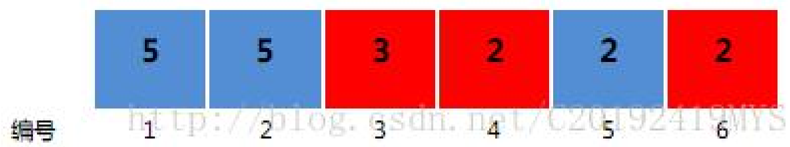
NOIP 普及组复赛 C 类题解思路(C++)

------2015 T3

求和

一条狭长的纸带被均匀划分出了 n 个格子，格子编号从 1 到 n。每个格子上都染了一种颜色 color_i 用[1，m]当中的一个整数表示），并且写了一个数字 number_i。



定义一种特殊的三元组：(x,y,z)，其中 x，y，z 都代表纸带上格子的编号，这里的三元组要求满足以下两个条件：

x、y、z 是整数，$x<y<z$，$y-x=z-y$

$color_x=color_z$

满足上述条件的三元组的分数规定为

$(x+z)\times(number_x+number_z)$。

整个纸带的分数规定为所有满足条件的三元组的分数的和。这个分数可能会很大，你只要输出整个纸带的分数除以 10007 所得的余数即可。

输入

第一行是用一个空格隔开的两个正整数 n 和 m，n 表纸带上格子的个数，m 表纸带上颜色的种类数。

第二行有 n 用空格隔开的正整数，第 i 数字 number 表纸带上编号为 i 格子上面写的数字。

第三行有 n 用空格隔开的正整数，第 i 数字 color 表纸带上编号为 i 格子染的颜色。

输出

共一行，一个整数，表示所求的纸带分数除以 10,007 所得的余数。

样例输入 1

6 2

5 5 3 2 2 2

2 2 1 1 2 1

样例输出 1

82

说明：

纸带如题目描述中的图所示。

所有满足条件的三元组为：(1,3,5),(4,5,6)(1,3,5),(4,5,6)(1, 3, 5), (4, 5, 6)。

所以纸带的分数为(1+5)×(5+2)+(4+6)×(2+2)=42+40=82。

样例输入 2

15 4
5 10 8 2 2 2 9 9 7 7 5 6 4 2 4
2 2 3 3 4 3 3 2 4 4 4 4 1 1 1

样例输出 2

1388

数据规模与约定

对于第 1 组至第 2 组数据， 1⩽n⩽100,1⩽m⩽51⩽n⩽100,1⩽m⩽51 ⩽ n ⩽ 100, 1 ⩽ m ⩽ 5；

对于第 3 组至第 4 组数据， 1≤n≤3000,1≤m≤1001≤n≤3000,1≤m≤1001 ≤ n ≤ 3000, 1 ≤ m ≤ 100；

对于第 5 组至第 6 组数据， 1≤n≤100000,1≤m≤1000001≤n≤100000,1≤m≤1000001 ≤ n ≤ 100000, 1 ≤ m ≤ 100000，且不存在出现次数超过 20 的颜色；

对于全部 10 组数据， 1≤n≤100000,1≤m≤100000,1≤color$_i$≤m，1≤number$_i$≤1000001≤n≤100000,1≤m≤100000,1≤color$_i$≤m，1≤number$_i$≤1000001 ≤ n ≤ 100000, 1 ≤ m ≤ 100000, 1 ≤ color_i ≤ m，1≤number_i≤100000。

解 析

1、本题在考试范围中属于纯数学问题。需要对数学归纳有一定基础。

2、从要求三元组的条件入手——移项得到 x+z=2y，由于 x、y、z 都是整数，所以 x 与 z 必须同奇同偶（同奇同偶才能使它们的和为偶数）。因为 x<y<z ，所以只要 x、z 不越界，y 就一定不会越界。意思就是不用管 y 的值，那么我们就把原来的三元问题转换为了二元问题。正好，问题里的其他条件也只涉及 x 和 z ，那么我们的思路就是正解。

3、注意这是在同一种颜色中进行的，所以为了探寻其中规律，我们可以假设 集合 A{a1,a2,a3,...,a$_{n-1}$,an} 为输入中某一同样颜色且同奇同偶的格子的编号，集合 B{b1,b2,b3,...,b$_{n-1}$,b$_n$} 为输入中某

一同样颜色且同奇同偶的格子标注的数字。即得与 a1 相关的项分数为：

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)+(a_1+a_3)(b_1+b_3)+\ldots+(a_1+a_n)(b_1+b_n)$$
$$=(n-1)a_1b_1+(a_1b_2+a_1b_3+\ldots+a_1b_n)+(a_2b_1+a_3b_1+\ldots+a_nb_1)$$
$$+(a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)$$
$$=(n-1)a_1b_1+a_1(b_2+b_3+\ldots+b_n)+b_1(a_2+a_3+\ldots+b_n)$$
$$+(a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)$$

4、再推，与 a2 相关的项分数为：

$$(a_2+a_3)(b_2+b_3)+(a_2+a_4)(b_2+b_4)+\ldots+(a_2+a_n)(b_2+b_n)$$
$$=(n-2)a_2b_2+(a_2b_3+a_2b_4+\ldots a_2b_n)+(a_3b_2+a_4b_2+\ldots a_nb_2)$$
$$+(a_3b_3+a_4b_3+\ldots+a_nb_n)$$
$$=(n-2)a_2b_2+a_2(b_3+b_4+\ldots+b_n)+b_2(a_3+a_4+\ldots+a_n)$$
$$+(a_3b_3+a_4b_4+\ldots+a_nb_n)$$

5、与 ai 相关分数项：

$$(a_i+a_{i+1})(b_i+b_{i+1})+(a_i+a_{i+2})(b_i+b_{i+2})+\ldots+(a_i+a_n)(b_i+b_n)$$
$$=(n-i-1)a_ib_i+(a_ib_{i+1}+a_ib_{i+2}+\ldots+a_ib_n)+(a_{i+1}b_i+a_{i+2}b_i+\ldots+a_nb_i)$$
$$+(a_ib_i+a_{i+1}b_{i+1}+\ldots+a_nb_n)$$
$$=(n-i-1)a_ib_i+a_i(b_{i+1}+b_{i+2}+\ldots+b_n)+b_i(a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_n)$$
$$+(a_{i+1}b_{i+1}+a_{i+2}b_{i+2}+\ldots+a_nb_n)$$

6、整合一下，所有的分数应该是:

$$(n-1)(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{n-2}b_{n-2}+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n)$$
$$+a_1(b_2+b_3+\ldots+b_N)+a_2(b_3+b_4+\ldots+b_n)+\ldots+a_n-2(b_{n-1}+b_n)+a_{n-1}b_n$$
$$+a_2b_1+a_3(b_1+b_2)+\ldots+a_{n-2}(b_1+b_2+\ldots+b_{n-3})+a_{n-1}(b_1+b_2+\ldots+b_{n-2})$$
$$+a_n(b_1+b_2+\ldots+b_{n-1})$$

7、再合并一下：

$$(n-2)(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{n-1}n_{n-1}+a_nb_n)+(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots$$
$$+b_N)$$

8、归纳求和一下：

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)+\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i$$

9、首先我们需要一个存结果的 int 数组(_ans)，结合之前提到的按颜色和奇偶性分类，应这样定义：int _ans[100005][2]，即_ans[i][j]表示颜色为 i 且奇偶性为 j (1 为奇数，0 为偶数)的数的和，同时需要一个对应_ans 的 int 数组_len[i][j] 表示颜色为 i 且奇偶性为 j 的格子的个数。这两个数组都可以在读入颜色时算出来，别忘了取模。

10、前缀和的算法。

11、最后定义一个 int 变量 ans 存储答案。按照之前提到的通式求得最后的值。

12、给出 40 分和 AC 的两个代码。