T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI NO: 1074
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINLARI NO: 589

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

Lineer Cebir

Yazar:
Yrd.Doç.Dr. Nezahat ÇETİN
Öğr.Grv.Dr. Nevin ORHUN

Editör:
Prof.Dr. Orhan ÖZER

Tasarım: Yrd.Doç.Dr. Kazım SEZGİN

ISBN 975 - 492 - 829 - 0

Başlarken

Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi'nin öğretmenlere kazandırdığı önlisans diplomasından sonra, onlara lisans diploması alma hakkının tanınması ve buna olanak sağlayacak şekilde lisans tamamlama programları açması taktirle karşılanabilecek bir hizmettir. Değerli öğretmenlerimizin bu fırsatı en iyi şekilde değerlendirebileceklerinden hiç şüphe yoktur. Bu yolla hem alan bilgilerini arttıracaklar hem de yeni haklar kazanacaklardır. Bunun sonucu olarak da okullarında daha nitelikli, daha çağdaş hizmet sunabileceklerdir. Bu kitabın da bu hizmete küçük bir katkısının olacağını umarım.

Kitap, İlköğretim Öğretmenliği Lisans Tamamlama Programı Matematik Yan Alan derslerinden Lineer Cebir dersinin içeriğini kapsayacak şekilde hazırlanmıştır. On üniteden oluşan bu kitapta, matrisler ve determinantlar, doğrusal denklem sistemleri ve vektör uzayı konuları ele alınmıştır. Bu konular sadece matematik alanında değil, istatistik, işletme, iktisat, mühendislik hatta sosyal bilimler alanlarında araç olarak kullanılabilecek kavramlar ve yöntemler içermektedir. Bu nedenle de temel sayılabilecek tanımlar ve kavramlar üzerinde durulmuştur. Ünitelerde teorik anlatımdan kaçınılarak, kavramlar daha çok örneklerle anlatılmaya çalışılmıştır; konular fazla önbilgiye gereksinim duyulmadan anlaşılabilecek, kendi içinde bütünlüğü olacak şekilde verilmeye çalışılmıştır. Okuyucunun çalışırken örnekleri dikkatlice incelemesi, benzer örnekler oluşturması, metin içinde ve sonunda bırakılan soruları çözmesi konuları kavrayıp pekiştirmesine yardımcı olacaktır. Kaynak kitaplara başvurulması her zaman yararlı olmuştur ve olacaktır.

Böyle bir programın açılmasında, düzenlenmesinde, bu kitap dahil kitaplarının hazırlanmasında, yazımında, basımında tüm emeği geçenlere teşekkürlerimi sunarım; öğretmenlerimize yararlı olmasını dilerim.

Prof.Dr. Orhan ÖZER
Editör

Matrisler

ÜNİTE 1

Yazar
Yrd.Doç.Dr. Nezahat ÇETİN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Matris kavramını öğrenecek,
- İki matrisin toplamı, bir matrisin skaler ile çarpımı, iki matrisin çarpımı işlemlerini ve bu işlemlerin özelliklerini kavrayacak,
- Bazı özel tip matrisleri tanıyacak,
- Bir matrisin rankı hakkında fikir edinecek,
- Bir matrisin tersinin ne olduğunu öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Matris Kavramı 3
- Özel Tipte Matrisler 4
- Bir Matrisin Transpozesi 8
- Matris İşlemleri 8
- İlkel Satır ve Sütun İşlemleri 18
- Bir Matrisin Basamak Biçimi 21
- Bir Matrisin Rankı 22
- Blok Matrisler 23

- Bir Kare Matrisin Tersi 24
- Değerlendirme Soruları 32

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışırken tanımları iyice kavrayıp çözülmüş örnekleri dikkatlice gözden geçiriniz.
- Okuyucuya bırakılan soruları çözünüz.

1. Matris Kavramı

Günlük yaşantımızda, birden fazla veri aynı anda kullanılmak istenildiğinde bu veriler tablolar ile temsil edilir. Bu gösterim şekli pek çok alanda kullanılmaktadır. Örneğin, muhasebe işlemleri, okullardaki ders programlarının hazırlanması ve öğrencilerin not durumlarının takibi, anket sonuçlarının değerlendirilmesi, bazı bilim dallarında yapılan deneylerin sonuçlarının değerlendirilmesi bunlardan bir kaç tanesidir. Aşağıda, tablo ile gösterime bir örnek verilmiştir.

1.1. Örnek

Bir mağazada satılan A, B, C ve D mallarının mağazaya giriş fiyatları, satış fiyatları ve bu mallardan kaç adet alınıp, kaç adet satıldığını tablo ile gösterelim.

Malın Adı	Alış Fiyatı (TL)	Satış Fiyatı (TL)	Alınan Miktar (Adet)	Satılan Miktar (Adet)
A	500.000	750.000	1100	950
B	650.000	975.000	2500	1500
C	775.000	1.165.000	800	530
D	825.000	1.240.000	950	822

Tabloya göre, B malı 650.000 TL'ye alınıp, 975.000 TL'ye satılmış ve alınan 2500 adet maldan 1500 tanesi satılmıştır.

Bu örnekler daha da çoğaltılabilir. İşte, elimizdeki verileri gösterdiğimiz, belli sayıda satır ve belli sayıda sütundan oluşan tabloya, matris denir. Aşağıda matrisin matematiksel tanımı verilmiştir.

1.2. Tanım

m x n tane sayının, m satır ve n sütuna yerleştirilmesiyle oluşturulan tabloya bir **matris** denir.

Genel olarak bir matris,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

şeklinde gösterilir ve A, B, C, ... gibi harfler ile temsil edilir. m satır ve n sütundan oluşan bir matrise m x n tipinde bir matris ve a_{ij} sayılarına da matrisin öğeleri denir. m x n tipindeki bir matris, kısaca $A = (a_{ij})_{mxn}$ şeklinde yazılır. Bir a_{ij} öğesindeki i indisi öğenin i. satırda olduğunu, j indisi ise j. sütunda olduğunu gösterir. Bundan dolayı a_{ij} öğesi, matrisin i. satır ile j. sütununun kesiştiği yerdedir. Örneğin,

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow 2.\ \text{satır} \\ \\ \end{array} \\ \downarrow \\ 3.\ \text{sütun} \end{array}$$

matrisinde a_{23} öğesi, 2. satır ile 3. sütunun kesiştiği yerde olan 5'tir.

1.3. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrisleri verilsin. Eğer $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrislerine **eşit matrisler** denir ve bu matrisler A = B şeklinde gösterilir.

İki matrisin eşit olabilmesi için aynı tipten matrisler olması gerektiğine dikkat ediniz.

1.4. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

matrisleri eşit matrisler ise $b_{11} = a_{11} = 1$, $b_{12} = a_{12} = -1$, $b_{21} = a_{21} = 2$, $b_{22} = a_{22} = 1$, $b_{31} = a_{31} = 3$ ve $b_{32} = a_{32} = 0$'dır.

2. Özel Tipte Matrisler

Bazı matrisler tipine göre ya da öğelerinin taşıdıkları kısmi özelliklere göre özel adlar alabilmektedirler. Bu bölümde, bu tür özel adlandırılan matrisler tanımlanıp örnekler sunulacaktır.

2.1. Tanım

A, mxn tipinde bir matris olsun. Eğer m = 1 ise, yani A 1xn tipinde bir matris ise A matrisine **satır matrisi**; n = 1 ise, yani A mx1 tipinde bir matris ise A matrisine **sütun matrisi** denir.

$A = (1\ \ 2\ \ 3\ \ -5)$ matrisi satır matrisine, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ matrisi de sütun matrisine birer örnektir.

2.2. Tanım

Bir matriste satır sayısı ile sütun sayısı eşit ise bu matrise **kare matris** denir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bir kare matristir. Çünkü A matrisinin satır sayısı ve sütun sayısı 3'tür.

nxn tipindeki bir kare matrise, **n. mertebeden kare matris** denir. Buna göre yukarıda kare matrise örnek verilen A matrisi 3. mertebeden bir kare matristir. Ayrıca, n. mertebeden bir kare matriste, $i = 1, 2, ..., n$ için a_{ii} öğelerine matrisin **köşegen öğeleri** denir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

kare matrisinin köşegen öğeleri 1, 0, -1 ve 5'tir.

2.3. Tanım

Bir matrisin tüm öğeleri sıfır ise, bu matrise **sıfır matris** denir ve mxn tipindeki bir sıfır matrisi O_{mxn} şeklinde gösterilir.

Aşağıda sıfır matrisine iki örnek verilmiştir:

$$O_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{4x4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4. Tanım

A n. mertebeden bir kare matris olsun. Her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **köşegen matris** denir.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisleri, sırasıyla 3. ve 4. mertebeden köşegen matrislerdir. Özel olarak, n. mertebeden bir sıfır matris de köşegen bir matristir.

2.5. Tanım

Bir köşegen matriste, köşegen üzerindeki öğelerin hepsi eşit ise bu matrise **skaler matris** denir.

2.6. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$ matrisinin skaler matris olması için x ve y ne olmalıdır?

Çözüm

A matrisinde $a_{11} = 2$ dir. Diğer taraftan skaler matriste $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ olması gerektiğinden $x = a_{22} = 2$ ve $y = a_{33} = 2$ olmalıdır.

2.7. Tanım

Bir kare matrisin köşegeni üzerindeki tüm öğeleri 1 ve geriye kalan bütün öğeleri 0 ise, bu matrise bir **birim matris** denir.

n. mertebeden birim matris I_n ile gösterilir ve

$$I_n = (\delta_{ij})_{nxn}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde de ifade edilir.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri sırasıyla 2. ve 5. mertebeden birim matrislerdir.

2.8. Tanım

Bir $A = (a_{ij})_{nxn}$ kare matrisi verilsin. Eğer her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine **simetrik matris** denir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisinin simetrik olup olmadığını inceleyelim. A matrisinin simetrik olabilmesi için $i, j = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} = a_{ji}$ olmalıdır. $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 4$ olduğundan A matrisi bir simetrik matristir.

2.9. Tanım

$A = (a_{ij})_{nxn}$ kare matrisi verilsin. Eğer her i, j için $a_{ij} = - a_{ji}$ ise A matrisine **ters simetrik matris** denir.

Bir ters simetrik matriste, $i = j$ olması durumunda $a_{ii} = -a_{ii}$ koşulunun ancak $a_{ii} = 0$ iken sağlandığına dikkat edersek, ters simetrik matrisin köşegen öğelerinin sıfır olması gerektiğini söyleyebiliriz.

2.10. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi 4. mertebeden ters simetrik bir matristir.

2.11. Tanım

$A = (a_{ij})_{nxn}$ kare matrisinde her $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **altüçgensel matris**, her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **üstüçgensel matris** denir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi, altüçgensel matrisin köşegeninin üstünde kalan öğeler ve üstüçgensel matrisin köşegeninin altında kalan öğeler sıfırdır. Aşağıda sırasıyla altüçgensel ve üstüçgensel matrislere birer örnek verilmiştir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

n. mertebeden bir köşegen matrisin hem altüçgensel, hem de üstüçgensel olduğu açıktır. Gerçekten de,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinde, köşegenin üst kısmında kalan tüm öğeler sıfır olduğundan bu matris bir altüçgensel matris ve benzer şekilde köşegenin alt kısmında kalan tüm öğeler de sıfır olduğundan bir üstüçgensel matristir.

3. Bir Matrisin Transpozesi

3.1. Tanım

Bir A matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen yeni matrise, A matrisinin **transpozesi** denir ve bu matris A^t ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi, mxn tipindeki bir matrisin transpozesi nxm tipindedir.

3.2. Örnek

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ matrisinin transpozesi $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ matrisidir.

Bir A matrisi için $(A^t)^t = A$ olduğu açıktır.

4. Matris İşlemleri

Bu bölümde, matrisler arasında matris toplamı, matris farkı, matris çarpımı işlemlerini ele alacağız. Önce bu işlemleri sırayla tanımlayıp, sonra özelliklerini sıralayıp örnekler vereceğiz.

4.1. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{mxn}$ aynı tipten iki matris olsun. Öğeleri,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde oluşturulan $C = (c_{ij})_{mxn}$ matrisine A ve B matrislerinin **toplamı** denir ve bu matris A + B şeklinde gösterilir.

Bu tanımın aşağıdaki gibi verilebileceği açıktır:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisleri için

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

dir.

İki matrisin toplanabilmesi için aynı tipten matrisler olduğuna dikkat ediniz.

4.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{matrisleri için}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & -1 + 0 & 0 + 7 & 1 + 1 \\ 3 + (-2) & 4 + 1 & 5 + 1 & 6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{dir}$$

Aşağıda matris toplama işleminin özellikleri verilmiştir:

a) Aynı tipten matrisler (toplanabilir matrisler) arasında matris toplamının **birleşme özelliği** vardır. Gerçekten, $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ ve $C = (c_{ij})_{mxn}$ matrisleri için (A+B) + C matrisinin i. satır, j. sütunundaki

$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$

öğesi, A + (B+C) nin aynı satır ve sütunundaki

$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$

öğesine eşittir. Çünkü sayılar arasında toplama işleminin birleşme özelliği vardır. O halde

$$(A+B) + C = A + (B+C)$$

dir. Bu özelliğe parantez kaydırma özelliği de denir. Bu özelliğin sonucu olarak, ikiden fazla sayıda toplanabilir matrisin toplamını parantezsiz olarak yazabiliriz. A, B, C ve D toplanabilir matrisler ise, bunların toplamı A+B+C+D olarak yazılabilir.

b) Toplanabilir iki matris arasında matris toplamının **değişme özelliği** vardır. Yani A ve B toplanabilir iki matris ise A+B = B+A dır. Bu özelliğin kanıtını, birleşme özelliğinin kanıtına benzer şekilde kolaylıkla yapabilirsiniz.

c) A, mxn tipinde bir matris olmak üzere,

$$A + O_{mxn} = O_{mxn} + A = A$$

dır. Bu eşitliğin doğruluğunu göstermek oldukça kolaydır. $A + O_{mxn}$ matrisinin i. satır j. sütunundaki

$$a_{ij} + 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

öğesi, sıfırın sayılardaki toplama işlemine göre etkisiz eleman olmasından dolayı,

$$a_{ij} \quad , \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

öğesine eşittir. Bu da $A + O_{mxn} = A$ demektir. $O_{mxn} + A = A$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

4.3. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $r \in \mathbf{R}$ olsun. Öğeleri,

$b_{ij} = r\, a_{ij} \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$

şeklinde oluşturulan $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrisine A matrisinin **r sayısı ile çarpımı** denir ve bu matris rA şeklinde gösterilir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisi ve r gerçel sayısı için

$$A = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

dir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad r = 2 \quad \text{ise} \quad r\,A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ -4 & 12 & 4 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Aşağıda bir sayı ile matris çarpımı işleminin özellikleri verilmiştir:

a) A bir matris ve r, s $\in$ **R** olsun. Bu durumda,

$$(r + s)\, A = rA + sA$$

dır. Gerçekten de, (r + s) A matrisinin i. satır ve j. sütunundaki

$$(r + s)\, a_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n)$$

öğesi rA + sA matrisinin aynı konumdaki,

$$ra_{ij} + sa_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n)$$

öğesine eşittir. Çünkü sayılarda çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Her i, j için $(r + s)\, a_{ij} = ra_{ij} + sa_{ij}$ olduğundan ve matrislerin eşitliği tanımından (r + s) A = rA + sA olur.

b) A ve B toplanabilir iki matris ve r $\in$ **R** olsun. Bu durumda,

$$r\,(A + B) = rA + rB$$

dir.

c) A bir matris ve r, s $\in$ **R** olsun. Bu durumda,

$$(rs)\, A = r\,(sA)$$

dır.

(b) ve (c) özelliklerinin doğruluğunu, (a) şıkkına benzer şekilde gösterebilirsiniz.

d) mxn tipindeki bir A matrisi için,

$$1A = A \text{ ve } 0A = O_{mxn}$$

olduğu açıktır.

Bir A matrisi için (-1)A matrisi -A ile gösterilir ve bu matrise A matrisinin **toplamsal tersi** denir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ matrisinin toplamsal tersi } -A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dir.

Açıktır ki, mxn tipindeki bir A matrisi için $A + (-A) = 0_{mxn}$ dir.

$A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ ve $r, s \in \mathbf{R}$ olmak üzere, $rA + sB$ matrisine C matrisi diyelim. C matrisinin öğeleri,

$$c_{ij} = ra_{ij} + sb_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n)$$

şeklindedir. Burada özel olarak r = 1 ve s = 1 alınırsa, C matrisinin öğeleri,

$$c_{ij} = 1a_{ij} + (-1)b_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n)$$

dir. Bu şekilde elde edilen C matrisine, A ile B matrisinin **farkı** denir ve bu matris A - B şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle A - B = A + (-B) dir.

4.4. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ ise } A - B \text{ matrisi } \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

4.5. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxp}$ ve $B = (b_{ij})_{pxn}$ olsun. Öğeleri,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde oluşturulan $C = (c_{ij})_{mxn}$ matrisine A ile B matrisinin **çarpımı** denir ve bu matris AB şeklinde gösterilir.

$A = (a_{ij})_{mxp}$ ile $B = (b_{ij})_{pxn}$ matrisinin çarpımı olan AB matrisinin satır sayısı, A matrisinin satır sayısına, sütun sayısı ise B matrisinin sütun sayısına eşittir. Ayrıca, iki matrisin çarpılabilmesi için birinci çarpan matrisinin sütun sayısı ile ikinci çarpan matrisinin satır sayısının eşit olması gerektiğine dikkat edilmelidir. Aşağıda iki matrisin çarpımına bir örnek verilmiştir.

4.6. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{olsun.}$$

AB matrisi,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \;\; j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere, $C = (c_{ij})_{3x4}$ matrisidir. Bu durumda,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.2 + 2.1 & 3.(-1) + 2.2 & 3.0 + 2.3 & 3.1 + 2.1 \\ 1.2 + 1.1 & 1.(-1) + 1.2 & 1.0 + 1.3 & 1.1 + 1.1 \\ 0.2 + 4.1 & 0.(-1) + 4.2 & 0.0 + 4.3 & 0.1 + 4.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi de matris çarpımının bir uygulamasını vereceğiz:

4.7. Örnek

Kredili sistemde okuyan beş öğrencinin dönem sonu ortalamaları hesaplanmak istenmektedir. Öğrencilerin bu dönemdeki toplam dört dersten aldıkları harf notları, derslerin kredileri ve harf notlarının katsayıları aşağıdaki tablolarla verilmiş olsun.

ÖĞRENCİ \ DERS	X_1	X_2	X_3	X_4
I	A	B	B	B
II	C	C	C	D
III	B	C	C	C
IV	C	D	F	D
V	A	A	B	B

DERS	KREDİ
X_1	4
X_2	6
X_3	4
X_4	4
+	18

NOT	KATSAYI
A	4
B	3
C	2
D	1
F	0

Bu tablolara göre III nolu öğrenci, dönem sonunda X_1 dersinden B, X_2, X_3 ve X_4 derslerinden de C harf notu almıştır. Bu döneme ait toplam kredi 18 olduğuna göre, bu öğrencinin dönem sonu ortalamasını hesaplamak için, aldığı herbir dersin kredisi ile harf notunun katsayısının çarpılıp, daha sonra bunlar toplanıp 18'e bölünmesi gereklidir.

Yani, III nolu öğrencinin dönem sonu ortalaması,

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} \left(X_i \text{ nin kredisi}\right) . \left(X_i \text{ nin harf notunun katsayısı}\right)}{18}$$

dir. Şimdi bu beş öğrencinin ortalamalarını bir sütun matris olarak hesaplayalım.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{l} \to \text{I. öğrencinin harf notları katsayıları} \\ \to \text{II. \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''} \\ \to \text{III. \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''} \\ \to \text{IV. \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''} \\ \to \text{V. \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''} \\ \\ \\ \end{array}$$

ve

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to x_1 \text{ in kredisi} \\ \to x_2 \text{ nin kredisi} \\ \to x_3 \text{ ün kredisi} \\ \to x_4 \text{ ün kredisi} \end{array}$$

olmak üzere, $C = \frac{1}{18}(AB)$ matrisi öğrencilerin dönem sonu ortalamaları matrisi olacaktır. Buna göre,

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4 & + & 3.6 & + & 3.4 & + & 3.4 \\ 2.4 & + & 2.6 & + & 2.4 & + & 1.4 \\ 3.4 & + & 2.6 & + & 2.4 & + & 2.4 \\ 2.4 & + & 1.6 & + & 0.4 & + & 1.4 \\ 4.4 & + & 4.6 & + & 3.4 & + & 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 32 \\ 40 \\ 18 \\ 64 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$C = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 58 \\ 32 \\ 40 \\ 18 \\ 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.22 \\ 1.77 \\ 2.22 \\ 1 \\ 3.55 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{I. öğrencinin dönem sonu ortalaması} \\ \to \text{II. \quad " \quad " \quad " \quad "} \\ \to \text{III. \quad " \quad " \quad " \quad "} \\ \to \text{IV. \quad " \quad " \quad " \quad "} \\ \to \text{V. \quad " \quad " \quad " \quad "} \end{array} \quad \text{dır.}$$

4.7. Örnekte kısalık için öğrenci sayısı beş alınmıştır. Öğrenci sayısı ne olursa olsun (100, 1000, ..., n) matris çarpımı ile, bilgisayar kullanılarak öğrencilerin ortalamaları hesaplanabilir.

Aşağıda matris çarpımı işleminin özellikleri verilmiştir:

a) A mxp tipinde, B pxq tipinde ve C qxn tipinde birer matris olsunlar. Bu durumda,

$$(AB)C = A(BC)$$

dir. Bu özelliğe matris çarpma işleminin **birleşme** özelliği denir. Bu özelliğin kanıtı aşağıda verilmiştir.

Kanıt

$AB = D$ ve $BC = E$ diyelim. Bu durumda, iki matrisin çarpımı tanımından,

$$d_{ik} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \quad k = 1, 2, ..., q)$$

olmak üzere $D = (d_{ik})_{mxq}$ ve

$$e_{rj} = \sum_{k=1}^{q} b_{rk}\, c_{kj} \qquad (r = 1, 2, ..., p; \quad j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere $E = (e_{rj})_{pxn}$ dir.

Benzer şekilde, $(AB)C = DC = F$ ve $A(BC) = AE = G$ denilirse,

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{q} d_{ik}\, c_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere $F = (f_{ij})_{mxn}$ ve

$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, e_{rj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere $G = (g_{ij})_{mxn}$ dir. Böylece her i, j için $f_{ij} = g_{ij}$ olduğu gösterilirse F ile G matrisinin eşit olduğu, yani $(AB)C = A(BC)$ eşitliği gösterilmiş olur. $f_{ij} = g_{ij}$ olduğunu görmek için her iki öğenin de eşitlerini yazalım:

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{q} d_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk} \right) c_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk}\, c_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m ; \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

ve

$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, e_{rj} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{rk}\, c_{kj} \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ir}\, b_{rk}\, c_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk}\, c_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m ; \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

olur. Buradan da her i, j için $f_{ij} = g_{ij}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $F = G$ dir. Yani $(AB)C = A(BC)$ dir.

b) A mxp tipinde, B ve C de pxn tipinde matrisler olsunlar. Bu durumda,

$$A(B+C) = AB + AC$$

dir. Bu kural matris çarpımının matris toplamı üzerine dağılımı özelliği olarak adlandırılır.

c) A mxp tipinde ve B pxn tipinde iki matris ve $r, s \in \mathbf{R}$ olsun. Bu durumda,

$$(rA)\,(sB) = (rs)\,AB$$

dir.

(b) ve (c) özelliklerinin kanıtı okuyucuya bırakılıp bu özellikler ile ilgili birer örnek verilmiştir.

4.8. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ise}$$

A(B+C) = AB + AC eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dir.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ise}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dir. Buradan da}$$

A(B + C) = AB + AC olduğu görülür.

4.9. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad r = 2, \quad s = -1 \quad \text{i}$$

(rA) (sB) = (rs)AB eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$rA = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad sB = (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ise}$$

$$(rA)(sB) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{dir. Diğer taraftan,}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad (rs)AB = (-2) \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{bulunu}$$

Buradan da $(rA)(sB) = (rs)AB$ olduğu görülür.

d) A, n. mertebeden bir kare matris ise,

$$AI_n = I_nA = A$$

dır. Gerçekten de, $A = (a_{ij})_{nxn}$ ve $I_n = (\delta_{ij})_{nxn}$ olmak üzere, AI_n matrisinin i. satır ve j. sütunundaki öğesi,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{ij}$$

dir. Birim matrisin tanımından $k \neq j$ için $s_{ij} = 0$ ve $k = j$ için $s_{ij} = 1$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{ij} = a_{ij}$$

olur. Bu eşitlik $i, j = 1, 2, ..., n$ için doğru olduğundan $AI_n = A$ dır. $I_nA = A$ olduğu da benzer şekilde görülebilir.

Not: A ve B matrisleri için hem AB hem de BA işlemleri tanımlı olsa bile genel olarak $AB \neq BA$ dır. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{olsun.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

olduğundan $AB \neq BA$ dır.

O halde, çarpılabilir matrisler için matris çarpımının değişme özelliği yoktur, diyebiliriz.

5. İlkel Satır ve Sütun İşlemleri

5.1. Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin satırları (veya sütunları) üzerinde yapılan aşağıdaki üç tip işleme **ilkel satır (veya sütun) işlemleri** denir.

I) A matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek.
II) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.
III) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp başka bir satırına (veya sütununa) eklemek.

5.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ matrisine ilkel satır işlemlerini uygulayalım.

A matrisinde 1. satır ile 3. satırın yerleri değiştirildiğinde,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

A_1 matrisinde 2. satır 1/2 sayısı ile çarpılırsa,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

A_2 matrisinde 3. satır -1 ile çarpılıp 2. satıra eklenirse,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

Bu işlemlere devam edilerek farklı matrisler elde edilebilir. Bu yeni matrisler A matrisine eşit değildir; fakat, A matrisi ile aralarında aşağıda tanımlayacağımız bir ilişki vardır.

5.3. Tanım

A ve B matrisleri aynı tipten iki matris olsun. B matrisi, A matrisi üzerinde yapılacak ilkel satır işlemleri sonucu elde edilebiliyor ise A ile B matrisine **denk matrisler** denir. Bu durum $A \sim B$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, 5.2. Örnekte verilen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi A_1, A_2 ve A_3 matrislerinin herbirine denktir. Şimdi de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisinin I_3 'e denk olduğunu görelim. A matrisinin 1. satırını -1 ile çarpıp 3. satıra ekleyelim.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Elde edilen bu matrisin 2. satırını 2 ile çarpıp 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Son matrisin 2. satırını (-1) ile çarpıp 2. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin 3. satırını (-1) ile çarpıp 1. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Son olarak bu matrisin 1. satırını 1/2, 2. satırını (-1) ve 3. satırını 1/3 ile çarpalım.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$ elde edilir. Bu nedenle $A \sim I_3$ tür.

6. Bir Matrisin Basamak Biçimi

6.1. Tanım

Bir A matrisinin her bir satırında, sıfırdan farklı bir öğe, içinde bulunduğu satırdan önce gelen satırdaki sıfırdan farklı olan ilk öğenin daha sağında yer alıyorsa A matrisine **basamak matris** denir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri basamak matrislere birer örnektir.

Herhangi bir A matrisine ilkel satır işlemleri uygulanarak, A matrisine denk olan basamak matris elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen matrise A matrisinin **basamak biçime dönüştürülmüş matrisi** denir.

6.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisini basamak biçime dönüştürelim.

A matrisinin 1. satırını -3 ile çarpıp 2. satırına ve yine 1. satırını -1 ile çarpıp 3. satırına ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matrisin 2. satırını $-1/2$ ile çarpıp 3. satırına ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisi A matrisinin basamak biçimidir.

7. Bir Matrisin Rankı

7.1. Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A matrisinin **rankı** denir ve $r(A)$ ile gösterilir.

Özel olarak, herhangi bir sıfır matrisinin rankı 0 kabul edilir.

7.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ kare matrisinin rankını bulalım.

A matrisinin 1. satırını 2 ile çarpıp 3. satırına ve 1. satırını -1 ile çarpıp 4. satırına ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matriste 3. satır ile 4. satırı yer değiştirelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matriste 2. satırı $1/2$ ile çarpıp 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinde sıfırdan farklı en az bir eleman içeren satır sayısı 3 olduğundan $r(A) = 3$ tür.

n. mertebeden bir köşegen matris basamak biçiminde bir matris olacağından, böyle bir matrisin rankı, köşegen üzerindeki sıfıra eşit olan öğelerin sayısı k ise n-k dır. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisi 5. mertebeden bir köşegen matristir ve $n = 5$, $k = 1$ olduğundan

rank (A) = 5-1 = 4 tür.

Rank tanımından anlaşılacağı gibi, denk matrislerin rankları aynı sayıdır.

Bir matrisin rankı, vektör uzayları ve vektörlerin lineer bağımsızlığı konuları verildikten sonra tekrar incelenecektir.

8. Blok Matrisler

Blok matrisi tanımlamadan önce, bu tanımda gerekli olan alt matris kavramını verelim. Bir $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinde, k tane satır ve l tane sütun çıkarıldığında elde edilen $(m - k) x (n - l)$ tipindeki yeni matrise A matrisinin **alt matrisi** denir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinde, 3. satır ve 2. ile 4. sütunlar çıkarıldığında elde edilen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ matrisi A nın bir alt matrisidir.

8.1. Tanım

Bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisini,

$r_1 + r_2 + ... + r_p = m$, $s_1 + s_2 + ... + s_q = n$ ve

$$A_{kl} = (a_{ij})_{r_k x s_k} \qquad (k = 1, 2, ..., p\ ;\ \ l = 1, 2, ..., q)$$

ler A nın alt matrisleri olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazım şekline A matrisinin **bloklara ayrılması** denir.

8.2. Örnek

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \qquad \text{matrisini}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} , \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} , \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \quad \text{şeklinde yazabiliriz.}$$

Burada, $p = 2$, $q = 3$, $r_1 = r_2 = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, $s_3 = 1$ dir.

9. Bir Kare Matrisin Tersi

9.1. Tanım

A, n. mertebeden bir kare matris olsun. Eğer,

$$AB = I_n \quad \text{ve} \quad BA = I_n$$

olacak şekilde n. mertebeden bir B kare matrisi var ise, B matrisine A matrisinin **tersi** denir.

A kare matrisinin tersinin olabilmesi için $AB = I_n$ ve $BA = I_n$ koşullarından yalnızca birinin sağlanması yeterlidir. Ayrıca, A nın tersi var ise bu tektir ve ters matris A^{-1} ile gösterilir. Bir kare matrisin tersi var ise tek olduğunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

A, n. mertebeden bir kare matris ve B ile C matrisleri de A matrisinin ters matrisi olsunlar. B ile C nin eşit matrisler olduğunu göstermeliyiz.

$AB = I_n$ ve $CA = I_n$ dir. (Ters matris tanımından)

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}(CA)\,B &= C\,(AB) \quad \text{dir. (Çarpma işleminin birleşme özelliğinden)}\\ I_n B &= CI_n\\ B &= C\end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıda matris tersi ile ilgili iki örnek verilmiştir:

9.2. Örnek

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin, A'nın tersi olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

ve

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

olduğundan $B = A^{-1}$ dir.

9.3. Örnek

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. A matrisinin tersi var mıdır?

Çözüm

$AB = I_2$ olacak şekilde bir $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ matrisinin olup olmadığını araştıracağız.

Eğer böyle bir B matrisi varsa, AB = I_2 eşitliğinden, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmalıdır.

Çarpma işlemini yaparsak, $\begin{pmatrix} x-z & y-t \\ -x+z & -y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elde edilir.

İki matrisin eşitliği tanımından,

$$\begin{matrix} x-z = 1 \\ -x+z = 0 \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \begin{matrix} y-t = 0 \\ -y+t = 1 \end{matrix}$$

olmalıdır. Fakat bu eşitlikleri sağlayan x, y, z ve t sayıları olmadığından AB = I_2 koşulunu sağlayacak B matrisi bulunamaz. Dolayısıyla A matrisinin tersi yoktur.

Not: Eğer A = (a) ise $a \neq 0$ iken A^{-1} vardır ve $A^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$ dir.

Aşağıda, bir kare matrisin tersini, ilkel satır işlemleri yardımıyla elde edebileceğimiz bir yöntem vereceğiz. Önce yöntemde kullanılacak olan ilkel matrisi kavramını tanımlayalım.

9.4. Tanım

I_n birim matrisine, ilkel satır işlemlerinin herhangi bir tipi uygulandığında elde edilen matrise **bir ilkel matris** denir.

n. mertebeden bir A kare matrisine birinci tip ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matrise A_1, I_n birim matrisine aynı ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen ilkel matrise de E_1 dersek $A_1 = E_1 A$ dır.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisinin 1. satırı ile 3. satırını yer değiştirelim.

Bu durumda

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dir. Diğer taraftan I_3'e aynı ilkel satır işlemini uygularsak

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan,

$$E_1\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A_1$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde bir A kare matrisine ikinci tip ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matris A_2 ve I_n'e aynı ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matris E_2 ise $E_2\,A = A_2$ dir. Yine A matrisine üçüncü tip ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matris A_3 ve I_n'e aynı ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen ilkel matris E_3 ise $E_3\,A = A_3$ dür.

Şimdi yöntemi verelim:

A, n. mertebeden bir kare matris olmak üzere, A matrisinin yanına I_n birim matrisini ekleyerek nx2n tipinde bir B matrisi oluşturalım.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

dir. B matrisine ilkel satır işlemleri uygulayarak, A matrisinin yerinde I_n birim matrisini elde edelim. Bu işlemler sonucunda I_n nin yerinde oluşan yeni matris, A matrisinin tersidir. Aşağıda bu yöntem açıklanmıştır:

A matrisine, ard arda sonlu sayıda ilkel satır işlemlerini uygulayarak, I_n birim matrisini elde edelim. Bu durumda,

$$E_i\,E_j\,E_k\;...\;E_i\,E_j\,E_k\,A = I_n \qquad (1 \le i \le 3\,,\quad 1 \le j \le 3\,,\quad 1 \le k \le 3)$$

olur. Diğer taraftan $I_n\,A = A$ olduğundan yukarıdaki eşitlikte A yerine $I_n\,A$ yazalım.

$$E_i\,E_j\,E_k\;...\;E_i\,E_j\,E_k\,I_n\,A = I_n$$

dir. $E_i\,E_j\,E_k\;...\;E_i\,E_j\,E_k\,I_n = C$ dersek,

$$CA = I_n$$

eşitliğinden $A^{-1} = C$ olur. C matrisine dikkat edecek olursak, bu matris, I_n birim matrisine, A matrisine uygulanan ilkel satır işlemlerinin aynı sırada uygulanması ile elde edilen matristir. Dolayısıyla $B = (A , I_n)$ matrisinde, A matrisine ilkel satır işlemleri uygulayarak birim matrisi elde ettiğimizde, I_n'e de aynı işlemleri uygulayarak elde ettiğimiz matris, A nın tersi olan A^{-1} matrisidir.

9.5. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisinin tersini ilkel satır işlemleri ile bulalım.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matrisinde 1. satırın -1/2 katını 2. satıra ekleyelim.

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dir. Bu matrisin 2. satırını -2/3 ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

olur. Elde edilen bu matriste 2. satırın 2 katını 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right)$$

bulunur. Bu matriste 2. satırının -3 katını 1. satıra ekleyelim, 3. satırını -1/3 ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{array}\right)$$

elde edilir. Son elde edilen matrisin 3. satırın -2 katını 1. satıra, 3. satırın 2 katını 2. satıra ekleyelim.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/9 & 10/9 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & 2/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{array}\right)$$

bulunur. Son olarak, 1. satırı 1/2 ile çarpalım.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 5/9 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & 2/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{array}\right)$$

olur. Bu son matriste A matrisinin yerinde I_3 elde edilmiştir. Dolayısıyla I_3 ün yerinde elde edilen

$$\begin{pmatrix} 2/9 & 5/9 & 1/3 \\ -1/9 & 2/9 & -2/3 \\ -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{pmatrix}$$

matrisi A nın ters matrisidir.

9.6. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ise } A^{-1} = ?$$

Çözüm

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dir. B matrisinde, 1. satır ile 2. satırı toplayıp 2. satıra, 1. satır ile 3. satırı toplayıp 3. satıra, 1. satır ile 4. satırı toplayıp 4. satıra ekleyelim.

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

olur. Bu matrisin 2. satırı ile 3. satırını yer değiştirelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dir. Elde edilen bu matrisin 2. satırının -1 katını 4. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

bulunur. Bu matrisin 3. satırının -1 katını 4. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

elde edilir. Elde edilen bu son matriste 3. satırın -1/2 katını 1. satıra, 4. satırın 1/2 katını 2. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

bulunur. Bu matriste, 4. satırın 1/2 katını 3. satıra, 2. satırın -1/2 katını 1. satıra ekleyelim.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

dir. Son olarak 1. satırı -1 ile, 2. satırı 1/2 ile, 3. satırı 1/2 ile ve 4. satırı -1/4 ile çarpalım.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

bulunur. O halde,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisidir.

9.7. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ matrisinin tersini bulmaya çalışalım.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matrisinde 1. satırın -1/2 katını 2. satıra ekleyelim ve 1. satır ile 3. satırı toplayıp 3. satıra yazalım.

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bu matrise göre rank (A) = 2 dir. Diğer taraftan rank (I_3) = 3 olduğuna göre, A matrisinden hareketle ilkel satır işlemleri ile I_3 matrisi elde edilemez. Çünkü A matrisi ile I_3 birim matrisinin rankları farklı olduğu için denk matrisler değillerdir. Dolayısıyla A matrisinin tersi yoktur.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin a_{23} öğesi aşağıdakilerden hangisidir?

A. -1
B. 1
C. 2
D. 5
E. 7

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x+y & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ x-y & 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ matrisi, x ve y nin hangi değerleri için altüçgensel bir matristir?

A. $x= -y$
B. $x= y$
C. $y= 1-x$
D. $y= 1+x$
E. $x\neq y$

3. $2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1)

B. (0)

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Aşağıdaki matrislerden hangisi transpozesine eşittir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı aşağıdaki sayılardan hangisidir?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

7. Aşağıdaki matrislerden hangisi I_4'e denktir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A. (6)

B. (9)

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \\ 12 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

D. (0 -2 8)

E. $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A = BX$ matris eşitliğini sağlayan X matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. A bir kare matris olmak üzere, aşağıdaki ifadelerden hangisi her zaman doğrudur?

A. AA^t simetrik bir matristir.
B. $A - A^t$ simetrik bir matristir.
C. $A + A^t$ ters simetrik bir matristir.
D. $A A^t$ skaler bir matristir.
E. $A - A^t$ alt üçgensel bir matristir.

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin öğeleri kullanılarak yapılan $a_{12} - a_{13} + 2a_{42} + 2a_{43}$ işleminin sonucu nedir?

A. 12
B. 9
C. 7
D. 5
E. 2

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 2-x & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegen matris olması için x ne olmalıdır?

A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

14. A, 5x7 tipinde bir matris olmak üzere, $AB - 2I_5$ işleminin yapılabilmesi için, B hangi tipte bir matris olmalıdır?

A. 5x5
B. 7x7
C. 7x5
D. 5x7
E. Hiçbiri

15. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & a-b \\ 2 & a+b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3/2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ise

a ve b nin değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $a = 1$, $b = -1$

B. $a = -1$, $b = 1$

C. $a = -1/2$, $b = -1/2$

D. $a = 1/2$, $b = 1/2$

E. $a = -1/2$, $b = 1/2$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin tersi varsa, aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

B. $1/2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

D. $1/4\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

E. A matrisinin tersi yoktur.

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

matrisinin tersi varsa, aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $1/2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $1/2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

E. A matrisinin tersi yoktur.

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. B 2. A 3. B 4. C 5. D 6. D 7. E 8. E 9. A 10. E
11. A 12. D 13. E 14. C 15. C 16. E 17. B

Determinantlar

ÜNİTE

2

Yazar
Yrd.Doç.Dr. Nezahat ÇETİN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- determinant kavramını tanıyacak,
- determinant ile ilgili bazı özellikleri öğrenip, bir kare matrisin determinantını daha kolay hesaplayabilecek,
- bir kare matrisin tersinin olup olmadığına karar verebilecek bir kriter görecek,
- bir kare matrisin tersinin determinantını ve ek matris yardımıyla tersinin bulunmasını öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 41
- Minör ve Kofaktör 41
- Saruss Kuralı 46
- Determinantın Özellikleri 48
- Ek Matris ve Ters Matris 50
- Değerlendirme Soruları 55

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışmadan önce Matrisler konusunu gözden geçiriniz.
- Bu üniteyi çalışırken tanımlar ve özellikleri çok iyi kavrayınız.
- Ünitede ki çözülmüş örnekleri, çözümlerine bakmadan kendiniz çözüp, sonuçları karşılaştırınız.
- Ünite içinde size bırakılan soruları ve değerlendirme sorularını çözünüz.

1. Giriş

Her kare matrise, adına o matrisin determinatı denilen bir gerçel sayı karşılık getirilir. Bir başka deyişle, kare matrislerin kümesinden gerçel sayılar kümesine determinat fonksiyonu denilen bir fonksiyon tanımlanabilir. Bu fonksiyon altında bir A kare matrisinin görüntüsü, det(A) ya da $|A|$ simgelerinden biriyle gösterilen bir sayıdır. Determinat fonksiyonunun nasıl tanımlandığı ayrıntı gerektiren bir konudur. Bu nedenle, bu ayrıntıya girmeden, basit kurallar ile bir A kare matrisinin determinantı denilen $|A|$ sayısının nasıl bulunabileceği konusu üzerinde duracağız.

Eğer $A = (a)$ ise, yani 1. mertebeden bir kare matris ise, $\det(A) = a$ dır.

Eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise, yani 2. mertebeden bir kare matris ise

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} = ad - bc$$

olarak tanımlanır.

Örneğin $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ için $\det(A) = 3.5 - \big((-1) . 2\big) = 17$ dir.

Şimdi $n \geq 3$ için n. mertebeden bir kare matrisin determinantının 2. mertebeden alt matrislerin determinantlarına indirgenerek nasıl hesaplanabileceğini görmek için gerekli olacak bazı kavramlar tanımlayacağız.

2. Minör ve Kofaktör

2.1. Tanım

$A = (a_{ij})_{nxn}$ kare matrisinde, bir a_{ij} $(1 \leq i \leq , 1 \leq j \leq n)$ öğesinin bulunduğu i. satır ile j. sütunun çıkarılmasıyla elde edilen (n-1). mertebeden alt kare matrisin determinantına, A matrisinin a_{ij} öğesinin **minörü** denir ve a_{ij} öğesinin minörü M_{ij} ile gösterilir.

Genel olarak, n. mertebeden bir kare matris olan A matrisinin, a_{ij} öğesinin minörünü şöyle gösterebiliriz:

$$A = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & & & \\
a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\
a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\
\vdots & & & & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccccc} & & & & \downarrow & & & \\ & & & & \text{j. sütun} & & & \end{array}\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \rightarrow \text{i. satır} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

olmak üzere,

$$M_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & & & & \\
a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\
a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\
\vdots & & & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \quad \text{dir.}$$

2.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinde, $a_{11} = 1$ öğesinin minörü $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 1 - ((-2) \,.\, 1) = 4,$

$a_{32} = -2$ öğesinin minörü $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,.\, 1 - 0 \,.\, 2 = 1$ dir

2.3. Tanım

$A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisinde, bir a_{ij} öğesinin minörü olan M_{ij} nin $(-1)^{i+j}$ ile çarpılmasıyla elde edilen sayıya, a_{ij} öğesinin **kofaktörü (eş çarpanı)** denir ve a_{ij} nin kofaktörü A_{ij} ile gösterilir. Örneğin, yukarıda örnek olarak verilen A matrisinde,

$a_{11} = 1$ öğesinin kofaktörü $A_{11} = (-1)^{1+1} \,.\, M_{11} = 1 \,.\, 4 = 5,$
$a_{32} = -2$ öğesinin kofaktörü $A_{32} = (-1)^{3+2} \,.\, M_{32} = (-1) \,.\, 1 = -1$ dir.

Şimdi herhangi bir kanıtlama yapmadan, $n \geq 2$ için kofaktörler yardımıyla, n. mertebeden bir matrisin determinantının (n-1). mertebeden kare matrislerin determinantları türünden hesaplanışına ilişkin bir kuralı aşağıdaki gibi bir formülle vereceğiz:

$n \geq 2$, $A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisi için, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, seçildikten sonra sabit kalan bir i için

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{12}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

olarak ifade edilir. Bu yazılışa A matrisinin determinantının **i.yinci satıra göre açılımı** denir. Benzer olarak, A nın determinantı bir sütunun kofaktörlerine göre de hesaplanabilir. $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, j.yinci sütuna göre açılım

$$\det(A) = \sum_{i}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

formülüyle verilir.

A matrisinin determinantı, bu matrisin herhangi bir satırındaki (veya sütunundaki) öğelerin kofaktörleriyle çarpılıp, toplanmasıyla elde edilmektedir. Bu yöntemi ard arda uygulayarak n. mertebeden bir kare matrisin determinantını 2. mertebeden kare matrislerin determinantlarına indirgeyebilmekteyiz.

2.4. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantını kofaktörler yardımıyla hesaplayalım. A nın determinantını hesaplamak için herhangi bir satır veya sütunu seçebiliriz. Biz bu örnekte 2. sütunu seçelim. Bu durumda,

$\det(A) = a_{12}\, A_{12} + a_{22}\, A_{22} + a_{32}\, A_{32}$ dir.

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\; M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\; M_{22} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad \text{ise}$$

$$\det(A) = 1 \,.\, 7 + 0 \,.\, (-7) + 5 \,.\, (-7) = -28 \quad \text{bulunur.}$$

2.5. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad \det(A) \quad \text{nedir?}$$

Çözüm

A matrisinin determinantını 3. satıra göre açalım. Buna göre,

$$\det(A) = a_{31}\,A_{31} + a_{32}\,A_{32} + a_{33}\,A_{33} + a_{34}\,A_{34} \quad \text{tür. Burada,}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\,M_{31}\,,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\,M_{32}\,,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\,M_{33} \ \text{ ve } \ A_{34} = (-1)^{3+4}\,M_{34}$$

olduğundan dört tane 3. mertebeden kare matrisin determinantını hesaplamamız gerekmektedir. Bu determinantlar için de aynı yöntemi uygularsak, A matrisinin determinantını 2. mertebeden kare matrislerin determinantlarına indirgemiş oluruz. O halde,

$$\det(A) = 1\,.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\,.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$+ 2\,.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\,.(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

eşitliğinde, bu dört determinantın herbirini 1. satıra göre açalım. (Aslında herbir determinant farklı satır veya sütuna göre açılıp hesaplanabilir.)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\,.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\,.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.(1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

olduğundan, bulunan sonuçlar (1) eşitliğinde yazılarak

$$\det(A) = 1 \,.\, (-5) + (-1) \,.\, (-5) + 2 \,.\, 5 + (-2) \,.\, 5 = 0 \text{ bulunur.}$$

Not: Kofaktörler ile determinant hesaplarken, sıfır sayısının çok bulunduğu satır veya sütunlardan biri seçildiğinde, daha az işlem yaparak, determinantı hesaplayabileceğinize dikkat ediniz.

2.6. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad \det(A) \quad \text{nedir?}$$

Çözüm

A matrisinin 3. sütunundaki beş öğeden dördü sıfır olduğundan, determinantı 3. sütuna göre açarsak daha az işlem yapmış oluruz. Yani,

$$\det(A) = (-1)^{1+3}\,.\;0\,.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\,.\,1\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+3}\,.\,0\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}\,.\,0\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{5+3}\,.\,0\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$ elde edilir. Bu determinantı hesaplamak içinde 4. sütuna göre açarsak,

$$\det(A) = (-1)\,.(-1)^{4+4}\,.(-3)\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$ olur. Bu determinantı da 2. sütuna göre açarsak,

$$\det(A) = 3\,.\,(-1)^{3+2}\,.\,5\,.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\,.(-5)\,.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -15\,.(2\,.(-2) - 4\,.(-1)) = -15(-4+4) = 0$$ bulunur.

3. Saruss Kuralı

3. mertebeden bir kare matrisin determinantını kofaktörler ile hesaplama formülünü kolay bir kurala dönüştürebiliriz. Bu kuralı bulmak için önce 3. mertebeden bir kare matrisin 1. satıra göre determinant açılımını yazalım.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ ise,

$$\det(A) = (-1)^{1+1}\,a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\,a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}\,a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22})$$
$$= (a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}) - (a_{11}\,a_{32}\,a_{23} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{31}\,a_{22})$$

elde edilir. Şimdi A matrisine aşağıdaki işlemleri uygulayalım. Önce matrisin 1. ve 2. satırlarını sırasıyla 4. ve 5. satır olarak aşağıdaki şekilde yazalım.

$$A = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} - \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} + \end{array}$$

Düz çizgili çarpımların toplamından, kesikli çizgili çarpımların toplamı çıkarılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$(a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23}) - (a_{31}\,a_{22}\,a_{13} + a_{11}\,a_{32}\,a_{23} + a_{21}\,a_{12}\,a_{33})$$

Bu ifade ile det(A) karşılaştırıldığında eşit olduğu görülür. Yani, yukarıda verilen kural ile A matrisinin determinantı daha kolay bir şekilde hesaplanmış olur. İşte bu kurala **Saruss kuralı** denir. Aynı kuralı, A matrisinin sütunları ile işlem yaparak da elde edebiliriz. A matrisinin 1. ve 2. sütunlarını sırasıyla 4. ve 5. sütun olarak yazalım.

$$A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \overbrace{\underbrace{\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}}_{+}}^{-}$$

Yine, düz çizgili çarpımların toplamından, kesikli çizgili çarpımların toplamı çıkarılırsa elde edilen,

$$(a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}) - (a_{31}\,a_{22}\,a_{13} + a_{32}\,a_{23}\,a_{11} + a_{33}\,a_{21}\,a_{12})$$

ifadesinin det(A) 'ya eşit olduğu açıktır.

Not: Saruss kuralının yalnızca 3. mertebeden kare matrisler için geçerli olduğunu unutmayınız.

3.1. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ matrisinin determinantını hesaplayalım.

Önce, A matrisinin 1. ve 2. satırlarını sırasıyla 4. ve 5. satır olarak yazalım.

$$A = \begin{array}{l} \left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right| \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\1\end{array}}\right\} - \\ \;\;\left.\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right\} + \end{array}$$

det(A) = (1 . 3 . 5 + 0 . 1 . 2 + 1 . (-1) . 4) - (1 . 3 . 2 + 1 . 1 . 4 + 0 . (-1) . 5) = 1 bulunur.

Aynı matrisin determinantını sütunlar ile bulalım. Bunun için önce 1. ve 2. sütunları sırasıyla 4. ve 5. sütun olarak yazalım.

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

-

+

det(A) = (1 . 3 . 5 + (-1) . 4 . 1 + 2 . 0 . 1) - (1 . 3 . 2 + 1 . 4 . 1 + 5 . 0 . (-1)) = 1

bulunur.

4. Determinantın Özellikleri

Bu bölümde kare matrislerin determinantlarının hesaplanmasını kolaylaştıracak bazı özellikler verilecektir.

a) A n. mertebeden bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirildiğinde elde edilen matris B ise det(B) = -det(A) dır.

b) A n. mertebeden bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi bir satırındaki tüm öğeler bir r sayısıyla çarpıldığında elde edilen matris B ise det(B) = r det(A) dır.
Bu özelliğin bir sonucu olarak, $A = (a_{ij})_{nxn}$ olmak üzere, det(r A) = r^n det(A) dır.

c) Bir A kare matrisinin herhangi iki satırı aynı ya da orantılı ise det(A) = 0 dır.

d) Bir A kare matrisinin herhangi bir satırının tüm öğeleri sıfır ise det(A) = 0 dır.

e) Bir A kare matrisinin herhangi bir satırı r gibi bir sayıyla çarpılıp, başka bir satırına eklendiğinde elde edilen matris B ise det(B) = det(A) dır.

f) Altüçgensel ya da üstüçgensel bir matrisin determinantı köşegen üzerindeki öğelerin çarpımına eşittir.

g) Bir A kare matrisinin transpozesi'nin determinantı, A matrisinin determinantına eşittir. Yani det(A) = det(A^t) dir.
Bu özellikten dolayı yukarıda verilen tüm özelliklerde satır yerine sütun yazıldığında sonuçlar yine doğru olur.

h) A ve B n. mertebeden iki matris ise det(AB) = det(A) det(B) dir.

Aşağıda determinantın özellikleriyle ilgili örnekler verilmiştir:

4.1. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisinde, 2. satır 1. satırın (-3) katıdır. Yani 1. satır ile 2. satır orantılıdır. O halde det(A) = 0 dır. Gerçekten,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$ olmak üzere,

$$\det(A) = (1 . 3 . 4 + (-1) . (-3) . 2 + 1 . (-3) . 1) - (2 . 3 . 1 + 1 . (-3) . 1 + 4 . (-3) . (-1)) = 0$$ dır.

4.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ ise $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$ ise,

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2. (-5) - 3 . 0 = -10$$ dur. Diğer taraftan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-1) . 2 = 5$$ ve

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 . (-1) - 1 . 2 = -2$$ olduğundan

$\det(A)\ \det(B) = 5\ (-2) = -10$ dur. Dolayısıyla $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$

dir.

4.3. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ olsun. A matrisinde

2. satır ile 3. satır yer değiştirildiğinde elde edilen matris,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ ise $\quad \det(B) = -\det(A)$ olduğunu gösterelim.

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right.$$ olmak üzere,

$$\det(A) = (1 \,.\, 1 \,.\, 3 + (-1) \,.\, 2 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 \,.\, (-1) - (1 \,.\, 1 \,.\, 1 + (-1) \,.\, 2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 0 \,.\, (-1))$$
$$= 2 \quad \text{ve}$$

$$B = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right.$$ olmak üzere,

$$\det(B) = (1 \,.\, (-1) \,.\, 2 + (-1) \,.\, 3 \,.\, 0 + 1 \,.\, 1 \,.\, 1) - (0 \,.\, (-1) \,.\, 1 + 1 \,.\, 3 \,.\, 1 + 2 \,.\, 1 \,.\, (-1) = -2$$
dir.

Buradan da $\det(B) = -\det(A)$ olduğu görülür.

5. Ek Matris ve Ters Matris

Bu bölümde, bir kare matrisin ters matrisinin varlığı ile ilgili bir teorem ve ters matris bulmak için yeni bir yöntem verilecektir.

5.1. Tanım

A n. mertebeden bir kare matris olsun. A matrisinin öğelerinin kofaktörlerinden oluşan n. mertebeden kare matrisin transpozesine, A matrisinin **ek matrisi** denir ve ek matris A* ile gösterilir.

n. mertebeden bir kare matrisin ek matrisini açık olarak gösterelim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ ise, A matrisinin

kofaktörlerinden oluşan matris,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ dir. Bu durumda A nın ek matrisi

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ dir.

5.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ matrisinin ek matrisini bulalım.

Çözüm

$A_{11} = (-1)^2 M_{11} = 13$, $A_{12} = (-1)^3 M_{12} = -10$, $A_{13} = (-1)^4 M_{13} = -2$,
$A_{21} = (-1)^3 M_{21} = 12$, $A_{22} = (-1)^4 M_{22} = -3$, $A_{23} = (-1)^5 M_{23} = -6$,
$A_{31} = (-1)^4 M_{31} = -17$, $A_{32} = (-1)^5 M_{32} = 11$, ve $A_{33} = (-1)^6 M_{33} = 13$ ise,

kofaktörlerden oluşan matris,

$$\begin{pmatrix} 13 & -10 & -2 \\ 12 & -3 & -6 \\ -17 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

matrisidir. Bu matrisin transpozesini alırsak,

$$A^* = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -17 \\ -10 & -3 & 11 \\ -2 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$ bulunur.

A matrisi ile bu matrisin ek matrisi olan A^* ı çarpalım.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 12 & -17 \\ -10 & -3 & 11 \\ -2 & -6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, AA^* matrisi bir skaler matristir. Ayrıca, $\det(A) = 27$ dir. Buradan,

$$AA^* = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = 27\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(A)\, I_3$$

elde edilir. Bu durumu n. mertebeden kare matrislere, aşağıdaki şekilde genelleyebiliriz.

5.3. Özellik

A n. mertebeden bir kare matris olsun. Bu durumda $AA^* = A^*A = \det(A)I_n$ dir.

Bu özellik yardımıyla, bir kare matrisin, varsa ters matrisini elde etmenin bir yöntemini vereceğiz. Fakat daha önce, ters matrisin varlığı ile ilgili bir kriter sunalım.

5.4. Tanım

A, bir kare matris olsun. Eğer $\det(A) \neq 0$ ise A ya **regüler matris**, $\det(A) = 0$ ise A ya **singüler matris** denir.

5.5. Teorem

A, bir kare matris olsun. A nın tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul regüler matris olmasıdır.

Kanıt: Bu kanıtı iki yönlü yapacağız. Önce, A nın n. mertebeden bir regüler matris olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $AB = BA = I_n$ olacak şekilde n. mertebeden bir B matrisinin varlığını göstermeliyiz. Ek matris özelliğinden,

$$AA^* = \det(A)\, I_n \qquad (1)$$

yazabiliriz. A regüler matris olduğundan $\det(A) \neq 0$ dır. O halde (1) eşitliğinden

$$\frac{1}{\det(A)}\left(AA^*\right) = I_n$$

eşitliği elde edilir. Buradan $A\left(\frac{1}{\det(A)}A^*\right) = I_n$ olur.

$B = \left(\frac{1}{\det(A)}A^*\right)$ dersek $AB = I_n$ olacak şekildeki B matrisi bulunmuş olur. Benzer şekilde, $A^*A = \det(A)\, I_n$ eşitliğinden $BA = I_n$ koşulunu sağlayan B matrisinin $\left(\frac{1}{\det(A)}\right) A^*$ olduğu görülüı

Şimdi, $AB = BA = I_n$ olacak şekildeki B matrisinin varolduğunu kabul edelim. Bu durumda A nın regüler matris olduğunu göstermeliyiz.

$AB = I_n$ ise $\det(AB) = \det(I_n)$ dir. Determinant özelliklerinden
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ve ayrıca $\det(I_n) = 1$ olduğundan
$\det(A)\det(B) = 1$ olur.
Dolayısıyla $\det(A) \neq 0$ ve $\det(B) \neq 0$ dır. O halde A matrisi regüler matristir.

Aşağıda bu teoremden elde edilen bir sonuç verilmiştir.

5.6. Sonuç

A bir kare matris olsun. Eğer $\det(A) \neq 0$ ise A^{-1} vardır ve $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$ dır.

5.7. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisinin varsa tersini bulunuz

Çözüm

A altüçgensel bir matris olduğundan, determinantı köşegeni üzerindeki öğelerin çarpımına eşittir.

Bu durumda $\det(A) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 1 = 6 \neq 0$ dır ve dolayısıyla A^{-1} vardır. Şimdi A^{-1} 'i bulalım.

$A_{11} = (-1)^2 . M_{11} = 6$, $A_{12} = (-1)^3 . M_{12} = -6$, $A_{13} = (-1)^4 . M_{13} = 2$, $A_{14} = (-1)^5 . M_{14} = 4$,
$A_{21} = (-1)^3 . M_{21} = 0$, $A_{22} = (-1)^4 . M_{22} = 3$, $A_{23} = (-1)^5 . M_{23} = 0$, $A_{24} = (-1)^6 . M_{24} = -3$,
$A_{31} = (-1)^4 . M_{31} = 0$, $A_{32} = (-1)^5 . M_{32} = 0$, $A_{33} = (-1)^6 . M_{33} = 2$, $A_{34} = (-1)^7 . M_{34} = -2$,
$A_{41} = (-1)^5 . M_{41} = 0$, $A_{42} = (-1)^6 . M_{42} = 0$, $A_{43} = (-1)^7 . M_{43} = 0$, $A_{44} = (-1)^8 . M_{44} = 6$,

olmak üzere,

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece,

$$A^{-1} = 1/6 \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/2 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

Sizde $AA^{-1} = I_n$ olduğunu doğrulayınız.

5.8. Sonuç

A kare matrisinin tersi var ise, $(A^{-1})^{-1} = A$ dır ve $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$ dır.

Aşağıda ters matris ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

a) A bir kare matris olsun. A nın tersi var ise A^t nin de tersi vardır ve $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ dir.

Kanıt: A^t nin tersinin olabilmesi için $\det(A^t) \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Determinant özelliklerinden, $\det(A^t) = \det(A)$ dır. $\det(A) \neq 0$ olduğundan $\det(A^t) \neq 0$ olur. O halde A^t nin tersi vardır.

Şimdi A^t nin tersinin, A nın tersinin transpozesi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} A^t (A^{-1})^t &= (A^{-1}A)^t \quad \text{(Transpoze özelliğinden)} \\ &= (I_n)^t \\ &= I_n \end{aligned}$$

ise A^t nin tersi $(A^{-1})^t$ dir. Yani $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ dir.

b) A ve B n. mertebeden iki kare matris olsunlar. A ve B matrislerinin tersi var ise AB nin de tersi vardır ve $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ dir. Çünkü, A ve B nin tersi var ise,

$\det(A) \neq 0$ ve $\det(B) \neq 0$ dır. O halde $\det(A) \det(B) \neq 0$

dır. Yani AB nin tersi vardır ve

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

dir. Bu nedenle $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

matrisi verilsin. $M_{21}\,M_{13}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A. -36
B. -48
C. 36
D. 48
E. 64

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ise det(A) aşağıdakilerden hangisidir?

A. -10
B. -5
C. -2
D. 0
E. 10

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

ise a_{44} ün kofaktörü A_{44} aşağıdakilerden hangisidir?

A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

4. $\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$

olması için x ne olmalıdır?

A. 1/2
B. 1
C. 3/2
D. 2
E. 5/2

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ise det (A) aşağıdakilerden hangisidir?

A. -216
B. -12
C. 12
D. 72
E. 216

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin ek matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Aşağıdaki matrislerden hangisinin ters matrisi yoktur?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. A 5. dereceden bir kare matris ve det (A) =2 olduğuna göre det (2A) aşağıdakilerden hangisidir?

A. 8
B. 16
C. 32
D. 64
E. 128

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

B. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

C. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

D. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/2 \\ 3/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/2 & -1/4 \end{pmatrix}$

E. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -6 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 24$ ise $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ determinantının

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A. -24
B. -12
C. 0
D. 12
E. 24

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1.D	2.E	3.C	4.C	5.E
6.B	7.C	8.D	9.B	10.E

Lineer Denklem Sistemleri

ÜNİTE 3

Yazar
Yrd. Doç.Dr. Nezahat ÇETİN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Lineer Denklem ve Lineer Denklem Sistemleri kavramlarını öğrenecek,
- Lineer Denklem Sistemlerinin çözümlerinin varlığını tartışabilecek,
- Lineer Denklem Sistemlerinin çözüm yöntemlerini öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 61
- Lineer Denklem Sistemleri 62
- Cramer Yöntemi 79
- Değerlendirme Soruları 83

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışmadan önce, matris, rank ve determinant kavramlarını tekrarlayınız.
- Ünitedeki çözülmüş örnekleri kendiniz tekrar çözüp, sonuçları karşılaştırınız.
- Değerlendirme sorularını çözünüz.

1. Giriş

Düzlemdeki bir d doğrusunun denkleminin $ax + bx + c = 0$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu denkleme aynı zamanda **iki bilinmeyenli bir lineer denklem** denir. d doğrusu üzerindeki her (x, y) noktası bu denklemi sağlar. Tersine bu denklemi sağlayan her (x, y) sıralı ikilisine karşılık gelen nokta da d doğrusu üzerindedir. Şimdi, düzlemde denklemleri, sırasıyla, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ olan d_1 ve d_2 doğrularını gözönüne alalım. Bu doğruların düzlemdeki konumlarına göre aşağıdaki üç durum söz konusu olabilir:

I. Durum: d_1 ve d_2 doğruları bir noktada kesişirler. Böyle bir durumda

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{ve} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

denklemini birlikte sağlayan tek bir (x, y) sıralı ikilisi vardır. Bu (x, y) sıralı ikilisine karşılık gelen nokta d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktasıdır. Başka bir deyişle, bu iki lineer denklemin bir tek çözümü vardır.

II. Durum: d_1 ve d_2 doğruları çakışıktır. Bu durumda d_1 doğrusu üzerindeki her nokta d_2 doğrusu üzerinde ve d_2 doğrusu üzerindeki her nokta da d_1 doğrusu üzerindedir. Diğer taraftan d_1 doğrusu üzerindeki her (x, y) noktası $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ lineer denkleminin, dolayısıyla $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lineer denkleminin bir çözümü olduğuna göre, bu iki lineer denklemin sonsuz sayıda ortak çözümü vardır.

III. Durum: d_1 ve d_2 doğruları paraleldir. Bu durumda bu iki doğrunun hiç bir ortak noktası yoktur. Dolayısıyla bu iki doğruya karşılık gelen $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lineer denklemlerinin ortak çözümleri yoktur.

Doğrular için yapılan bu tartışma, uzayda verilen üç düzlem için de yapılabilir. Uzayda verilen bir P düzleminin denklemi $ax + by + cz + d = 0$ şeklindedir. Bu denkleme **üç bilinmeyenli bir lineer denklem** denir. P düzlemi üzerindeki her (x, y, z) noktası bu denklemi sağlar. Tersine bu denklemi sağlayan her (x, y, z) sıralı üçlüsüne karşılık gelen nokta da P düzlemi üzerindedir. Şimdi denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

olan P_1, P_2 ve P_3 düzlemlerini gözönüne alalım. P_1, P_2 ve P_3 düzlemleri bir tek noktada kesişebilirler. Bu durumda yukarıda verilen lineer denklemlerin bir tek ortak çözümü vardır. Ya da P_1, P_2 ve P_3 düzlemleri bir doğru boyunca kesişebilirler. Bu durumda da denklemlerin sonsuz sayıda ortak çözümleri vardır. En son olarak, P_1, P_2 ve P_3 düzlemleri birbirlerine paralel ya da bu düzlemlerden ikisi birbirine paralel, üçüncüsü de bunları paralel iki doğru boyunca kesiyor olabilir. Bu son durumda ise sözkonusu lineer denklemlerin ortak çözümü yoktur.

P_1, P_2 ve P_3 düzlemlerinden ikisi, diyelim ki P_1, P_2 nin birbirine göre konumları gözönüne alınacak olursa, bu iki düzlemin bir doğru boyunca kesişeceği ya da birbirlerine paralel olacağı açıktır. Bu durumda, sırasıyla ya $a_1x + b_1y + c_1 z + d_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 z + d_2 = 0$ lineer denklemlerinin sonsuz sayıda ortak çözümü vardır ya da hiç bir ortak çözümleri yoktur. Yani böyle bir durumda tek bir çözüm mümkün olamaz. Bu durum denklem sayısının, bilinmeyen sayısından az oluşundan kaynaklanabilir mi? Şimdi bu tartışmayı daha büyük boyutlara taşıyarak bu sorunun yanıtını arayalım ve n-tane bilinmeyen ve m-tane denklemden oluşan lineer denklem sistemini tanımlayıp çözümün varlığını tartışalım.

2. Lineer Denklem Sistemleri

2.1. Tanım

$a_1 , a_2 , \ldots , a_n \in \mathbf{R}$ ve $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ bilinmeyenler olmak üzere,

$$a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

denklemine **n- bilinmeyenli bir lineer denklem** denir.

Bir lineer denklemde $a_1, a_2, \ldots , a_n$ sayılarına **denklemin katsayıları**, b sayısına da **denklemin sabiti** denir. Örneğin $2x - y + z = 1$ lineer denkleminde, 2, -1 ve 1 denklemin katsayıları, 1 de denklemin sabitidir.

2.2. Tanım

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

şeklindeki n tane bilinmeyen ve m- tane lineer denklemden oluşan sisteme bir **lineer denklem sistemi** denir.

(1) lineer denklem sisteminde $a_{11}, a_{12} , \ldots , a_{mn} \in \mathbf{R}$ sayılarına sistemin katsayıları, $b_1, b_2 , \ldots , b_m \in \mathbf{R}$ sayılarına da **sistemin sabitleri** denir.

2.3. Örnek

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

lineer denklem sistemi üç bilinmeyenli, iki denklemden oluşmuştur ve sırasıyla 1, -2, 1, 2, 1, -3 sayıları sistemin katsayıları, 1, 0 sayıları da sistemin sabitleridir.

2.4. Tanım

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminde, $(x_1, x_2, ..., x_n) = (s_1, s_2, ..., s_n)$ sıralı n-lisi tüm denklemleri aynı anda sağlar ise $(s_1, s_2, ..., s_n)$ sıralı n-lisine lineer denklem sisteminin bir **çözümü** ve sistemi sağlayan tüm sıralı n-lilerin kümesine de lineer denklem sisteminin **çözüm kümesi** denir.

Bir lineer denklem sisteminde,

i) İki denklemin yerlerini değiştirmek,
ii) Denklemlerden herhangi birini sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak
iii) Denklemlerden herhangi birisinin bir katını diğer bir denkleme eklemek

lineer denklem sisteminin çözümünü değiştirmez. Bu işlemlerden bir ya da bir kaçı arka arkaya uygulandıktan sonra elde edilen yeni sistem ile eski sisteme **denk sistemler** denir.

Şimdi bunu bir örnek ile açıklayalım.

2.5. Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \qquad &= -4 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü yukarıda verilen (i), (ii) ve (iii) türündeki işlemler yardımıyla bulalım. Sistemde 1. denklemin -1 katını 3. denkleme ve yine 1. denklemi 4. denkleme ekleyelim.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ -x_2 \quad &= -2 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada 2. denklem ile 3. denklemin yerlerini değiştirelim.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_2 \quad &= -2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

olur. Son elde edilen denklem sisteminde 2. denklemin 2 katını 3. denkleme ekleyelim.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_2 \quad &= -2 \\ x_3 - x_4 &= 1 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü ile başlangıçtaki sistemimizin çözümü aynıdır. O halde, son elde edilen denklem sisteminde,

$$\begin{aligned} &x_4 = -2 \\ &x_3 = 1 + x_4 = 1 - 2 = -1, \\ &x_2 = 2 \qquad \text{ve} \\ &x_1 = 2 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 - 2 - 1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

dir. Öyleyse verilen denklem sistemin çözümü (1, 2, -1, -2) sıralı 4-lüsüdür.

Yukarıdaki 2.5. Örnekte olduğu gibi, bir lineer denklem sisteminin çözümünü (i), (ii) ve (iii) işlemlerini uygulayarak bulma yöntemine **Gauss Yok etme Yöntemi** denir.

2.6. Tanım

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\quad \vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminde, $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ ise bu sisteme **homojen lineer denklem sistemi** denir.

Örneğin, $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$ ve $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$

lineer denklem sistemleri birer homojen lineer denklem sistemidir.

Bilinmeyen sayısı n olan bir homojen lineer denklem sisteminde, $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ...,0)$ her zaman bir çözümdür. Bu çözüme homojen sistemin **aşikar çözümü** veya **sıfır çözümü** denir. Ayrıca, homojen bir sistemin sıfır çözümünden farklı çözümleri de olabilir. Bu çözümler ikinci bölümde incelenecektir.

Bir lineer denklem sistemini matris yardımıyla da temsil edebiliriz. Yani,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{mx1}$$

olmak üzer $AX = B$ şeklinde gösterebiliriz. Bu gösterim şekline, bir lineer denklem sisteminin **matris ile gösterimi** denir.

Bir lineer denklem sisteminin matris ile gösterimindeki A matrisine sistemin katsayılar matrisi, B matrisine sabitler matrisi ve X matrisine de bilinmeyenler matrisi denir. Burada A matrisinin satır sayısı olan m nin sistemin denklem sayısı, sütun sayısı olan n nin de sistemin bilinmeyen sayısı olduğuna dikkat ediniz.

2.7. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{matrislerinin}$$

belirlediği lineer denklem sistemini yazalım. A, 4 x 3 tipinde matris olduğuna göre sistem üç bilinmeyen ve dört denklemden oluşmaktadır. Böylece,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden, denklem sistemimiz,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 \qquad - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

şeklindeki lineer denklem sistemidir.

2.8. Tanım

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $AX = B$ lineer denklem sisteminde, A katsayılar matrisine, $(n + 1)$ inci sütun olarak B sabitler matrisinin ilave edilmesiyle elde edilen $m \times (n + 1)$ tipindeki yeni matrise sistemin **genişletilmiş matrisi** denir ve genişletilmiş matris $[A, B]$ şeklinde gösterilir.

Genel olarak, $AX = B$ lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisi,

$$[A, B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m \times (n+1)}$$

şeklindedir ve genişletilmiş matris verildiğinde, lineer denklem sistemi verilmiş olur.

n tane bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan $AX = B$ lineer denklem sistemine, herhangi bir denklemi sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak, herhangi iki denklemi yer değiştirmek veya herhangi bir denklemin bir katını diğer bir denkleme ilave etmek işlemleri uygulandığında elde edilen sistem $A'X = B'$ ise, ilk sistemin genişletilmiş matrisi $[A, B]$ ile yeni sistemin genişletilmiş matrisi $[A', B']$ denk matrislerdir. Dolayısıyla bir lineer denklem sistemi çözmek için, sistemin genişletilmiş matrisine ilkel satır işlemleri uygulayarak basamak biçime getirip bu matrise karşılık gelen lineer denklem sisteminde, çözüm kolaylıkla bulunur. Aslında bu yöntem, Gauss yok etme yönteminden başka bir şey değildir.

Aşağıda matrisler ile denklem sisteminin çözümüne bir örnek verilmiştir.

2.9. Örnek

$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 11 \\ x_1 + 2x_3 - x_5 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 4x_5 &= 1 \end{array} \qquad (1)$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm

Verilen sistemin genişletilmiş matrisi,

$$[A, B] = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

dir. Şimdi bu matrisi basamak biçime dönüştürelim. [A, B] matrisinde 1. satırın -2 katını 3. satıra, 1. satırın -1 katını 4. satıra ve 1. satırı 5. satıra ekleyelim.

$$[A, B] \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

dir. Bu matriste 2. satırın -1 katını 3. satıra, 2. satırı 4. satıra ve 2. satırın -3 katını 5. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & -1 & 28 \end{array}\right)$$

Elde edilen bu matrisin 3. satırını 5. satıra ekyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -4 & 41 \end{array} \right)$$

Şimdi bu matriste 3. satırın $11/3$ katını 5. satıra ekyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right)$$

Son olarak bu matrisin 3. satırını $-1/4$ ile, 4. satırını $-1/3$ ile ve 5. satırını $-1/4$ ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 & -13/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

elde edilir. Bu matrise karşılık gelen lineer denklem sistemi,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= -8 \\ x_3 - \frac{1}{4} x_4 + \frac{3}{4} x_5 &= -\frac{13}{4} \\ x_4 &= 3 \\ x_5 &= -2 \end{aligned} \qquad (2)$$

dir. (1) sistemi ile (2) sistemi denk sistemlerdir ve çözümleri aynıdır. O halde,

$$\begin{aligned} x_5 &= -2 , \\ x_4 &= 3 , \\ x_3 &= -\frac{13}{4} + \frac{1}{4} x_4 - \frac{3}{4} x_5 = -1 , \\ x_2 &= -8 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \quad \text{ve} \\ x_1 &= 3 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 2 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda (1) sisteminin çözümü $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, -1, 3, -2)$ sıralı 5-lisidir.

Şimdi yeniden genel duruma dönelim ve n tane bilinmeyen, m tane denklemden oluşan bir lineer denklem sisteminin çözümünün varlığını irdeleyelim:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi verilsin. Bu sistemi matrisler ile temsil edecek olursak $AX = B$ şeklindedir ve sistemin genişletilmiş matrisi de $[A, B]$ dir. m ve n sayıları için aşağıdaki durumlar sözkonusu olabilir:

I. Durum: $m \leq n$, yani sistemin denklem sayısı bilinmeyen sayısından küçük ya da eşit olsun.

a) $m = n$ ve $\text{rank}(A) = \text{rank}([A, B]) = n$ ise, genişletilmiş matris basamak biçimine getirildiğinde, A bloku üst üçgensel matris durumuna dönüşmüş demektir. O zaman bu basamak biçimindeki matrise karşılık gelen sistemde bütün bilinmeyenler hesaplanabileceğinden verilen sistemin bir tek çözümü vardır.

b) $m \leq n$ ve $\text{rank}(A) = \text{rank}([A, B]) = k < n$ ise, genişletilmiş matris basamak biçime getirildiğinde, k tane satırın sıfırdan farklı olması demektir. O zaman n - k tane bilinmeyeni bilinen kabul edip, bunları parametre olarak ifade edersek, sistemimiz (n - k) parametreye bağlı (a) durumundaki bir sisteme dönüşür. Yani sistemin (n - k) parametreli bir çözümü var demektir. Parametrelerin alabileceği her bir değer başlangıçta verilen sistemin bir çözümü olacağından, verilen sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

c) $m \leq n$ ve $\text{rank}(A) < \text{rank}([A, B])$ ise, genişletilmiş matrisin basamak biçiminde, A blokunun en az bir satırı sıfır iken, bu satırın B blokundaki devamında sıfırdan farklı bir sayı olacaktır. Böyle bir duruma karşılık gelen sistem yazılacak olursa, sözkonusu satıra karşılık gelen denklemin bilinmeyenler tarafı sıfır, sabitler tarafı sıfırdan farklı bir sayı olur. Böyle bir şey olamayacağından sistemin çözümü yoktur.

II. Durum: $m > n$, yani sistemin denklem sayısı bilinmeyen sayısından büyük olsun. Bu durumda, bu denklemlerden keyfi n tanesi alınarak n bilinmeyenli, n denklemden oluşan sistemin çözümü incelenir. Eğer bu yeni sistemin çözümü varsa, bu çözümün geri kalan (m - n) tane denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Sağlıyor ise verilen sistemin çözümü var, en az bir tanesi sağlamıyor ise sistemin çözümü yoktur.

Şimdi yukarıda ifade edilenleri birer örnek ile doğrulayalım.

2.10. Örnek

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü inceleyelim. Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi ve genişletilmiş matrisi sırasıyla,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad [A, B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

dir. $[A, B]$ matrisi, A matrisine bir sütun matrisi ilave edilerek oluşturulduğundan, $[A, B]$ matrisi basamak biçimine dönüştürüldüğünde, A matrisini de basamak biçimine dönüştürmüş oluruz ve dolayısıyla A matrisinin rankını da $[A, B]$ yardımıyla bulabiliriz. O halde, yalnızca $[A, B]$ matrisini basamak biçimine dönüştürmek yeterlidir. Şimdi, $[A, B]$ matrisinde, 1. satırın -1 katını 2. satıra ve 1. satırı 3. satıra ekleyelim.

$$[A, B] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

elde edilir. Bu matriste 2. ve 3. satırları $1/2$ ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

dir. Buna göre, $\text{rank}(A) = 3$, $\text{rank}([A, B]) = 3$ ve $n = m = 3$ olduğundan bu I. durumun (a) şıkkına uymaktadır. O halde sistemin bir tek çözümü vardır ve çözüm,

$$\begin{aligned} &x_3 = 2 \ , \\ &x_2 = 1 + x_3 = 3 \ \text{ ve} \\ &x_1 = 3 + x_2 - x_3 = 4 \end{aligned}$$

olmak üzere $(x_1, x_2, x_3) = (4, 3, 2)$ sıralı 3 - lüsüdür.

2.11. Örnek

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünün olup olmadığını araştırınız ve varsa çözümü bulunuz.

Çözüm

Verilen lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisi,

$$[A, B] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

dir. $[A, B]$ matrisinde 1. satırın -3 katını 2. satıra, 1. satırın -2 katını 3. satıra ekleyelim.

$$[A, B] \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Bu matriste 3. satırı 5 ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -20 & -15 & 15 & -5 \end{array}\right)$$

bulunur. Son elde edilen matrisin 2. satırını 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -24 & -22 & 24 & -4 \end{array}\right)$$

elde edilir. En son olarak 2. satırı $1/5$, 3. satırı $-1/24$ ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & -7/5 & 9/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 11/12 & -1 & 1/6 \end{array}\right)$$

bulunur. Buna göre $\text{rank}(A) = \text{rank}([A, B]) = 3$ tür. $n = 5$ ve $k = 3$ olduğundan bu I. durumun (b) şıkkına uymaktadır ve sistemin $5 - 3 = 2$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. O halde, $x_4 = s$ ve $x_5 = t$ olarak alırsak, son basamak biçimindeki genişletilmiş matrise karşılık gelen sistem,

$$x_1 - x_2 + x_3 + 2s - 2t = 0$$

$$x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{7}{5}s + \frac{9}{5}t = \frac{1}{5}$$

$$x_3 + \frac{11}{12}s - t = \frac{1}{6}$$

dır. Buradan,

$$x_3 = \frac{1}{6} - \frac{11}{12}s + t\ ,$$

$$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s - t \qquad \text{ve}$$

$$x_1 = \frac{1}{6} - \frac{5}{12}s$$

bulunur. Buradan çözüm kümesi,

$$\left\{\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{12}s\ ,\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s - t\ ,\ \frac{1}{6} - \frac{11}{12}s + t\ ,\ s, t\right) \mid s, t \in \mathbf{R}\right\}$$

dir.

2.12. Örnek

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştıralım. Verilen sistemin genişletilmiş matrisi,

$$[A, B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

dir. $[A, B]$ matrisinde, 1. satırın $-1/3$ katını 2. ve 3. satırlara ekleyelim.

$$[A, B] \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 8/3 & 2/3 & -4/3 \end{array}\right)$$

elde edilir. Bu matrisin 2. ve 3. satırlarını 3 ile çarpalım.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

olur. Son elde edilen matrisin 2. satırının $-1/4$ katını, 3. satıra ekleyelim.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 15/2 & 3/2 & -15/4 \end{array}\right)$$

dir. Son olarak bu matriste, 1. satırı $1/3$, 2. satırı $1/8$ ve 3. satırı $2/15$ ile çarpalım.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -1/2 \end{array}\right)$$

matrisi bulunur. Bu son elde ettiğimiz $[A, B]$ nin basamak biçimi olan matrise göre,

rank (A) = rank ([A, B]) = 3 tür. $n = 4$ olduğuna göre sistemin $4 - 3 = 1$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. Şimdi, $x_4 = s$ dersek sistemimiz,

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}s &= \frac{1}{3} \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}s &= -\frac{1}{8} \\ x_3 + \frac{1}{5}s &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğuna göre,

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{5}s \ ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{5}s\right) - \frac{1}{4}s = -\frac{1}{5}s \quad \text{ve}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}s\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{5}s\right) - \frac{1}{3}s = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}s$$

bulunur. O halde sistemin çözüm kümesi,

$$\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}s, -\frac{1}{5}s \ , -\frac{1}{2} - \frac{1}{5}s \ , s\right) \mid s \in \mathbf{R}\right\}$$

dir.

2.13. Örnek

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştıralım. Sistemin genişletilmiş matrisi

$$[A, B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

dir. Bu matrisin 1. satırının $-1/2$ katını 2. satıra, 1. satırın -2 katını 3. satıra ekleyelim.

$$[A, B] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -7/2 & 5/5 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

bulunur.

$m = 3, n = 3$ ve $\operatorname{rank}(A) = 2$, $\operatorname{rank}([A, B]) = 3$ olduğundan, $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}([A, B])$ dir. Bu I. durumun (c) şıkkına uymaktadır. O halde sistemin çözümü yoktur. Gerçekten de genişletilmiş matrise karşılık gelen lineer denklem sisteminde 3. denklemi yazarsak,

$$0 \,.\, x_1 + 0 \,.\, x_2 + 0 \,.\, x_3 = 1$$

$$0 = 1$$

olur. Bu bir çelişkidir. Sistemin çözümü yoktur.

2.14. Örnek

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm

Bu örnekte $m = 3$ ve $n = 2$ olduğundan burada II. Durum sözkonusudur. O halde denklemlerden n tanesini, yani 2 tanesini seçip, bu sistemi çözelim. 1. ve 2. denklemleri seçelim.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 &= -1 \end{aligned}$$

sisteminin genişletilmiş matrisi,

$$[A, B] = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

dir. Bu matrisin 1. satırının $1/2$ katını 2. satıra ekleyelim.

$$[A, B] \sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

olur. Bu matrise karşılık gelen sistem,

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 4 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

dir. Buna göre son sistemin çözümü $(x_1 , x_2) = (4 , 1)$ sıralı 2- lisidir. Bu çözümü 3. denklemde yerine koyalım.

$$4 + 2 \,.\, 1 = 6 \neq 2$$

olduğundan verilen sistemin çözümü yoktur.

Not: n tane bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan homojen bir sistemde, sabitler matrisi sıfır olduğundan, katsayılar matrisinin rankı ile genişletilmiş matrisin rankı aynıdır. O halde homojen bir sistemin en az bir çözümü vardır ve bu çözüm sıfır çözümüdür. Sıfır çözümü ile birlikte başka çözümlerin olup olmadığı, katsayılar matrisinin rankına göre aşağıdaki gibidir:

I. Durum: $\text{rank}\,(A) = n = m$ ise bir tek sıfır çözümü vardır. Bu durumda, A bir kare matris olup $\det\,(A) \neq 0$ dır.

2.15. Örnek:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sisteminin çözümlerini araştıralım.

Sistemin katsayılar matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Bu matrisin 1. satırının -1 katını 2. satıra ve 1. satırını -2 ile çarpıp 4. satıra ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu son matrisin 2. satırı ile 3. satırını yer değiştirelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

bulunur. Elde edilen bu matrisin 2. satırın 2 katını 3. satıra, 2. satırın 7 katını 4. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

olur. Son olarak bu matrisin 3. satırını $-1/3$ ile, 4. satırını $-1/4$ ile çarpalım.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Buna göre $\operatorname{rank}(A) = 4$ ve $n = 4$ olduğundan sistemin bir tek sıfır çözümü vardır.

II. Durum: $m < n$ ise $\operatorname{rank}(A) = k < n$ olacağından $(n - k)$ paremetreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

2.16. Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştıralım. Sistemin katsayılar matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

dir. A matrisinin 1. satırının -1 katını 2. satıra, 1. satırının -2 katını 3. satıra ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu matriste 2. satırı $-1/3$ ile çarpalım.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\text{rank}(A) = 2$ ve $n = m = 3$ olduğundan $3 - 2 = 1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır. Şimdi, çözümü bulalım. $x_3 = t$ dersek son bulduğumuz matristen,

$$x_1 + 2x_2 + 3t = 0$$
$$x_2 + \frac{4}{3}t = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sisteme göre,

$$x_2 = -\frac{4}{3}t$$

$$x_1 = -2x_2 - 3t = -\frac{1}{3}t$$

ise, çözüm kümesi $\left\{\left(-\frac{1}{3}t, -\frac{4}{3}t, t\right) \mid t \in \mathbf{R}\right\}$ dir.

2.17. Örnek

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm

Verilen sistemin katsayılar matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisidir. A matrisinde, 1. satırın $1/2$ katını 2. satıra ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu matriste, 2. satırın $1/2$ katını 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu son matriste, 1. satırı $1/2$ ile, 2. satırı $-1/2$ ile 3. satırı da $-2/5$ ile çarpalım.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & -6/5 \end{pmatrix}$$

olur. Bu son elde ettiğimiz matrise göre rank $(A) = 3$ tür. $n= 5$ olduğuna $5 - 3= 2$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır. $x_4 = s$, $x_5 = t$ dersek, sistemimiz

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + s - t = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0$$

$$x_3 - \frac{4}{5} s - \frac{6}{5} t = 0$$

şekline dönüştüğüne göre,

$$x_3 = \frac{4}{5} s + \frac{6}{5} t ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_3 = -\frac{2}{5} s - \frac{3}{5} t \ \text{ ve}$$

$$x_1 = -x_2 + 2x_3 - s + t = s + 4t$$

dir. O halde aranan çözüm kümesi,

$$\left\{ \left(s + 4 t , -\frac{2}{5} s - \frac{3}{5} t , \frac{4}{5} s + \frac{6}{5} t , s , t \right) \mid s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

dir. $s = 1$, $t = 1$ için, (5, -1, 2, 1, 1) sistemin bir çözümüdür.

3. Cramer Yöntemi

Cramer yöntemi, denklem sayısı ile bilinmeyen sayasının eşit olması durumunda, katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise uygulanır. Şimdi bu yöntemi açıklayalım:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere $AX = B$ olarak ifade edebileceğimizi biliyoruz. Bu sistemde $\det(A) \neq 0$ olsun. Bu takdirde A^{-1} vardır. Amacımız X matrisini bulmak olduğuna göre,

$$AX = B$$

eşitliğinin her iki tarafını A^{-1} ile çarpalım.

$$\begin{aligned} A^{-1} A X &= A^{-1} B \\ I_n X &= A^{-1} B \\ X &= A^{-1} B \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^*$ dir. Bunu $X = A^{-1} B$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

olur. İki matrisin eşitliğinden,

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \left(A_{1i} b_1 + A_{2i} b_2 + \ldots + A_{ii} b_i + \ldots + A_{ni} b_n \right) \; ; \; (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ dir.}$$

Şimdi, son eşitliğin sağ tarafındaki $A_{1i}\, b_1 + A_{2i}\, b_2 + \ldots + A_{ii}\, b_i + \ldots + A_{ni}\, b_n$ ifadesini inceleyelim. Bu ifade, A katsayılar matrisinde, i. sütun yerine B sütun vektörünün yazılmasıyla elde edilen,

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i-1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i-1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(i-1)} & b_i & a_{i(i-1)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i-1)} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \\ \downarrow \\ \text{i. sütun} \end{array}$$

matrisinin, i. sütuna göre hesaplanan determinantından başka bir şey değildir. O halde bu matrisi A_i ile gösterecek olursak,

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

elde edilir. x_i'leri açıkça yazacak olursak,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)} \ ,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)} \ ,$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

dir. Bu yönteme **Cramer Yöntemi** denir.

Aşağıda bu yöntem kullanılarak çözülmüş örnekler verilmiştir.

3.1. Örnek

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözelim. Verilen sistemin katsayılar matrisi ile sabitler matrisi sırasıyla,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$ dir. Bu durumda,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (54 - 8 - 1) - (6 + 12 + 6) = 21 \neq 0$$

olduğundan sistemi Cramer yöntemi ile çözebiliriz. Şimdi det(A_1), det (A_2) ve det(A_3) ü bulalım.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-45 - 20 + 1) - (15 - 10 - 6) = -63\,,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = (-18 + 20 + 5) - (-2 - 60 - 15) = 84 \text{ ve}$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (90 - 4 + 5) - (-30 + 6 + 10) = 105$$

dir. Bu durumda,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-63}{21} = -3\,,\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{84}{21} = 4 \text{ ve } x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 5$$

bulunur. Yani sistemin çözümü (-3, 4, 5) sıralı 3-lüsüdür.

3.2. Örnek

Denklemleri,

$$\begin{aligned} x - \quad z \quad &= 0 \quad , \\ x + y + z + 1 &= 0 \quad , \\ x + \quad z - 1 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

olan düzlemlerin varsa ortak noktalarını bulunuz.

Çözüm

Bu düzlemlerin ortak noktalarını bulmak için düzlemlerin denklemlerini aynı anda sağlayan (x, y, z) sıralı 3-lüsü bulmalıyız. Bu da aslında, aşağıdaki şekilde düzenlenmiş lineer denklem sisteminin çözümünü bulmak demektir.
O halde,

$$\begin{aligned} x \quad - z &= 0 \\ x + y + z &= -1 \\ x \quad + z &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulalım.

Sistemin katsayılar matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 0) - (-1 + 0 + 0) = 2 \neq 0$$

olduğundan Cramer yöntemi ile çözümü bulabiliriz.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (-1 + 0 + 0) = 1 \,,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 1 + 0) - (1 + 1 + 0) = -4 \text{ ve}$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 1$$

bulunur. Bu takdirde,

$$x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=-2 \ \text{ ve }\ z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{1}{2}\ \text{ dir.}$$

O halde düzlemlerin ortak noktası $\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$ noktasıdır.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. Genişletilmiş matrisi,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

olan lineer denklem sistemi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$

B. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$

C. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$

D. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$

E. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$

2. $$\begin{aligned} x + y - 2z + 3w &= -1 \\ y + 4z - w &= 2 \\ x - y + 3z - 2w &= 1 \\ 2x + 2y - 4z + 6w &= 3 \\ -x + y + z + w &= -5 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü için, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A. Sistemin bir tek çözümü vardır.
B. Sistemin çözümü yoktur.
C. Sistemin bir parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.
D. Sistemin iki parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.
E. Sistemin üç parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

3. $x - 3y + z = -2$
$2x + y - z = 6$
$x + 2y + 2z = 2$
lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. (0, 1, 1)
B. (1, 4, 0)
C. (2, 1, -1)
D. (1, 0, 1/2)
E. (2, 2, 0)

4. $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$
lineer denklem sisteminin çözümü varsa, aşağıdakilerden hangisidir?

A. (2, 1, 1)
B. (1, 1, 0)
C. (0, 2, 3)
D. (1, 1, 1)
E. Çözüm yok

5. $y = 3x + 1$ ve $y = -2x - 4$ doğrularının kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1, 2)
B. (2, 1)
C. (- 2, -1)
D. (- 1, - 2)
E. (1, - 4)

6. $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\left\{\left(-\frac{1}{5}s, -\frac{1}{5}s, -\frac{1}{5}s, s\right) \mid s \in \mathbf{R}\right\}$
B. $\left\{\left(\frac{1}{6}s, \frac{1}{6}s, \frac{1}{6}s, s\right) \mid s \in \mathbf{R}\right\}$
C. $\left\{(2s, 3s, 4s, s) \mid s \in \mathbf{R}\right\}$
D. $\left\{\left(-\frac{1}{6}s, -\frac{1}{6}s, -\frac{1}{3}s, s\right) \mid s \in \mathbf{R}\right\}$
E. $\left\{\left(\frac{1}{6}s, \frac{1}{3}s, \frac{1}{6}s, s\right) \mid s \in \mathbf{R}\right\}$

7. $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$
$x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3$
$-x_1 - x_4 + 2x_5 = -1$
lineer denklem sisteminin çözümü aşğıdakilerden hangisidir?

A. $\{(1 + s, 1 + t, s + t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$
B. $\{(1 - s - t, 1 + s + t, s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$
C. $\{(2s + t, 1 + s, 1 - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$
D. $\{(1 - s + 2t, s + t, -1 + s + t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$
E. $\{(2 - s + t, 1 + s + t, s - 2t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$

8. $2x - y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z + 1 = 0$ ve $x + y - 2z - 2 = 0$ düzlemlerinin varsa, kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A. (0, 1, 1)
B. (1, 1, 0)
C. (1, 0, 1)
D. (1, -1, 0)
E. Kesim noktaları yoktur.

9.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z + 2w &= -4 \\ x + 2y - 5z + w &= 14 \\ -x + 2y + 2z - w &= 1 \\ x + y + z + w &= 5 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. (2, 1, 0, - 2)
B. (1, 0, 3, - 1)
C. (0, 1, 2, 3)
D. (1, 2, 1, 1)
E. (1, 3, - 1, 2)

10.
$$\begin{aligned} x - y \qquad &= 5 \\ y - z &= -3 \\ 2x \quad - z &= 3 \\ 2y - 2z &= -6 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin varsa, çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1, 4, 1)
B. (4, - 1, 1)
C. (1, - 4, -1)
D. (1, - 1, - 4)
E. Sistemin çözümü yoktur.

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. A 2. B 3. C 4. E 5. D 6. A 7. D 8. B 9. E 10. C

Vektör Uzayları

ÜNİTE

4

Yazar
Öğr.Grv.Dr.Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Matematik ve mühendislikte birçok uygulamaları olan cebirsel yapılardan vektör uzayı ve alt uzay kavramlarını tanıyacak,
- Bir vektör uzayının yapısını ve özelliklerini öğrenecek,
- Çeşitli vektör uzayı örnekleri görecek,
- Bir kümenin gerdiği (oluşturduğu) alt uzay kavramını anlayacak,
- Bir uzayı geren vektörlerin nasıl bulunduğunu öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 89
- Vektör Uzayları 89
- Alt Uzaylar 97
- Bir Kümenin Gerdiği (Ürettiği) Alt Uzay 100
- Değerlendirme Soruları 107

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışırken temel kavram ve tanımları iyice kavrayıp konu ile ilgili çözülmüş örnekleri inceleyiniz.
- Okuyucuya bırakılan soruları çözünüz.

1. Giriş

Bu ünitede, uygulamalı matematiğin ve mühendislik matematiğinin önemli konularından biri olan vektör uzayları konusunu inceliyeceğiz.

2. Vektör Uzayları

V boş olmayan, üzerinde vektörel toplama diyeceğimiz bir toplama ve skalerle (gerçel sayılarla) çarpım tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$x, y \in V$ için $x + y \in V$
$r \in \mathbf{R}$, $x \in V$ için $r\,x \in V$

biçiminde tanımlı olsun; yani, V kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V kümesine **R** (gerçel sayılar kümesi) üzerinde bir **vektör uzayı** denir.

V1. Her $x, y \in V$ için $x+y = y+x$ olmalıdır. (Toplamanın değişme özelliği)

V2. Her $x, y, z \in V$ için $(x+y) +z = x + (y+z)$ olmalıdır. (Toplamanın birleşme özelliği)

V3. Her $x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir $0 \in V$ bulunmalıdır. (Toplama işlemine göre etkisiz öğe)

V4. Her $x \in V$ için $x+y = y+x = 0$ olacak şekilde bir $y \in V$ bulunmalıdır. (Toplama işlemine göre ters öğe)

V5. Her $x, y \in V$ ve her $c \in \mathbf{R}$ için $c(x+y) = cx + cy$ olmalıdır. (skaler ile çarpmanın toplama üzerine dağılımı)

V6. Her $x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ için $(c_1 + c_2)\, x = c_1x + c_2x$ olmalıdır.

V7. Her $x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ için $(c_1c_2)\, x = c_1\,(c_2x)$ olmalıdır.

V8. Her $x \in V$ için $1.x = x$ olmalıdır.

V, **R** üzerinde bir vektör uzayı ise V nin öğelerine **vektörler R** nin öğelerine de **skalerler** denir. Bu durumda V ye de bir **gerçel vektör uzayı** denir. Eğer skalerler **R** ile gösterdiğimiz gerçel sayılar kümesi yerine **C** ile gösterdiğimiz kompleks sayılar kümesinden alınırsa, V ye kompleks vektör uzayı denir. Bundan böyle aksi belirtilmedikçe vektör uzaylarımızı gerçel vektör uzayı olarak ele alacağız.

2.1. Önerme

V bir vektör uzayı olsun. V de vektörel toplama işleminin etkisiz öğesi tektir.

Kanıt

V vektör uzayının 0 ve 0' gibi iki etkisiz öğesi olsun. 0 bir etkisiz öğe olduğundan $\forall x \in V$ için x+0= 0+x= x olur, burada özel olarak x= 0' alınırsa

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0' \qquad (1)$$

bulunur. Aynı şekilde 0' bir etkisiz öğe olduğundan $\forall x \in V$ için x+0'= 0'+x= x ve özel olarak x= 0 alınırsa

$$0+0' = 0'+0 = 0 \ (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$0 = 0'$$

elde edilir. Böylece etkisiz öğenin tek olduğu gösterilmiş olur. Bundan böyle toplama işlemine göre etkisiz öğeye **sıfır vektör** diyeceğiz. Açıktır ki, 0x= 0 dır. Çünkü 0.x= (0+0)x= 0.x + 0.x dır. Benzer olarak, $r \in \mathbf{R}$ ve $0 \in V$ için r.0= 0 dır.

2.2. Önerme

V vektör uzayında her x vektörünün tersi tektir.

Kanıt

V vektör uzayının herhangi bir x vektörünün y_1 ve y_2 gibi iki tane tersi olsun. Bu durumda

$$x + y_1 = y_1 + x = 0 \ \text{ ve } \ x + y_2 = y_2 + x = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

$$y_1 = y_1 + 0 = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0 + y_2 = y_2$$

elde edilir. x vektörünün tersi tek olduğundan bu ters vektör (-x) ile gösterilir. Yani x + (-x) = (-x) + x = 0 dır. Kolayca görülür ki (-1).x = -x dır. Çünkü 0 = 0. x = (-1 + 1) x = (-1)x + 1.x = (-1) x + x dir. Ayrıca x + (-y) yerine x-y yazacağız ve x-y ye x ile y nin fark vektörü diyeceğiz.

Şimdi vektör uzaylarına örnekler verelim:

2.3. Örnek

R gerçel sayılar kümesi, bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında bir gerçel vektör uzayıdır. Çünkü **R** nin öğeleri olan gerçel sayılar bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle vektör uzayı için vermiş olduğumuz koşulları sağlarlar. Sizde bu koşulların sağlandığını tek tek inceleyiniz.

2.4. Örnek

$V = \{ (x, y) \mid y = 3x, x \in \mathbf{R} \}$

kümesinin aşağıda verilen işlemlere göre bir vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

Her $A, B \in V$, $A = (x_1, 3x_1)$, $B = (y_1, 3y_1)$ için

$A + B = (x_1, 3x_1) + (y_1, 3y_1) = (x_1 + y_1, 3x_1 + 3y_1) = (x_1 + y_1, 3(x_1 + y_1)) \in V$
$c \in \mathbf{R}$ için $cA = c(x_1, 3x_1) = (cx_1, 3cx_1) \in V$

Çözüm

V kümesinin öğelerinin vektör uzayı koşullarını sağladığını göstermeliyiz.

V1. Her $A, B \in V$, $A = (x_1, 3x_1)$, $B = (y_1, 3y_1)$ için

$$A+B = (x_1, 3x_1) + (y_1, 3y_1) = (x_1 + y_1, 3x_1 + 3y_1) = (y_1 + x_1, 3y_1 + 3x_1)$$
$$= (y_1, 3y_1) + (x_1, 3x_1) = B+A$$

olduğundan toplamanın değişme özelliği sağlanır.

V2. $A, B, C \in V$, $A = (x_1, 3x_1)$, $B = (y_1, 3y_1)$, $C = (z_1, 3z_1)$ için

$$A + (B+C) = (x_1, 3x_1) + ((y_1, 3y_1) + (z_1, 3z_1)) = (x_1 + (y_1 + z_1), 3x_1 + (3y_1 + 3z_1))$$
$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (3x_1 + 3y_1) + 3z_1)$$
$$= (x_1 + y_1, 3x_1 + 3y_1) + (z_1, 3z_1) = (A+B) + C$$

olduğundan toplamanın birleşme özelliği sağlanır.

V3. Her $A \in V$, $A = (x_1, 3x_1)$ ve $0 = (0, 0)$ için

$$A+0 = (x_1, 3x_1) + (0, 0) = (x_1 + 0, 3x_1 + 0) = (x_1, 3x_1) = A$$
$$0 + A = (0, 0) + (x_1, 3x_1) = (0 + x_1, 0 + 3x_1) = (x_1, 3x_1) = A$$

olduğundan $0 = (0, 0)$ vektörü toplama işleminin etkisiz öğesidir.

V4. Her $A \in V$, $A = (x_1 , 3x_1)$ ve $-A = (-x_1 , -3x_1)$ için

$$(x_1 , 3x_1) + (-x_1 ,-3x_1) = (x_1 - x_1 , 3x_1 - 3x_1) = (0, 0)$$
$$(-x_1 , -3x_1) + (x_1 , 3x_1) = (-x_1 + x_1 , -3x_1 + 3x_1) = (0, 0)$$

olduğundan $A = (x_1 , 3x_1)$ vektörünün toplama işlemine göre tersi $-A = (-x_1 , -3x_1)$ vektörüdür.

V5. Her $A, B \in V$ $A = (x_1 , 3x_1)$, $B = (y_1 , 3y_1)$, $c \in \mathbf{R}$ için

$$\begin{aligned} c\,(A+B) &= c\,[(x_1, 3x_1) + (y_1 , 3y_1)] = c\,(x_1 + y_1 , 3x_1 + 3y_1) \\ &= (c\,(x_1 + y_1) , c\,(3x_1 + 3y_1)) = (cx_1 + cy_1 , 3cx_1 + 3cy_1) \\ &= (cx_1 , 3cx_1) + (cy_1 , 3cy_1) = c\,(x_1 , 3x_1) + c\,(y_1 , 3y_1) = c\,A + c\,B \end{aligned}$$

olur.

V6. Her $A \in V$, her c_1 , c_2 $\mathbf{R}$ için

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2)\,A &= (c_1 + c_2)\,(x_1 , 3x_1) = [(c_1 + c_2)\,x_1 , (c_1 + c_2)\,3x_1] \\ &= (c_1 x_1 + c_2 x_1 , 3c_1 x_1 + 3c_2 x_1) = (c_1 x_1 , 3c_1 x_1) + (c_2 x_1 , 3c_2 x_1) \\ &= c_1\,(x_1 , 3x_1) + c_2\,(x_1 , 3x_1) = c_1 A + c_2 A \end{aligned}$$

olur.

V7. Her $A \in V$, $A= (x_1 , 3x_1)$, her c_1 , $c_2 \in \mathbf{R}$ için

$$\begin{aligned} (c_1 c_2)\,A &= c_1 c_2\,(x_1 , 3x_1) = (c_1 c_2 x_1 , 3c_1 c_2 x_1) = [c_1\,(c_2 x_1) , c_1\,(3c_2 x_1)] \\ &= c_1\,(c_2 x_1 , 3c_2 x_1) = c_1\,(c_2\ (x_1 , 3x_1)) = c_1\,(c_2 A) \end{aligned}$$

olur.

V8. Her $A \in V$, $A = (x_1 , 3x_1)$, $1 \in \mathbf{R}$ için

$$1.\,A= 1.\,(x_1 , 3x_1) = (1.x_1 , 3.1\,x_1) = (x_1 , 3x_1) = A$$

olur. Böylece V kümesi **R** üzerinde bir vektör uzayıdır.

2.5. Örnek

$\mathbf{R}^2$ kümesinde vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$A = (x_1 , x_2)$, $B= (y_1 , y_2) \in \mathbf{R}^2$, $c \in \mathbf{R}$ için

$$A+B = (x_1 , x_2) + (y_1 , y_2) = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2)$$
$$c\,A = c\,(x_1 , x_2) = (cx_1 , cx_2)$$

biçiminde verildiğine göre, $\mathbf{R}^2$ kümesinin $\mathbf{R}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösterelim: Bunun için $\mathbf{R}^2$ nin öğelerinin, vektör uzayı koşullarını sağladığını göstermeliyiz.

V1. Her $A, B \in \mathbf{R}^2$, $A = (x_1 , x_2)$ $B = (y_1 , y_2)$ için

$$\begin{aligned} A+B &= (x_1 , x_2) + (y_1 , y_2) = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2) = (y_1 + x_1 , y_2 + x_2) \\ &= (y_1 , y_2) + (x_1 , x_2) = B+A \end{aligned}$$

olduğundan toplamanın değişme özelliği sağlanır.

V2. Her $A, B, C \in \mathbf{R}^2$, $A = (x_1 , x_2)$, $B = (y_1 , y_2)$, $C = (z_1 , z_2)$ için

$$\begin{aligned} A+ (B+C) &= (x_1 , x_2) + [(y_1 , y_2) + (z_1 , z_2)] = (x_1 , x_2) + (y_1 + z_1 , y_2 + z_2) \\ &= [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)] \\ &= [(x_1 + y_1) + z_1 , (x_2 + y_2) + z_2] \\ &= (x_1 + y_1 , x_2 + y_2) + (z_1 , z_2) = (A+B) + C \end{aligned}$$

olduğundan toplamanın birleşme özelliği sağlanır.

V3. Her $A= (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2$ ve $0= (0, 0)$ için

$$A+0 = (x_1 , x_2) + (0, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1 , x_2) = A$$
$$0+A = (0, 0) + (x_1 , x_2) = (0 + x_1 , 0 + x_2) = (x_1 , x_2) = A$$

olduğundan $0= (0, 0)$ vektörü toplama işleminin etkisiz öğesidir.

V4. Her $A = (x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2$ ve $-A= (-x_1 , -x_2)$ için

$$(x_1 , x_2) + (-x_1 , -x_2) = (x_1 - x_1 , x_2 - x_2) = (0, 0)$$
$$(-x_1 , -x_2) + (x_1 , x_2) = (-x_1 + x_1 , -x_2 + x_2) = (0, 0)$$

olduğundan $A = (x_1 , x_2)$ vektörünün toplama işlemine göre tersi $-A = (-x_1 , -x_2)$ vektörüdür.

V5. Her $A = (x_1 , x_2)$, $B = (y_1 , y_2) \in \mathbf{R}^2$, her $c \in \mathbf{R}$ için

$$\begin{aligned} c\,(A+B) &= c\,[(x_1 , x_2) + (y_1 , y_2)] = c\,(x_1 + y_1 , x_2 + y_2) \\ &= [c\,(x_1 + y_1) , c\,(x_2 + y_2)] = (cx_1 + cy_1 , cx_2 + cy_2) \\ &= (cx_1 , cx_2) + (cy_1 , cy_2) \\ &= c\,(x_1 , x_2) + c\,(y_1 , y_2) = c\,A + c\,B \end{aligned}$$

olur.

V6. Her $A = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, her $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ için

$$(c_1 + c_2)A = (c_1 + c_2)(x_1, x_2) = [(c_1 + c_2)x_1, (c_1 + c_2)x_2]$$
$$= (c_1 x_1 + c_2 x_1, c_1 x_2 + c_2 x_2) = (c_1 x_1, c_1 x_2) + (c_2 x_1, c_2 x_2)$$
$$= c_1(x_1, x_2) + c_2(x_1, x_2) = c_1 A + c_2 A$$

olur.

V7. Her $A = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, her $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ için

$$(c_1 c_2)A = (c_1 c_2)(x_1, x_2) = (c_1 c_2 x_1, c_1 c_2 x_2)$$
$$= [c_1(c_2 x_1), c_1(c_2 x_2)] = c_1(c_2 x_1, c_2 x_2) = c_1[c_2(x_1, x_2)]$$
$$= c_1(c_2 A)$$

V8. Her $A = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $1 \in \mathbf{R}$ için

$$1.A = 1.(x_1, x_2) = (1.x_1, 1.x_2) = (x_1, x_2) = A$$

olur. Böylece $\mathbf{R}^2$ kümesi R üzerinde bir vektör uzayıdır.

Benzer şekilde, $n \geq 1$ tamsayı olmak üzeri $\mathbf{R}^n$ kümesi de yukarıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine benzer olarak tanımlanan sıralı n-lilerin toplamı ve bir skalerle bir sıralı-n linin çarpımı işlemlerine göre **R** üzerinde bir vektör uzayıdır.

Verilen bir kümenin vektör uzayı olup olmadığını belirlemek için öncelikle, bu kümenin öğeleri üzerinde vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin tanımlanmış olması, daha sonra da verilen kümenin öğelerinin vektör uzayı koşullarını sağlaması gerekir. Buna örnek olarak:

$$V = \{ (x, y) \mid y = 2x, \quad x \in \mathbf{R} \}$$

kümesi bir vektör uzayı mıdır? şeklindeki bir soru anlamlı değildir. Çünkü, küme üzerinde vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri belirtilmemiştir.

2.6. Örnek

$$V = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \}$$

kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V, \quad c \in \mathbf{R}$ için

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$
$$c(x_1, x_2) = (c x_1, c x_2)$$

V kümesi bu işlemlere göre bir vektör uzayı mıdır?

Çözüm

Bunun için, V kümesinin öğelerinin, verilen işlemlere göre vektör uzayı koşullarını sağlayıp sağlamadığını araştırmalıyız:

V1 ve V2 özellikleri yani toplamanın değişme ve birleşme özelliklerinin varlığı kolayca doğrulanır. V3 koşulu olan etkisiz öğenin varlığını araştıralım:

Her $A \in V$, $A = (x_1 , x_2)$ için

$$A + E = A$$

olacak şekilde bir E vektörü yani etkisiz (birim) vektör var mıdır?

$$E = (a , b) \text{ olsun. } a , b \in \mathbf{R}$$
$$A + E = (x_1 , x_2) + (a , b) = (x_1 , x_2)$$
$$(x_1 + a , 0) = (x_1 , x_2)$$

iki vektörün eşitliğinden

$$x_1 + a = x_1$$
$$0 = x_2$$

olur. Buradan daima $x_2 = 0$ elde edilir. $x_2 \neq 0$ da olabileceğinden $A + E = A$ eşitliğini her zaman sağlayan bir E vektörü yoktur. Örneğin,

$A = (1 , 2)$ için yukarıdaki eşitlik

$$(1 , 2) + (a , b) = (1 , 2)$$
$$(1 + a , 0) = (1 , 2)$$

olur. Buradan $0 = 2$ gibi doğru olmayan bir eşitlik elde edilir. Buna göre V üzerindeki toplama işleminin etkisiz öğesi yoktur yani, V verilen işlemlere göre bir vektör uzayı değildir.

Şimdiye kadar $\mathbf{R}$ (gerçel sayılar kümesi), $\mathbf{R}^2$ (düzlemin noktalarının kümesi), $\mathbf{R}^3$ (uzayın noktalarının kümesi) ..., $\mathbf{R}^n$ (n boyutlu uzayın noktalarının kümesi) üzerinde bilinen toplama ve skalerle çarpım işlemlerini tanımlayarak, gerçel sayılar kümesinin, düzlemin noktaları kümesinin, uzayın noktaları kümesinin,... birer gerçel vektör uzayı olduklarını gösterdik. Bir vektör uzayının öğeleri polinomlar, matrisler, bir homojen lineer denklem sisteminin tüm çözümleri, kompleks sayılar, belli bir aralıkta tanımlanmış sürekli fonksiyonlar da olabilir. Bütün bunlar, vektör uzaylarının ne kadar çeşitli örneklerinin olduğunu gösterir. Bu söylediklerimize bir örnek verelim:

$$V = \{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a , b , c , d \in \mathbf{R} \}$$

kümesi 3. dereceden bütün polinomların kümesi olsun.

V kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma daha önceden bildiğimiz polinom toplamı ve bir skalerle polinomun çarpımı işlemleri olarak verilsin;

$$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$q(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ olmak üzere

$$p(x) + q(x) = (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

$c \in \mathbf{R}$ için $c.p(x) = c (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = c a_3 x^3 + c a_2 x^2 + c a_1 x + c a_0$

Bu işlemlere göre, V kümesinin **R** üzerinde bir gerçel vektör uzayı olduğunu kolayca gösterebilirsiniz.

Uyarılar

(i) V kümesinin etkisiz öğesi ile 0 sayısını birbiri ile karıştırmamak gerekir. V nin etkisiz öğesi $p(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ şeklinde sıfır polinomudur.

(ii) Her $p(x) \in V$, $p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ öğesinin ters öğesi ise $-p(x) = -a_3 x^3 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$ şeklindeki bir polinomdur.

(iii) Her $p(x) \in V$, $p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$; $a_3 , a_2 , a_1 , a_0 \in \mathbf{R}$

olduğundan $p(x)$ öğesinde a_3 , a_2 , a_1 , a_0 katsayıları çeşitli durumlarda 0 değerini alabilir. Bu yüzden

$$V = \{ p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_3 , a_2 , a_1 , a_0 \in \mathbf{R} \}$$

kümesinin öğeleri, derecesi 3 veya 3 ten küçük bütün polinomlardan oluşur. Derecesi 3 veya 3 ten küçük bütün polinomların kümesi P_3 (**R**) ile gösterilir. $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere P_n (**R**) kümesi derecesi n veya n den küçük bütün polinomların kümesidir. P_n (**R**) kümesi de polinomların toplamı ve bir skalerle polinomun çarpımı işlemlerine göre vektör uzayı olduğu benzer şekilde gösterilir.

Vektör uzayı ile ilgili örneklerimizi biraz daha genişletelim: m x n tipinde matrisler, matris toplamı ve bir skalerle matrisin çarpımı işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturur. Bu vektör uzayı M_{mn} ile gösterilir.

2.7. Örnek

M_{23} kümesinin, matris toplamı ve bir skalerle matrisin çarpımı işlemlerine göre **R** üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm

M_{23} (2 x 3 tipindeki bütün matrislerin kümesi) nin **R** üzerinde bir vektör uzayı olduğunu göstermek için M_{23} nin öğelerinin vektör uzayı koşullarını sağladığını göstermeliyiz:

Matris toplamının değişme ve birleşme özellikleri, sıfır matris (etkisiz öğe), bir matrisin toplamaya göre tersi, bir skalerle matrisin çarpım işlemleri 1. ünitede geniş olarak verildi. Buna göre her $A , B , C \in M_{23}$ öğeleri vektör uzayı koşullarını sağlar.

V1. $A + B = B + A$ (Matris toplamının değişme özelliği)

V2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Matris toplamının birleşme özelliği)

V3. $A + 0 = 0 + A = A$ (Etkisiz öğe)

V4. $A + (-A) = -A + A = 0$ (Ters öğe)

V5. $c \in \mathbf{R}$, $c (A + B) = c A + c B$

V6. $c_1 , c_2 \in \mathbf{R}$ $(c_1 + c_2) A = c_1 A + c_2 A$

V7. $c_1 , c_2 \in \mathbf{R}$ $(c_1 c_2) A = c_1 (c_2 A)$

V8. $1. A = A$

Böylece M_{23} kümesi verilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre **R** üzerinde bir vektör uzayıdır. Bunu daha genel olarak ifade edersek; m x n tipindeki matrislerin kümesi M_{mn} , matris toplamı ve bir skalerle matrisin çarpımı işlemlerine göre **R** üzerinde bir vektör uzayıdır.

3. Alt Uzaylar

Bu bölümde vektör uzaylarının yapısını daha ayrıntılı bir şekilde inceleyeceğiz.

3.1. Tanım

V bir vektör uzayı ve W , V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W kümesi, V kümesinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ye V nin bir **alt uzayı** denir. Bu tanımdan aşağıdaki sonuçları elde etmek oldukça kolaydır:

(i) Her vektör uzayı kendisinin bir alt uzayıdır.

(ii) $\{ 0 \}$ kümesinin oluşturduğu sıfır vektör uzayı o vektör uzayının bir alt uzayıdır. Buna göre sıfır vektör uzayından farklı her vektör uzayının en az iki alt uzayı vardır.

3.2. Örnek

$\mathbf{R}^2$ kümesinin sıralı ikililerin toplamı ve bir skalerle sıralı ikilinin çarpımı işlemlerine göre bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Yukarıda ifade edilen sonuçlara göre $\{ (0 , 0) \}$ ve $\mathbf{R}^2$ kümeleri aynı zamanda birer alt uzaylardır.

- **Siz de $\mathbf{R}^2$ nin başka alt uzaylarını belirtebilir misiniz?**
- **Başlangıç noktasından geçen bütün doğrular aynı işlemlere göre $\mathbf{R}^2$ nin alt uzayı olabilirler mi?**

3.3. Örnek

$W = \{ (x , y) \mid y = x + 1 \ , \ x \in \mathbf{R} \}$ kümesi $\mathbf{R}^2$ nin bir alt uzayı mıdır?

Çözüm

Alt uzay tanımına göre, W alt uzay ise $\mathbf{R}^2$ deki işlemlere göre bir vektör uzayıdır. Dolayısıyla $\mathbf{R}^2$ nin sıfır vektörünü içermek zorundadır. Fakat,

$0 = (0 , 0) \notin W$ olduğundan ($x = 0$ için $y = 1$)

$W = \{ (x , y) \mid y = x + 1 \ , \ x \in \mathbf{R} \}$ kümesi alt uzay değildir.

Şimdi bir vektör uzayının boş olmayan herhangi bir alt kümesinin hangi koşullarda bir alt uzay olacağına ilişkin teoremi verelim:

3.4. Teorem

V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W nin V nin bir alt uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul

(i) $x, y \in W$ iken $x + y \in W$ (W , toplama işlemine göre kapalı)

(ii) $x \in W$, $c \in \mathbf{R}$ iken $c\,x \in W$ (W , skalerle çarpma işlemine göre kapalı)

olmasıdır.

Kanıt

$\Rightarrow$: W , V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda (i) ve (ii) koşullarının sağlandığını gösterelim. W nin V nin bir alt uzayı olmasından dolayı, W nin kendisi de bir vektör uzayıdır. Bu nedenle (i) ve (ii) koşullarını sağlar.

$\Leftarrow$: Tersine olarak W kümesi (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. (ii) den $x \in W$, $c \in \mathbf{R}$ iken $c\,x \in W$ olup, $c = 0$ ve $c = -1$ için $0 \in W$ ve $-x \in W$ elde edilir. Buna göre etkisiz öğe ve W içindeki her x öğesinin tersi W içindedir. Bunun yanında vektör uzayının diğer koşulları W için de sağlanır. Yani V nin W alt kümesi , aynı zamanda bir vektör uzayıdır. Bu da bize W nin V nin alt uzayı olduğunu gösterir.

3.5. Örnek

$$W = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = 0 \}$$

kümesi $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayı mıdır?

Çözüm

W nin $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayı olması için

$x, y \in W$ iken $x + y \in W$

$c \in \mathbf{R}$, $x \in W$ iken $c\,x \in W$

olmalıdır.

$x, y \in W$ ise $x = (0 , x_2 , x_3)$ ve $y = (0 , y_2 , y_3)$ olur. (W nin öğeleri 1. bileşenleri 0 olan vektörlerdir.)

$$x + y = (0 , x_2 , x_3) + (0 , y_2 , y_3) = (0 , x_2 + y_2 , x_3 + y_3) \in W$$

$c \in \mathbf{R}$ ve $x \in W$ iken $c\,x = c\,(0 , x_2 , x_3) = (0 , c\,x_2 , c\,x_3) \in W$

elde edilir. Böylece W kümesinin öğeleri alt uzay olma koşullarını sağlar. W, $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayıdır. Bu alt uzayın yz - düzlemi olduğuna dikkat ediniz.

3.6. Örnek

$$W = \{ (x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 2 \}$$

kümesi $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayı mıdır?

Çözüm

$A, B \in W$ için $A + B \in W$ olmalıdır.

$$A = (x_1 , x_2 , x_3) \quad , \quad x_1 + x_2 = 2$$

$$B = (y_1 , y_2 , y_3) \quad , \quad y_1 + y_2 = 2$$

$$A + B = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , x_3 + y_3) \ , \ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2 + 2 = 4 \neq 2$$

olduğundan $A + B \notin W$ dir. O halde W, $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayı değildir.

3.7. Örnek

$n \leq m$ ise $P_n (\mathbf{R})$, $P_m (\mathbf{R})$ nin bir alt uzayı mıdır?

Çözüm

$P_m (\mathbf{R})$ derecesi m veya m den küçük bütün polinomların kümesidir. Bu kümenin polinomların toplamı ve bir skalerle polinomun çarpımı işlemlerine göre bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$P_n (\mathbf{R}) \subseteq P_m (\mathbf{R})$ ve $p(t) , q(t) \in P_n (\mathbf{R})$, $r \in \mathbf{R}$ için

$$\text{derece } (p(t) + q(t)) = \text{maksimum } \{ \text{derece } p(t) , \text{ derece } q(t) \} \leq n$$
$$\text{derece } (r \,.\, p(t)) = \text{derece } (p(t)) \leq n$$

olduğundan, $(p(t) + q(t)) \in P_n (\mathbf{R})$ ve $(r\, p(t)) \in P_n (\mathbf{R})$ dir. Yani $P_n (\mathbf{R})$ kümesi polinom toplamı ve skalerle polinomun çarpımına göre kapalıdır. O halde $P_n (\mathbf{R})$ kümesi $P_m (\mathbf{R})$ vektör uzayının bir alt uzayıdır.

4. Bir Kümenin Gerdiği (Ürettiği) Alt Uzay

4.1. Tanım

Bir V vektör uzayının $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ vektörleri verilsin. $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$ gerçel sayılar olmak üzere bir $x \in V$ vektörü $x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ şeklinde yazılabiliyorsa, yani, bu yazılışı sağlayacak şekilde, $c_1 , c_2 , ... , c_n$ gerçel sayıları bulunabiliyorsa x vektörü $x_1 , x_2 , ... , x_n$ vektörlerinin bir **lineer bileşimidir** denir.

4.2. Örnek

$\mathbf{R}^3$ de $x_1 = (1 , 0 , 3)$, $x_2 = (0 , 1 , 0)$, $x_3 = (2 , 1 , 0)$ vektörleri verilsin. $x = (3 , 1 , 3)$ vektörünün verilen x_1 , x_2 , x_3 vektörlerinin bir lineer bileşimi olduğunu gösterelim:

x vektörünün, verilen 3 vektörün lineer bileşimi olması için

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

şeklinde yazılması gerekir. Bir başka deyişle c_1 , c_2 , c_3 gerçel sayılarının bulunması gerekir. Buna göre,

$$(3 , 1 , 3) = c_1 (1 , 0 , 3) + c_2 (0 , 1 , 0) + c_3 (2 , 1 , 0)$$

$$(3 , 1 , 3) = (c_1 + 2c_3 \ , \ c_2 + c_3 \ , 3c_1)$$

elde edilir. İki vektörün eşitliğinden

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_3 &= 3 \\ c_2 + c_3 &= 1 \\ 3c_1 &= 3 \end{aligned}$$

çıkar ve bu üç eşitlikten $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ bulunur.

$$(3 , 1 , 3) = 1 . (1 , 0 , 3) + 0 . (0 , 1 , 0) + 1 . (2 , 1 , 0)$$

Buna göre $(3,1,3)$ vektörü $(1,0,3),(0,1,0),(2,1,0)$ vektörlerinin bir lineer bileşimidir.

4.3. Örnek

$\mathbf{R}^3$ deki $x = (2 , 0 , 6)$ vektörü $x_1 = (1 , 1 , 0)$ ve $x_2 = (1 , 0 , 2)$ vektörlerinin bir lineer bileşimi midir?

Çözüm

$x = (2 , 0 , 6)$ vektörünün verilen $x_1 = (1 , 1 , 0)$ ve $x_2 = (1 , 0 , 2)$ vektörlerinin lineer bileşimi olması için

$$(2 , 0 , 6) = c_1 (1 , 1 , 0) + c_2 (1 , 0 , 2)$$

eşitliğindeki c_1 ve c_2 gerçel sayılarının bulunması gerekir.

Yukarıdaki eşitlikten

$$(2, 0, 6) = (c_1 + c_2 , c_1 , 2c_2)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ c_1 &= 0 \\ 2c_2 &= 6 \end{aligned}$$

son iki eşitlikten $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ bulunur. Bu değerler $c_1 + c_2 = 2$ denkleminde yerine konursa $3 = 2$ şeklinde doğru olmayan bir eşitlik bulunur. Bu sonuç $x = (2, 0, 6)$ vektörünün $x_1 = (1, 1, 0)$ ve $x_2 = (1, 0, 2)$ vektörlerinin lineer bileşimi olmadığını gösterir.

4.4. Tanım

Bir V vektör uzayının $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin bütün lineer bileşimlerinden oluşan kümeye $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin **lineer bileşimler kümesi** denir ve $L(\{x_1, x_2, ..., x_n\})$ şeklinde gösterilir.

4.5. Teorem

Bir V vektör uzayının $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin bütün lineer bileşimlerinin kümesi $L(\{x_1, x_2, ..., x_n\})$, V nin bir alt uzayıdır.

Kanıt

V nin $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin kümesi S olsun. $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. S nin öğelerinin mümkün olan bütün lineer bileşenlerinin kümesi,

$$L(S) = L(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \{ c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \mid c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R} \}$$

dir. L(S) nin V nin alt uzayı olduğunu göstereceğiz. L(S), alt uzay olma koşullarını sağlar. Çünkü, $A, B \in L(S)$ için $A + B \in L(S)$ dir. Yani L(S) deki herhangi iki lineer bileşimin toplamı yine L(S) de bir lineer bileşimdir. Dolayısıyla L(S) toplama işlemine göre kapalıdır.

$c \in \mathbf{R}$, $A \in L(S)$ için $cA \in L(S)$ dir. Yani L(S) deki bir lineer birleşimin bir skalerle çarpımı yine L(S) 'deki bir lineer bileşimdir. Dolayısıyla L(S) skalerle çarpma işlemine göre de kapalıdır. O halde L(S), V nin bir alt uzayıdır.

4.6. Tanım

V bir vektör uzayı ve V nin $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin kümesi S olsun. L (S) alt uzayına, S kümesinin gerdiği **alt uzay** denir. Eğer V vektör uzayındaki her x vektörü S deki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa yani kısaca, $x \in V$ için $x \in L(S)$ ise S kümesi V vektör uzayını **gerer** veya **doğurur** denir ve

$$L(S) = V$$

şeklinde yazılır.

4.7. Örnek

$\mathbf{R}^2$ de (1, 0) vektörünün gerdiği alt uzayı bulunuz.

Çözüm

$\mathbf{R}^2$ de (1, 0) vektörünün gerdiği alt uzay (1, 0) vektörünün bütün lineer bileşimlerinin kümesidir.

$$L(\{1, 0\}) = \{ c(1, 0) \mid c \in \mathbf{R} \} = \{ (c, 0) \mid c \in \mathbf{R} \}$$

Bu küme $c \in \mathbf{R}$ olmak üzere (c, 0) şeklindeki bütün noktaların kümesidir. Biraz dikkat edersek bu kümenin noktaları $y = 0$ doğrusunu, bir başka deyişle, x - eksenini oluştururlar. O halde $\mathbf{R}^2$ nin (1, 0) vektörü tarafından gerilen alt uzayı x - eksenidir. Ayrıca x - ekseni üzerindeki her noktanın, (1, 0) vektörü cinsinden yazılabileceği de açıktır yani, x - ekseni üzerindeki herhangi bir nokta $A = (a, 0)$ ise

$$(a, 0) = a(1, 0)$$

şeklinde yazılabilir.

4.8. Örnek

$\mathbf{R}^2$ de (1, 0) ve (1, 1) vektörlerinin gerdiği alt uzayı bulunuz.

Çözüm

(1, 0), (1,1) vektörlerinin gerdiği alt uzay, bu vektörlerin bütün lineer bileşimlerinin kümesi

$$L(\{(1,0),(1,1)\}) = \{a(1,0) + b(1,1) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = \{(a+b, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

dir.

Şimdi $\mathbf{R}^2$ nin herhangi bir vektörünün (1, 0) ve (1, 1) vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılıp yazılamayacağına bakalım:

$(x, y) \in \mathbf{R}^2$ olsun.

$$(x, y) = a(1, 0) + b(1, 1) \qquad (1)$$

$$(x, y) = (a + b, b)$$

iki vektörün eşitliğinden $x = a + b$, $y = b$ buradan

$a = x - y$ ve $b = y$ bulunur. Bu değerleri (1) de yerine yazalım,

$$(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$$

olur. Böylece $\mathbf{R}^2$ nin herhangi bir (x, y) vektörü (1, 0), (1,1) vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabiliyor. O halde {(1, 0), (1, 1)} kümesi $\mathbf{R}^2$ yi gerer yani,

$$L(\{(1,0),(1,1)\}) = \mathbf{R}^2$$

olur. Örnek olarak $(3, 7) \in \mathbf{R}^2$ nin (1, 0), (1, 1) in lineer bileşimi olarak yazıldığını görelim:

$$(3, 7) = (-4)(1, 0) + 7(1, 1)$$

olur.

4.9. Örnek

$P_2(\mathbf{R})$ de x, $1 + x$ vektörlerinin gerdiği alt uzayı bulalım:

$P_2(\mathbf{R})$ derecesi 2 veya 2 den küçük bütün polinomların oluşturduğu bir vektör uzayıdır.

Uyarı

- Bir vektör uzayının öğelerine vektör denildiği için x ve $1 + x$ polinomlarına da vektör diyeceğiz.

$\{ x, 1 + x \}$ kümesinin gerdiği P_2 $(\mathbf{R})$ nin alt uzayını arıyoruz. Bunun için x, 1 + x vektörlerinin bütün lineer bileşimlerini bulalım,

$$P(x) = L(\{ x, 1 + x \}) = \{ a\,x + b\,(1 + x) \mid a, b \in \mathbf{R} \}$$
$$= \{ (a + b)\,x + b) \mid a, b \in \mathbf{R} \}$$

P (x) kümesi, $p(x) = (a + b)\,x + b \quad a, b \in \mathbf{R}$ şeklindeki 1. dereceden polinomların kümesi olur ve

$$P(x) \subseteq P_1(x) \tag{1}$$

yazılır.

Şimdi de $P_1(\mathbf{R})$ nin herhangi bir vektörünün x, 1 + x vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabileceğini gösterelim:

$q(x) = \alpha\,x + \beta \in P_1(\mathbf{R}) \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ alalım.

$$\alpha\,x + \beta = a\,x + b\,(1 + x)$$
$$= (a + b)\,x + b$$

iki polinomun eşitliğinden

$\alpha = a + b, \quad \beta = b$ buradan $a = \alpha - \beta$, $b = \beta$ bulunur. $\alpha\,x + \beta = (\alpha - \beta)\,x + \beta\,(1 + x)$ buradan

$$P_1(x) \subseteq P(x) \tag{2}$$

olur.

(1) ve (2) eşitliklerinden $P(x) = P_1(x)$ yazılır. Böylece x, 1 + x vektörlerinin oluşturduğu alt uzay, $L(\{ x, 1 + x \}) = P_1(\mathbf{R})$ olur.

Şimdiye değin verilen vektör kümesinin gerdiği alt uzayları bulmaya çalıştık. Şimdi de verilen alt uzayları geren vektörleri bulmaya çalışalım.

4.10. Örnek

$\mathbf{R}^2$ nin $3x - y = 0$ alt uzayını geren bir vektör bulunuz.

Çözüm

$\mathbf{R}^2$ nin $3x - y = 0$ alt uzayı,

$$W = \{ (x, y) \mid y = 3x,\ x \in \mathbf{R} \}$$
$$= \{ (x, 3x) \mid x \in \mathbf{R} \}$$

kümesidir. Buna göre $3x - y = 0$ alt uzayının her öğesi, $(x, 3x) = x(1, 3)$, $x \in \mathbf{R}$ şeklindeki vektörlerdir, yani $(1, 3)$ vektörünün uygun bir gerçel sayı ile çarpımıdır. O halde $(1, 3)$ vektörü $3x - y = 0$ alt uzayını gerer. Siz de, $3x - y = 0$ alt uzayını geren başka vektörler bulunuz; $(2, 6)$ veya $(3, 7)$ vektörleri $3x - y = 0$ alt uzayını gerer mi?

4.11. Örnek

$\mathbf{R}^3$ ün $x + y + z = 0$ alt uzayını geren vektörlerin kümesini bulunuz.

Çözüm

$\mathbf{R}^3$ ün $x + y + z = 0$ alt uzayı,

$$\begin{aligned} W &= \{ (x, y, z) \mid x + y + z = 0,\ x, y, z \in \mathbf{R} \} \\ &= \{ (x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbf{R} \} \end{aligned}$$

kümesidir. Buna göre $x + y + z = 0$ alt uzayının her öğesi, $(x, y, -x - y)$ $x, y \in \mathbf{R}$ şeklinde yazılabilir. Burada x ve y nin keyfi her gerçel değeri için W kümesinin bir öğesi elde edilir.

$x = 0$, $y = 1$ için $(0, 1, -1) \in W$

$x = 1$, $y = 2$ için $(1, 2, -3) \in W$

bulunur.

Buna göre $A = (0, 1, -1)$ ve $B = (1, 2, -3)$ vektörleri W kümesinin yani $x + y + z = 0$ alt uzayının öğeleridir. İşte bu vektörler verilen alt uzayı gererler. Bunu görmek için, W kümesinden herhangi bir öğe alıp bu öğenin $(0, 1, -1)$ ve $(1, 2, -3)$ vektörlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılabileceğini görmeliyiz:

$E \in W$ için $E = (a, b, -a - b)$ alalım.

$$(a, b, -a - b) = c_1 A + c_2 B$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 gerçel sayılarını bulmalıyız.

$$(a, b, -a - b) = c_1 (0, 1, -1) + c_2 (1, 2, -3)$$

$$(a, b, -a - b) = (c_2 , c_1 + 2c_2 , -c_1 - 3c_2)$$

iki vektörün eşitliğinden

$$a = c_2$$
$$b = c_1 + 2c_2$$
$$-a - b = -c_1 - 3c_2$$

elde edilir. Buradan $c_1 = b - 2a$, $c_2 = a$ bulunur ve

$$(a , b , -a -b) = (b - 2a)\,(0 , 1 , -1) + a\,(1 , 2 , -3)$$

eşitliği elde edilir.

Buna göre W vektör uzayının her bir öğesi, $(0 , 1 , -1)$ ve $(1 , 2 , -3)$ vektörlerinin uygun bir lineer bileşimidir. O halde bu vektörler W alt uzayını gererler.

Sizde; W vektör uzayını geren başka iki vektör bulunuz,

$(1 , 3 , -4) , (2 , 6 , -8)$ vektörlerinin W yi germediğini gösteriniz.

Değerlendirme Soruları

1. Aşağıda verilen kümelerden hangisi tanımlanan işlemlere göre bir vektör uzayıdır?

A. $V= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \}$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri
$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , 0)$
$c\,(x, y) = (c\,x, 0)$
şeklinde veriliyor.

B. $\mathbf{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri
$x + y = x - y$
$c\,x = c\,x$
şeklinde veriliyor.

C. $V= \{ (x, y) \mid y = 2x, x \in \mathbf{R} \}$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sıralı ikililerin toplamı ve bir skalerle sıralı ikilinin çarpımı şeklinde veriliyor.

D. $V= \{ (x, y) \mid x , y \in \mathbf{R} \}$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri
$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (1, x_1\ x_2)$
$c\,(x_1 , y_1) = (c\,x_1, 0)$

E. $V= \{ (x, y) \mid x , y \in \mathbf{R} \}$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri
$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 x_2 , y_1 y_2)$
$c\,(x_1 , y_1) = (c\,x_1 , y_1)$

2. Aşağıda verilen kümelerden hangisi tanımlanan işlemlere göre bir vektör uzayıdır?

A. $V = \{ (x, y) \mid y = x + 1,\ x \in \mathbf{R} \}$
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (0, y_1 + y_2)$
$c\,(x_1, y_1) = (c_1 x_1, 0)$ şeklinde veriliyor.
B. $P_2\ (\mathbf{R})$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla polinomların toplamı ve skalerle bir polinomun çarpımı şeklinde veriliyor.
C. M_{22} kümesi üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri sırasıyla
$A, B \in M_{22}$, $c \in \mathbf{R}$ için
$A + B = AB$
cA
şeklinde veriliyor.
D. M_{35} kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla
$A + B = B$, $cA = \dfrac{A}{c}$ şeklinde veriliyor.

E. $V = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R} \}$ toplama ve skalerle çarpma işlemleri
$(x, y, z) + (a, b, c) = (1, y + b, z + c)$
$(x, y, z) = (cx, cy, cz)$ şeklinde veriliyor.

3. Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayıdır?

A. $E = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = 1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$
B. $E = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 + x_3 = 5, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$
C. $E = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$
D. $E = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 2,\ x_3 \neq 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}$
E. $E = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_2 \neq 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$

4. W kümesi $\mathbf{R}^3$ de $x_1 = (1, 2, 0)$, $x_2 = (2, 0, 1)$ vektörlerinin gerdiği bir alt uzay olduğuna göre aşağıdaki vektörlerden hangisi W nin bir öğesidir?

A. (1, 3, 5)
B. (0, 1, 2)
C. (-1, -2, -3)
D. (1/2, 1, 6)
E. (1, 2, 0)

5. $\mathbf{R}^2$ nin $x + y = 0$ alt uzayını geren vektör hangisidir?

A. (2 , 1)
B. (0 , 0)
C. (1 , -1)
D. (-1 , -1)
E. (-1 , 0)

6. $\mathbf{R}^3$ ün $x - y + z = 0$ alt uzayını geren vektör kümesi hangisidir?

   A. { (1 , 1 , 1) }
   B. { (1 , 0 , 1) , (0 , 0 , 0) }
   C. { (1 , 1 , 2) , (0 , 1 , 0) }
   D. { (1 , 1 , 0) , (0 , 1 , 1) }
   E. { (0 , 0 , 0) , (1 , 1 , 1) }

7. $\mathbf{R}$ de (1) vektörünün gerdiği alt uzay hangisidir?

   A. 1
   B. $\mathbf{R}$
   C. $\mathbf{R}^2$
   D. $\mathbf{R}^3$
   E. $P_1(\mathbf{R})$

8. $\mathbf{R}^2$ de { (1 , 1) (1 , 2) } kümesinin gerdiği alt uzay hangisidir?

   A. { (1 , 1) }
   B. $\mathbf{R}$
   C. $\mathbf{R}^2$
   D. $P_2(\mathbf{R})$
   E. $P_3(\mathbf{R})$

9. $P_n(\mathbf{R})$ de { 1 , x } kümesinin gerdiği alt uzay hangisidir?

   A. $\mathbf{R}$
   B. $\mathbf{R}^2$
   C. $\mathbf{R}^3$
   D. $P_1(\mathbf{R})$
   E. $P_2(\mathbf{R})$

10. $\mathbf{R}^3$ deki (1 , 1 , x) vektörü x ni hangi değeri için (1 , 0 , 3) , (2 , 1 , 0) vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir?

   A. -3
   B. -2
   C. 0
   D. 1
   E. 3

11. Aşağıdaki vektörlerden hangisi $\mathbf{R}^3$ ün L ({ (0 , 1 , 1) , (2 , 0 , 0) }) alt uzayının bir öğesidir?

   A. (1 , 2 , 3)
   B. (4 , 1 , 1)
   C. (3 , 1 , 1)
   D. (0 , 0 , 1)
   E. (5, -1 , 0)

12. Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbf{R}^2$ yi gerer?

    A. $\{ (1 , 1) , (2 , 2) \}$
    B. $\{ (0 , 0) , (1 , 1) \}$
    C. $\{ (1 , 2) , (3 , 4) \}$
    D. $\{ (1 , 1) , (-1 , -1) \}$
    E. $\{ (0 , 1) , (0 , 5) \}$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. C 2. B 3. C 4. E 5. C 6. D 7. B 8. C 9. D 10. A 11. B 12. C

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

ÜNİTE

5

Yazar

Öğr.Grv.Dr.Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Vektör uzayı ve alt uzay yapısını daha iyi tanıyacak,
- Bir vektör uzayındaki vektörlerin lineer bağımlı ve lineer bağımsız olmaları kavramlarını anlayacak,
- Lineer bağımlı bir kümenin özelliklerini öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 113
- Lineer Bağımlılık, Lineer Bağımsızlık 113
- Değerlendirme Soruları 122

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışırken, bundan önceki ünitelerde olduğu gibi temel kavram ve tanımları iyice kavradıktan sonra çözülmüş örnekleri inceleyiniz.
- Okuyucuya bırakılan soruları çözünüz.

1. Giriş

Bundan önceki ünitede vektör uzaylarını ve alt uzaylarını inceledik. Bu ünitede sonlu sayıdaki vektörlerin lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca bir vektör uzayındaki lineer bağımsız vektörlerin önemini kavrayacağız.

2. Lineer Bağımlılık, Lineer Bağımsızlık

Bir V vektör uzayındaki $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektörlerinin kümesi $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ olsun.

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k = 0$$

eşitliğini sağlayan, hepsi aynı anda sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ skalerleri varsa $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektörlerine **lineer bağımlı vektörler,** E kümesine de **lineer bağımlı küme** denir. Aksi halde yani,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k = 0$$

eşitliği ancak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ için sağlanıyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektörlerine **lineer bağımsız vektörler,** E kümesine de **lineer bağımsız küme** denir. Burada şu noktaya dikkat etmeliyiz:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0 \text{ için}$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k = 0$$

eşitliği her zaman sağlanır, önemli olan, $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k = 0$ eşitliğinin yalnız ve yalnız $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ için sağlanmasıdır.

2.1. Örnek

$\mathbf{R}^2$ deki A= (1, 1) , B= (2, -3) vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını gösterelim. Bunun için c_1 ve c_2 bilinmeyen sabitler olmak üzere,

$$c_1 (1, 1) + c_2 (2, -3) = 0$$

$$(c_1 + 2c_2 , c_1 - 3c_2) = 0$$

alalım.

Buradan,

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 - 3c_2 = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminden $c_1 = c_2 = 0$ bulunur. O halde A ve B vektörleri lineer bağımsızdır.

2.2. Örnek

$\mathbf{R}^2$ de A= (1, 3) , B= (2, 6) vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu gösterelim:

$$c_1 (1, 3) + c_2 (2, 6) = (0, 0)$$

$$(c_1 + 2c_2 , 3c_1 + 6c_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 3c_1 + 6c_2 = 0 \end{cases}$$

olur. Burada $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ sistemin bir çözümü olup A ve B vektörleri lineer bağımlıdır.

2.3. Örnek

$\mathbf{R}^3$ deki A= (1, 1, 0) , B= (0, 1, 0) , C= (1, 0, 1) vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını gösterelim; bunun için c_1 , c_2 , c_3 bilinmeyen sabitler olmak üzere,

$$c_1 (1, 1, 0) + c_2 (0, 1, 0) + c_3 (1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

alalım.

$$(c_1 + c_3 , c_1 + c_2 , c_3) = (0, 0, 0)$$

Buradan

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur. O halde A, B, C vektörleri lineer bağımsızdır.

2.4. Örnek

$\mathbf{R}^3$ te E= {(1, 0, 1) , (2, 1, 1) , (4, 3, 1)} kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını araştıralım: c_1 , c_2 , c_3 bilinmeyen sabitler olmak üzere

$$c_1 (1, 0, 1) + c_2 (2, 1, 1) + c_3 (4, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

olsun.

$$(c_1 + 2c_2 + 4c_3 , c_2 + 3c_3 , c_1 + c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$$

olur.

Buradan,

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ \quad\quad c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Sistemin sıfır çözümden başka çözümlerinin olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır, buna göre sistemin katsayılar matrisinin determinantını bulalım:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 3) + 1(6 - 4) = 0$$

olduğundan, sıfır çözümden başka çözümleri de vardır. Buna göre E kümesi lineer bağımlıdır.

Uyarı

(i) E kümesinin lineer bağımlı veya bağımsız olduğunu anlamak için sistemi çözmemiz gerekmez. Sıfır olmayan bir çözümün varlığını bilmek yeterlidir.

(ii) Determinantın değeri sıfırdan farklı olduğunda sıfır çözüm tek çözümdür. Bu durumda vektörler lineer bağımsızdır.

2.5. Örnek

$P_2 (\mathbf{R})$ de E= $\{1, 1 + x, 1 - x, x^2\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını araştıralım;

$$a\,1 + b\,(1 + x) + c\,(1 - x) + dx^2 = 0$$ alalım.

$dx^2 + (b - c)\,x + (a + b + c) = 0$ olur.

Bir polinomun sıfır polinom olması için her teriminin katsayısının sıfır olması gerekir. Buna göre,

$$\begin{cases} d = 0 \\ b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin sıfır çözümden $(a = b = c = d = 0)$ başka çözümleri varsa, E kümesi lineer bağımlıdır. $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ sisteminin bir çözümüdür. Sıfır çözümden başka bir çözüm bulduğumuz için E kümesi lineer bağımlıdır.

Şimdi uygulamada oldukça yararlı olan bir teoremi verelim:

2.6. Teorem

E ve F, $E \subseteq F$ olacak şekilde V vektör uzayının sonlu iki alt kümesi olsun.

(i) E lineer bağımlı ise F de lineer bağımlıdır.

(ii) F lineer bağımsız ise E de lineer bağımsızdır.

Kanıt

$E \subseteq F$ olacak şekilde

$E = \{x_1 , x_2 , \dots , x_k)$ ve $F = \{x_1 , x_2 , \dots , x_k , x_{k+1} , \dots , x_n\}$

kümelerini alalım.

(i) E kümesi lineer bağımlı olduğundan $c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \dots + c_k\, x_k = 0$ eşitliğini sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan yani, en az biri sıfırdan farklı olan c_1 , c_2 , ... , c_k skalerleri vardır.

$c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_n = 0$ olmak üzere

$c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \dots + c_k\, x_k + 0\, x_{k+1} + 0\, x_{k+2} + \dots + 0\, x_n = 0$ eşitliği sağlanır ve

c_1 , c_2, ... , c_k skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olduğundan

$x_1 , x_2 , \dots , x_k , x_{k+1} , \dots , x_n$

vektörleri lineer bağımlıdır, yani F kümesi lineer bağımlıdır.

(ii) F kümesi lineer bağımsız olsun. E kümesi için iki durum vardır; ya lineer bağımlıdır ya da lineer bağımsızdır. E kümesi lineer bağımlı olamaz. Çünkü bu durumda (i) den F nin de lineer bağımlı olması gerekirdi. O halde E lineer bağımsızdır.

Sonuç

Bir V vektör uzayında {0} kümesi lineer bağımlıdır. Çünkü 1. 0= 0 olur. Burada $a = 0 \in V$, $c = 1 \in \mathbf{R}$ alınarak lineer bağımlılık sağlanır. O halde sıfır vektörü içeren her küme lineer bağımlıdır.

2.7. Teorem

Bir V vektör uzayında $E=\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ kümesinin lineer bağımlı olması için gerekli ve yeterli koşul, E deki bir vektörün, diğer vektörlerin lineer bileşimi olmasıdır.

Kanıt

$E=\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ kümesi lineer bağımlı olsun. $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_k x_k = 0$ eşitliğini sağlayacak ve en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde c_1 , c_2 , ... , c_k skalerleri vardır. Örneğin $1 \leq j \leq k$ için $c_j \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$x_j = -\frac{c_1}{c_j} x_1 - \frac{c_2}{c_j} x^2 - \ldots - \frac{c_k}{c_j} x_k$$

yazılır ve x_j vektörü diğer vektörlerin bir lineer bileşimi olur.

Tersine olarak x_j vektörü diğer vektörlerin lineer bileşimi olsun:

$$x_j = c_1 x_1 + ... + c_{j-1} x_{j-1} + c_{j+1} x_{j+1} + ... + c_k x_k$$

bu eşitlikten

$$c_1 x_1 + ... + c_{j-1} x_{j-1} + (-1) x_j + c_{j+1} x_{j+1} + ... + c_k x_k = 0$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan katsayılardan en az biri sıfırdan farklı olduğu için (x_j nin katsayısı (-1)) x_1 , x_2 , ... , x_k vektörleri lineer bağımlıdır.

2.8. Örnek

$$E= \{ (1, 0, 0) , (0, 1, 0) , (0, 0, 1), (1, 1, 1) \}$$

kümesinin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm

E kümesinin lineer bağımlı olduğunu göstermek için 2.7. Teorem gereğince, vektörlerden birinin diğerlerinin lineer bileşimi olduğu gösterilmelidir,

$$(1, 0, 0) = a\,(0, 1, 0) + b\,(0, 0, 1) + c\,(1, 1, 1)$$

alalım.

$$(1, 0, 0) = (c, a + c, b + c)$$

olup, buradan a=-1 , b=-1 , c=1 bulunur. Bu şekilde E kümesindeki vektörlerden biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazıldı. E kümesi lineer bağımlıdır. Bu örneği genelleştirelim:

2.9. Teorem

$\mathbf{R}^n$ de $n+1$ ya da daha fazla sayıda vektör lineer bağımlıdır.

Kanıt

$\mathbf{R}^n$ de $m > n$ olmak üzere m, sayıda $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörleri verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ skalerler olmak üzere,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0 \tag{1}$$

olacak şekilde denklemin α bilinmeyenlerine göre çözümünü araştıralım. $\mathbf{R}^n$ de x_i (i= 1, 2, ... , m) vektörünü bileşenleri türünden

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$$

olarak yazalım. Şimdi (1) denkleminde her vektörü bileşenleri türünden yazarsak,

$$\alpha_1 (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) + \alpha_2 (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}) + \ldots + \alpha_m (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) = (0, 0, \ldots, 0)$$

veya

$$(\alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \ldots + \alpha_m x_{m1},\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_m x_{m2}, \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \ldots + \alpha_m x_{mn}) = (0, 0, \ldots, 0)$$

olur. Şimdi iki sıralı n-linin eşitliğini ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ lerin bilinmeyenler olduğunu gözönüne alarak, aşağıdaki m bilinmiyenli n denklemden oluşan homojen lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$x_{11}\,\alpha_1 + x_{21}\,\alpha_2 + \ldots + x_{m1}\,\alpha_m = 0$$

$$x_{12}\,\alpha_1 + x_{22}\,\alpha_2 + \ldots + x_{m2}\,\alpha_m = 0$$

$$\vdots$$

$$x_{1n}\,\alpha_1 + x_{2n}\,\alpha_2 + \ldots + x_{mn}\,\alpha_m = 0$$

Burada $m > n$ bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olduğundan sistemin katsayılar matrisinin rankı bilinmeyen sayısından küçüktür. Bu nedenle daima sıfırdan farklı bir çözümü vardır. O halde, verilen m sayıdaki $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörleri kümesi $\mathbf{R}^n$ de lineer bağımlı bir kümedir.

Bu teoreme göre örneğin, $\mathbf{R}^3$ deki 4 veya daha fazla, $\mathbf{R}^4$ deki 5 veya daha fazla vektör lineer bağımlıdır.

2.10. Örnek

$\mathbf{R}^2$ de $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ vektörlerine standart birim vektörler denir. $\mathbf{R}^2$ de standart birim vektörler lineer bağımsızdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} c_1 e_1 + c_2 e_2 &= c_1 (1, 0) + c_2 (0, 1) \\ &= (c_1, c_2) = (0, 0) \end{aligned}$$

buradan

$$c_1 = c_2 = 0$$

olur.

Benzer şekilde, $\mathbf{R}^3$ de $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ vektörlerine standart birim vektörler denir. $\mathbf{R}^3$ deki standart birim vektörler lineer bağımsızdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 &= c_1 (1, 0, 0) + c_2 (0, 1, 0) + c_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ &= (c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

buradan

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

olur.

Benzer şekilde $\mathbf{R}^n$ deki,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

vektörlerine standart birim vektörler denir. $\mathbf{R}^n$ deki $e_1, e_2, \ldots, e_n$ standart birim vektörler lineer bağımsızdır.

$$\begin{aligned} c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n &= c_1 (1, 0, \ldots, 0) + c_2 (0, 1, \ldots, 0) + \ldots + c_n (0, 0, \ldots, 1) \\ &= (c_1, c_2, \ldots, c_n) = (0, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

buradan

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

olur.

$\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \ldots, \mathbf{R}^n$ deki standart birim vektörlerinin oluşturduğu matrislerin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

basamak biçiminde olduğu hemen görülür.

2.9. Teorem gereğince, $\mathbf{R}^3$ de $E = \{(1, 2, -1), (3, 0, 0), (1, -2, 1), (4, 2, 1)\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Satırları E kümesinin öğeleri olan A matrisini oluşturarak basamak biçime indirgeyelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Basamak matrisin sıfır olmayan satırları yani, (1, 2, -1) , (0, 2, -1) , (0, 0, 2) vektörleri $\mathbf{R}^3$ de lineer bağımsızdır.

Bu durum genelde de geçerlidir. Bununla ilgili teoremi verelim:

2.11. Teorem

Basamak biçimindeki bir matrisin sıfır olmayan satırları lineer bağımsızdır.

Kanıt

Basamak biçimindeki bir matrisin sıfır olmayan satırları $v_1, v_2, \ldots, v_n$ olsun. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu göstereceğiz. Varsayalım ki, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesi lineer bağımlı olsun. Bu durumda vektörlerden biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak, örneğin, v_1 kendinden sonra gelenlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır.

$$v_1 = c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_n v_n \qquad (1)$$

Burada v_1 in i. bileşeninin sıfır olmayan ilk bileşen olduğunu kabul edelim. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinin oluşturduğu matris, basamak biçiminde olduğundan $v_2, v_3, \ldots, v_n$ vektörlerinin i. bileşenleri sıfırdır. Bu durum, (1) eşitliğinde v_1 in i. bileşeninin sıfır olmaması ile çelişir. O halde $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

2.12. Örnek

R üzerinde 2x2 tipindeki matrisler kümesi M_{22} nin matris toplamı ve skaler ile matris çarpımına göre vektör uzayı olduğunu biliyoruz. A, B, C, $\in M_{22}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadıklarını araştıralım.

$$c_1 A + c_2 B + c_3 C = 0$$

olsun.

$$c_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 & 0 \\ c_2 & c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3 & 3c_3 \\ 2c_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_2 + c_3 & c_1 + 3c_3 \\ c_2 + 2c_3 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

İki matrisin eşitliğinden

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

homojen lineer denklem sistemi çözülürse;

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

sıfır çözüm elde edilir. Böylece $c_1 A + c_2 B + c_3 C = 0$ eşitliği yalnız $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ için sağlanıyor. O halde A, B, C matrisleri lineer bağımsızdır.

Değerlendirme Soruları

1. $\mathbf{R}^3$ te verilen aşağıdaki vektörlerden hangisi (1, 3, 0) , (0, 2, 1) vektörlerinin lineer bileşimidir?

   A. (1, 5, 2)
   B. (2, 12, 0)
   C. (-1, -5, 0)
   D. (0, 4, 2)
   E. (1, 0, 5)

2. P_2 ($\mathbf{R}$) de verilen aşağıdaki vektörlerden hangisi $p(x)= x^2 + 3x + 1$, $q(x)= x^2 - x$ vektörlerinin bir lineer bileşimidir?

   A. $x^2 + 7x + 2$
   B. $x^2 - 3x$
   C. $2x + 1$
   D. $2x^2 + 4x + 5$
   E. $4x^2 + 5$

3. M_{22} de verilen aşağıdaki vektörlerden hangisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vektörlerinin lineer bileşimi değildir?

A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

4. Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbf{R}^2$ yi germez?

A. {(1, 2) , (0, 1)}
B. {(0, 0), (1, 1)}
C. {(1, 2) , (3, 4)}
D. {(1, 2), (1, 1), (0, 1)}
E. {(1,1) , (2, 0)}

5. $\mathbf{R}^3$ de verilen aşağıdaki kümelerden hangisi lineer bağımsızdır?

A. {(1, 1, 1), (2, 0, 1), (3, -1, 0), (1, 0, 0)}
B. {(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, -1, 0)}
C. {(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)}
D. {(1, 2, 3), (0, 1, 2) , (0, 2, 4)}
E. {(-1, 7, 1), (-3, 1, 5), (1, 3, -2)}

6. P_2 (**R**) de verilen aşağıdaki kümelerden hangisi lineer bağımsızdır?

A. $\{ x, \quad x + 2, \; x^2 + x + 1\}$
B. $\{ 1, \quad 1 + x, \quad 2 + 2x \}$
C. $\{ x^2 + 1, \quad x^2, \quad x^2 + x , x^2 + 2 \}$
D. $\{ 0, \quad 1 + x, \quad 1 + x + x^2 \}$
E. $\{ 2, 5, x + 1\}$

7. $E = \{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (2, 4, x)\}$ kümesinin lineer **bağımlı** olması için x ne olmalıdır?

A. -1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 6

E. $-\frac{3}{2}$

8. $P_1(\mathbf{R})$ de verilen $\{1 + x,\ 2 + t^2 + 2x\}$ kümesinin lineer **bağımlı** olması için t ne olmalıdır?

A. 0
B. 2
C. 3
D. 4
E. 9

9. Aşağıdaki kümelerden hangisi $P_2(\mathbf{R})$ yi gerer?

A. $\{1,\ 1 + x,\ 3 + 5x\}$
B. $\{0,\ x,\ x^2\}$
C. $\{5,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2\}$
D. $\{1,\ 2x^2\}$
E. $\{x + x^2,\ x - x^2\}$

10. $x = (1, 2, 1, 3)$, $y = (1, -1, 2, 0)$, $z = (1, a, 2, b)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için a ve b ne olmalıdır?

A. $a = 1$
$b = 2$
B. $a = 0$
$b = 1$
C. $a = -1$
$b = 0$
D. $a = 2$
$b = 0$
E. $a = 0$
$b = 0$

11. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A. $E = \{ x_1 , x_2 , ... , x_k \}$ lineer bağımsız bir küme ise E nin herhangi bir vektörü diğer vektörlerin lineer bileşimi olarak yazılabilir.
B. S_1 ve S_2 , $S_1 \subseteq S_2$ olacak şekilde V vektör uzayının sonlu iki alt kümesi olsun. S_2 lineer bağımlı ise S_1 lineer bağımsız olabilir.
C. v_1 ve v_2 vektörleri eşit ise $(v_1 = v_2)$ bu vektörler lineer bağımsızdır.
D. S_1 ve S_2 , V vektör uzayının sonlu iki alt kümesi olsun. S_1 lineer bağımsız, S_2 lineer bağımlı ise S_1 ve S_2 kümelerinin birleşim kümesi lineer bağımsız olabilir.
E. a ve b lineer bağımsız iki vektör ise a ve a + b lineer bağımlıdır.

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. A 3. D 4. B 5. C 6. A 7. D 8. A 9. C 10. C 11. B

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Edwards, C.H., Penney, E. David. **Elementary Linear Algebra**. Prentice Hall International, Inc. New Jersey, 1988.

Göğüş, M., Koçak, Ş., Tayfur, C., Üreyen, M. **Lineer Cebir Ders Notları**, Eskişehir, 1988.

Kolman, Bernard. **Introductory Linear Algebra with Applications**, Macmillan Publishing Company, New York, 1990.

Larry, Smith (Çev: Göğüş, M. vd.), **Lineer Cebir**, Anadolu Üniversitesi, 1993.

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ

İLKÖĞRETİM ÖĞRETMENLİĞİ
LİSANS TAMAMLAMA PROGRAMI

Lineer Cebir

Ünite 6. 7. 8. 9. 10

T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI NO: 1074
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINLARI NO: 589

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

Lineer Cebir

Yazar:
Öğr.Grv.Dr. Nevin ORHUN

Editör:
Prof.Dr. Orhan ÖZER

Tasarım: Yrd.Doç.Dr. Kazım SEZGİN

ISBN 975 - 492 - 829 - 0

Vektör Uzaylarında Taban ve Boyut

ÜNİTE 6

Yazar
Öğr.Grv.Dr. Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Bir vektör uzayının boyut kavramını anlayacak,
- Çeşitli boyutlardaki vektör uzaylarını tanıyacak,
- Bir vektör uzayının taban kavramını ve tabandaki vektörlerin özelliklerini öğrenecek,
- Sonlu boyutlu bir vektör uzayı için bir çok taban yazabilecek,
- Bir matrisin satır ve sütun uzaylarını öğrenecek,
- Bir matrisin rankı ile satır (sütun) uzayının boyutu arasındaki ilişkiyi göreceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 129
- Sonlu Boyutlu Vektör Uzayları 129
- Bir Vektör Uzayının Tabanı 130
- Bir Matrisin Satır ve Sütun Uzayları 138
- Değerlendirme Soruları 143

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışmaya başlamadan önce 4. ve 5. üniteleri gözden geçiriniz.
- Temel kavram ve tanımları iyice öğreniniz.
- Okuyucuya bırakılan soruları çözünüz.

1. Giriş

Bu ünitede sonlu boyutlu vektör uzaylarının yapısını daha ayrıntılı bir şekilde inceleyeceğiz. Vektör uzayını bütünüyle tanımlayan sonlu sayıdaki vektörlerin özelliklerini göreceğiz.

2. Sonlu Boyutlu Vektör Uzayları

Bir V vektör uzayında sonlu bir E alt kümesi V uzayını geriyorsa, yani L(E) = V ise V'ye **sonlu boyutlu bir vektör uzayı** denir. Bir vektör uzayı sonlu boyutlu değilse, sonsuz boyutlu vektör uzayı denir. Şimdi sonlu boyutlu vektör uzaylarına örnekler verelim.

2.1. Örnek

$\mathbf{R}^2$ sonlu boyutludur:

E = { (1, 0), (0, 1) } $\subset \mathbf{R}^2$ kümesi $\mathbf{R}^2$ yi gerer. Daha önce gördüğümüz gibi, $\mathbf{R}^2$ nin herhangi bir A = (x, y) vektörü E kümesindeki vektörlerin lineer bileşimi olarak yazılabilir:

$$(x, y) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1)$$

şeklinde yazdığımızda a = x, b = y bulunur.

$$(x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1)$$

Örneğin A = (3, 4) vektörü

$$(3, 4) = 3\,(1, 0) + 4\,(0, 1)$$

olarak yazılır. Böylece $\mathbf{R}^2$ = L { (1, 0), (0, 1) } olur. E kümesi sonlu olduğundan $\mathbf{R}^2$ sonlu boyutludur.

2.2. Örnek

$\mathbf{R}^n$ sonlu boyutludur. Gerçekten,

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, ..., 0) \\ e_2 &= (0, 1, ..., 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

standart birim vektörlerinin oluşturduğu $E = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ kümesi $\mathbf{R}^n$ ni gerer, yani $\mathbf{R}^n$ nin her vektörü E deki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır:

Her $A = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ için

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

dir. $E = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ kümesi sonlu olduğu için $\mathbf{R}^n$ de sonlu boyutludur.

2.3. Örnek

Derecesi n veya n den küçük olan bütün polinomların vektör uzayı $P_n(\mathbf{R})$, sonlu boyutludur. Çünkü $E = \{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ kümesi $P_n(\mathbf{R})$ vektör uzayını gerer yani $P_n(\mathbf{R})$ nin her vektörü, E deki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır:

$p(x) \in P_n(\mathbf{R})$ ise $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$p(x) = c_0 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

dir. $E = \{ 1, x, \dots, x^n \}$ sonlu olduğundan $P_n(\mathbf{R})$ de sonlu boyutludur.

Vektör uzayındaki bir alt kümenin hem lineer bağımsız olması hem de o vektör uzayını germesi oldukça önemlidir. Şimdi bu kavramı biraz daha genişletelim:

3. Bir Vektör Uzayının Tabanı

V bir vektör uzayı ve $E = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \} \subset V$ olsun. Eğer E kümesi aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa E ye V nin bir **tabanı** veya **bazı** denir.

(i) E lineer bağımsız bir kümedir.
(ii) $L(E) = V$ yani E, V yi geren bir kümedir.

3.1. Örnek

$E = \{ (1, 0), (0, 1) \}$ kümesini alalım. Daha önce E kümesinin hem lineer bağımsız olduğunu hem de $\mathbf{R}^2$ yi gerdiğini gösterdik. O halde E kümesi $\mathbf{R}^2$ için bir tabandır ve bu tabana $\mathbf{R}^2$ nin standart tabanı denir.

$\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ kümesi $\mathbf{R}^3$ ün standart tabanı,
$\{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \}$ kümesi $\mathbf{R}^4$ ün standart tabanı
$\vdots$
$\{ (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1) \}$ kümesi de $\mathbf{R}^n$ in standart tabanıdır.

3.2. Örnek

F = { (1, 1), (-1, 0) } kümesi $\mathbf{R}^2$ için bir taban mıdır?

Çözüm

F kümesinin $\mathbf{R}^2$ nin bir tabanı olması için lineer bağımsız ve germe özelliklerini sağlaması gerekir.

(i) (1, 1), (-1, 0) vektörlerinin lineer bağımsızlığını araştıralım:

$$a (1, 1) + b (-1, 0) = (0, 0)$$
$$(a - b, a) = (0, 0)$$

buradan a = b = 0 bulunur.

F kümesi lineer bağımsızdır.

(ii) (1, 1), (-1, 0) vektörlerinin $\mathbf{R}^2$ yi gerdiğini araştıralım: Bunun için $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ olmak üzere,

$$(x, y) = a (1, 1) + b (-1, 0)$$

eşitliğindeki a, b sayılarını bulmalıyız.

$$(x, y) = (a - b, a)$$

buradan

$a = y$ ve $b = y - x$ bulunur,

böylece

$$(x, y) = y (1, 1) + (y - x) (-1, 0)$$

olup $(x, y) \in L \{ (1, 1), (-1, 0) \}$ dır. O halde $L(F) = \mathbf{R}^2$ dir. Böylece F = { (1, 1), (-1, 0) }
kümesi de $\mathbf{R}^2$ için bir tabandır.

3.3. Örnek

$\{ 1, x, x^2 \}$ kümesi $P_2(\mathbf{R})$ vektör uzayı için bir taban mıdır?

Çözüm

Lineer bağımsızlık ve germe özelliklerini kontrol etmeliyiz:

$\{1, x, x^2\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Çünkü kümenin öğelerinden hiçbiri diğerlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılamaz (kontrol ediniz).

$\{1, x, x^2\}$ kümesi $P_2(\mathbf{R})$ kümesini gerer. Gerçekten, $p(x) \in P_2(\mathbf{R})$ ise $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ için $p(x) = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2$ dir.

Böylece $\{1, x, x^2\}$ kümesi hem lineer bağımsız hem de $P_2(\mathbf{R})$ yi gerer. O halde $P_n(\mathbf{R})$ için bir tabandır. Bu tabana $P_2(\mathbf{R})$ nin standart tabanı denir.

$\{1, x, x^2, x^3\}$ kümesi $P_3(\mathbf{R})$ nin standart tabanı,
$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ kümesi $P_4(\mathbf{R})$ nin standart tabanı
$\vdots$
$\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ kümesi de $P_n(\mathbf{R})$ nin standart tabanıdır (kontrol ediniz).

3.4. Teorem

$E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi V vektör uzayı için bir taban olsun. $F = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ kümesi V'de lineer bağımsız bir küme ise $r \leq n$ dir. Dolayısıyla V içindeki $n + 1$ veya daha fazla vektör lineer bağımlıdır.

Kanıt

Teoremin kanıtını Ünite 5'deki 2.9 Teoreminin kanıtına benzer şekilde yapabilirsiniz.

Sonlu boyutlu bir vektör uzayının birden çok tabanı vardır. 3.1. Örnek ve 3.2. Örnekte $\mathbf{R}^2$ nin iki farklı tabanı verildi. Bu farklı tabanlardaki vektörlerin sayısı aynıdır. Aslında bu sonuç herhangi bir vektör uzayı için de geçerlidir. Bu sonucu aşağıdaki teoremle kanıtlayalım.

3.5. Teorem

Sonlu boyutlu bir vektör uzayının herhangi iki tabanındaki vektörlerin sayısı aynıdır.

Kanıt

$E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $F = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ kümeleri V nin farklı iki tabanı olsun. E ve F kümeleri taban oldukları için lineer bağımsızdırlar. E kümesi bir taban ve F de lineer bağımsız olduğu için 3.4. Teorem gereğince $m \leq n$ dir.

Benzer şekilde, F taban ve E de lineer bağımsız olduğu için $n \leq m$ olur. Böylece $m = n$ elde edilir. Sonuç olarak, sonlu boyutlu bir vektör uzayının bir çok tabanı vardır ve her tabandaki vektörlerin sayısı aynıdır.

3.6. Tanım

Sonlu boyutlu bir V vektör uzayının herhangi bir tabanındaki vektörlerin sayısına V nin **boyutu** denir ve **boyV** ile gösterilir.

Örneğin $\mathbf{R}^2$ deki $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ standart vektörlerin $E = \{ e_1 , e_2 \}$ kümesi $\mathbf{R}^2$ nin standart tabanıdır. Buna göre boy $\mathbf{R}^2 = 2$ dir.

$V = \{ 0 \}$ vektör uzayı 0 boyutlu olarak tanımlanır. Bundan başka;

$$\text{boy}\mathbf{R}^3 = 3 , \quad \text{boy}\mathbf{R}^4 = 4 , \ \ldots , \ \text{boy}\mathbf{R}^n = n$$

dir.

Standart tabanlarını yazdığımız $P_n(\mathbf{R})$ $n \geq 1$ vektör uzaylarının boyutları da,

$$\text{boy } P_1(\mathbf{R}) = 2 , \quad \text{boy } P_2(\mathbf{R}) = 3 , \ldots , \text{boy } P_n(\mathbf{R}) = n + 1$$

dir.

Siz de $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$, $P_1(\mathbf{R})$, $P_2(\mathbf{R})$, $P_3(\mathbf{R})$ vektör uzayları için başka tabanlar yazınız, tabandaki vektörlerin sayısını belirtiniz.

?

3.7. Örnek

R üzerinde tanımlı 2x3 tipindeki matrislerin vektör uzayı M_{2x3} için

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vektörleri bir taban oluşturur (kontrol ediniz).

Buradan boy $\mathbf{M}_{2x3} = 6$ olduğu görülür.

Siz de M_{3x4} vektör uzayı için bir taban yazınız ve boy M_{3x4} ü belirtiniz.

?

Buraya kadar sonlu boyutlu vektör uzaylarını inceledik. Sonlu boyutlu olmayan vektör uzayları da vardır. Bu tür vektör uzayları sonlu kümeler tarafından gerilemez. Örneğin, bütün polinomların oluşturduğu $P(\mathbf{R})$ vektör uzayı, sonlu boyutlu değildir. Çünkü, hiçbir sonlu küme $P(\mathbf{R})$ yi geremez.

Uyarı: $P(\mathbf{R})$ vektör uzayı ile $P_1(\mathbf{R})$ vektör uzayını birbiri ile karıştırmayınız!

3.8. Teorem

V n-boyutlu bir vektör uzayı ve $E = \{ x_1 , x_2 , ... , x_n \}$ kümesi de V nin bir tabanı olsun. Bu durumda V deki her x vektörü tabandaki vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak tek türlü yazılır.

Kanıt

E kümesi V vektör uzayını gerdiği için V deki her x vektörü E deki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır. Bu yazılışın tek türlü olduğunu gösterelim. Varsayalım ki x vektörü

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (1)$$
$$x = d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n \qquad (2)$$

şeklinde iki türlü yazılsın. (1) ve (2) denklemlerini taraf tarafa çıkartalım.

$$0 = (c_1 - d_1)\, x_1 + (c_2 - d_2)\, x_2 + ... + (c_n - d_n)\, x_n$$

elde edilir. E kümesi lineer bağımsız olduğundan

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = ... = c_n - d_n = 0$$

böylece $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, ..., $c_n = d_n$ olur.

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

yazılışındaki $c_1 , c_2 , ... , c_n$ katsayılarına x vektörünün $\{ x_1 , x_2 , ... , x_n \}$ tabanına göre koordinatları denir ve $(c_1 , c_2 , ... , c_n)$ şeklinde gösterilir.

3.9. Örnek

$\mathbf{R}^2$ nin { (1 , 2), (1 , -1) } tabanına göre (2 , -5) vektörünün koordinatlarını bulalım.

(2 , -5) vektörü tabandaki vektörlerin lineer bileşimi olarak yazılabileceğinden

$$(2 , -5) = c_1\,(1, 2) + c_2\,(1, -1)$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 skalerleri vardır.

$$(2 , -5) = (c_1 + c_2 , 2c_1 - c_2)$$

buradan $c_1 = -1$, $c_2 = 3$ bulunur. Böylece (2, -5) vektörünün verilen tabana göre koordinatları -1, 3 olur.

$\mathbf{R}^2$ nin standart tabanına göre (2, -5) vektörünün koordinatlarının 2, -5 olduğunu görünüz.

3.10. Örnek

R üzerinde tanımlı 2x2 tipindeki matrislerin vektör uzayı M_{2x2} olduğuna göre

(i) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ kümesininM$_{2x2}$ için bir taban olduğunu gösteriniz.

(ii) $A \in M_{2x2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ vektörünün bu tabana göre koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

(i) nin çözümünü size bırakalım.

(ii) c_1, c_2, c_3, c_4 skalerler olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lineer bileşimini yazalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_3 + c_4 & c_2 + c_3 - c_4 \\ c_1 & -c_1 + 2c_3 \end{pmatrix}$$

iki matrisin eşitliğinden

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 + c_4 &= 1 \\ c_2 + c_3 - c_4 &= 2 \\ c_1 &= 3 \\ -c_1 + 2c_3 &= 5 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan$c_1 = 3, c_2 = -8, c_3 = 4, c_4 = -6$ çıkar. O halde $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ vektörünün verilen tabana göre koordinatları (3, -8, 4, -6) dır.

Şimdi sonlu boyutlu bir vektör uzayında verilen bir kümenin, taban olup olmadığını kontrol etmek için kullanabileceğiniz yararlı bir teoremi kanıtsız olarak verelim.

3.11. Teorem

V n-boyutlu bir vektör uzayı ve $E = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ kümesi de V nin bir alt kümesi olsun.

(i) E kümesi lineer bağımsız ise V nin bir tabanıdır.
(ii) E kümesi V yi gererse, V nin bir tabanıdır.

Şimdi yukarıdaki örneği tekrar dönelim ve (i) şıkkını bu teoremden yararlanarak çözelim:

$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ kümesininM_{2x2} matrislerin vektör uzayı için bir taban olup olmadığını kontrol edelim.

boyM_{2x2} = 4 ve E kümesinin öğe sayısı da 4 olduğu için E nin sadece lineer bağımsız olduğunu veya sadece M_{2x2} yi gerdiğini görmek yeterli olacaktır. E nin lineer bağımsızlığına bakalım;

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_3 + c_4 & c_2 + c_3 - c_4 \\ c_1 & -c_1 + 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iki matrisin eşitliğinden,

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ c_1 &= 0 \\ -c_1 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ tek çözüm elde edilir. O halde E kümesi lineer bağımsızdır. Bundan böyle, n-boyutlu bir vektör uzayında n tane vektörün taban oluşturup oluşturmadığını kontrol etmek için bu vektörlerin sadece lineer bağımsızlığını veya sadece vektör uzayını gerdiklerini aramak yeterlidir.

Şimdi yine bu teoremden yararlanarak vektör uzayları için taban bulalım.

3.12. Örnek

$\mathbf{R}^2$ için bir taban bulunuz.

Çözüm

boy $\mathbf{R}^2 = 2$ olduğu için $\mathbf{R}^2$ deki lineer bağımsız herhangi iki vektör daima bir taban oluşturur.

$\{ (1, 1), (1, 0) \}, \quad \{ (-1, 2), (1, 0) \}, \quad \{ (3, 5), (1, 2) \}$

kümelerinin herbiri $\mathbf{R}^2$ için bir tabandır.

3.13. Örnek

$\mathbf{R}^3$ için bir taban bulunuz.

Çözüm

boy $\mathbf{R}^3 = 3$ olduğu için $\mathbf{R}^3$ deki lineer bağımsız herhangi üç vektör daima bir taban oluşturur, buna göre,

$\{ (1, 0, 3), (0, 2, 1), (1, 3, 0) \}$ kümesi bir tabandır.

Siz de $\mathbf{R}^3$ için başka tabanlar yazınız.

?

3.14. Örnek

$E = \{ x+1, x^2, x^2+1 \}$ kümesi $P_2(\mathbf{R})$ için bir taban mıdır?

Çözüm

boy $P_2(\mathbf{R}) = 3$ olduğundan verilen 3 vektörün lineer bağımsızlığını aramak yeterli olacaktır.

$$c_1(x+1) + c_2 x^2 + c_3(x^2+1) = 0$$
$$(c_2 + c_3)x^2 + c_1 x + (c_1 + c_3) = 0$$

bir polinomun sıfır polinom olması için her teriminin katsayısı sıfır olmalıdır,

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 &= 0 \\ c_1 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur. O halde E kümesi $P_2(\mathbf{R})$ için bir tabandır.

4. Bir Matrisin Satır ve Sütun Uzayları

4.1. Tanım

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

şeklinde verilen $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin satırları,

$x_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$,
$x_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$,
:
$x_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$,

$\mathbf{R}^n$ vektör uzayındaki vektörler olarak düşünülürse, $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesi, $\mathbf{R}^n$ nin bir alt uzayını gerer (üretir). Bu alt uzaya $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin **satır uzayı** denir. $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin sütunları,

$$y_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots \; y_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{R}^m$ vektör uzayındaki vektörler olarak düşünülürse, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesi, $\mathbf{R}^m$ nin bir alt uzayını gerer. Bu alt uzaya da $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin **sütun uzayı** denir. Aşağıdaki A matrisinde bunları görelim.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A matrisinin satır vektörleri

(1, 2, 0, -1) , (0, -1, 4, 2) , (3, 0, 1, 5)

dir. A nın satır uzayı $\mathbf{R}^4$ deki bu 3 vektörün gerdiği uzaydır. Daha önce gördüğümüz gibi bu 3 vektörün gerdiği satır uzayı

L { (1, 2, 0, -1) , (0, -1, 4, 2) , (3, 0, 1, 5) }

dır. A nın sütun vektörleri

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dir. A nın sütun uzayı da $\mathbf{R}^3$ deki bu 4 vektörün gerdiği uzaydır. Bu sütun uzayı

$L \{ (1, 0, 3), (2, -1, 0), (0, 4, 1), (-1, 2, 5) \}$

dir.

4.1. Tanımda verilen A matrisine tekrar dönelim.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

(i) A matrisinin herhangi iki satırını kendi aralarında değiştirdiğimizde A nın satır uzayı değişmez.
(ii) A matrisinin herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarptığımızda A nın satır uzayı değişmez.
(iii) A matrisinin herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp, diğer bir satırına eklediğimizde A nın satır uzayı değişmez.

O halde A matrisine sonlu sayıda ilkel satır işlemleri uygulandığında A nın satır uzayının değişmeyeceği açıktır. İlkel satır işlemleriyle A dan elde edilen basamak matrisinin A nın bir denk matrisi olduğunu biliyoruz. Aşağıda vereceğimiz teoremin kanıtı bu nedenlerle açıktır.

4.2. Teorem

$A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrisleri denk matrisler ise bunların satır uzayları birbirine eşittir.

Bu teoremden şu sonuç elde edilir: Bir $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisi verildiğinde bunun basamak biçimi $B = (b_{ij})_{mxn}$ ise A ve B matrislerinin satır uzayları eşittir. Ayrıca basamak matrisin sıfırdan farklı satırları, satır uzayı için bir taban oluşturur. Bu aynı zamanda R^n de verilen vektörler tarafından gerilen (oluşturulan) alt uzay için taban bulma yöntemidir. Şimdi buna bir örnek verelim:

4.3. Örnek

$E = \{ (1, 2, -1, -6), (3, -1, 2, 11), (2, 5, -4, -20) \}$ kümesinin gerdiği $\mathbf{R}^4$ ün V alt uzayı için bir taban bulalım: (Neden $\mathbf{R}^4$?)

E kümesinin gerdiği V alt uzayı, satırları E deki vektörler olan $A = (a_{ij})_{3x4}$ matrisinin satır uzayıdır. Bu satır uzayı (V alt uzayı) için bir taban arıyoruz:

Bu tabanı bulmak için;

(i) Satırları verilen vektörler olan matris oluşturulur,
(ii) Bu matris, ilkel satır işlemleri ile basamak biçime indirgenir,
(iii) Basamak matrisin sıfırdan farklı olan satırları, V alt uzayı için bir tabandır.

Buna göre satırları verilen vektörler olan matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & -20 \end{pmatrix}$$

olur. Bu matrise ilkel satır işlemlerini uygulayarak basamak biçime indirgeyelim (Ünite 1'e bakınız).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bulunur. A ve B matrislerinin satır uzayları aynı olduğundan B nin sıfırdan farklı satırları, A matrisinin satır uzayı için bir taban oluşturur bir başka deyişle,

$$\{ (1, 2, -1, -6) , (0, 1, -2, -8) , (0, 0, 1, 3) \}$$

kümesi $\mathbf{R}^4$ ün V alt uzayı için bir tabandır. Ayrıca boyV = 3 (satır uzayının boyutu) tür.

4.4. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin satır uzayının boyutuna A nın satır rankı, sütun uzayının boyutuna da A nın sütun rankı denir.

4.3. Örnekteki A matrisinin satır rankı 3 tür (sıfırdan farklı satır sayısı).

4.5. Örnek

$\mathbf{R}^3$ teki $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ -20 \end{pmatrix}$ vektörlerinin gerdiği V alt uzayı için bir taban bulalım.

Bunun için satırları verilen vektörler olan matrisi oluşturalım:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \\ -6 & 11 & -20 \end{pmatrix}$$

İlkel satır işlemleri ile basamak biçime indirgeyelim:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C ve D matrislerinin satır uzayları aynıdır. D nin sıfırdan farklı satırları, C nin satır uzayı için bir taban oluşturur bir başka deyişle, $\{(1,3,2), (0,1,-1/7), (0,0,1)\}$ kümesi $\mathbf{R}^3$ ün V alt uzayı için bir tabandır. Ayrıca boyV = 3 (satır uzayının boyutu) tür.

4.5. Örnekteki C matrisinin 4.3. Örnekteki A matrisinin transpozesi olduğuna dikkat edersek, A matrisinin satır rankının sütun rankına eşit olduğunu görürüz. Bu herhangi bir matris için daima doğrudur. Genel durumu aşağıdaki teoremle ifade edelim.

4.6. Teorem

Bir $A = (a_{ij})$ matrisinin satır rankı ve sütun rankı birbirine eşittir.

Kanıt

Lineer Cebir kitaplarında bulabileceğiniz bu kanıtı yapmanız için size bırakalım.

Burada, $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin satır uzayının veya sütun uzayının boyutu A matrisinin rankıdır. Bir vektör uzayının boyutunun, onun herhangi bir tabanındaki vektörlerin sayısı olduğunu anımsarsak, A nın rankı, basamak biçimindeki matrisin tüm lineer bağımsız vektörlerinin sayısıdır. Böylece bir matrisin satır veya sütun uzayının boyutu ile matrisin rankı arasındaki ilişkiyi görmüş olduk.

Şimdi $\mathbf{R}^n$ de $v_1, v_2, ..., v_n$ gibi verilen n tane vektörün lineer bağımsız olup olmadıklarını belirlemeye yarayan bir yöntem verelim:

$\mathbf{R}^n$ de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinin kümesi E olsun.

$E = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ kümesinin lineer bağımsız olması için

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$$

eşitliğinin ancak $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ olmasıyla sağlandığını biliyoruz.

$v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n$ için

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ v_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ v_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}) \end{aligned}$$

olsun.

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$$

eşitliğinde her vektörü bileşenleri türünden yazarsak,

$$c_1 (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) + c_2 (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \ldots + c_n (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}) = (0, 0, \ldots, 0)$$

$$(c_1a_{11} + c_2a_{21} + \ldots + c_na_{n1}, \; c_1a_{12} + c_2a_{22} + \ldots + c_na_{n2}, \ldots, \; c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \ldots + c_na_{nn}) = (0, 0, \ldots, 0)$$

burada $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ler bilinmeyenler olduğuna göre,

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{n1}c_n &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{n2}c_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Sistemin tek çözümünün sıfır çözüm olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerektiğini biliyoruz. O halde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinin lineer bağımsız olmaları için

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır.

$(1, 2, 0), (0, 1, 4), (3, 1, 2)$ vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını araştıralım:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

olduğundan verilen vektörler lineer bağımsızdır.

Değerlendirme Soruları

1. Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbf{R}^2$ için bir tabandır?

A. { (0, 0) , (1, 5) }
B. { (1, 2), (2, 3), (2, 4) }
C. { (2, 4), (-4, -8) }
D. { (1, 5), (3, 1) }
E. { (1, 1) , (-1, -1) }

2. Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbf{R}^3$ için bir tabandır?

A. { (1, 1, 0) , (0, 1, 1) }
B. { (1, 2, 3) }
C. { (1, 2, 3) , (1, 0, 1) , (0, 1, 0) }
D. { (1, 1, 1) , (2, 2, 2) , (3, 3, 3) }
E. { (1, 1, 1) , (1, 0, 1) , (0, 1, 1) , (0, 0, 0) }

3. Aşağıdaki kümelerden hangisi $P_2(\mathbf{R})$ için bir tabandır?

A. { 1, x+1, x-2 }
B. { 0, x+2, x^2+3 }
C. { x+1, x^2+1, x^2-1 }
D. { 3, 9, x^2+x+1 }
E. { x^2+x, x+3 }

4. $\mathbf{R}^3$ de (1, 2, 5) vektörünün { (1, 1, 1) , (1, 1, 0) , (1, 0, 1) } tabanına göre koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1, 2, 5)
B. (1, 0, 3)
C. (2, 4, 6)
D. (0, 1, 2)
E. (6, -4, -1)

5. $p(x) \in P_2(\mathbf{R})$, $p(x) = 3x^2 + x - 5$ vektörünün { 1, x-1, x^2+1 } tabanına göre koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1, 3, -2)
B. (2, 3, 5)
C. (-7, 1, 3)
D. (-4, 3, 5)
E. (3, 1, -5)

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ vektörünün M_{2x2} vektör uzayının standart tabanına göre koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1, 2, 3, 4)
B. (2, 3, 4, 5)
C. (1, 1, 1, 1)
D. (0, 0, 0, 0)
E. (-1, 0, 1)

7. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A. Bir vektör uzayının boyutu bir tabanındaki vektörlerin sayısından büyük olabilir.
B. Bir vektör uzayının tabanındaki vektörler lineer bağımlıdır.
C. Bir vektör uzayının bir çok tabanı vardır.
D. Bir vektör uzayındaki **her** vektör tabandaki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak **yazılamaz.**
E. Bir vektör uzayını geren küme o vektör uzayı için bir tabandır.

8. $\mathbf{R}^3$ de { (1, 1, 0) , (1, 0, 0) } vektörlerinin gerdiği alt uzayın bir tabanı aşağıdakilerden hangisidir?

A. { (1, 1, 1) , (0, 1, 1) }
B. { (0, 0, 0) , (1, 1, 1) }
C. { (1, 1, 1) , (2, 2, 2) }
D. { (1, 0, 0) , (3, 1, 0) }
E. { (0, 1, 1) , (0, 3, 3) }

9. $\mathbf{R}^2$ de { (1, 2) } vektörünün gerdiği alt uzay aşağıdakilerden hangisidir?

A. **R**
B. x-ekseni
C. y = 2x doğrusu
D. y-ekseni
E. $\mathbf{R}^2$

10. $\mathbf{R}^3$ de { (1, 0, 0) , (0, 1, 0) } vektörlerinin gerdiği alt uzayın boyutu aşağıdakilerden hangisidir?

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. Sonsuz

11. $\mathbf{R}^4$ de (1, 1, 0, 0) , (0, 0, 1, 1) vektörlerinin gerdiği alt uzay için bir taban aşağıdakilerden hangisidir?

A. (0, 0, 0, 0) , (1, 0, 1, 0)
B. (1, 1, 1, 1) , (2, 5, 0, 2)
C. (0, 0, 0, 1) , (0, 0, 0, 2)
D. (1, 1, 0, 0) , (0, 0, 1, 1)
E. (1, 1, 0, 0)

12. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A. V sonlu boyutlu bir vektör uzayı W, V nin bir alt uzayı ise boyW ≥ boyV dir.
B. V, n-boyutlu bir vektör uzayı ise V deki n-1 tane lineer bağımsız vektör V yi gerer.
C. V, n-boyutlu bir vektör uzayı ise V deki n+1 tane lineer bağımsız vektör V yi gerer.
D. $\{ x_1 , x_2 , ... , x_n \}$ kümesi V vektör uzayı için bir taban ise her $c \in \mathbf{R}$ için $\{ cx_1 , cx_2 , ... , cx_n \}$ kümesi de V nin bir tabanıdır.
E. V sonlu boyutlu bir vektör uzayı W bunun bir alt uzayı olsun. boyV = boyW ise V = W dir.

13. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A. Bir A matrisi basamak biçime indirgendiğinde sıfırdan farklı satırları, satır uzayını gerer.
B. Bir A matrisinin herhangi bir satırı diğer bir satıra eklenirse A nın satır uzayı değişir.
C. $A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisinin satırlarının lineer bağımsız olması için A nın satır vektörlerinin $\mathbf{R}^n$ ni germesi gerekir.
D. Bir A matrisinin rankı satır uzayının boyutuna eşittir.
E. $A = (a_{ij})_{5x3}$ tipinde bir matrisin lineer bağımsız satırlarının sayısı en çok 3 tür.

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D	2. C	3. C	4. E	5. C	6. B	7. C	8. D	9. C	10. C
11. D	12. E	13. B							

Lineer Dönüşümler

ÜNİTE
7

Yazar
Öğr. Grv.Dr. Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Vektör uzayları arasında tanımlanan belli fonksiyonları tanıyacak, özelliklerini öğrenecek,
- Bir dönüşümün, Lineer dönüşüm olması için gereken koşulları öğrenecek,
- Bir lineer dönüşümün çekirdek ve görüntü uzaylarını bulacak,
- Lineer dönüşümler arasında bazı cebirsel işlemleri öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 149
- Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü 153
- Lineer Dönüşümlerle İşlemler 160
- Değerlendirme Soruları 164

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışmadan önce fonksiyon ve vektör uzayı kavramlarını yeniden dikkatlice gözden geçiriniz.
- Ünite içindeki kavram ve tanımları iyice öğrendikten sonra soruları çözünüz.

1. Giriş

Bu ünitede vektör uzayları arasında tanımlanan belli fonksiyonları inceleyeceğiz. Lineer dönüşüm olarak isimlendireceğimiz bu fonksiyonlar matematiğin birçok alanında olduğu gibi ekonomi ve sosyal bilimlerde de önemli bir yer alır.

1.1. Tanım

V, W iki gerçel vektör uzayı olsun. V den W ye tanımlanan T fonksiyonu, aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona **lineer dönüşüm** denir.

$$T : V \to W$$

i) Her $x, y \in V$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$
ii) Her $x \in V$, $c \in \mathbf{R}$ için $T(cx) = c\,T(x)$

Bir başka deyişle $T : V \to W$ dönüşümü vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerini koruyorsa bu dönüşüme **lineer dönüşüm** denir.

Bu iki koşul birleştirilerek aşağıdaki şekilde bir tek denk koşula indirgenebilir.

Her $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $x_1, x_2, \in V$ için

$$T(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 T(x_1) + c_2 T(x_2)$$

olmalıdır.

$$T : V \to W$$

bir lineer dönüşüm ise $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R}$ skalerleri ve $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ vektörleri için

$$T(c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n) = c_1 T(x_1) + c_2 T(x_2) + ... + c_n T(x_n)$$

olacağı açıktır.

Şimdi lineer dönüşümlere örnekler verelim:

1.2. Örnek

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$
$$T(x, y) = (x, y, x + y)$$

T 'nin lineer olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$x, y \in \mathbf{R}^2$ için $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
T(x+y) &= T\left((x_1, x_2) + (y_1, y_2) \right) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\
&= (x_1, x_2, x_1 + x_2) + (y_1, y_2, y_1 + y_2) \\
&= T(x) + T(y)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$\forall\ x \in \mathbf{R}^2,\quad \forall\ c \in \mathbf{R}$ için

$$
\begin{aligned}
T(c(x_1, x_2)) &= T(cx_1, cx_2) \\
&= (cx_1, cx_2, cx_1 + cx_2) \\
&= c(x_1, x_2, x_1 + x_2) \\
&= c\,T(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. Lineer dönüşüm koşulları sağlandığı için T bir lineer dönüşümdür.

1.3. Örnek

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$T(x, y) = (y, x + 3)$

dönüşümün lineer dönüşüm olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$x, y \in \mathbf{R}^2$ için $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
T(x + y) &\overset{?}{=} T(x) + T(y) \\
T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) &\overset{?}{=} T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) \\
(x_2 + y_2, x_1 + y_1 + 3) &\overset{?}{=} (x_2, x_1 + 3) + (y_2, y_1 + 3) \\
(x_2 + y_2, x_1 + y_1 + 3) &\neq (x_2 + y_2, x_1 + y_1 + 6)
\end{aligned}
$$

olduğundan T bir lineer dönüşüm değildir.

1.4. Teorem

$T : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$T(0) = 0$

dir. Yani her lineer dönüşümde 0 vektörünün görüntüsü sıfırdır.

Kanıt

$x \in V$ için,

$$T(x + 0) = T(x) + T(0) \qquad T \text{ lineer}$$
$$T(x) = T(x) + T(0)$$

buradan $T(0) = 0$ olur.

1.5. Örnek

$$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$
$$T(x, y) = (x^2, y^2)$$

dönüşümünün lineer olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

Bu dönüşümün lineer olmadığını gösterelim: Bunun için uygun iki vektör alarak lineer dönüşüm koşullarından birinin sağlanmadığını göstermek yeterlidir.

$x = (1, 1)$, $y = (2, 2) \in \mathbf{R}^2$ alalım.

$$T(x + y) = T[(1, 1) + (2, 2)] = T(3, 3) = (9, 9)$$
$$T(x) + T(y) = T(1, 1) + T(2, 2) = (1, 1) + (4, 4) = (5, 5)$$
$$T(x + y) = (9, 9) \neq (5, 5) = T(x) + T(y)$$

dir. O halde T bir lineer dönüşüm değildir.

1.6. Örnek

$$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$
$$T(x, y, z) = (1, 2, x + y + z)$$

olsun. Bu dönüşümün lineer olup olmadığını kontrol edelim. Eğer T lineer dönüşüm ise

$$T(0) = 0 \text{ olmalıdır.}$$
$$T(0, 0, 0) = (1, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$$

olduğundan T dönüşümü lineer değildir.

1.7. Teorem

$T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi V için bir taban ve x, V deki herhangi bir vektör ise

$T(x) \in L(\{T(x_1), T(x_2), ..., T(x_n)\})$

Kanıt

$x \in V$ olsun. $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi V nin bir tabanı olduğundan $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbf{R}$ olmak üzere,

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

dir.

$$T(x) = T(c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n) \quad \text{T lineer olduğundan}$$
$$T(x) = c_1 T(x_1) + c_2 T(x_2) + ... + c_n T(x_n) \in L(\{T(x_1), T(x_2), ..., T(x_n)\})$$

O halde, $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşüm ise V nin her x vektörünün T(x) görüntüsü V nin bir tabanındaki vektörlerin görüntülerinin bir lineer bileşimidir. Bu nedenle, bir lineer dönüşüm için bir tabandaki vektörlerin görüntülerinin verilmesi yeterlidir.

1.8. Örnek

$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ lineer dönüşüm olsun

$T(1, 0) = (1, 2)$, $T(1, 1) = (3, -1)$ ise $T(x, y) = ?$, $T(4, 5) = ?$

Çözüm

$\{(1, 0), (1, 1)\}$ kümesinin $\mathbf{R}^2$ için bir taban olduğunu kontrol ediniz.

(x, y) vektörü bu tabandaki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır

$$(x, y) = a(1, 0) + b(1,1)$$
$$(x, y) = (a + b, b)$$
$$\begin{cases} a + b = x \\ \quad\;\; b = y \end{cases}$$

bulunur. Buradan $a = x - y$, $b = y$ olur.

$$(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1) \qquad \text{T lineer olduğundan}$$
$$T(x, y) = (x - y)\,T(1, 0) + y\,T(1, 1)$$
$$T(x, y) = (x - y)(1, 2) + y(3, -1)$$
$$T(x, y) = (x - y, 2x - 2y) + (3y, -y)$$
$$T(x, y) = (x + 2y, 2x - 3y)$$

bulunur. Buradan;

$T(4, 5) = (4 + 2.5, \; 2.4 - 3.5) = (14, -7)$

olur.

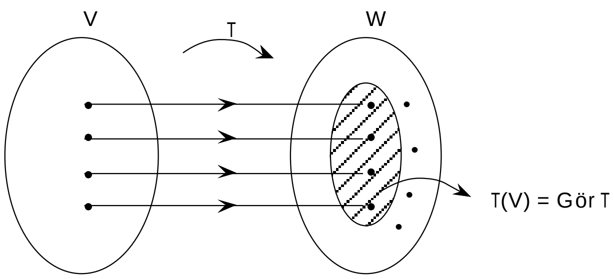
2. Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntüsü

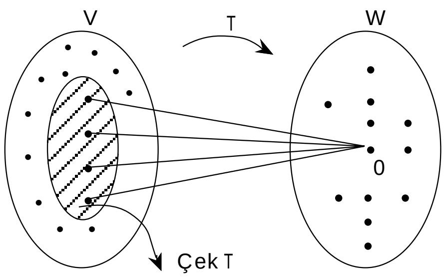
2.1. Tanım

$T : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. V nin T altındaki görüntüsü olan $T(V) = \{T(x) \mid x \in V\}$ kümesine T lineer dönüşümünün **görüntü uzayı** denir. W nin sıfır vektörünün öngörüntüsüne de T nin **çekirdeği** denir ve Çek T ile gösterilir;

$$\text{Çek } T = \{ x \in V \mid T(x) = 0 \}$$

dir.





2.2. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$
$T(x, y, z) = (2x, x + y)$ veriliyor.

(i) T 'nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.
(ii) Çek T ve Gör T'yi bulunuz.

Çözüm

(i) T 'nin lineer dönüşüm olduğunu siz gösteriniz.

(ii) Çek T ve Gör T yi bulalım:

$$\text{Çek } T = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0) \}$$

olan vektörlerin kümesidir.

$(x, y, z) \in$ Çek T ise $T(x, y, z) = (0, 0)$ diğer taraftan,
$T(x, y, z) = (2x, x + y)$ T nin tanımı
buradan $(2x, x + y) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $x = 0$, $y = 0$ bulunur. Burada z bileşeni için hiçbir sınırlama söz konusu olmadığına göre,

Çek T = $\{ (0, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \in \mathbf{R} \}$ dir. Çek T, $\mathbf{R}^3$ teki $(0, 0, z)$ şeklindeki bütün vektörlerden oluşur. Bu vektörlerin kümesi ise z-eksenidir. z-ekseni $\mathbf{R}^3$ ün bir alt uzayıdır ve $\{(0, 0, 1)\}$ kümesi bu alt uzayın bir tabanıdır. O halde, T lineer dönüşümünün çekirdeği $\mathbf{R}^3$ ün 1-boyutlu alt uzayıdır.

Şimdi Gör T yi bulalım:

$$\begin{aligned} \text{Gör } T &= T(\mathbf{R}^3) = \{ T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \} \\ &= \{ (2x, x + y) \mid x, y \in \mathbf{R} \} \end{aligned}$$

$(2x, x + y) = x(2, 1) + y(0, 1)$ şeklinde yazabiliriz.
O halde, Gör T = $\{ x(2, 1) + y(0, 1) \mid x, y \in \mathbf{R} \}$ dir.

Gör T, $(2,1), (0,1)$ vektörlerinin tüm lineer bileşimlerinin kümesidir. $\{(2,1), (0,1)\}$ kümesi $\mathbf{R}^2$ nin bir tabanı olduğundan bu küme $\mathbf{R}^2$ yi gerer. Böylece Gör T = $\mathbf{R}^2$ olur.

2.3. Teorem

$T : V \to W$ bir lineer dönüşüm ise Çek T, V nin bir alt uzayıdır.

Kanıt

Çek T nin V nin bir alt uzayı olması için, daha önce gördüğümüz alt uzay olma koşullarını sağlamalıdır yani

$x, y \in$ Çek T için $x + y \in$ Çek T
$x \in$ Çek T, $c \in \mathbf{R}$ için $c\,x \in$ Çek T

olmalıdır.

$x, y \in$ Çek T olsun. T bir lineer dönüşüm olduğundan

$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0$
$x + y \in$ Çek T

$c \in \mathbf{R}$, $T(cx) = c\,T(x) = c.0 = 0$
$cx \in$ Çek T

Böylece Çek T, V nin bir alt uzayıdır.

2.4. Teorem

$T: V \to W$ lineer dönüşüm ise Gör T = T (V) , W nin bir alt uzayıdır.

Kanıt

Gör T nin W nin alt uzayı olması için alt uzay olma koşulları sağlanmalıdır.

(i) $y_1, y_2 \in$ Gör T iken $y_1 + y_2 \in$ Gör T

(ii) $c \in R$ iken $c\,y_1 \in$ Gör T

olmalıdır.

T bir lineer dönüşüm olduğu için $T(0) = 0$, $0 \in$ Gör T, Gör T $\neq \emptyset$ olur.

$y_1, y_2 \in$ Gör T ise $T(x_1) = y_1$ ve $T(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in V$ vardır.

$y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2)$ yani $y_1 + y_2 \in$ Gör T.

$c \in \mathbf{R}$ için $c\,y_1 = c\,T(x_1) = T(c\,x_1)$ yani $c\,y_1 \in$ Gör T, böylece Gör T, W nin bir alt uzayı olur.

Her mertebeden türevi olan fonksiyonların kümesi V olsun. V kümesi

$f, g \in V$, $c \in \mathbf{R}$ için
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$c\,f(x) = c\,f(x)$

işlemlerine göre **R** üzerinde bir vektör uzayıdır. (Siz V kümesinin vektör uzayı olma koşullarını sağladığını gösteriniz.)

$D: V \to V$

Dönüşümü her fonksiyonu türevine gönderen bir dönüşüm olsun. Örneğin;
$f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ ise $D f(x) = D(x^3 + 6x^2 - 4x + 5) = 3x^2 + 12x - 4$

$$D : V \to V$$
$$D f = f'$$

dönüşümü bir lineer dönüşümdür. Gerçekten bir toplamın türevi, türevlerinin toplamına eşit olduğundan $f, g \in V$ için

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = Df + Dg$$

olur.

Bir fonksiyonun sabit ile çarpımının türevi, türevin bu sabitle çarpımına eşit olduğundan,

$c \in \mathbf{R}$, $f \in V$ için
$$D(c f) = (c f)' = c f' = c Df$$

O halde D türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür. Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim:

2.5. Örnek

$$D : P_3(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$$
$$D(p(x)) = \frac{d}{dx} p(x) = (p(x))'$$ lineer dönüşümü verilsin

(i) Çek D ve Gör D yi bulunuz.

(ii) Çek D ve Gör D için birer taban yazınız.

Çözüm

$$\text{Çek } D = \{ p(x) \in P_3(\mathbf{R}) \mid D(p(x) = 0 \}$$
$$= \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3(\mathbf{R}) \mid a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = 0 \}$$

$a_1 + 2a_2 x + 3 a_3 x^2 = 0$ Polinom özdeşliğinden
$a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$
$\text{Çek } D = \{ p(x) = a_0 \mid a_0 \in \mathbf{R} \}$

sabit polinomların kümesidir. Çek D, $P_3(\mathbf{R})$ nin bir alt uzayıdır ve boy Çek D $= 1$ olduğu kolayca görülür. Çünkü (1) vektörü sabit polinomların kümesi olan Çek D yi gerer.

Gör D $\subseteq P_2$ (**R**) dir.

Gör D = $\{ p(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \in P_2 (R) \mid a_1 , a_2 , a_3 \in \mathbf{R} \}$ dir.

Gör D kümesi P_2 (**R**) nin bir alt uzayıdır. Aslında Gör D = P_2 (**R**) dir, dolayısıyla bir tabanı $\{1, x, x^2\}$ kümesidir. Buradan boy Gör D = 3 tür.

2.6. Teorem

$T : V \to W$ lineer dönüşümünün bire - bir olması için gerekli ve yeterli koşul Çek T = { 0 } olmasıdır.

Kanıt

T lineer dönüşümü bire-bir ise Çek T = { 0 } olduğunu gösterelim.

$x \in$ Çek T olsun.
T (x) = 0 olur. Çek T nin tanımı
T (0) = 0 T lineer. Buradan
T (x) = T (0)

olur. T bire-bir olduğundan x = 0 ve Çek T = { 0 } bulunur.

Tersine olarak, Çek T = { 0 } ise T nin bire-bir olduğunu gösterelim:

$x_1 , x_2 \in V$ için $T (x_1) = T (x_2)$ olsun.

$T (x_1) - T (x_2) = 0$
$T (x_1 - x_2) = 0$, $x_1 - x_2 \in$ Çek T. Böylece $x_1 - x_2 = 0$ ve $x_1 = x_2$ olup T bire-birdir.

2.7. Örnek

T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$
T (x, y) = (x , x + y , x - y)

lineer dönüşümünün bire-bir olduğunu gösterelim: Bunun için Çek T yi bulalım,

Çek T = $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid T (x, y) = 0 \}$

T (x , y) = (x , x + y , x - y) = (0 , 0 , 0)
x = 0 , y = 0 olur.

Çek T = { 0 } bulunur. O halde dönüşümü bire-bir dir.

2.8. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$
$T(x, y, z) = (x + y, x + z)$

lineer dönüşümün bire-bir olup olmadığını araştıralım:

$\text{Çek } T = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid T(x, y, z) = 0 \}$
$T(x, y, z) = (x + y, x + z) = 0$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

sistemin sonsuz çözümü vardır. $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$ için $(1, -1, -1) \in \text{Çek } T$ dir. Buna göre T dönüşümü bire-bir değildir. Yani farklı iki elemanın görüntüleri aynı olabilir: Örneğin

$(1, 2, 3) \neq (2, 1, 2)$

olmasına karşın,

$T(1, 2, 3) = T(2, 1, 2) = (3, 4)$

bu da T nin bire-bir olmadığını gösterir.

2.9. Teorem

$T : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer V sonlu boyutlu ise,

$\text{boy } V = \text{boy Çek } T + \text{boy Gör } T$

dir. Bu teoremin kanıtını vermeyeceğiz.

Teoremi bir örnekle doğrulayalım:

2.10. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
$T(x, y, z) = x + 2y + 3z$ verilsin.

(i) T nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.
(ii) Çek T, Gör T için birer taban yazınız.
(iii) boy Çek T, boy Gör T yi belirtiniz.

Çözüm

(i) T nin lineer dönüşüm olduğu kolayca görülür.

(ii) $\text{Çek } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$

$\text{Çek } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \}$

$$\text{Çek } T = \left\{ \left(x_1, x_2, -\frac{x_1 + 2x_2}{3} \right) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

bulunur. Çek T için bir taban bulalım.

$x_1 = 1,\ x_2 = 0$ için $x_3 = -\frac{1}{3}$ ve $\left(1, 0, -\frac{1}{3}\right) \in \text{Çek } T$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1$ için $x_3 = -\frac{2}{3}$ ve $\left(0, 1, -\frac{2}{3}\right) \in \text{Çek } T$

ve çekirdeğin herhangi bir öğesi

$$\left(x_1, x_2, -\frac{x_1 + 2x_2}{3} \right) = x_1 \left(1, 0, -\frac{1}{3}\right) + x_2 \left(0, 1, -\frac{2}{3}\right)$$

yazılabildiğinden,

$$\left\{ \left(1, 0, -\frac{1}{3}\right), \left(0, 1, -\frac{2}{3}\right) \right\}$$

kümesi Çek T yi germektedir. Bu kümenin lineer bağımsız olduğunu da siz gösteriniz. Böylece $\left\{ \left(1, 0, -\frac{1}{3}\right), \left(0, 1, -\frac{2}{3}\right) \right\}$ kümesi Çek T için bir tabandır. Buradan da boy Çek T = 2 olur.

$\varnothing \neq T(\mathbf{R}^3) \subseteq \mathbf{R}$ olduğundan boy $T(\mathbf{R}^3) = 1$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \text{boy } \mathbf{R}^3 &= \text{boy Çek } T + \text{boy Gör } T \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

eşitliği doğrulanmış olur.

2.11. Örnek

$T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z, u) = (x + y, z + u, x + z)$

lineer dönüşümü verilsin.

(i) Gör T, Çek T yi bularak birer taban yazınız.
(ii) boy Gör T, boy Çek T yi belirtiniz.

Çözüm

(i) $$\begin{aligned} \text{Gör } T = T(\mathbf{R}^4) &= \{ T(x, y, z, u) \mid (x, y, z, u) \in \mathbf{R}^4 \} \\ &= \{ (x + y, z + u, x + z) \mid x, y, z, u \in \mathbf{R} \} \end{aligned}$$

dir.

$(x + y , z + u , x + z) \in$ Gör T vektörünü

$$(x + y , z + u , x + z) = x (1 , 0 , 1) + y (1 , 0 , 0) + z (0 , 1 , 1) + u (0 , 1 , 0)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$(1 , 0 , 1) \ , \ (1 , 0 , 0) \ , \ (0 , 1 , 1) \ , \ (0 , 1 , 0)$$

vektörlerinin kümesi lineer bağımlıdır ($\mathbf{R}^3$ teki 4 vektör). Satırları bu vektörler olan matrisi yazarak basamak biçime indirgeyelim. Böylece Gör T yi geren lineer bağımsız kümeyi, yani Gör T nin bir tabanını bulmuş oluruz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. O halde $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1\}$ kümesi Gör T yi geren lineer bağımsız kümedir. Bir başka deyişle Gör T nin tabanıdır. Buradan Gör T = $\mathbf{R}^3$ olur (nedenini açıklayınız) ve boy Gör T = 3 tür.

$$\text{Çek } T = \{ (x , y , z , u) \in \mathbf{R}^4 \mid T (x , y , z , u) = 0 \}$$
$$T (x , y , z , u) = (x + y , z + u , x + z) = (0 , 0 , 0)$$
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + u = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

sistemin katsayılar matrisinin rankı 3, bilinmeyen sayısı 4 olduğundan 1 bağımsız değişkene bağlı çözümleri vardır. Bağımsız değişken u alınırsa u ya bağlı çözümler $x = u , y = -u , z = -u$ olur.

Çek T = $\{ (u , -u , -u , u) \mid u \in \mathbf{R} \} = \{ u (1 , -1 , -1 , 1) \mid u \in \mathbf{R} \}$ bulunur. Buna göre $\{(1,-1,-1,1)\}$ kümesi Çek T nin bir tabanıdır. Buradan boy Çek T = 1 dir. Böylece

$$\text{boy } \mathbf{R}^4 = \text{boy Gör } T + \text{boy Çek } T$$
$$4 = 3 + 1$$

eşitliği doğrulanmış olur.

3. Lineer Dönüşümlerle işlemler

Lineer dönüşümler arasında toplama, çıkarma, skalerle çarpma, bileşke gibi çeşitli işlemler tanımlanabilir.

3.1. Tanım

$T\,,\ S\ :\ V \to W$ birer lineer dönüşüm olsun.

(i) T ve S dönüşümlerinin toplam ve farkı

$$T\,,S:\ V \to W$$
$$(T \pm S)\,(x) = T\,(x) \pm S\,(x)$$

şeklinde tanımlanır.

(ii) $c \in \mathbf{R}$ skaleri ile T nin çarpımı,

$$c\,T:\ V \to W$$
$$(c\,T)\,(x) = c\,T\,(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda tanımlanan $T \pm S$ ve $c\,T$ nin lineer dönüşüm olduklarını gösterelim:

$\forall\, x\,,\,y \in V$ için

$$\begin{aligned} (T+S)\,(x+y) &= T\,(x+y) + S\,(x+y) && \text{Tanımdan} \\ &= T\,(x) + T\,(y) + S\,(x) + S\,(y) && T\,,S \text{ lineer olduğundan} \\ &= T\,(x) + S\,(x) + T\,(y) + S\,(y) \\ &= (T+S)\,(x) + (T+S)\,(y) \end{aligned}$$

olur. $c \in \mathbf{R}$ için

$$\begin{aligned} &(T+S)\,(c\,x) = T\,(c\,x) + S\,(c\,x) && \text{Tanımdan} \\ &c\,T\,(x) + c\,S\,(x) = c\,(T\,(x) + S\,(x)\,) = c\,(T+S)\,(x) && T\,,S \text{ lineer olduğundan} \end{aligned}$$

böylece iki lineer dönüşümün toplamının bir lineer dönüşüm olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi de $c\,T$ nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösterelim:

$x\,,\,y \in V$ için

$$\begin{aligned} (cT)\ (x+y) = (cT\,(x+y)\,) &= c\,(\,T\,(x) + T\,(y)\,) \\ &= c\,T\,(x) + c\,T\,(y) \end{aligned}$$

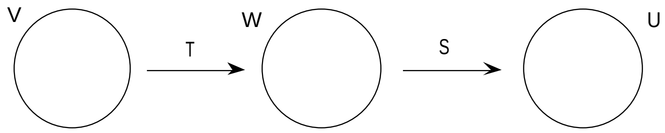
$k \in \mathbf{R}$ için

$$(c\,T)\,(k\,x) = c\,(T\,(k\,x)\,) = c\,(k\,T\,(x)\,) = k\,(c\,T\,(x)\,)$$

böylece $c\,T$ bir lineer dönüşüm olur.

3.2. Tanım

$T: V \rightarrow W$
$S: W \rightarrow U$ birer lineer dönüşüm olsunlar.



T ile S nin bileşke fonksiyonu

$S \circ T : V \rightarrow U$
$(S \circ T)(x) = S(T(x))$

biçiminde tanımlanır.

Sizde S o T nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

3.3. Örnek

$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $S: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$T(x, y) = (2x, x + y, y)$, $S(x, y) = (x - y, 3y, x)$

lineer dönüşümleri verilsin.

(i) $(3T + S)(1, 2)$ değerini hesaplayınız.

(ii) $(T - 4S)(1, 1)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm

(i) $$\begin{aligned}(3T + S)(1, 2) &= 3T(1, 2) + S(1, 2)\\ &= 3(2, 3, 2) + (-1, 6, 1)\\ &= (6, 9, 6) + (-1, 6, 1)\\ &= (5, 15, 7)\end{aligned}$$

olur.

(ii) $$\begin{aligned}(T - 4S)(1, 1) &= T(1, 1) - 4S(1, 1)\\ &= (2, 2, 1) - 4(0, 3, 1)\\ &= (2, -10, -3)\end{aligned}$$

bulunur.

3.4. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z) = (z, x, 0)$, $S(x, y, z) = (0, x, y)$

lineer dönüşümleri veriliyor.

(i) $T \circ T = T^2$ olmak üzere, Çek T^2 ve Gör T^2 yi bularak birer taban yazınız.
(ii) $(S \circ T)(1, 2, 3)$ değerini bulunuz.

Çözüm

(i) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z) = (z, x, 0)$

olduğuna göre önce $T^2(x, y, z)$ yi bulalım:

$T^2(x, y, z) = T(T(x, y, z)) = T(z, x, 0) = (0, z, 0)$ olur.

$T^2(x, y, z) = (0, z, 0)$ bulunur.

Çek $T^2 = \{ (x, y, z) \mid T^2(x, y, z) = 0 \}$

$T^2(x, y, z) = (0, z, 0) = (0, 0, 0)$

buradan $z = 0$ bulunur. O halde

Çek $T^2 = \{ (x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y \in \mathbf{R} \}$ kümesi olur.

Bu kümede xy- düzlemidir.

Çek T^2 için bir taban bulalım:

$(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$ yazılırsa $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$ kümesi Çek T^2 için bir taban olur.

Buradan boy Çek $T^2 = 2$ olur.

Gör T^2 yi bulalım:

Gör $T^2 = T^2(\mathbf{R}^3)$ yazabiliriz.

Gör $T^2 = \{ (0, z, 0) \mid z \in \mathbf{R} \}$ olup, y-eksenidir. $\{ (0, 1, 0) \}$ kümesi Gör T^2 için bir tabandır.

(ii) $(S \circ T)(1, 2, 3) = S(T(1, 2, 3))$
$= S(3, 1, 0) = (0, 3, 1)$

bulunur.

Değerlendirme Soruları

1. Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi lineerdir?

A. $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$
$T(x,y) = (x + y , y, z + 3)$

B. $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$
$T(x,y, z) = (x + y , z - y)$

C. $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
$T(x) = x^2$

D. $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$
$T(x,y) = (1, 1)$

E. $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$
$T(x) = (x, x^2)$

2. $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ lineer dönüşümünde

$T(1, 1) = (0, 1, 0)$, $T(0, 1) = (1, 0, -1)$ olduğuna göre $T(2, 3)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A. (0, 1, 0) B. (1, -2, -1) C. (1, 1, -1) D. (0, 1, -2) E. (1, 2, -1)

3. $T : P_2(\mathbf{R}) \rightarrow P_3(\mathbf{R})$ bir lineer dönüşüm olsun.
$T(1) = 1$, $T(x) = x^2$, $T(x^2) = x^3 + 1$ olduğuna göre $T(2x^2 + 3x - 7)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

B. $p(x) = 2x^2 - x - 5$

C. $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$

D. $p(x) = 2x^2 - x - 5$

E. $p(x) = x^2 - x + 5$

4. $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$
$T(x, y) = (x, 0)$ lineer dönüşümü veriliyor.
Aşağıdakilerden hangisi Çek T nin bir öğesidir?

A. (2, 0) B. (3, 2) C. (1, 2) D. (0,2) E. (-1, 0)

5. $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$
   $T(x, y) = (x, x + y, x - y)$ lineer dönüşümü veriliyor.
   Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

   A. $(1, 1, 1) \in$ Çek T
   B. T dönüşümü 1-1 dir.
   C. $T(1, 2, 3) = (1, 2, 3)$
   D. $(2, 3, 5) \in$ Gör T
   E. T örtendir.

6. $T : P_2 (\mathbf{R}) \rightarrow P_2 (\mathbf{R})$
   $T(a + bx + cx^2) = ax^2 + b$
   lineer dönüşümü veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

   A. $p(x) = x^2 \in$ Çek T
   B. $p(x) = x^2 + 2x - 5 \in$ Çek T
   C. $p(x) = x^2 + 3 \in$ Çek T
   D. $p(x) = x + 7 \in$ Çek T
   E. $p(x) = 10 \in$ Çek T

7. $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^5$ bir lineer dönüşüm veriliyor. Boy Çek T = 1 ise boy Gör T nedir?

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

8. $T: V \rightarrow \mathbf{R}^4$ lineer dönüşümünde Çek T = { 0 } ve T örten ise boy V nedir?

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

9. $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow W$ lineer dönüşümünde T örten bir dönüşüm ise boy W en çok kaç olabilir?

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

10. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

   A. Bir lineer dönüşümün çekirdeği tanım kümesinin alt uzayıdır.
   B. Bir dönüşümde $T(0) = 0$ ise dönüşüm lineerdir.
   C. $T: V \rightarrow W$
      boy V = boy Çek T + boy Gör T
   D. Bir lineer dönüşümde Çek T = { 0 } ise dönüşüm 1-1 dir.
   E. $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$
      örten bir dönüşüm olduğunda boy Çek T = 2 dir.

11. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A. $T: V \to W$ lineer dönüşümünde Çek $T = \{0\}$ ise
boy V = boy Gör $T \leq$ boy W
B. $T: V \to W$ lineer dönüşümünde Çek $T = \{0\}$ ise
$A, B \in V$ ve $C \in W$ için
$T(A) = T(B) = C$
C. $T : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^3$
örten bir dönüşüm ise boy Çek $T = 4$ tür.
D. $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$
lineer dönüşümünde Çek$T = \{0\}$ olamaz.
E. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^5$
örten bir lineer dönüşüm değildir.

12. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$
$T(x, y, z) = (x, y, x + y)$ bir lineer dönüşüm ise $T^2\ (1, 3, 5)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1, 9, 25) B. (1, 3, 9) C. (5, 3, 1) D. (1, 3, 4) E. (3, 1, 5)

13. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$T(x, y) = (x, 0)$ ise $T^2 = T$ dir.
B. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ $T(x, y) = (0, x)$
$S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $S(x, y) = (0, x, y)$
ise $(S \circ T)(x, y) = (0, 0, x)$
C. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $T(x, y) = x$ lineer dönüşümde Çek $T = \{0\}$ dır.
D. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $T(x, y) = (x, 0, 0)$ bir lineer dönüşüm olduğuna göre
$3\,T(3, 5) = (9, 0, 0)$ dır.
E. $T, S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ lineer dönüşüm olsun.
$T(x, y) = (0, x)$, $S(x, y) = (y, 0)$ ise
$(S \circ T)(1, 5) = (1, 0)$ dır.

14. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A. T : $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$
$T(1, 0) = (1, -2)$, $T(0, 1) = (4, 3)$ ise $T(x, y) = (x + 4y, -2x + 3y)$ dir.

B. T : $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$
$T(1, 0) = (1, 2, 1)$, $T(0, 1) = (2, 0, 1)$ ise $T(x, y) = (x + 2y, 4x)$

C. T : $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$
$T(x) = (x, 2x, 3x)$ ise $T(5) = (1, 2, 3)$

D. T : $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
$T(x, y) = x + y$ ise $T(1, 1) = 1$

E. T : $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
$T(x) = 10x$ ise Çek $T = 10$ dur.

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. B 2. E 3. C 4. D 5. B 6. A 7. C 8. E 9. D 10. B
11. B 12. D 13. C 14. A

Bir Lineer Dönüşümün Matrislerle Gösterilmesi

ÜNİTE 8

Yazar
Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Bir lineer dönüşümü temsil eden matrisin bulunuşunu öğrenecek,
- Bir dönüşüm matrisi verildiğinde görüntü kümesini bulabilecek,
- Taban değişim matrisini öğrenecek,
- Bir lineer dönüşümün farklı tabanlara göre hesaplanmış iki matrisi arasındaki ilişkiyi öğrenecek,
- Aynı boyutlu iki matris verilirse bunların hangi koşullarda aynı dönüşümü temsil ettiğini öğrenecek,
- Dönüşüm matrislerinin, lineer dönüşümlerin cebirsel işlemlerinde sağladığı kolaylıkları göreceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 171
- Taban Değişim Matrisi 177
- Değerlendirme Soruları 185

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışmadan önce Ünite 7' yi yeniden dikkatlice gözden geçiriniz.

1. Giriş

Bu bölümde lineer dönüşümlerle matrisler arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. $T : V \to W$ lineer dönüşümünü temsil eden dönüşüm matrisini bulacağız. Dönüşüm matrisi, lineer dönüşümü açıkça belirlemek için uygun bir model olup, lineer dönüşümlerle ilgili cebirsel işlemlerde kolaylık sağlar. Bunun yanında, bir matrisin özelliklerini incelemek için o matrisin temsil ettiği lineer dönüşümden yararlanmak da mümkündür.

1.1. Bir Lineer Dönüşümün Matrisi

$T : V \to W$ lineer dönüşümü verilsin.

$E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $F = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ kümeleri sırasıyla V ve W vektör uzaylarının birer tabanı olsun. Burada boy V= n, boy W= m olduğuna dikkat ediniz. V nin E deki taban vektörlerinin T altındaki görüntüleri, $T(x_1), T(x_2), ..., T(x_n) \in W$ dir. Bu vektörler, W nin taban vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
T(x_1) &= a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \\
T(x_2) &= a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \\
&\vdots \\
T(x_n) &= a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan tek türlü $y_{ij} \in \mathbf{R}$ (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ... , n) sayıları vardır.

Yukarıdaki eşitliklerdeki y_i lerin katsayılarının oluşturduğu matrisin transpozesi olan mxn boyutlu $A = (a_{ij})$ matrisine **T lineer dönüşümünün E ve F tabanlarına göre matrisi** denir ve

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

ile gösterilir.

Buna göre, $T : V \to W$ lineer dönüşümünün tanım kümesi n-boyutlu, değer kümesi m-boyutlu ise dönüşümü temsil eden matris mxn boyutludur.

Şimdi çeşitli lineer dönüşümlerin dönüşüm matrislerini bulalım:

1.2. Örnek

T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$

T (x, y, z) = (x + y , y - z)

lineer dönüşümünün

S = { s_1 = (1, 0, 1), s_2 = (0, 1, 1), s_3 = (1, 1, 1) } ve F = { f_1 = (1,2) , f_2 = (-1, 1) } tabanlarına göre dönüşüm matrisini bulunuz.

Çözüm

Dönüşüm matrisi 2x3 boyutludur. Bu matrisin sütunları T (s_J) vektörlerinin F tabanına göre koordinatlarından oluşur. (Bir vektörün bir tabana göre koordinatlarını 6. Ünitede bulmuştuk)

$T(s_1) = T(1, 0, 1) = (1 + 0, 0 - 1) = (1, -1)$
$(1, -1) = a f_1 + b f_2 = a (1, 2) + b (-1, 1)$
$(1, -1) = (a - b, 2a + b)$
$a - b = 1$
$2a + b = -1$ olur. Buradan $a = 0$, $b = -1$ bulunur.

$T(s_1) = 0 f_1 + (-1) f_2$

olup, dönüşüm matrisinin 1. sütunu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olur.

$T(s_2) = T(0, 1, 1) = (0 + 1, 1 - 1) = (1, 0)$
$(1, 0) = a f_1 + b f_2 = a (1, 2) + b (-1, 1)$

eşitliğinden $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, bulunuı

$T(s_2) = \frac{1}{3} f_1 - \frac{2}{3} f_2$

olup matrisin 2. sütunu $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ olur

$T(s_3) = T(1, 1, 1) = (1 + 1, 1 - 1) = (2, 0)$
$(2, 0) = a f_1 + b f_2 = a (1, 2) + b (-1, 1)$

eşitliğinden $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$, bulunuı

$T(s_3) = \frac{2}{3} f_1 - \frac{4}{3} f_2$

olup matrisin 3. sütunu $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

olur. Böylece T lineer dönüşümünün matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ -1 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}_{2x3}$$

elde edilir.

1.3. Örnek

T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z) = (x + y + z , 2x + y , 3x + z)$

lineer dönüşümünün standart tabana göre matrisini bulunuz.

Çözüm

$\mathbf{R}^3$ de standart tabanın

$E = \{ e_1 = (1, 0, 0) ,\ e_2 = (0, 1, 0) ,\ e_3 = (0, 0, 1) \}$ olduğunu biliyoruz. T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ dönüşümünde $T (e_1) = T (1, 0, 0) = (1 + 0 + 0,\ 2.1 + 0,\ 3.1 + 0) = (1, 2, 3)$

Bir vektörün standart tabana göre bileşenleri kendi bileşenleri olduğundan

$T (e_1) = (1, 2, 3) = 1 e_1 + 2 e_2 + 3 e_3$
$T (e_2) = (1, 1, 0) = 1 e_1 + 1 e_2 + 0 e_3$
$T (e_3) = (1, 0, 1) = 1 e_1 + 0 e_2 + 1 e_3$

olur. Buna göre T dönüşüm matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

olarak elde edilir.

1.4. Örnek

$T: P_2(\mathbf{R}) \to P_3(\mathbf{R})$
$T(p(x)) = x\,p(x)$

lineer dönüşümünün $P_2(\mathbf{R})$ nin ve $P_3(\mathbf{R})$ nin standart tabanlarına göre matrisini bulunuz.

Çözüm

Dönüşüm matrisi 4x3 boyutundadır. (Nedenini açıklayınız.)

$P_2(\mathbf{R})$ nin standart tabanı $\{1, x, x^2\}$
$P_3(\mathbf{R})$ nin standart tabanı $\{1, x, x^2, x^3\}$ dür.

$T(1) = x.1 = 0 1 + 1\,x + 0\,x^2 + 0\,x^3$
$T(x) = x.x = x^2 = 0\,1 + 0\,x + 1\,x^2 + 0\,x^3$
$T(x^2) = x.x^2 = x^3 = 0\,1 + 0\,x + 0\,x^2 + 1\,x^3$

olur. Buradan T dönüşüm matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x3}$$

bulunur.

Böylece

$T : V \to W$

lineer dönüşümüne V nin bir $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ve W nin $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ tabanları yardımı ile bir $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinin nasıl karşılık getirildiğini gördük. Şimdi de dönüşüm matrisi yardımı ile V deki vektörlerin görüntülerinin nasıl bulunacağını görelim:

$T : R^n \to R^m$

lineer dönüşümün standart tabanlara göre matrisi A olsun.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

$x \in R^n$ olmak üzere $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektörünün görüntüsü,

$$T(x) = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$y = T(x) = Ax$

şeklinde bulunur.

1.5. Örnek

T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$

lineer dönüşümünün $\mathbf{R}^3$ ve $\mathbf{R}^2$ nin standart tabanlarına göre matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{2x3}$$

olsun. T nin kuralını ve (1, 2, 3) vektörünün T altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm

$x = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ vektörünün T altındaki görüntüsü T (a, b, c) yi bulalım.

Yukarıda ifade edildiği şekilde,

$$T(x) = Ax \text{ , } T(x) = T(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$T(a, b, c) = (a + c, 2a + 3b - c)$

olur. Buradan,

$T(1, 2, 3) = (4, 5)$

bulunur.

1.6. Örnek

$T: P_2(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$

$T(ax^2 + bx + c) = (a + c)x^2 + (a - b)x + (b - c)$

lineer dönüşümü veriliyor.

$E = \{1, x, x^2\}$ ve $F = \{x, x-1, x^2 - 1\}$

tabanlarına göre T nin dönüşüm matrisini bulunuz. Dönüşüm matrisinden yararlanarak $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$ vektörünün görüntüsünü bulunuz.

Çözüm

Dönüşüm matrisini şimdiye değin gördüğümüz yöntemle bulalım. Yani E kümesindeki her bir vektörün T altındaki görüntüsünün, F tabanına göre koordinatları, dönüşüm matrisinin sütunlarını oluşturur. Dönüşüm matrisi 3x3 boyutundadır.

$$T(1) = T(0x^2 + 0x + 1) = (0 + 1)x^2 + (0 - 0)x + (0 - 1) = x^2 - 1$$

T (1) in F tabanına göre yazılışı,

$$T(1) = x^2 - 1 = 0x + 0(x-1) + 1(x^2 - 1)$$

dir. Benzer şekilde,

$$T(x) = T(0x^2 + 1x + 0\,1) = (0 + 0)x^2 + (0 - 1)x + (1 - 0) = -x + 1$$

dir. T (x) in F tabanına göre yazılışı

$$T(x) = -x + 1 = 0x + (-1)(x-1) + 0(x^2 - 1)$$

olur. Benzer şekilde,

$$T(x^2) = T(1x^2 + 0x + 0\,1) = (1 + 0)x^2 + (1 - 0)x + (0 - 0) = x^2 + x$$

$T(x^2)$ in F tabanına göre yazılışı

$$T(x^2) = x^2 + x = 2x + (-1)(x-1) + 1(x^2 - 1)$$

olur. Buna göre dönüşüm matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Bu dönüşüm matrisinden yararlanarak $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$ vektörünün görüntüsünü bulalım:

A matrisinin sütünları sırasıyla $T(1), T(x), T(x^2)$ nin $\{x, x-1, x^2-1\}$ tabanına göre koordinatları;

$$T(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T(1) &= 0\,x + 0\,(x-1) + 1\,(x^2-1) = x^2 - 1 \\ T(x) &= 0\,x + (-1)(x-1) + 1\,(x^2-1) = -x + 1 \\ T(x^2) &= 2\,x + (-1)(x-1) + 1\,(x^2-1) = x^2 + x \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} T(3x^2 + 2x + 1) &= 3\,T(x^2) + 2\,T(x) + T(1) \\ &= 3\,(x^2 + x) + 2\,(-x + 1) + x^2 - 1 \\ &= 4x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

2. Taban Değişim Matrisi

$T : V \to W$ lineer dönüşümünün matrisi, V ve W nin tabanlarının seçimine bağlıdır. Bunu bir örnekte görelim:

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

$$T(x, y) = (x, y, x + y)$$

lineer dönüşümünün

a) $\mathbf{R}^2$ ve $\mathbf{R}^3$ ün standart tabanlarına göre matrisini,

b) $\{(1, 1), (1, 0)\}$ ve $\{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (-1, 0, 2)\}$ tabanlarına göre matrisini bulalım:

(a) şıkkı için dönüşüm matrisini bulalım:

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ ve $\{(1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ standart tabanlarını alalım,

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (1, 0, 1 + 0) = (1, 0, 1) = 1\,(1, 0, 0) + 0\,(0, 1, 0) + 1\,(0, 0, 1) \\ T(0, 1) &= (0, 1, 0 + 1) = (0, 1, 1) = 0\,(1, 0, 0) + 1\,(0, 1, 0) + 1\,(0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

dönüşüm matrisi bulunur.

(b) şıkkı için dönüşüm matrisini bulalım:

$$T(1, 1) = (1, 1, 1 + 1) = (1, 1, 2) = a(1, 0, 0) + b(0, -1, 1) + c(-1, 0, 2)$$
$$(1, 1, 2) = (a - c, - b, b + 2c)$$
$$a = \frac{5}{2}, \; b = -1, \; c = \frac{3}{2}$$
$$T(1, 1) = \frac{5}{2}(1, 0, 0) - 1(0, -1) + \frac{3}{2}(-1, 0, 2)$$

bulunur.

$$T(1, 0) = (1, 0, 1) = a(1, 0, 0) + b(0, -1, 1) + c(-1, 0, 2)$$
$$(1, 0, 1) = (a - c, - b, b + 2c)$$
$$a = \frac{3}{2}, \; b = 0, \; c = \frac{1}{2}$$
$$T(1, 0) = \frac{3}{2}(1, 0, 0) + 0(0, -1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 0, 2)$$

bulunur.

$$B = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}_{3x2}$$

olur. A ve B matrisleri aynı bir T dönüşümünün farklı tabanlara göre matrisleridir. Böylece, dönüşüm matrisinin, tabanlarının seçimine bağlı olduğu görülür.

Şimdiye değin önce, $T : V \to W$ lineer dönüşümünü temsil eden matrisin bulunuşunu sonrada dönüşüm matrisinden yararlanarak V nin herhangi bir vektörünün görüntüsünün nasıl bulunacağını belirttik. Ayrıca T dönüşüm matrisinin seçilen tabanlara bağlı olduğunu gördük. Dönüşüm matrislerini, lineer dönüşümler arasındaki toplama, çıkarma, skalerle çarpma, bileşke gibi cebirsel işlemlerimizi kolaylaştırmak için kullanabiliriz. Bu nedenle, matrisin mümkün olan en yalın biçimde olması istenir. Acaba böyle bir matris elde etmek için tabanlar nasıl seçilmelidir? Bu soruyu ilerde yanıtlayacağız. Şimdi şu sorulara yanıt arayalım:

(i) V n-boyutlu W m-boyutlu vektör uzayları olmak üzere, $T : V \to W$ lineer dönüşümünün V nin E, W nin F tabanlarına göre dönüşüm matrisi $A = (a_{ij})_{mxn}$ V nin E', W nin F' tabanlarına göre dönüşüm matrisi $B = (b_{ij})_{mxn}$ ise A ve B matrisleri arasında nasıl bir ilişki vardır?
(ii) mxn boyutlu farklı iki A ve B matrisleri verildiğinde bunlar ne zaman aynı bir $T : V \to W$ dönüşümünü temsil eder?

Bir lineer dönüşümün farklı tabanlara göre dönüşüm matrisleri A ve B ise bu matrisler arasındaki ilişkiyi belirlemek için önce taban değişim matrisini tanımlayalım:

2.1. Tanım

V vektör uzayının

$E = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ ve $E' = \{ y_1, y_2, ..., y_n \}$ farklı iki tabanı olsun.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= p_{11} x_1 + p_{21} x_2 + ... + p_{n1} x_n \\
y_2 &= p_{12} x_1 + p_{22} x_2 + ... + p_{n2} x_n \\
&\vdots \\
y_n &= p_{1n} x_1 + p_{2n} x_2 + ... + p_{nn} x_n
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Buradaki p_{ij} $i, j = 1, 2, ..., n$ katsayılarıyla oluşturulan matrisin transpozesine E den E' ye **geçiş matrisi** veya E den E' ye **taban değişimi matrisi** denir ve

$$
P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{pmatrix}_{nxn}
$$

biçiminde yazılır. $y_1, y_2, ..., y_n$ taban vektörleri lineer bağımsız olduğu için P matrisi bir tersinir matristir. P nin ters matrisi P^{-1} de E' den E ye taban değişim matrisidir.

2.2. Örnek

$\mathbf{R}^2$ nin

$E = \{ (1, 1), (1, 0) \}$ ve $E' = \{ (-1, 0), (2, -1) \}$

iki tabanı olduğuna göre:

(i) E den E' ye taban değişim matrisini,
(ii) E' den E ye taban değişim matrisini bulunuz.

Çözüm

(i) $(-1, 0) = p_{11} (1, 1) + p_{21} (1, 0) = (p_{11} + p_{21} , p_{11})$ buradan $p_{11} = 0$, $p_{21} = -1$
$(-1, 0) = 0 (1, 1) + (-1) (1, 0)$

bulunur. Benzer olarak,

$(2, -1) = p_{12} (1, 1) + p_{22} (1, 0) = (p_{12} + p_{22} , p_{12})$ buradan $p_{12} = -1$, $p_{22} = 3$
bulunur.
$(2, -1) = (-1) (1, 1) + 3 (1, 0)$

yazılır. Böylece

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

E den E' ye taban değişim matrisidir.

(ii) E' den E ye taban değişim matrisini bulalım:

$(1, 1) = p_{11} (-1, 0) + p_{21} (2, -1) = (-p_{11} + 2p_{21}, -p_{21})$ buradan $p_{11} = -3$, $p_{21} = -1$ bulunur.
$(1, 1) = (-3) (-1, 0) + (-1) (2, -1)$

yazılır. Benzer olarak

$(1, 0) = p_{12} (-1, 0) + p_{22} (2, -1) = (-p_{12} + 2p_{22}, -p_{22})$ buradan $p_{12} = -1$, $p_{22} = 0$ bulunur.
$(1, 0) = -1 (-1, 0) + 0 (2, 1)$

yazılır.

$$P' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

E' den E ye taban değişim matrisidir. Ayrıca

$$P.P' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

olduğundan $P' = P^{-1}$ dir.

2.3. Teorem

$A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrisleri ve V_n, W_m vektör uzayları verilsin.
$A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrislerinin farklı taban çiftine göre aynı

$$T : V \rightarrow W$$

lineer dönüşümünü temsil etmeleri için gerekli ve yeterli koşul

$$A = P\,B\,Q^{-1}$$

eşitliğini sağlayan $P = (p_{ij})_{mxm}$ $Q = (q_{ij})_{nxn}$ taban değişim matrislerinin var olmasıdır.

Teoremin kanıtını lineer cebir kitaplarında bulabilirsiniz.

Bu teorem ile 178. sayfadaki soruların yanıtlarını da vermiş olduk.

2.4 Örnek

$T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$T(x, y, z) = (y + z , x + z , y + z)$

lineer dönüşümü ve $\mathbf{R}^3$ ün

$E = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ ve $F = \{ (1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, -1) \}$ tabanları verilsin.

(i) T nin E tabanına göre A matrisini
(ii) T nin E den F ye P taban değişim matrisini
(iii) T nin F tabanına göre B matrisini bulunuz.

Çözüm

(i) T nin E tabanına göre matrisini bulmak için; E deki vektörlerin T altındaki görüntülerin yine E tabanına göre koordinatları bulunur. Bu koordinatlar A nın sütun vektörlerini oluşturur:

$T (1, 0, 0) = (0, 1, 0) = 0 (1, 0, 0) + 1 (0, 1, 0) + 0 (0, 0, 1)$
$T (0, 1, 0) = (1, 0, 1) = 1 (1, 0, 0) + 0 (0, 1, 0) + 1 (0, 0, 1)$
$T (0, 0, 1) = (1, 1, 1) = 1 (1, 0, 0) + 1 (0, 1, 0) + 1 (0, 0, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

(ii) T nin E den F ye P taban değişim matrisini bulalım:

Bir vektörün standart tabana göre koordinatlarının kendi bileşenleri olduğu göz önüne alınarak,

$(1, 1, 1) = 1 (1, 0, 0) + 1 (0, 1, 0) + 1 (0, 0, 1)$
$(1, -1, 0) = 1 (1, 0, 0) + (-1) (0, 1, 0) + 0 (0, 0, 1)$
$(0, 1, -1) = 0 (1, 0, 0) + 1 (0, 1, 0) + (-1) (0, 0, 1)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

(iii) T nin F tabanına göre B matrisini bulalım:

(i) şıkkında olduğu gibi burada da F tabanını iki kez kullanacağız.

$$T(1, 1, 1) = (2, 2, 2) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(0, 1, -1)$$
$$= (2, 2, 2) = (a + b,\ a - b + c,\ a - c)$$

buradan $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ bulunur. Bu değerler B matrisinin 1. sütunudur.

$$T(1, -1, 0) = (-1, 1, -1) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(0, 1, -1)$$

$a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{2}{3}$ bulunur. Bu değerler B matrisinin 2. sütunudur.

$$T(0, 1, -1) = (0, -1, 0) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(0, 1, -1)$$

$a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$ bulunur. Bu değerler B matrisinin 3. sütunudur.

Böylece

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Aslında B matrisini $A = PBP^{-1}$ den $B = P^{-1}AP$ şeklinde yazarak da bulabiliriz. Önce P^{-1} matrisini bulalım:

P^{-1}, P nin ters matrisi olup aynı zamanda F den E ye taban değişim matrisidir. P^{-1} i bu yolla bulalım:

$$(1, 0, 0) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(0, 1, -1)$$
$$(1, 0, 0) = (a + b,\ a - b + c,\ a - c)$$

buradan $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$ bulunur. Bu değerler aynı zamanda P^{-1} matrisinin 1. sütunudur.

$$(0, 1, 0) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(0, 1, -1)$$

buradan $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$ bulunur. Bu değerler P^{-1} matrisinin 2. sütunudur.

$(0, 0, 1) = a\,(1, 1, 1) + b\,(1, -1, 0) + c\,(0, 1, -1)$

buradan $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = -\frac{2}{3}$ bulunur. Bu değerler P^{-1} matrisinin 3. sütunudur.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

taban değişim matrisi bulunur. Şimdi P^{-1}, A, P matrislerini

$B = P^{-1} A P$

eşitliğinde yerine koyarak B matrisini bir de bu yolla elde edelim:

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bu çarpma işlemleri yapılarak B matrisi bulunur. B matrisinin T lineer dönüşümünün bir matrisi olduğunu anımsarsak dönüşüm matrisleriyle ilgili sayfa 178 deki sorulara yanıt vermiş oluruz. Sonuç olarak; $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrislerinin aynı bir $T : V_n \rightarrow W_m$ dönüşümünün matrisi olmaları için P ve Q taban değişim matrisleri olmak üzere $A = P\,B\,Q^{-1}$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

- **Uyarı** boy V = boy W ise P = Q olup $Q^{-1} = P^{-1}$ dir.

Lineer dönüşümleri matrislerle temsil etmemizin nedenlerinden biri, lineer dönüşümler arasındaki cebirsel işlemlerin, bu dönüşüm matrisleri arasında daha kolay yapılmasıdır. Şimdi bununla ilgili örnekler verelim:

2.5 Örnek

$T, S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z) = (3x + y - 2z\,,\; x + 7y + z\,,\; x - 3y + 5z)$
$S(x, y, z) = (5x - y - z\,,\; 2x - 3z\,,\; x - 4y)$

lineer dönüşümleri verilsin.

$S \circ T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$(S \circ T)(x, y, z) = S(T(x, y, z))$

dönüşümünü bulunuz.

Çözüm

$$(S \circ T)(x, y, z) = S(T(x, y, z))$$
$$= S(\underbrace{3x + y - 2z}_{a}, \underbrace{x + 7y + z}_{b}, \underbrace{x - 3y + 5z}_{c})$$

buna göre,

$$(S \circ T)(x, y, z) = (5a - b - c,\ 2a - 3c,\ a - 4b)$$
$$= (5(3x + y - 2z) - (x + 7y + z) - (x - 3y + 5z),\ 2(3x + y - 2z) - 3(x - 3y + 5z),$$
$$3x + y - 2z - 4(x + 7y + z))$$

$$(S \circ T)(x, y, z) = (13x + y - 16z,\ 3x + 11y - 19z,\ -x - 27y - 6z)$$

olarak bulunur. Aynı işlemi dönüşüm matrisleriyle yapalım. T nin standart tabana göre dönüşüm matrisi;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

S nin standart tabana göre dönüşüm matrisi;

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

ise

$(S \circ T) \Leftrightarrow B.\ A$ matris çarpımdır:

$$S \circ T \Leftrightarrow B.\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & -16 \\ 3 & 11 & -19 \\ -1 & -27 & -6 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan dönüşümü yazarsak,

$$(S \circ T)(x, y, z) = (13x + y - 16z,\ 3x + 11y - 19z,\ -x - 27y - 6z)$$

elde edilir.

Şimdi de bir matrisin özelliklerini incelemek için matrisin temsil ettiği lineer dönüşümden yararlanalım:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi verilsin. $A^3 = 0$ olduğunu gösterelim. Şüphesiz $A^3 = A^2$. A çarpma işlemini yaparak sonucu bulabiliriz.

Burada standart tabanlara göre dönüşüm matrisi A olan

$$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

lineer dönüşümü kullanalım. Bu lineer dönüşüm

$$T\,(a, b, c) = (0, a, b)$$

olur. (1.5 Örneğe tekrar bakınız.)

$$T^3\,(a, b, c) = T^2\,(\,T\,(a, b, c))\ = T\,(\,T\,(T\,(a, b, c))\,)$$

$$= T\,(T(0, a, b)) = T\,(0, 0, a) = (0, 0, 0)$$

Buradan $A^3 = 0$ olduğu bulunur.

Değerlendirme Soruları

1. $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$
   $T\,(x, y, z) = (x - y\,,\, y - z\,,\, x + y)$
   lineer dönüşümünün standart tabana göre matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$
   $T\,(x) = (x,\ 3x)$
   lineer dönüşümünün standart tabana göre matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$T(x, y) = (x + y,\ x - y)$
lineer dönüşümünün $\mathbf{R}^2$ nin { (1, 1), (1, 0) } tabanına göre dönüşüm matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

4. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$
$T(x, y) = (0,\ x,\ y)$
lineer dönüşümünün $\mathbf{R}^2$ ve $\mathbf{R}^3$ ün sırasıyla;
{ (1, 1), (1, 0) }, { (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0) } tabanlarına göre dönüşüm matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineer dönüşümünün standart tabana göre matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğuna göre T (x, y, z) aşağıdakilerden hangisidir?

A. (x, y, z)
B. (x + y, 2x - 1, -1 + x - y)
C. (x + 2y, 2x +3y + z, - x + y)
D. (x + 2x - y , 2x + 3y + z , y)
E. (x , x + 3y + 2z , -x + 2y - 5z)

6. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ lineer dönüşümünün standart tabanlara göre dönüşüm matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

veriliyor. T (1, 0, 1) aşağıdakilerden hangisidir?

A. (2, 5) B. (5, 2) C. (1, 1)
D. (3, 5) E. (-1, -1)

7. $\mathbf{R}^2$ nin E = { (1, 0), (0, 1)} , E' = { (1, 1), (0, 1) } tabanları veriliyor. E den E' ye taban değişim matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{R}^3$ ün E = { (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) } , E' = { (1, 0, 0), (0, -1, 1), (-1, 0, 1) } tabanları veriliyor. E den E' ye taban değişim matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. T, S : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
T (x, y) = (x + y , x)
S (x, y) = (y , x + y)
lineer dönüşümünün (S o T) (x, y) dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. (x + y, x - y) B. (x, 2x + y)
C. (x - y , 2x + y) D. (x - y + 1 , y - z)
E. (x - 1 , y - 1)

10. 9. uncu sorudaki (2T + 5S) (x, y) = ? dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

A. (x + y , 2x + 5y) B. (2x + 7y , 7x + 5y)
C. (x - y + 1 , y + 1) D. (x - y + 3 , x - y)
E. (0 , x + y + 3)

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. A 3. B 4. C 5. C 6. D 7. C 8. B 9. B 10. B

Özdeğer ve Özvektörler

ÜNİTE
9

Yazar
Öğr.Grv.Dr.Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- bir lineer dönüşümün ve bir matrisin özdeğer ve özvektör kavramlarını anlayacak,
- bir dönüşüm matrisinin karakteristik polinom, özdeğer ve özvektörlerinin nasıl bulunduğunu öğrenecek,
- bir dönüşüm matrisinin ne zaman köşegen matris biçiminde yazılabileceğini öğrenecek,
- simetrik matrisin daima bir köşegen matris biçiminde yazılabileceğini öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 191
- Karakteristik Polinom 193
- Bir Matrisin Köşegenleştirilmesi 199
- Değerlendirme Soruları 212

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışmaya başlamadan önce 7. ve 8. Üniteleri tekrar gözden geçiriniz.

1. Giriş

Ünite 8 de sonlu boyutlu V ve W vektör uzayları için bir $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşümünün V ve W nin verilen tabanlarına göre matris temsilini gördük. Tabanlar değiştiğinde dönüşüm matrisinin de değiştiğini biliyoruz. Dönüşüm matrisi lineer dönüşümlerde yapılan ispatları, işlemleri kolaylaştırmak için kullanılabileceğinden, matrisin basit olması, yani matriste sıfır öğelerinin çok sayıda olması, özellikle bir köşegen matris olması önemlidir. Bu bölümde, V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere $T : V \rightarrow V$ şeklindeki bir lineer dönüşümün matrisinin, köşegen matris olması için gerekli koşulları inceleyeceğiz.

$$T : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümünün, V nin $\{ x_1 , x_2 , \dots , x_n \}$ tabanına göre dönüşüm matrisi köşegen matris olsun.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bu matrisin nasıl bulunduğunu biliyoruz: Matrisin sütunları $T(x_1)$, $T(x_2)$, ... , $T(x_n)$ vektörlerinin $\{ x_1 , x_2 , \dots , x_n \}$ tabanına göre koordinatları olduğundan

$$T(x_1) = \lambda_1 x_1 + 0 \,.x_2 + \dots + 0 \,.x_n$$

$$T(x_2) = 0 \,.x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + 0 \,.x_n$$

$$\vdots$$

$$T(x_n) = 0 \,.x_1 + 0 \,.x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

veya

$$T(x_1) = \lambda_1 x_1$$

$$T(x_2) = \lambda_2 x_2$$

$$\vdots$$

$$T(x_n) = \lambda_n x_n$$

olduğu görülür. Buna göre, dönüşüm matrisi bir köşegen matris ise taban vektörlerinin görüntüleri, kendilerinin bir katıdır. Tersine olarak bir lineer dönüşümde, taban vektörlerinin görüntüleri kendilerinin bir katı oluyorsa dönüşüm matrisi köşegen matris olur. O halde bir lineer dönüşümün matrisinin köşegen matris olması için öğelerinin herbirini kendi katlarına gönderen bir taban bulmalıyız.

1.1. Tanım

$T: V \rightarrow V$ lineer dönüşümü verilsin.

$x \in V$, olan sıfırdan farklı bir x vektörü için $T(x) = \lambda x$ eşitliğini sağlayan bir λ sayısı varsa, λ sayısına T dönüşümünün **özdeğeri,** x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen **özvektörü** denir.

Bu tanımın ardından aşağıdaki önemli teoremi ifade edelim:

1.2. Teorem

V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $T: V \rightarrow V$ bir lineer dönüşüm olsun. T nin dönüşüm matrisinin bir köşegen matris olması için gerekli ve yeterli koşul T nin özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerin V için bir taban oluşturmasıdır.

Kanıt

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tabanına göre T nin matrisinin nasıl bulunduğunu anımsayarak teoremin kanıtını yapınız.

Bir kare matris bir lineer dönüşüm olarak düşünüldüğünde, bu lineer dönüşümün özdeğer ve özvektörlerine o matrisin özdeğerleri ve özvektörleri denir. Daha açık olarak, $A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisinin $\mathbf{R}^n$ in standart tabanına göre belirlediği T lineer dönüşümünü göz önüne alırsak, T nin özdeğer ve özvektörlerine A nın özdeğer ve özvektörleri denir. Bir λ sayısının A matrisinin özdeğeri olması

$$Ax = \lambda x$$

koşulunu sağlayan $x \neq 0$ olacak şekilde bir x vektörünün var olmasıdır. Bu x vektörüne A matrisinin λ özdeğerine karşı gelen özvektörü denir.

λ, $T: V \rightarrow V$ lineer dönüşümünün bir özdeğeri ise, her $c \in \mathbf{R}$ için

$$T(cx) = cT(x) = c(\lambda x) = \lambda(cx)$$

yazabiliriz. Buna göre, x vektörünün her c skaleriyle çarpımı λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Bu vektörlerin kümesi V nin bir alt uzayını oluştururlar. Bu alt uzaya λ özdeğerine karşı gelen T nin **özuzayı** denir.

1.3. Örnek

$I : V \to V$ birim dönüşüm olsun. Her $x \in V$ için

$$I(x) = x = 1 \cdot x$$

Böylece $\lambda = 1$, I nın bir özdeğeri ve V içindeki her vektörde 1 özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

1.4. Örnek

V türevlenebilen fonksiyonların vektör uzayı ve D türev dönüşümü olsun.

$$D : V \to V$$
$$D(e^{3t}) = 3e^{3t}$$

yazılabilir.

Burada $\lambda = 3$ özdeğer, $x = e^{3t}$, bu özdeğere karşılık gelen özvektördür.

Özdeğer ve özvektör yerine karakteristik değer ve karakteristik vektör deyimleri de kullanılır.

2. Karakteristik Polinom

2.1. Tanım

$$T : V \to V$$

lineer dönüşümünün, V nin $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tabanına göre matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

olsun. I_n, birim matris ve λ bilinmeyen bir sayı olmak üzere, $A - \lambda I_n$ matrisine **karakteristik matrisi** denir. Bu matrisin determinantı

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

λ nın bir polinomu olup, bu polinoma T nin **karakteristik polinomu** denir.

$$T(\lambda) = | A - \lambda I_n | = 0$$

denklemine de **karakteristik denklem** denir.

Şimdi karakteristik polinomun, T nin matris gösteriminin bulunmasında seçilen tabana bağlı olmadığını gösterelim:

$T : V \rightarrow V$ lineer dönüşümü verilsin.

V nin $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tabanına göre T nin matrisi A, V nin $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ tabanına göre T nin matrisi B ise A ve B matrislerinin karakteristik polinomları aynıdır:

A ve B aynı bir lineer dönüşümü temsil ettiklerine göre bu iki matris arasında

$$A = P B P^{-1}$$

ilişkisi vardır (Ünite 8, 2.3 Teorem). Buradan,

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |P B P^{-1} - \lambda I| \\ &= |P B P^{-1} - \lambda P I P^{-1}| \\ &= |P (B - \lambda I) P^{-1}| \\ &= |P| \; |B - \lambda I| \; |P^{-1}| \\ &= |B - \lambda I| \; |P| \; |P^{-1}| \\ |A - \lambda I| &= |B - \lambda I| \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre bir lineer dönüşümün karakteristik polinomu dönüşüm matrisinin hesaplandığı tabana bağlı değildir. Bir başka ifadeyle, benzer matrislerin karakteristik polinomları aynıdır.

2.2. Teorem

$A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisinin özdeğerleri karakteristik polinomun gerçel kökleridir.

Kanıt

λ, A nın bir özdeğeri ve bu özdeğere karşı gelen bir vektörde x olsun.

$$\begin{aligned} A x &= \lambda x \\ A x &= (\lambda I_n) x \\ (A - \lambda I_n) x &= 0 \end{aligned}$$

Bu sistem n bilinmeyenli n denklemden oluşan homojen lineer denklem sistemidir. Sistemin sıfır çözümden başka çözümlerinin olması için gerekli ve yeterli koşul

$$| A - \lambda I_n | = 0$$

olmasıdır. Böylece A nın özdeğerleri

$$T(\lambda) = | A - \lambda I_n |$$

karakteristik polinomunun kökleridir.

O halde bir lineer dönüşüm verildiğinde özdeğerlerini bulmak için, herhangi bir tabana göre yazılan dönüşüm matrisinin karakteristik polinomunun kökleri bulunur.

2.3. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini ve bunlara karşı gelen özvektörleri bulunuz.

Çözüm

A nın karakteristik polinomu,

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$$

olup $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$ denkleminin kökleri özdeğerlerdir. Bu denklemin kökleri 12 nin çarpanlarını denklemde deneyerek $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = -2$ bulunur. Şimdi bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulalım:

λ özdeğerine karşı gelen x özvektörü

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

ise

$$(A - \lambda I_3) x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

olur.

$\lambda = 2$ için

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Burada 1. denklem, 2. denklemin -1 katıdır, bu durumda

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemin çözümü için x_1 bilinmeyenini bilinen kabul edersek, sistemin çözümü

$$x_3 = -x_1 \quad \text{ve} \quad x_2 = 0$$

bulunur.

$x_1 = k$ için $x_3 = -k$, $x_2 = 0$

$$x = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece, $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $k \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ biçimindedir. Buna göre $\lambda = 2$ özdeğerinin özuzayı $\left\{ \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \mid k \neq 0 \ , \ k \in \mathbf{R} \right\} =$

$= \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid k \neq 0 \ , \ k \in \mathbf{R} \right\}$ kümesidir. Böylece $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özuzay 1 boyutludur. Bu özuzay için $\{ v = (1 , 0 , -1) \}$ kümesi bir taban oluşturur.

Şimdi de $\lambda_2 = 3$ özdeğerine karşılık gelen x özvektörlerini bulalım:

(1) denkleminde $\lambda = 3$ yazılarak işlem yapılırsa;

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi bulunur. Sistemin katsayılar matrisinin rankı 2 olduğundan x_1 bilinmeyenini bilinen kabul edersek, sistemin çözümü

$$x_2 = -x_1 \quad \text{ve} \quad x_3 = -x_1$$

bulunur.

$$x_1 = k\ ,\ x_2 = -k\ ,\ x_3 = -k \quad \text{olur.}$$

Böylece $\lambda = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler, $k \neq 0$ olmak üzere

$$x = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k \end{pmatrix},$$

biçimindedir. Buna göre $\lambda = 3$ özdeğerinin özuzayı $\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in R \right\}$ kümesidir.

$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörleri bulalım:

Benzer şekilde (1) denkleminde $\lambda = -2$ yazılarak işlem yapılırsa;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $x_2 = -x_1\ ,\ x_3 = 4x_1$ bulunur.

$$x_1 = k \quad \text{için} \quad x_2 = -k\ ,\ x_3 = 4k \quad \text{olur.}$$

$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $x = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 4k \end{pmatrix}$ biçimindedir.

Böylece $\lambda = 2\ ;\ 3\ ;\ -2$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 4k \end{pmatrix} \quad k \neq 0\ ,\ k \in \mathbf{R} \text{ dir. (Neden } k \neq 0\text{)}$$

$k = 1$ için bu vektörler $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ olur. Bu vektörlerin oluşturduğu

matrisi yazarak basamak biçime indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Bu üç vektör basamak matrisin sıfır olmayan satırları olup lineer bağımsızdırlar. Şimdi bununla ilgili teoremi ifade edelim:

2.4. Teorem

$T : V_n \rightarrow V_n$ lineer dönüşümünün farklı $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $v_1 , v_2 , \ldots , v_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır.

Kanıt

n üzerinde tüme varımla yapalım:

$n = 1$ için $v_1 \neq 0$ olduğundan v_1 lineer bağımsızdır.
$n = 2$ için v_1 , v_2 özvektörleri lineer bağımsız mı?

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$$

olsun. $T (c_1 v_1 + c_2 v_2) = T (0)$ veya $c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) = 0$

$T (v_1) = \lambda_1 v_1$, $T (v_2) = \lambda_2 v_2$ olduğundan

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

olur. Şimdi $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ denklemini λ_2 ile çarpıp bu denklemden çıkartalım, ikinci terimler aynı olacağından

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $v_1 \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur. c_1 ın bu değeri $c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ denkleminde yazılınca, $v_2 \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ elde edilir.

Şimdi iddianın $n - 1$ vektör için doğruluğunu kabul edip n vektör için kanıtlayalım. $v_1, v_2, \dots, v_n$ özvektörlerinden ilk $(n - 1)$ tanesinin lineer bağımsız ve

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n v_n = 0 \qquad (1)$$

olsun.

$$c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_{n-1} T(v_{n-1}) + c_n T(v_n) = 0 \qquad (2)$$

ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $T(v_i) = \lambda_i v_i$ olduğundan

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{n-1} \lambda_{n-1} v_{n-1} + c_n \lambda_n v_n = 0$$

olur. Şimdi (1) denklemini λ_n ile çarpıp (2) denkleminden çıkartalım, son terimler aynı olacağından,

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_n) v_2 + \dots + c_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} = 0$$

elde edilir. $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfır, yani

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_n) = c_2 (\lambda_2 - \lambda_n) = \dots = c_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0$$

olur. Diğer taraftan λ_i $(i = 1 \dots n)$ ler farklı olduklarından

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$$

çıkar. c_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ ler (1) de yerine yazılınca

$$c_n v_n = 0$$

elde edilir. $v_n \neq 0$ olduğundan $c_n = 0$ bulunur ve tüme varım tamamlanır. Sonuç olarak, farklı $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $v_1, v_2, \dots, v_n$ özvektörleri lineer bağımsız olurlar.

3. Bir Matrisin Köşegenleştirilmesi

3.1. Tanım

V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $T : V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. V nin öyle bir tabanı olsun ki, T nin bu tabana göre A matrisi köşegen matris olsun. Bu durumda T ye köşegenleştirilebilir denir.

T nin köşegenleştirilebilmesi demek, özvektörlerden oluşan V nin bir tabanını bulmak ve bu tabana göre dönüşüm matrisini oluşturmaktır. Bu köşegen matris,

$$B = P^{-1} A P$$

ile verilir. Buradaki P matrisi, standart tabandan özvektörlerin oluşturduğu tabana geçiş matrisidir. Bu durumda P matrisi kısaca, sütunları lineer bağımsız özvektörler olan matristir. P nin sütunları lineer bağımsız olduğu için P matrisi bir regüler matristir. Böylece V n-boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere

$$T : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümünün (A matrisinin) köşegenleştirilebilmesi için aşağıda işlemler uygulanır:

(i) T lineer dönüşümün matris gösterimi A nın karakteristik polinomu yazılır.

$$T(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

(ii) $T(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$

karakteristik polinomun kökleri bulunur. Bu kökler A nın özdeğerleridir. Bulunan özdeğerler gerçel değilse, A matrisi köşegenleştirilemez.

(iii) A nın her bir λ özdeğerine karşı gelen özvektörleri bulunur.

$$(A - \lambda I_n)\, x = 0$$

(iv) Bu özvektörler n-boyutlu bir vektör uzayı için taban oluşturuyorsa A matrisi köşegenleştirilebilir.

(v) Köşegen matris aşağıdaki şekillerden biri ile bulunur.

a) Lineer dönüşüm A matrisi ile verilmişse, standart tabana göre dönüşüm matrisi A olan lineer dönüşüm yazılır. Bu dönüşümün, özvektörlerin oluşturduğu tabana göre matrisi aranan köşegen matristir.

b) Sütunları özvektörler olan matris P olmak üzere

$$B = P^{-1} A P$$

matrisi köşegen matristir. B nin köşegen elemanlarına özdeğerler karşılık gelir.

Şimdi 2.3 Örneğe tekrar dönelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin bir köşegen matrise benzer olup olmadığını veya köşegenleştirilip köşegenleştirilemeyeceğini araştıralım.

Bu matrisin köşegenleştirilebilmesi için e_1 , e_2 , e_3 standart tabanına göre temsil ettiği T lineer dönüşümünün özvektörlerinden oluşan bir tabanının bulunmasıdır. 2.3 Örnekte bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$ bulunmuştu. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler de $k \neq 0$ için $x_1 = (k, 0, -k)$, $x_2 = (k, -k, -k)$, $x_3 = (k, -k, 4k)$ biçimindeydi.

Burada $k = 1$ için,

$\lambda = 2$ özdeğerine karşılık $x_1 = (1, 0, -1)$ özvektörü
$\lambda = 3$ özdeğerine karşılık $x_2 = (1, -1, -1)$ özvektörü
$\lambda = -2$ özdeğerine karşılık $x_3 = (1, -1, 4)$ özvektörü

bulunur. $E = \{ x_1 = (1, 0, -1), x_2 = (1, -1, -1), x_3 = (1, -1, 4) \}$ kümesi $\mathbf{R}^3$ için bir taban teşkil eder. Kontrol ediniz!... Şimdi, standart tabana göre matris gösterimi A olan T lineer dönüşümünün $E = \{(1, 0, -1), (1, -1, -1), (1, -1, 4)\}$ tabanına göre matrisini bulalım:

$$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x - y - z, x + 3y + z, -3x + y - z)$$

olur (Bu dönüşümün nasıl elde edildiğini hatırlayınız).

$$T(1, 0, -1) = (1 - 0 + 1 \ , \ 1 + 3.0 + (-1) \ , \ -3.1 + 0 - (-1)) = (2, 0, -2)$$

$$(2, 0, -2) = a(1, 0, -1) + b(1, -1, -1) + c(1, -1, 4)$$
$$(2, 0, -2) = (a + b + c \ , \ -b - c \ , \ -a - b + 4c)$$

$$a = 2, b = 0, c = 0$$

Bu değerler aranan matrisin 1. sütunudur.

Benzer şekilde;

$$T(1, -1, -1) = (3, -3, -3) = a(1, 0, -1) + b(1, -1, -1) + c(1, -1, 4)$$

$$(3, -3, -3) = (a + b + c\ ,\ -b - c\ ,\ -a - b + 4)$$

$$a = 0\ ,\ b = 3\ ,\ c = 0$$

bulunur. Bu değerler matrisin 2. sütunudur. Benzer şekilde;

$$T(1, -1, 4) = (1 + 1 - 4\ ,\ 1 - 3 + 4\ ,\ -3 - 1 - 4) = (-2, 2, -8)$$

$$(-2, 2, -8) = a(1, 0, -1) + b(1, -1, -1) + c(1, -1, 4)$$

$$a = 0\ ,\ b = 0\ ,\ c = -2$$

bulunur. Bu değerler de matrisin 3. sütunudur. Bulunan değerlerle matrisi oluşturursak,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

köşegen matrisi elde edilir. Sonuç olarak, verilen A matrisi köşegenleştirilebilir bir matristir.

Köşegenleştirilebilmenin diğer bir yolu da, özvektörleri sütun vektörü olarak alan matris P olmak üzere,

$$B = P^{-1} A P$$

matrislerinin çarpımıdır.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

olur. P^{-1} ters matrisi ise

$$P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Kontrol ediniz.

$$B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 0 \\ 3 & 15 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

köşegen matris elde edilir; yani $B = P^{-1} A P$ dir.

Sonuç olarak, T nin dönüşüm matrisinin köşegenleştirilebilmesi için özdeğerlere karşılık bulunan özvektörlerin bir taban oluşturmasıdır. Buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

3.2. Teorem

Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisinin karakteristik polinomunun n tane kökü farklı ve gerçel ise A matrisi köşegenleştirilebilir.

Teoremin kanıtı verilmeyecek bir örnekle açıklanacaktır.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini gösterelim:

A matrisinin karakteristik polinomu,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olup, $(1 - \lambda)^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ özdeğeri bulunur. Bu özdeğere karşılık gelen özvektörü bulalım:

$$(A - \lambda I_2)\, x = 0$$

buradan,

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$5x_2 = 0 \ , x_2 = 0$$

$\lambda = 1$ özdeğerine karşı gelen özvektör $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$ olmak üzere $(x_1 , 0)$ şeklindedir. Buna göre, $\mathbf{R}^2$ nin özvektörlerden oluşan bir tabanı bulunamaz. O halde verilen A matrisi köşegenleştirilemez.

3.3. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz mümkünse köşegenleştiriniz.

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 0\right] + 2\left(0 - 3(1-\lambda)\right) = 0$$

Parantezler açılıp işlem yapılırsa

$$(1 - \lambda) \ (\lambda + 1) \ (\lambda - 4) = 0$$

bulunur. Buradan;

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = -1 \ , \lambda_3 = 4$$

özdeğerleri bulunur. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda_1 = 1$ için $\quad (A - \lambda I_3)(x) = 0$

$$(A - \lambda I_3)(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemini x_1 e göre çözersek ; $x_2 = -6x_1$, $x_3 = 4x_1$ bulunur. Buna göre $x = (x_1 , -6x_1 , 4x_1)$; $x_1 = 1$ için $x = (1, -6, 4)$ olur. $\lambda = -1$ için özdeğerine karşı gelen özvektör:

$$\left(A - \lambda I_3\right) x = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

sisteminin x_1'e göre çözümü,$x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{2}{3} x_1$ olur.

$x_1 = 3$ için $x = (3, 0, -2)$ bulunur.

$\lambda = 4$ özdeğerine karşı gelen özvektör;

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

sisteminin x_3 'e göre çözümü $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$ olur.

$x_1 = 1$ için $x = (1, 0, 1)$ bulunur. Böylece özvektörler

$(1, -6, 4)$, $(3, 0, -2)$, $(1, 0, 1)$

olarak bulunur. Bu vektörler lineer bağımsızdır ve $\mathbf{R}^3$ için bir taban teşkil ederler. 1.2. teorem gereğince A matrisi köşegenleştirilebilir. A matrisinin standart tabana göre temsil ettiği lineer dönüşüm

$T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$
$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z , y , 2x + y + 2z)$

dir.

T nin $\{(1, -6, 4), (3, 0, -2), (1, 0, 1)\}$ tabanına göre dönüşüm matrisini bulalım: Bunun için tabandaki her vektörün T altındaki görüntüsünün yine tabana göre koordinatlarını bulmalıyız.

$T(1, -6, 4) = (1 + 2 . (-6) + 3 . 4 , -6 , 2 . 1 -6 + 2 . 4) = (1, -6, 4)$
$(1, -6, 4) = a (1, -6, 4) + b (3, 0, -2) + c (1, 0, 1)$

buradan açık olarak a=1 , b=0 , c=0 bulunur. Bu değerler matrisin 1. sütunudur.

$$\begin{aligned} T(3, 0, -2) &= (3 + 2 \,.\, 0 + 3(-2) \;,\; 0 \,,\, 2 \,.\, 3 + 0 + 2 \,.\, (-2)) = (-3, 0, 2) \\ (-3, 0, 2) &= a(1, -6, 4) + b(3, 0, -2) + c(1, 0, 1) \end{aligned}$$

burada a=0 , b=-1 , c=0 olduğu hemen görülür. Bu değerler matrisin 2. sütunudur.

$$\begin{aligned} T(1, 0, 1) &= (1 + 2 \,.\, 0 + 3 \,.\, 1 \;,\; 0 \,,\; 2 \,.\, 1 + 0 + 2 \,.\, 1) = (4, 0, 4) \\ (4, 0, 4) &= a(1, -6, 4) + b(3, 0, 2) + c(1, 0, 1) \end{aligned}$$

burada a=0 , b=0 , c=4 olduğu açıktır. Bu değerlerde matrisin 3. sütunudur. Buna göre,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu köşegen matrisin köşegen üzerindeki öğelerinin özdeğerler olduğuna dikkat edelim.

Şimdi ikinci bir yol olarak,

T nin özvektörlerinden oluşan { (1, -6, 4) , (-3, 0, 2) , (1, 0, 1) } tabanına göre köşegen matrisini daha kısa yoldan bulalım:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Özvektörler sütunları oluşturuyor)

olmak üzere

$$B = P^{-1} \; A \;\; P$$

köşegen matristir. P^{-1} ters matrisi bulunarak çarpma işlemi yapılırsa

$$B = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \\ 12 & 14 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

3.4. Örnek

$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z\ ,\ -y + 2z\ ,\ 2z)$

lineer dönüşümünün özdeğer ve özvektörlerini bulunuz. Mümkünse dönüşüm matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm

$$T(x, y, z) = \lambda\,(x, y, z)$$
$$(x + 2y + 3z\ ,\ -y + 2z\ ,\ 2z) = (\lambda x\ ,\ \lambda y\ ,\ \lambda z)$$
$$[\ (1 - \lambda)\, x + 2y + 3z\ ,\ (-1 - \lambda)\, y + 2z\ ,\ (2 - \lambda)\, z] = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)\, x + 2y + 3z &= 0 \\ (-1 - \lambda)\, y + 2z &= 0 \\ (2 - \lambda)\, z &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

T nin karakteristik polinomu,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 - 7 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\,(-1 - \lambda)\,(2 - \lambda) = 0$$

olup, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ özdeğerleri bulunur.

Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda = 1$ için (1) den,

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

buradan,

$z = 0$, $y = 0$, $x \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$ olur. Buna göre $x = 1$ için $(1, 0, 0)$ özvektörü elde edilir.

$\lambda = -1$ için (1) den,

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

buradan,

$z = 0$, $x , y \in \mathbf{R}$ olmak üzere, $x = y = 1$ için (1, 1, 0) özvektörü elde edilir.

$\lambda = 2$ için (1) den,

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \\ 0 \, . \, z = 0 \end{cases}$$

sistemin z ye göre çözümü $x = \frac{13}{3} z$, $y = \frac{2}{3} z$ olur $z = 3$ için çözümlerinden biri (13, 2, 3) özvektörüdür.

Buradan, (1, 0, 0) (1, 1, 0) (13, 2, 3) özvektörleri lineer bağımsız olduğu için $\mathbf{R}^3$ için bir taban teşkil eder. Bu nedenle dönüşüm matrisi köşegenleştirilebilir. Bu köşegen matris

$$B = P^{-1} \; A \; P$$

dir.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere P^{-1} i bularak

$$B = P^{-1} \; A \; P$$

çarpımından

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olduğunu görünüz.

3.5. Örnek

$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$T (x, y) = (x, -2x + y)$

lineer dönüşüm matrisini mümkünse köşegenleştiriniz.

Çözüm

$T(x, y) = \lambda (x, y)$
$(x, -2x + y) = (\lambda x, \lambda y)$
$[(1 - \lambda) x, -2x + (1 - \lambda) y] = (0, 0)$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda) x &= 0 \\ -2x + (1 - \lambda) y &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Karakteristik polinom,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 = 0,$$

$(1 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$

$\lambda = 1$ değerine karşılık gelen özvektör (1) den

$$\begin{cases} 0 . x = 0 \\ -2x + 0 . y = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $x = 0$ bulunur. Özvektörler $(0, y)$, $y \neq 0$ şeklindedir. Buradan, $\mathbf{R}^2$ nin bir tabanı oluşturulamaz. Dolayısıyla dönüşüm matrisi köşegenleştirilemez.

Simetrik matrislerin ($A = A^T$) köşegenleştirilmede özelliği vardır. Bununla ilgili teoremi kanıtsız vererek uygulamasını yapalım.

3.6. Teorem

$A = (a_{ij})_{nxn}$ bir simetrik matris ise köşegenleştirilebilir.

Teoremin kanıtını vermeyeceğiz. Lineer Cebir kitaplarında bulabilirsiniz. Aşağıdaki ifadeler bu teoremin sonuçlarıdır.

- Simetrik bir matrisin karakteristik polinomunun bütün kökleri gerçeldir.
- Simetrik matrisin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri ortogonaldir (diktir).
- Bir P matrisi vardır ki

  $P^{-1} A P$

  matrisi köşegen matristir. A matrisinin özdeğerleri köşegen matrisin esas köşegeninin öğeleridir.

3.7. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm

A nın karakteristik polinomu,

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(6-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ özdeğerleri bulunur.

Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri belirleyelim;

$$(A - \lambda I)\,(x) = 0$$

$\lambda = 0$ için;

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 6y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$$

buradan,

$y = 0$, $x = -z$ bulunur. Buna göre $z = -1$ için $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $(1, 0, -1)$ olur.

$\lambda_2 = 6$ için

$$(A - \lambda I_3)\,(x) = 0$$

$$\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$$

buradan $x = z$ bulunur. Buna göre, $z = 1$ ve $z = 3$ için sırasıyla $(1, 0, 1)$ ve $(3, 1, 3)$ vektörleri $\lambda = 6$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler olarak alınabilir.

Uyarı

$\lambda = 6$ özdeğeri karakteristik polinomun iki katlı köküdür. Bu nedenle iki tane lineer bağımsız özvektör elde edilir. Genel olarak λ , k katlı kök ise k tane lineer bağımsız özvektör bulunur. Şimdi

$$P^{-1}\ A\ P$$

köşegen matrisini bulalım.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$P^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A\ P = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Özdeğer ve özvektörlerin birçok önemli özellikleri kanıtsız olarak verilebilir:

- A bir üst üçgen (alt üçgen) matris ise A nın özdeğerleri esas köşegen üzerindeki elemanlardır.
- A ve A^T matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.
- Bir A kare matris için $A^q = 0$ olacak şekilde bir q tamsayısı bulunabiliyorsa A ya nilpotent matris denir. A nilpotent matris ise bu durumda bir tek özdeğeri vardır bu da 0 dır.
- A nın determinantının değeri, karakteristik polinonunun bütün köklerinin çarpımına eşittir.

- A matrisinin regüler olmaması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda = 0$ ın A nın bir özdeğeri olmasıdır.
- A bir köşegenleştirilebilen matris ise A^T ve A^n matrisleri de köşegenleştirilebilir ($n \in N$).

Değerlendirme Soruları

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 3$
B. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
C. $\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = -2$
D. $\lambda_1 = -2$
$\lambda_2 = -3$
E. $\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 3$

2. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

matrisinin özvektörleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. (2, 3)
(3, 2)
B. (0, 1)
(1, 1)
C. (1, 1)
(3, 2)
D. (5, 1)
(0, 0)
E. (1, 1)
(5, 5)

3. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

matrisinin köşegenleştirilmiş matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

B. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 3$

C. $\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = 3$
$\lambda_3 = 1$

D. $\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 2$

E. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 2$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

matrisinin özdeğerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 3$

B. $\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = -2$
$\lambda_3 = 1$

C. $\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 3$

D. $\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 3$

E. $\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 5$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. A 2. C 3. E 4. B 5. D

İç-Çarpım Uzayları

ÜNİTE 10

Yazar
Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- $\mathbf{R}^n$, P_n **(R)**, M_{nxn} vektör uzaylarında iç çarpım kavramını tanıyacak ve özelliklerini görmüş olacaksınız.
- $\mathbf{R}^n$, P_n **(R)**, M_{nxn} uzaylarında bir vektörün uzunluğu ve iki vektör arasındaki açı kavramlarını öğreneceksiniz.
- İki vektörün ortogonal olmasını,
- Bir kümenin ortogonal ve ortonormal olmasını,
- Sonlu boyutlu bir vektör uzayının Gram-Schmidt yöntemi ile daima bir ortonormal tabanının bulunabileceğini öğreneceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 217
- Vektörlerin Ortogonalliği, Ortonormal Vektör Kümeleri 227
- Değerlendirme Soruları 233

Çalışma Önerileri

- Vektör uzayları ünitesini yeniden gözden geçiriniz.

1. Giriş

$\mathbf{R}^2$ ve $\mathbf{R}^3$ vektör uzaylarında bir vektörün uzunluğu, iki vektör arasındaki açı kavramlarını ve bu kavramların bu uzaylara kazandırdığı kimi önemli özellikleri Analitik Geometri derslerinden biliyorsunuz. Eğer sadece $\mathbf{R}^2$ ve $\mathbf{R}^3$ uzayındaki vektörleri incelemiş olsaydık orada verilen uzunluk ve açı tanımları yeterli olurdu. Fakat daha önce gördüğümüz $P_n(\mathbf{R})$ vektör uzayındaki iki polinom arasındaki açıdan veya M_{mxn} vektör uzayındaki bir matrisin uzunluğundan söz edilebilir mi? Daha genel olarak, herhangi bir vektör uzayına bu kavramlar genelleştirilebilir mi? Bu tür sorulara yanıt verebilmek için bir vektör uzayı içinde iç çarpım kavramını tanımlıyacağız.

1.1. İç Çarpım Uzayları

V bir vektör uzayı olsun. $x, y \in V$ için $< x, y >$ ile gösterilen ve aşağıdaki koşulları sağlayan $< , >: \; V x V \to \mathbf{R}, \; (x, y) \to < x, y >$ fonksiyonuna V üzerinde bir iç çarpım V ye de iç çarpım uzayı denir. Bu iç çarpım uzayı $(V, < , >)$ ile gösterilir.

(i) Her $x, y \in V$ için $< x, y > = < y, x >$
(ii) Her $x, y, z \in V$ için $< x, y + z> = < x, y > + < x, z >$
(iii) Her $x, y \in V$, $c \in \mathbf{R}$ için
$< cx, y > = c< x, y > = < x, cy >$
iv) Her $x \in V$ için $< x, x > \geq 0$; $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1.2. Örnek

$\mathbf{R}^n$ de iç çarpım:
$x, y \in \mathbf{R}$ için $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$
olsun.
x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanımın iç çarpımın tüm koşullarını sağladığı kolayca doğrulanabilir. Aşağıdaki teorem ile n = 3 için kanıt verilmektedir. $\mathbf{R}^n$ ne bu iç çarpımla öklid uzayı adı verilir.

1.3. Teorem

$\mathbf{R}^3$ içindeki $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

bir iç çarpımdır.

Kanıt

$< x, y >$nin bir iç çarpım olduğunu göstermek için iç çarpım tanımındaki i-iv koşullarının sağlandığını göstermeliyiz.

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\quad < x, y > &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\
&= y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \\
&= < y, x >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad < x, y + z > &= < (x_1, x_2, x_3), (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) > \\
&= x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + x_3 (y_3 + z_3) \\
&= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + x_3 y_3 + x_3 z_3 \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 \\
&= < x, y > + < x, z >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{iii)}\quad < cx, y > &= < (cx_1, cx_2, cx_3), (y_1, y_2, y_3) > \\
&= cx_1 y_1 + cx_2 y_2 + cx_3 y_3 \\
&= c(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\
&= c < x, y >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{iv)}\quad < x, x > &= < (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) > \\
&= x_1^2 + x_2^2 \; x_3^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Böyle bir toplamın sıfır olması her terimin ayrı ayrı sıfır olmasıyla sağlanacağından

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

dır. $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Böylece $\mathbf{R}^3$ de

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

bir iç çarpım olduğu kanıtlanmış olur.

1.4. Örnek

$\mathbf{R}^3$ teki $x = (2, -3, 1)$, $y = (1, 5, -6)$ vektörlerinin iç çarpımını hesaplayınız.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
< x, y > &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\
&= 2.1 + (-3).5 + (1.(-6) \\
&= 2 - 15 - 6 \\
&= -19
\end{aligned}
$$

1.5. Örnek

$P_n(\mathbf{R})$ de iç çarpım:

$P_n(\mathbf{R})$, derecesi n veya n den küçük olan polinomların uzayında iç çarpım;

$p(x),\ q(x) \in P_n(\mathbf{R})$ için

$$< p(x), q(x) > = \int_0^1 p(x) \,.\, q(x)\, dx$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımın iç çarpım koşullarını sağladığını kolayca doğrulayabilirsiniz.

1.6. Örnek

$P_2(\mathbf{R})$ de $p(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $q(x) = x + 1$ vektörlerinin iç çarpımlarını hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} < p(x), q(x) > &= < 3x^2 + 2x + 5 \,,\ x + 1 > = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 5) \,.\, (x + 1)\, dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 + 5x^2 + 7x + 5)\, dx \\ &= \left(\frac{3}{4} x^4 + \frac{5}{3} x^3 + \frac{7}{2} x^2 + 5x \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{5}{3} + \frac{7}{2} + 5 \\ &= \frac{131}{12} \end{aligned}$$

1.7. Örnek

M_{nxn} uzayında iç çarpım:

$A, B \in M_{nxn}$, $A = (a_{ij})_{nxn}$, $B = (b_{ij})_{nxn}$ olmak üzere

$$< A, B > = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \right)$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımın iç çarpım koşullarını sağladığının gösterilmesini alıştırma olarak bırakıyoruz.

1.8. Örnek

M_{2x2} de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ vektörlerinin iç çarpımlarını hesaplayınız.

$$< A, B > = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, b_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left(a_{i1}\, b_{i1} + a_{i2}\, b_{i2} \right)$$

$$= a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{12} + a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{22}$$

buna göre,

$$= 1.2 + 2.0 + 3.1 + 4(-3)$$
$$= -7$$

bulunur.

1.9. Tanım

$A = (a_{ij})_{nxn}$ matrisi verilsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matrisinin köşegeni üzerindeki sayıların toplamı olan

$a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$

sayısına A matrisinin **izi** denir

$$iz\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ ...\ + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

biçiminde gösterilir.

M_{nxn} vektör uzayındaki $A, B \in M_{nxn}$ için iç çarpım

$$< A, B > = iz\,(\,AB^t\,) = \sum_{i}^{n} \left(\sum_{j}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \right)$$

dir. Çünkü AB^t çarpımında köşegen üzerindeki elemanların toplamı

$$iz\,(AB^t) = \sum_{i}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b^t_{ij} \right)$$

dir. Buradan,

$$\text{iz}\,(AB^t) = \sum_i^n \left(\sum_j^n a_{ij}\, b_{ij}^t \right) = \sum_i^n \left(\sum_j^n a_{ij}\, b_{ij} \right) = \langle A, B \rangle$$

elde edilir.

1.8 Örnekteki $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ matrislerinin iz iç çarpımını hesaplayalım.

$$\langle A, B \rangle = \text{iz}\,(AB^t)$$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{iz}\,(AB^t) = 2 - 9 = -7 = \langle A, B \rangle$$

bulunur.

1.10. Tanım

V bir iç çarpım uzayı, $x \in V$ olsun. x vektörünün uzunluğu

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

biçiminde tanımlanan bir sayıdır.

1.11. Örnek

$\mathbf{R}^3$ deki $x = (1, 3, 5)$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.

$$\|x\| = \sqrt{\langle (1, 3, 5)\,,\,(1, 3, 5) \rangle}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

1.12. Örnek

$P_2(\mathbf{R})$ deki $p(x) = x^2 + 1$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.

$$\|x\| = \sqrt{\langle (x^2+1)\,,\,(x^2+1) \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x^2+1)^2\,dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx}$$

$$= \sqrt{\left.\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{28}{15}}$$

1.13. Teorem

Cauchy - Schwarz Eşitsizliği

V bir iç çarpım uzayı, $x, y \in V$ olsun.

$$|< x, y >| \leq \|x\| \|y\|$$

dir.

Burada sol taraf bir gerçel sayının salt değerini, sağ taraf ise vektörlerin uzunlukları çarpımını verir.

Kanıt

$x = 0$ olması durumunda

$$|< x, y >| = 0$$
$$\|x\| \|y\| = 0$$

olduğundan eşitsizlik sağlanır.
$x \neq 0$ olsun. Keyfi bir $r \in R$, $r \neq 0$ için

$< rx + y , rx + y >$ değerini alalım.

$$\begin{aligned} 0 &\leq < rx + y , rx + y > \\ &= < rx , rx + y > + < y , rx + y > \text{ tanımdan} \\ &= < rx , rx > + < rx, y > + < y , rx > + < y, y > \\ &= r^2 < x , x > + r < x , y > + r < x , y > + < y , y > \\ &= r^2 < x , x > + 2r < x , y > + < y , y > \end{aligned}$$

olur. Burada $a = < x , x >$, $b = 2 < x, y >$, $c = < y , y >$ ile gösterirsek

$$p(r) = ar^2 + br + c \geq 0$$

r ye göre ikinci dereceden polinom elde edilir. Bu polinomun bir parabol denklemi olduğuna dikkat ediniz.

$$p(r) = ar^2 + br + c$$

polinomunun r nin her değeri için

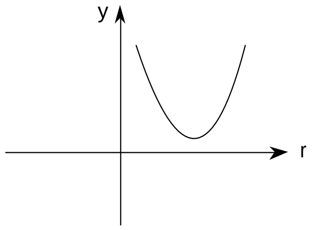
$$ar^2 + br + c \geq 0$$

olması için aşağıdaki iki koşuldan birinin sağlanması gerekir.

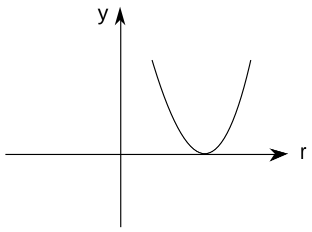
(i) $ar^2 + br + c = 0$ ın gerçel köklerinin olmaması yani

$$b^2 - 4ac < 0$$

olması,



(ii) $ar^2 + br + c = 0$ ın iki katlı gerçel kökünün olmasıdır.



Uyarı: Eğer $ar^2 + br + c = 0$ ın r_1 ve r_2 gibi farklı iki kökü olsaydı, $a > 0$ olduğu için r_1 ve r_2 kökleri arasında $p(r) < 0$ olurdu.

O halde

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} & b^2 - 4ac \leq 0 \\ & 4 < x , y >^2 \leq 4 < x , x >< y , y > \\ & < x , y >^2 \leq < x , x >< y , y > \end{aligned}$$

ve böylece

$$|< x , y >| \leq ||x|| \ ||y||$$

eşitsizliği elde edilir.

1.14. Örnek

$P_n(\mathbf{R})$ de $p(x)$ ve $q(x)$ vektörleri için Cauch-Schwarz eşitsizliği

$$\begin{aligned} (< p(x) , q(x) >)^2 &= \left(\int_0^1 p(x) , q(x) \, dx \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 p^2(x) \, dx \right) \left(\int_0^1 q^2(x) \, dx \right) \\ &= ||p(x)||^2 \ ||q(x)||^2 \end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizliği

$p(x) = x + 1$ ve $q(x) = x^2 - x - 1$ vektörleri için doğrulayalım:

$$\int_0^1 \left((x+1)\ (x^2 - x - 1) \right)^2 dx \leq \left(\int_0^1 (x+1)^2\, dx \right) \left(\int_0^1 (x^2 - x - 1)^2\, dx \right)$$

işlemler yapılırsa,

$$\int_0^1 \left(x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4x + 1\right) dx \leq \int_0^1 \left(x^2\ 2x + 1\right) dx$$

$$\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1\right) dx$$

$$\frac{667}{210} \leq \frac{287}{90}$$

eşitsizliğin doğruluğu sağlanır.

1.15. Teorem Üçgen Eşitsizliği

V bir iç çarpım uzayı, $x, y \in V$ olsun.

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

dir.

Kanıt

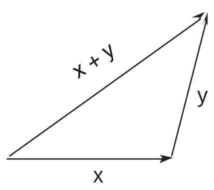
$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq ||x||^2 + 2\, ||x||\ ||y|| + ||y||^2 = (\, ||x|| + ||y||)^2 \\ ||x + y||^2 &\leq (\, ||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın pozitif karekökü alınırsa

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

bulunur.

Bu eşitsizlik adını bir üçgenin bir kenarının uzunluğunun diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük oluşundan almaktadır. Çünkü düzlemde kenarları $x, y, x + y$ vektörleri olan bir üçgende $x + y$ nin uzunluğu x ve y nin uzunlukları toplamından küçüktür.



1.16. Tanım

V bir iç çarpım uzayı olsun.

$x, y \in V$, $x, y \neq 0$ olmak üzere bu iki vektör arasındaki açı

$$\cos\theta = \frac{<x, y>}{||x||\ ||y||} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

eşitliği ile tanımlanır.

Cauchy - Schwarz eşitsizliğinden

$$|<x, y>| \leq ||x||\ ||y||$$

$$\left|\frac{<x, y>}{||x||\ ||y||}\right| \leq 1$$

buradan

$$-1 \leq \frac{<x, y>}{||x||\ ||y||} \leq 1$$

böylece

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

olur. Buna göre herhangi bir çarpım uzayında sıfır olmayan iki vektör arasında yukarıdaki biçimde tanımlanan θ açısı anlamlıdır.

(1) eşitliğinden

$$<x, y> = ||x||\ ||y|| \cos\theta$$

yazabiliriz. Bu eşitlik $\mathbf{R}^2$ ve $\mathbf{R}^3$ deki x ve y vektörlerinin iç çarpımıdır. Böylece

$$\cos\theta = \frac{<x, y>}{||x||\ ||y||}$$

şeklinde ifade ettiğimiz açı kavramını herhangi bir iç çarpım uzayına genişletmiş olduk.

1.17. Örnek

$\mathbf{R}^3$ deki $x = (1, 0, 0)$, $y = (1, 1, 1)$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm

$$\cos\theta = \frac{<(1, 0, 0), (1, 1, 0)>}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

buradan $\theta = \dfrac{\pi}{4} = 45^c$

bulunur.

1.18. Örnek

R² (**R**) deki $p(x) = 1 + x$, $q(x) = x$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm

$$\cos\theta = \frac{< p(x) , q(x) >}{\|p(x)\| \; \|q(x)\|}$$

$$\cos\theta = \frac{< 1 + x , x >}{\sqrt{< 1 + x , 1 + x >} \; \sqrt{< x , x >}}$$

$$\cos\theta = \frac{\int_0^1 x\,(1+x)\,dx}{\sqrt{\int_0^1 (1+x)^2\,dx} \; \sqrt{\int_0^1 x^2 dx}} = \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

olur.

1.19. Örnek

M_{2x2} vektör uzayındaki $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$i\,z\left(AB^t\right) = -1 - 3 = -4$$

$$i\,z\left(AA^t\right) = i\,z\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 6$$

$$i\,z\left(BB^t\right) = i\,z\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 14$$

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{6}\;\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{21}}$$

olarak bulunur.

2. Vektörlerin Ortogonalliği, Ortonormal Vektör Kümeleri

(Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi)

2.1. Tanım

V iç çarpım ve $x, y \in V$ olsun. Eğer $< x, y > = 0$ ise x ve y ye ortogonal (dik) vektörler denir.

İki vektör arasındaki açı,

$$\cos\theta = \frac{< x , y >}{||x||\ ||y||}$$

ifadesinde

$\cos\ \theta = 0$ ise x , y ortogonal vektörler,

$\cos\theta = \pm 1$ yani $< x, y > = \pm\ ||x||\ \ ||y||$ ise x ve y vektörleri paralel vektörlerdir.

2.2. Örnek

$\mathbf{R}^2$ de $x = (1, 3)$, $y = (- 3, 1)$ vektörleri için

$< x, y > = < (1, 3)\ ,\ (- 3, 1) > = 1. (- 3) + 3.1 = 0$

olduğundan vektörler ortogonaldir.

2.3. Tanım

V bir iç çarpım uzayı. $E \subset V$ olsun. E içindeki farklı her vektör çifti ortogonal ise E ye ortogonal vektör kümesi denir. Ayrıca ortogonal E kümesindeki her vektörün uzunluğu 1 ise E ye ortonormal bir küme denir.

2.4. Örnek

$\mathbf{R}^3$ teki $x_1 = (1, 0, 3)$, $x_2 = (0, 2, 0)$, $x_3 = (- 3, 0, 1)$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösteriniz. Ayrıca ortonormal kümeyi bulunuz.

Çözüm

$$< x_1 , x_2 > \ = < (1, 0, 3) \ , \ (0, 2, 0) \ > \ = 0$$
$$< x_1, x_3 > \ = < (1, 0, 3) \ , \ (-3, 0, 1) > \ = 0$$
$$< x_2 , x_3 > \ = < (0, 2, 0) \ , \ (-3, 0, 1) > \ = 0$$

O halde x_1 , x_2 , x_3 vektörleri ortogonal vektörlerdir.

$\{ (x_1 = (1, 0, 3) \ , \ x_2 = (0, 2, 0) \ , \ x_3 = (-3, 0, 1) \}$ kümesi de ortogonal kümedir.

x_1 , x_2 , x_3 vektörlerinin birim vektörlerini bulalım.

$$||x_1|| = \sqrt{< x_1 , x_1 >} = \sqrt{<(1 , 0 , 3) , (1, 0, 3) >} = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (1 , 0 , 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} , 0 , \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \qquad x_1 \text{ ni birim vektörüdür.}$$

Benzer şekilde,

$$x_2 = \frac{1}{2}(0 , 2 , 0) = (0 , 1 , 0) \ , \ x_3' = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3 , 0 , 1) = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}} , 0 , \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

birim vektörlerdir.

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{10}} , 0 , \frac{3}{\sqrt{10}}\right) , (0 , 1 , 0) , \left(\frac{-3}{\sqrt{10}} , 0 , \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \right\} \quad \text{kümesi ortonormal bir kümedir}$$

2.5. Teorem

V n boyutlu iç çarpım uzayı olsun. V de sıfırdan farklı ortogonal vektörlerin $E = \{ x_1 , x_2 , ... , x_n \}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Kanıt

$E = \{ x_1 , x_2 , ... , x_n \}$ V içinde ortogonal bir küme olsun.

$$< x_i , x_j > = 0 \qquad i \neq j \qquad i , j = 1 , 2 , ... , n$$

dır. Şimdi

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = 0 \quad \text{ise} \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{için}$$
$$< x_i \ , 0 >$$

olduğundan

$$0 = < x_i \, , \; c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n > = c_1 < x_i \, , x_1 > + c_2 < x_i \, , x_2 > ... + c_i < x_i \, , x_i > + c_n < x_i \, , x_n >,$$

$$0 = c_1 \, . \, 0 + c_2 \, . \, 0 + ... + c_i < x_i \, , x_i > + ... + c_n . 0$$

$$0 = c_i < x_i \, , x_i >$$

elde edilir.

$x_i \neq 0$ olduğu için $c_i = 0$, $i = 1 , 2 , ... , n$. Buna göre E kümesi lineer bağımsızdır.

Sonuç

Sonlu boyutlu V iç çarpım uzayında ortonormal bir küme lineer bağımsızdır.

2.6. Tanım

V , n boyutlu bir vektör uzayı olsun. V de sıfırdan farklı $x_1 , x_2 , ... , x_n$ vektörleri ortogonal ise bu vektörlerin kümesi V için bir ortogonal tabandır. Eğer $x_1 , x_2 , ... , x_n$ vektörleri ortonormal ise bu vektörlerin kümesi V için bir ortonormal tabandır.

2.7. Örnek

E = { (0 , 2 , 5) , (-2 , 1 , 0) , (1 , 0 , 1) } vektör kümesi $\mathbf{R}^3$ ün ortogonal bir tabanı mıdır?

Çözüm

Bir vektör uzayı için ortogonal taban olması demek tabandaki vektörlerin ortogonal olması demektir.

$$E = \{ (0 , 2 , 5) , (-2 , 1 , 0) , (1 , 0 , 1) \}$$

kümesi $\mathbf{R}^3$ için bir tabandır ($\mathbf{R}^3$ te lineer bağımsız üç vektör). Bu tabanın ortogonal olup olmadığını araştıralım:

$$< (0 , 2 , 5) , (-2 , 1 , 0) > = 0 \, . \, (-2) + 2 \, . \, 1 + 5 \, . \, 0 = 2 \neq 0$$

olduğu için E kümesi $\mathbf{R}^3$ ün bir ortogonal tabanı değildir.

2.8. Örnek

E = { x , 1 + x } kümesi P_1 **(R)** nin ortogonal bir tabanı mıdır?

E kümesi P_1 **(R)** için bir tabandır. Ortogonal taban olması için E nin ortogonal bir küme olması gerekir yani

$$< x , 1 + x > = 0$$

olmalıdır.

$$< x , 1 + x > = \int_0^1 x(1 + x)\, dx = \int_0^1 (x + x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{5}{6} \neq 0$$

olduğundan E kümesi P_1 **(R)** nin ortogonal bir tabanı değildir.

2.9. Teorem

V , n boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. V nin bir $E = \{ x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$ tabanı ortonormal bir tabana dönüştürülebilir.

Kanıt

Teoremin kanıtını vermeyeceğiz. Uygulamasını yapacağız.

Sonlu boyutlu V vektör uzayının, herhangi bir tabanından yararlanarak bir ortonormal tabanını bulmak için izlenen yönteme Gram - Schmidt ortonormalleştirme yöntemi denir. $E = \{ x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$ kümesi V nin herhangi bir tabanı ise E kümesini, Gram - Schmidt ortonormalleştirme yöntemini kullanarak V için ortonormal bir taban bulalım:

$E = \{ x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$ V nin bir tabanı olmak üzere

i) $y_1 = x_1$ alalım.

ii) $y_n = x_n - \dfrac{< x_n , y_1 >}{< y_1 , y_1 >} y_1 - \dfrac{< x_n , y_2 >}{< y_2 , y_2 >} y_2 - \ldots - \dfrac{< x_n , y_{n-1} >}{< y_{n-1} , y_{n-1} >} y_{n-1}$

formülünden sırasıyla $y_2 , y_3 , \ldots , y_n$ vektörleri bulunur.

$$\{ y_1 , y_2 , \ldots , y_n \}$$

kümesi V nin ortogonal bir tabanıdır.

iii) $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ vektörlerinin birim vektörleri sırasıyla

$z_1 , z_2 , \ldots , z_n$ ise

$S = \{ z_1 , z_2 , \ldots , z_n \}$ kümesi V nin bir ortonormal tabanıdır.

2.10. Örnek

Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemiyle $\mathbf{R}^3$ için bir ortonormal taban bulunuz.

Çözüm

$\mathbf{R}^3$ ün herhangi bir tabanını alalım:

E = { (1, 1, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 3) } kümesi $\mathbf{R}^3$ için bir tabandır (Kontrol ediniz).

$y_1 = x_1 = (1, 1, 1)$ alalım.

$$y_2 = x_2 - \frac{< x_2 , y_1 >}{< y_1 , y_1 >} y_1 = (1, 0, 2) - \frac{< (1, 0, 2) , (1, 1, 1) >}{< (1, 1, 1) , (1, 1, 1) >} (1, 1, 1)$$

$$y_2 = (1, 0, 2) - \frac{3}{3} (1, 1, 1) = (0, -1, 1)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{< x_3 , y_1 >}{< y_1 , y_1 >} y_1 - \frac{< x_3 , y_2 >}{< y_2 , y_2 >} y_2$$

$$= (1, 2, 3) - \frac{< (1, 2, 3) , (1, 1, 1) >}{< (1, 1, 1) , (1, 1, 1) >} (1, 1, 1) - \frac{< (1, 2, 3) , (0, -1, 1) >}{< (0, -1, 1) , (0, -1, 1) >} (0, -1, 1)$$

$$= (1, 2, 3) - \frac{6}{3} (1, 1, 1) - \frac{1}{2} (0, -1, 1)$$

$$= (1, 2, 3) - (2, 2, 2) - \left(0, \frac{-1}{2} , \frac{1}{2}\right) = \left(1 - 2 , 2 - 2 + \frac{1}{2} , 3 - 2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(-1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$$

Böylece,

$\left\{(1, 1, 1) , (0, -1, 1) , \left(-1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)\right\}$ kümesi $\mathbf{R}^3$ için ortogonal bir tabandır. Bu tabanın bir ortonormal taban olması için her vektörün birim vektörü bulunur.

$\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)$, $\frac{2}{\sqrt{6}} \left(-1, \frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$ vektörleri sırasıyla $(1, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$, $\left(-1, \frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$ vektörlerinin birim vektörleridir. Dolayısıyla

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

kümesi $\mathbf{R}^3$ için bir ortonormal tabandır.

Siz de Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi ile P_2 **(R)** için bir ortonormal taban bulunuz.

2.11. Örnek

P_1 **(R)** nin {1, 2 + x} tabanını kullanarak P_1 **(R)** için bir ortonormal taban bulunuz.

Çözüm

{1, 2 + x} kümesi P_1 **(R)** nin bir tabanı olduğuna göre

$y_1 = x_1 = 1$ alalım.

$$y_2 = x_2 - \frac{< x_2 , y_1 >}{< y_1 , y_1 >} y_1$$

$$= 2 + x - \frac{< 2 + x , 1 >}{< 1 , 1 >} 1$$

$$= 2 + x - \frac{\int_0^1 (2 + x)\, dx}{\int_0^1 dx}$$

$$= 2 + x - \frac{\frac{5}{2}}{1}$$

$$= 2 + x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + x$$

$\left\{1, -\frac{1}{2} + x\right\}$ kümesi ortogonal bir tabandır.

$-\frac{1}{2} + x$ vektörünün birim vektörünü bulalım.

$$\left\| -\frac{1}{2} + x \right\| = \sqrt{< -\frac{1}{2} + x , -\frac{1}{2} + x >} = \sqrt{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{-\frac{1}{2} + x}{\frac{1}{\sqrt{12}}} = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x$$

$\left\{ 1, -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x \right\}$ kümesi ortonormal bir tabandır.

Değerlendirme Soruları

1. $\mathbf{R}^4$ deki (1, 4, 5, -3) vektörünün uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{60}$ C. $\sqrt{51}$

   D. 7 E. $\sqrt{20}$

2. P_2 **(R)** de tanımlı iç çarpıma göre $p(x) = x^2 + 3x$ vektörünün uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\sqrt{\frac{47}{10}}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{47}$

   D. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ E. $\sqrt{7}$

3. M_{2x2} de tanımlı iç çarpımına göre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ vektörünün uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

   A. 10 B. 20 C. $\sqrt{30}$

   D. $\sqrt{40}$ E. $\sqrt{17}$

4. R^3 deki (1, 3, 5) (-1, 4, 7) vektörleri arasındaki açının kosinüsü aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\frac{40}{\sqrt{35}\sqrt{66}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{35}\sqrt{66}}$ C. $\frac{46}{\sqrt{35}}$

   D. $\frac{46}{\sqrt{66}}$ E. $\frac{46}{\sqrt{35}\sqrt{66}}$

5. P_2 **(R)** de tanımlı iç çarpıma göre $p(x) = 2$, $q(x) = 1 + x^2$ vektörleri arasındaki açının kosünüsü aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\frac{2\sqrt{15}}{3\sqrt{7}}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$

   D. $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{7}}$ E. $\frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{7}}$

6. Aşağıdaki kümelerden hangisi ortogonaldir?

A. { (1, 2, 1), (1, -1, 1), (1, 0, -1) }

B. { (1, 2, 1), (3, 4, 5), (1, 0, 0)}

C. { (2, 2, -1), (2, -1, 2), (1, 0, 0) }

D. { (1, 1, 3), (0, 1, 3), (2, 0, 1)}

E. { (1, 0, 0), (0, 1,0), (0, 0, 1) (1, 1, 1) }

7. P_2 **(R)** de aşağıdaki kümelerden hangisi ortogonaldir?

A. $\{ 1, 3, 1 + x + x^2 \}$

B. $\{ 1, x, x^2, 2x^2 + n \}$

C. $\{ 1, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{3} - x^2 \}$

D. $\{ 1, \; x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}$

E. $\{ 1, x \}$

8. $\mathbf{R}^3$ nin $V = \{ (x, y, z) \mid x + y + z = 0, \quad x, y, z \in \mathbf{R} \}$ alt uzayının ortogonal tabanı aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\left\{ \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), (-2, 1, 1) \right\}$

B. { (1, 1, -2) , (1, -1, 0) }

C. { (1, 1, 1) , (0, 0, 1) }

D. { (1, 0, 1) , (0, 1, 0) }

E. $\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), (1, 1, 1) \right\}$

9. $\mathbf{R}^2$ için aşağıdakilerden hangisi bir ortonormal tabandır?

A. { (1, 0), (1, 1) }

B. { (1, 0), (0, 1) }

C. { (1, 1), (2, 2) }

D. { (0, 0), (1, 3) }

E. { (-4, 5), (1, 1), (-1, 0) }

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. C 2. A 3. C 4. E 5. A 6. A 7. D 8. B 9. B