teorisinde ve birçok uygulamalı problemlerde yaygın olarak kullanılan kesikli tesadüfi değişkenler ve bu değişkenlere ait dağılımlar incelenecek ve aralarındaki ilişkiler verilecektir.

Bernoulli Dağılımı

Olasılık problemleri göz önüne alındığında her zaman istenen bir durum veya olayın olasılığından bahsetmek mümkündür. Eğer bir deney için başarılı veya başarısız olmak üzere iki sonuç ortaya çıkıyor ve bu deney aynı şartlar altında tekrarlanabiliyor ve bu deneye James Bernoulli'den dolayı Bernoulli denemesi denir. Bernoulli denemesi kesikli dağılımların temeli niteliğindedir.

Tanım: Bir tesadüfi deneme iki ayrık sonuçtan birisine sahip ise, bu denemeye Bernoulli denemesi denir. Bernoulli denemesinin sonuçları başarılı – başarısız; sağlam-bozuk veya istenen-istenmeyen olarak ifade edilir. Bernoulli denemesine ait tesadüfi değişken başarılı sonuç da "1" , başarısız sonuçta "0" değerini alır. Bu bağlamda Bernoulli tesadüfi değişkeni,

X= { 1, deneme başarılı ise
X= { 0, deneme başarısız ise; olarak ifade edilir.

Tanım: X, Bernoulli tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x}, & x = 0,1 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

biçimindedir. X tesadüfi değişkenine Bernoulli dağılımına sahiptir denir ve X ~ Bernoulli (p) ile gösterilir. Burada p, dağılımın parametresi olup başarı olasılığını ve q = 1 – p başarısızlık olasılığını ifade eder. Bernoulli denemesine ait birkaç örnek aşağıda verilmektedir.

1) Hilesiz madeni paranın bir kez havaya atılması denemesi.
2) İçinde m tane kırmızı ve n tane beyaz bilye bulunan bir kavanozdan tesadüfi bir bilye çekilmesi.
3) Bir futbol maçında kullanılan her bir penaltı atışı.
4) Özdeş ve aynı yaşam süresine sahip cihazların belli bir zamandan daha fazla yaşaması

Beklenen Değer ve Varyans

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{D}^{.2} I_X^{xP(X=x)}$$

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{x=0}^{1} x p^x (1-P)^{1-x} = \mathrm{p}$$

$$\mathrm{E(X^2)} = \sum_{Dx} x^2 P(\ X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x^2 p^2 (1-p)^{1-x} = \mathrm{p}$$

$Var\ (X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = p - p^2 = pq$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$M_X(t) = \sum_{D_X} e^{tx(X=x)}$
$M_X(t) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x q^{1-x} = q + pe^t$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_x(s) = \sum_{D_X} s^x P(X = x)$$

$$g_x(s) = \sum_{x=0}^{1} s^x p^x q^{1-x} = q + ps$$

Örnek : Bir Bernoulli denemesinin ardışık olarak üç defa başarısızlıkla sonuçlanması olasılığı binde 216 olarak hesaplanmıştır. Buna göre Bernoulli denemesine ait tesadüfi değişkenin varyansını bulunuz?

Çözüm: A: "Bernoulli denemesinin ardışık üç defa başarısız olması" olayı iken

$P(A)$ = (1-p)^3 = 0,216 olur. Böylece p= 0,4 bulunur.

$Var\ (X)$ = p (1 – p) = 0,4.0,6 = 0,24 olarak hesaplanır.

Örnek : X Bernoulli tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = p(x) = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^x (1 - \frac{1}{5})^{1-x}, & x = 0,1 \\ 0, & d.d. \end{Bmatrix}$$

olsun. g (x) sürekli bir fonksiyon olmak üzere $E(\mathrm{g}(x)) = 0$ olması için g (0) = g (1) = 0 olması gerektiğini gösteriniz.

Çözüm.

E (g (X)) = $\sum_{x=0}^{1} g(x) \left(\frac{1}{5}\right)^x (1 - \frac{1}{5})^{1-x} = 0$

$= \mathrm{g}\ (0) \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \mathrm{g}(1) \left(\frac{1}{5}\right) = 0$

$=(\frac{1}{5})\ [\mathrm{g}(1) - (0)] + \mathrm{g}(0) = 0$

eşitliğinin sağlanması için g(0) = g (1) = 0 olması gerekir.

Binom Dağılımı

Ardışık olarak bağımsız Bernoulli denemelerinin yapıldığını göz önüne alalım. Yapılan bu denemeler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Her denemenin başarılı ve başarısız iki sonucu vardır.
2) Her bir deneme için başarı olasılığı p ve başarısızlık olasılığı q=1 – p değişmez.
3) Deneme sayısı sabit olup denemeler tekrarlanabilir.

Binom tesadüfi değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım : X tesadüfi değişkeni n tane bağımsız Bernoulli denemesinin başarılı olanlarının toplam sayısı olsun. Yani i = 1,2, … , n için X_i~ Bernoulli (p) ve $X = X_1 + X_2 + \ldots + Xn$ olmak üzere X tesadüfi değişkenine Binom tesadüfi değişkeni denir ve olasılık fonksiyonu

$$P(X=x) = p(x) = \begin{Bmatrix} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0, & d.d \end{Bmatrix}$$

Biçimindedir. $X \sim Binom\ (n,p)$ ile gösterilir. Burada n ve p dağılıma ait parametrelerdir.

Beklenen Değer ve Varyans

E (X) = $\sum_{Dx} xP(X=x)$

E(X) = $\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-1-(x-1)}$

=np $\sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{(n-1)} - (x-1)$

=$np\ (p+q)n-1$

$= np$

$E(X^2) = \sum_{D_X} x^2 P(X=x)$

= $\sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)n!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)}$ $p^{x-2} p^2 q^{(n-2)-(x-2)}$ $+np$

=$p^2 n(n-1) \sum_{x=2}^{n} \binom{n\quad -2}{x\quad -2} p^{(x-2)} q^{(n-2)-(x-2)}$ $+np$

=$p^2 n(n-1)\ (p+q)^{n-2}$ $+np$

$= p^2 n(n-1) + np$

$$Var(X) = E(X2) - (E(X))2$$

$$= p2n(n-1) + (np)2$$

$$= npq \ \ olarak\ bulunur.$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$MX(t) = E(e^{tX})$$

$$= \sum_{Dx} e^{tX} P(X = x)$$

$$MX(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tX} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x q^{n-x}$$

$$= (e^t p + q)^n$$

Beklenen değer ve varyans momentler cinsinden aşağıdaki gibi bulunur.

$M_x'\ (0) = E(X) = np$

$M_x''(0) = E(X^2) = n(n-1)\,p^2 + np$

$Var(X) = M_x''(0) - M_x'\ (0))^2 = npq$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = \sum_{D_X} s^x P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} s^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (sp)^x q^{n-x} = (q + sp)^n$$

Örnek : Her biri 10 puan olan 10 soruluk bir test sınavında 4 seçenek mevcuttur. Yanlış cevap doğru cevabı götürmüyor. Buna göre sınava giren bir öğrenci cevapları rastgele işaretlediğinde öğrencinin,

A) 50 puan alması olasılığı nedir?
B) En az 30 puan ala olasılığı nedir?
C) En çok 90 puan alması olasılığı nedir?
D) Tam not alması olasılığı nedir?
E) 70 ile 80 arasında puan alması olasılığı nedir?

F) Hiçbir soruya doğru cevap verememe olasılığı nedir?

Çözüm.

$p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$

a) 50 puan alması için 5 soruya cevap vermesi gerekmektedir. Yani,

$$P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}0584$$

b) En az 30 puan alması için en az 3 soruya doğru cevap vermesi gerekir.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{2}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}$$

$$= 0{,}4744$$

c) En çok 90 puan alması için en fazla 9 soruya cevap vermiş olması gerekir.

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X > 9)$$

$$= 1 - [P(X = 10)]$$

$$= 1 - [\binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0]$$

$$=0{,}9999$$

d) Tam puan alması için tüm sorulara cevap vermesi gerekir.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 0{,}0001$$

e) 70 ile 80 arasında not alması için,

$$P(7 \leq X \leq 8) = P(X = 7) + P(X = 8)$$

$$=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$=0{,}0034$$

f) Hiç doğru cevap işaretleme yapmama olasılığı ise,

$$P(X = 0) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}0563$$

Örnek : Bir torbada 15 kırmızı, 5 beyaz bilye vardır. İadeli olarak 3 bilye çekiliyor. X tesadüfi değişkeni çekilen kırmızı bilye sayısını, Y tesadüfi değişkeni ise beyaz bilye sayısını göstersin.

a) 1 kırmızı 2 beyaz bilye çekilme olasılığı nedir?
b) En az bir tane kırmızı bilye çekilme olasılığı nedir?
c) P(|X| ≤1|X<3) olasılığını hesaplayınız.
d) DK_X, değişim katsayısını bulunuz.
e) X tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.
f) Y tesadüfi değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. $X \sim Binom(3,3/4), Y \sim Binom\ (3,1/4)$olmak üzere,

a) $P(X\ = 1\ ) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$

veya,

$$P(Y\ =\ 2)\ =\ P(X\ =\ 1) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64}$$

b) $P(X \geq 1)\ =\ 1 - P\ (X < 1)$

$= 1 - P\ (X = 0)$

$= 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$= 1 - \frac{1}{64}$

$=\frac{63}{64}$

c) $P(|X| \leq 1|X < 3) = \frac{P((-1\leq x\leq 1)\cap(X<3))}{P(X<3)}$

$=\frac{P(0\leq x\leq 1)}{1-P(X=3)}$

$=\frac{\left(P(X=0)+P(X=1)\right)}{1-\binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0}$

$=\frac{\left(\frac{1}{64}+\frac{9}{64}\right)}{1-\frac{27}{64}} = \frac{10}{37}$

d) $DK_X = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}\ 100$

$Var(X)\ =\ npq$

$= 3.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{9}{16}$

$E(X) \quad = \ np$

$= 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$= DK_X = 0.3333$ oranında bir değişim söz konusudur.

e) X tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t) = (q + pe^t)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^t\right)^3$$

f) Y tesadüfi değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$g_Y(s) = (q + ps)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s\right)^3, \ |s| \leq 1$$

Çok Terimli Dağılım

Tanım : Bir tesadüfi denemedeki $H_1, H_2, \dots,, H_m$ ayrık sonuçlar ve $\Omega = U_i^m = 1^H i$ olmak üzere bu deneme aynı koşullar altında n-kez tekrarlanırsa deneme sonuçları sayılarının dağılımına çok terimli dağılım denir. Bu bağlamda çok terimli X tesadüfi değişkeni şöyle veriliyor.

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 : n \text{ denemede } H_1 \text{ sonucunun gerçekleşme sayısı} \\ X_2 : n \text{ denemede } H_2 \text{ sonucunun gerçekleşme sayısı} \\ X_m : n \text{ denemede } H_m \text{sonucunun gerçekleşme sayısı} \end{Bmatrix}$$

H_i sonucunun gerçekleşmesi olasılığı p_i, yani $p_i = P(H_i)$ile ifade edilir. X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu da

$$p(k_1, k_2, \dots., k_m) = P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots., X_m = k_m)$$

Burada $m \in Z^+$, Σ_i^m=1 k_i=n ve Σ_i^m=1p_i = 1'dir. m=2 alındığında çok terimli X tesadüfi değişkeni binom (iki terimli) X tesadüfi değişkenine dönüşür. Yalnızca H_i sonucunun gerçekleşmesi ile ilgilenirse, ilgilenilen i. Sonucunun gerçekleşmesi olasılığı p_i ve diğer m – 1 sonucun gerçekleşme olasılığı da $q_i$olur. Dolayısıyla deneme 2 mümkün sonuçlu ve n kez tekrarlandığından Çok terimli tesadüfi değişken binom tesadüfi değişkenine dönüşür. Buna göre,

$$E(X_i) = np_i$$

$$Var\ (X_i) = np_i q_i$$

$$M_{X_i}(t) = (p_i e^t + q_i)^n$$

$$gX_i(s) = (q_i + sp_i)^n$$

Örnek : Bir petrol şirketi bir bölgedeki uzman raporlarına göre sondaj çalışması yapmayı planlıyor. Raporlara göre bölgede açılan herhangi bir kuyuda petrole rastlama olasılığı %8 doğalgaza rastlama olasılığı %13 ve kuyunun kuru çıkması olasılığı da %79 olarak tahmin ediliyor. Şirket 15 sondaj yapmaya karar veriyor buna göre;

a) Bir kuyuda petrole bir kuyuda da doğalgaza rastlama olasılığı nedir?
b) Beklenilen kuru (boş) kuru sayısı nedir?

Çözüm.

Kuyudan petrol veya doğalgaz çıkması veya kuyunun kuru çıkması olasılıkları sırası ile p_p, p_{dg}, p_k simgeleri ile gösterilirse

$$p_p = 0{,}08 \quad p_{dg} = 0{,}13 \quad p_k = 0{,}79$$

a) $n = 15$

$p_x\ (1,1,13) = \binom{15}{1,1,13}(0,08)(0,13)(0,79)^{13}$

$= \frac{15!}{1!1!13!}(0,08)\ (0,13)\ (0,79)^{13}$

$= 0,1019$

b) $E(X_k) = np_k = \ 15 \cdot \frac{79}{100} = 11,85 \cong 12$

15 kuyudan yaklaşık 12 kuyunun kuru çıkması bekleniyor.

Örnek : Hilesiz bir zar 10 kez havaya atılıyor.

a) $1\ kez\ 1, 2\ kez\ 2, 3\ kez\ 3\ ve\ 4\ kez\ 4$ gelmesi olasılığı nedir?
b) Tüm atışlarda 6 gelmesi olasılığı nedir?
c) 10 atıştan kaçında asal sayı gelmesi beklenir?

Çözüm

a) Bir zarın atılması denemesinde örnek uzay $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$olur ve

$$p(w_i) = p_1 = p_2 = \cdots .. = p_6 = 1/6$$

olarak elde edilir. Buna göre,

$$p(1,2,3,4) = \binom{10}{1,2,3,4}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0,0002083$$

b) $p(6) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 0,1666$

c) Zarın üzerindeki sayılardan asal sayı olanlar 2,3 ve 5 olduğundan bir atışta asal sayı gelmesi olasılığı,

$$p_a = \frac{3}{6}$$

ve

$$E(X_a) = np_a = 10.0,5 = 5$$

Poisson Dağılımı

Tanım : Birim zamanda (gün, saat veya dakika gibi) meydana gelen olayların sayısı X tesadüfi değişkeni ile ortalaması da λ ile gösterilir ve $X'in$ olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,\ldots \\ 0, & d.d \end{cases}$$

Biçiminde verilirse $X'e$ Poisson tesadüfi değişkeni denir ve X ~Poisson (λ) ile gösterilir.

Poisson Dağılımının Özellikleri

1) X_1~ Poisson(λ_1) ve X_2 ~Poisson(λ_2), X_1 ve X_2 bağımsız tesadüfi değişkenler olmak üzere $X = X_1+X_2$ ve $\lambda = \lambda_1+\lambda_2$ için

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,\ldots \\ 0, & d.d \end{cases}$$

2) X_1~Poisson(λ_1) ve X_2~Poisson (λ_2) olmak üzere

$\lambda_1 < \lambda_2 \rightarrow P(X_1 > x) < P(X_2 > x)$

3) $X \sim Poisson\ (\lambda) \rightarrow P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{1+\lambda}$
4) $Y \sim Poisson(\lambda) \rightarrow P(Y = 2X = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$
5) X ~ Poisson (λ) birim zamanda meydana gelen olayların sayısını gösterdiğinde X_1 tesadüfi değişkeni de p olasılığı ile **istenen** sonuç sayısını, X_2 tesadüfi değişkeni de q olasılığı ile **istenmeyen** sonuç sayısını göstermek üzere $X = X_1 + X_2$ olur (özellik 1).

$$P(X_1 = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}; & x = 0,1 \ldots. \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$P(X_2 = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}; & x = 0,1 \ldots. \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$X_1 \sim Poisson(\lambda p)\ ve\ X_2 \sim Poisson\ (\lambda p)\ olur.$

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \sum_{x \in D_X} xP(X = x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in D_X} x^2 P(X = x)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} (x(x-1)+x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \boldsymbol{\lambda^2 + \lambda}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \lambda$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = \sum_{x \in D_X} e^{tx} P(X = x)$$

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}$$

$$= \boldsymbol{e^{-\lambda} e^{e^{t}\lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}}$$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = \sum_{D_X} s^X P(X = x)$$

$$g_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{s\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

Binom Dağılımı ile Poisson Dağılımı

X$\sim Binom\ (n, p)$ iken X tesadüfi değişkeninin Poisson dağılımına yaklaştığı aşağıdaki teorem yardımıyla veriliyor.

Teorem: Başarı olasılığı p, 0' a ya da 1'e yaklaştığında ve n→∞ iken $X \sim Binom\ (n, p)$→Poisson (λ) olur. Yani,

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

İspat. X binom tesadüfi değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{(n-x)!x!}\ p^x q^{n-x}$$

$E(X) = np\ ve\ np = \lambda$ alalım, p $=\frac{\lambda}{n}$ ve q = $1 - \frac{\lambda}{n}$ olur. (5.10)'da p ve q'nun değerleri ve n! = $n(n-1)(n-2) \ldots (n-x+1)(n-x)!$ yerine konulduğunda,

$$\text{p(x)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\frac{n^x\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)-\left(1-\frac{x+1}{n}\right)}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{1}\right)^{-x}$$

$n \to \infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x+1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{1}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{x+1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

Olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

olur.

Örnek : Bir petrol istasyonuna gelişler ortalama 26 araç/saat ile Poisson dağılımına uymaktadır. Gelen araçlardan %23'ü benzin %38'i dizel %39' u da gaz almaktadır.

a) Petrol istasyonunun boş kalması olasılığı nedir?
b) Bir günde gelmesi beklenen araç sayısı nedir?
c) 8 saatte benzin alan ortalama araç sayısı nedir?
d) 2 saatte en az 5 aracın dizel yakıt alması olasılığı nedir?

e) Benzin ve dizel yakıt alan araçların toplam sayısının olasılık çıkaran fonksiyonunu bulunuz?
f) Benzin ve gaz yakıtı alan araçların sayılarının toplamının Poisson dağılımına uyduğunu gösteriniz.

Çözüm. Benzin, dizel ve gaz yakıtı alan araçların sayılarını sırasıyla X_B , X_D ve X_G tesadüfi değişkenleri ile bunların parametrelerini de $\lambda_B, \lambda_D\ ve\ \lambda_G$ gösterelim. O halde

a) $X \sim Poisson\ (26)\ ise\ E(X)\ =\ 26\ araç$

$$P(X = 0)\ =\ \frac{26^0}{0!} e -\ 26\ = e -\ 26$$

b) Bir günde beklenen araç sayısı: 24.26 =624 dir.
c) Benzin alan araçların beklenen sayısı

$E(X_B)$ = 26.0,23= 5,98

olmak üzere 8 saatte benzin alanların beklenen sayısı,

8.5,98=47,84

≅48 araçtır.

d) 1 saatte dizel yakıt alan araçların beklenen sayısı:

$E(X_D)$ 26.0,38=9,88

Araç olmak üzere 2 saatte dizel yakıt alan araçların sayısı

X'_D~Poisson(2(9,88))

araç sayısı olduğundan

P(X'_D≥5)=1 – P (X'_D≤4)

=1 - $\sum_{x=0}^{4} P(X'_D = x)$

=1 - $\sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-19,76}.(19,76)^x}{X!}$

=0,9999 dir.

e) Benzin ve dizel yakıt alan araçların sayısını sırasıyla X_B ve X_D ile bunların parametrelerini de λ_B ve λ_D verildi. O halde Poisson dağılımının 1. ve 5. özelliklerinden

$$Y = X_B + X_D$$

alınıp

$$\lambda_{BD} = \lambda_B + \lambda_D = 26(0,23 + 0,38) = 15,86$$

Poisson dağılımına sahip Y tesadüfi değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu

$$g_Y(s) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{s^y e^{-15,86} 15,86^y}{y!}$$

$$= e^{-15,86} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(15,86s)^y}{y!}$$

$$= e^{-15,86} e^{15,86s}$$

$$= e^{15,86(s-1)}$$

olarak bulunur.

f) Poisson dağılımının birinci ve beşinci özelliklerinden dolayı; benzin ve gaz yakıtı alan araçların sayısını sırasıyla X_B ve X_G ile bunların parametrelerini de λ_B ve λ_G= verildi. O halde Z tesadüfi değişkeni de $Z = X_B + X_G$ olarak tanımlayalım ve Poisson dağılımının 1. ve 5. Özelliklerinden $\lambda_{BG} = \lambda_B + \lambda_G$= 26(0,23 + 0,39) = 16,12 parametresi ile Poisson dağılımına sahiptir.

Z ~ Poisson (16,12) olur, yani

$$P(Z = z)\begin{cases} \frac{e^{-16.12}(16.12)^z}{z!}, & x = 0,1 \ldots.. \\ 0, & d.d \end{cases} \text{ bulunur.}$$

Örnek : Bir bölgede bir hastalığa yakalanma oranının 0.001 olduğu biliniyor. Tesadüfi olarak seçilen 2000 kişilik bir örneklemle çalışıldığında,

a) En az iki kişinin bu hastalığa yakalanma olasılığı nedir?
b) En çok dört kişinin bu hastalığa yakalanma olasılığı nedir?
c) Hiç kimsenin bu hastalığa yakalanmama olasılığı nedir?
d) $X \sim Binom\ (2000;\ 0,001)\ için\ X'in$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm. p = 0,001 ve n = 2000 olduğundan, $E(X)\ = np\ =\ 2\ olur$

X~Binom (2000;0,001) ≈ Poisson (2)   elde edilir.

a) $P(X \geq 2)\ =\ 1 - P\ (X \leq 1)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!}$$

$$= 1 - 3e^{-2} = 0,594$$

b) $P(X \leq 4)\ = \frac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!} = 7e^{-2} =\ 0.947$

c) $P(X = 0)\ = \frac{e2^{-} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2} =\ 0,1353$

d) $\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{D_x} e^{itx} P(X = x)$

$$\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-2}2^x}{x!}$$

$$= e^{-2} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(2e^{it})^x}{x!}$$

$$= e^{2(e^{it-1})}$$

Örnek : Eldeki verilere göre bir ülkede yaşayan insanların intihar etme oranı ayda bir milyon kişide 4'tür. Bu ülkenin 500.000 nüfuslu bir şehrinde bir ayda,

a) En fazla 4 intiharın yaşanma olasılığını bulunuz?
b) Bir yılda en az iki ay içinde 4'den az intiharın olma olasılığı nedir?

Çözüm.

a) Her ay gerçekleşen intihar sayısını X tesadüfi değişkeni ile gösterelim. Bu durumda X, n $=5.10^5$ ve p= 4.10^{-6} parametreli binom dağılımına uyar. $np = 2 < 10$ olduğundan, λ=2 parametreli Poisson dağılımına yaklaşım kullanmak uygun olur. Böylece,

$$p_0 = P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} e^{-2} \frac{2^k}{k!} = 7e^{-2} = 0{,}9473 \text{ olur.}$$

b) Y tesadüfi değişkeni 4'ten fazla intiharın gerçekleştiği ayların sayısını göstersin. Bu takdirde,

$$P(Y = k) = \binom{12}{k} (1 - p_0)^k (p_0)^{12-k},$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1)\right) = 0{,}129$$

olarak bulunur.