

Mecánica

Tarea 2

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1	Page 2
1.1 Random Examples	2
1.2 Random	3
1.3 Algorithms	5
Chapter 2	Page 6
Chapter 3	Page 9
3.1	10

Chapter 1

1.1 Random Examples

Definition 1.1.1: Limit of Sequence in \mathbb{R}

Let $\{s_n\}$ be a sequence in \mathbb{R} . We say

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

where $s \in \mathbb{R}$ if \forall real numbers $\epsilon > 0 \exists$ natural number N such that for $n > N$

$$s - \epsilon < s_n < s + \epsilon \text{ i.e. } |s - s_n| < \epsilon$$

Question 1

Is the set $x\text{-axis} \setminus \{\text{Origin}\}$ a closed set

Solution: We have to take its complement and check whether that set is a open set i.e. if it is a union of open balls

Note:-

We will do topology in Normed Linear Space (Mainly \mathbb{R}^n and occasionally \mathbb{C}^n) using the language of Metric Space

Claim 1.1.1 Topology

Topology is cool

Example 1.1.1 (Open Set and Close Set)

- Open Set:
- ϕ
 - $\bigcup_{x \in X} B_r(x)$ (Any $r > 0$ will do)
 - $B_r(x)$ is open
- Closed Set:
- X, ϕ
 - $\overline{B_r(x)}$
- $x\text{-axis} \cup y\text{-axis}$

Theorem 1.1.1

If $x \in$ open set V then $\exists \delta > 0$ such that $B_\delta(x) \subset V$

Proof: By openness of V , $x \in B_r(u) \subset V$



Given $x \in B_r(u) \subset V$, we want $\delta > 0$ such that $x \in B_\delta(x) \subset B_r(u) \subset V$. Let $d = d(u, x)$. Choose δ such that $d + \delta < r$ (e.g. $\delta < \frac{r-d}{2}$)

If $y \in B_\delta(x)$ we will be done by showing that $d(u, y) < r$ but

$$d(u, y) \leq d(u, x) + d(x, y) < d + \delta < r$$

☺

Corollary 1.1.1

By the result of the proof, we can then show...

Lemma 1.1.1

Suppose $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ is subspace of \mathbb{R}^n .

Proposition 1.1.1

$1 + 1 = 2$.

1.2 Random

Definition 1.2.1: Normed Linear Space and Norm $\|\cdot\|$

Let V be a vector space over \mathbb{R} (or \mathbb{C}). A norm on V is function $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfying

- ① $\|x\| = 0 \iff x = 0 \forall x \in V$
- ② $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{R}(\text{or } \mathbb{C}), x \in V$
- ③ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in V$ (Triangle Inequality/Subadditivity)

And V is called a normed linear space.

• Same definition works with V a vector space over \mathbb{C} (again $\|\cdot\| \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$) where ② becomes $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in V$, where for $\lambda = a + ib, |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Example 1.2.1 (p -Norm)

$V = \mathbb{R}^m, p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Define for $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(In school $p = 2$)

Special Case $p = 1$: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|$ is clearly a norm by usual triangle inequality.

Special Case $p \rightarrow \infty$ (\mathbb{R}^m with $\|\cdot\|_\infty$): $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|\}$

For $m = 1$ these p -norms are nothing but $|x|$. Now exercise

Question 2

Prove that triangle inequality is true if $p \geq 1$ for p -norms. (What goes wrong for $p < 1$?)

Solution: For Property ③ for norm-2

When field is \mathbb{R} :

We have to show

$$\begin{aligned}\sum_i (x_i + y_i)^2 &\leq \left(\sqrt{\sum_i x_i^2} + \sqrt{\sum_i y_i^2} \right)^2 \\ \Rightarrow \sum_i (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) &\leq \sum_i x_i^2 + 2\sqrt{\left[\sum_i x_i^2 \right] \left[\sum_i y_i^2 \right]} + \sum_i y_i^2 \\ \Rightarrow \left[\sum_i x_i y_i \right]^2 &\leq \left[\sum_i x_i^2 \right] \left[\sum_i y_i^2 \right]\end{aligned}$$

So in other words prove $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ where

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$$

Note:-

- $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is \mathbb{R} -linear in each slot i.e.

$$\langle rx + x', y \rangle = r\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \text{ and similarly for second slot}$$

Here in $\langle x, y \rangle$ x is in first slot and y is in second slot.

Now the statement is just the Cauchy-Schwartz Inequality. For proof

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

expand everything of $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle$ which is going to give a quadratic equation in variable λ

$$\begin{aligned}\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x - \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \lambda \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle\end{aligned}$$

Now unless $x = \lambda y$ we have $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle > 0$ Hence the quadratic equation has no root therefore the discriminant is greater than zero.

When field is \mathbb{C} :

Modify the definition by

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \bar{x}_i y_i$$

Then we still have $\langle x, x \rangle \geq 0$

1.3 Algorithms

Algorithm 1: what

Input: This is some input

Output: This is some output

/ This is a comment */*

```
1 some code here;
2  $x \leftarrow 0$ ;
3  $y \leftarrow 0$ ;
4 if  $x > 5$  then
5   |  $x$  is greater than 5 ;                                // This is also a comment
6 else
7   |  $x$  is less than or equal to 5;
8 end
9 foreach  $y$  in 0..5 do
10  |  $y \leftarrow y + 1$ ;
11 end
12 for  $y$  in 0..5 do
13  |  $y \leftarrow y - 1$ ;
14 end
15 while  $x > 5$  do
16  |  $x \leftarrow x - 1$ ;
17 end
18 return Return something here;
```

Chapter 2

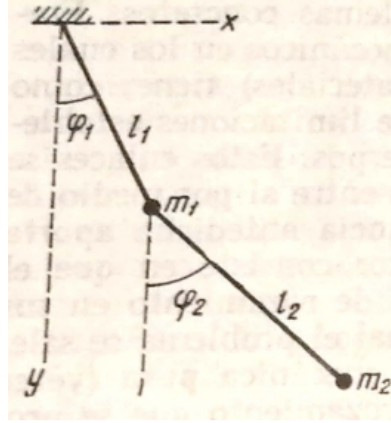


Figure 2.1: Péndulo Doble

En este caso, tenemos $3 \cdot N = 3 \cdot 2 = 6$ coordenadas cartesianas. Sin embargo, tenemos las siguientes ligaduras:

1. $z = 0$
2. $l_1 = cte$
3. $l_2 = cte$

Por lo cual tenemos $3N - n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Por lo tanto tenemos dos grados de libertad. Con esto entonces definamos las coordenadas generalizadas de la manera en la que nos propone la imagen 2.1. Con lo cual nos queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cdot \sin(\varphi_1) \implies \dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) \\ y_1 &= -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) \implies \dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) . \end{aligned}$$

Dado que este primer caso es esencialmente un triángulo en donde estamos calculando los dos catetos (Note que el valor de y es negativo)

Ahora bien, de manera similar, para la masa 2 esto sería como calcular estos mismos catetos. Sin embargo, debe iniciar desde los valores de m_1

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \implies \dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \\ y_2 &= -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \implies \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

Con esto entonces, podemos calcular la energía cinética que es:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \cos^2(\phi_1) + l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2(\phi_1)) \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2) (\cos^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_1)) \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2) .
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2} m_2 \left((l_1 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2))^2 + (l_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2))^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \cos^2(\phi_1) + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \cos^2(\phi_2) \right. \\
&\quad \left. (l_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2))^2 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2(\phi_1) + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \sin^2(\phi_2) \right. \\
&\quad \left. l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2(\phi_1) + l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \cos^2(\phi_1) \right)^2 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2 (\sin^2(\phi_1) + \cos^2(\phi_1)) \\
&\quad \Rightarrow l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \\
&\quad l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \sin^2(\phi_2) + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \cos^2(\phi_2) = l_2^2 \dot{\phi}_2^2 (\sin^2(\phi_2) + \cos^2(\phi_2)) \\
&\quad \Rightarrow l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \\
&\quad 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) = 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 (\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)) \\
&\quad \Rightarrow 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\
&= \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) .
\end{aligned}$$

Ahora bien, para el caso de la energía potencial tenemos

$$\begin{aligned}
V_1 &= m_1 g y_1 \\
&= -m_1 g l_1 \cos(\phi_1) \\
V_2 &= m_2 g y_2 \\
&= -m_2 g (l_1 \cos(\phi_1) + l_2 \cos(\phi_2)) .
\end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \\
&= \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) .
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= -m_1 g l_1 \cos(\phi_1) - m_2 g l_1 \cos(\phi_1) - m_2 g l_2 \cos(\phi_2) \\
&= -g l_1 \cos(\phi_1) (m_1 + m_2) - m_2 g l_2 \cos(\phi_2) .
\end{aligned}$$

Por lo tanto dado que $L = T - V$ nos queda:

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}l_1^2\dot{\phi}_1^2(m_1 + m_2) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (-gl_1\cos(\varphi_1)(m_1 + m_2) - m_2gl_2\cos(\varphi_2)) \\ &= \frac{1}{2}l_1^2\dot{\phi}_1^2(m_1 + m_2) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + gl_1\cos(\varphi_1)(m_1 + m_2) + m_2gl_2\cos(\varphi_2). \end{aligned}$$

Chapter 3

En este caso vamos a partir de que un cilindro rueda sobre otro. Para este caso tenemos dos cilindros, uno de radio a y uno de radio aa . Las medidas se pueden observar en la figura 3.1.

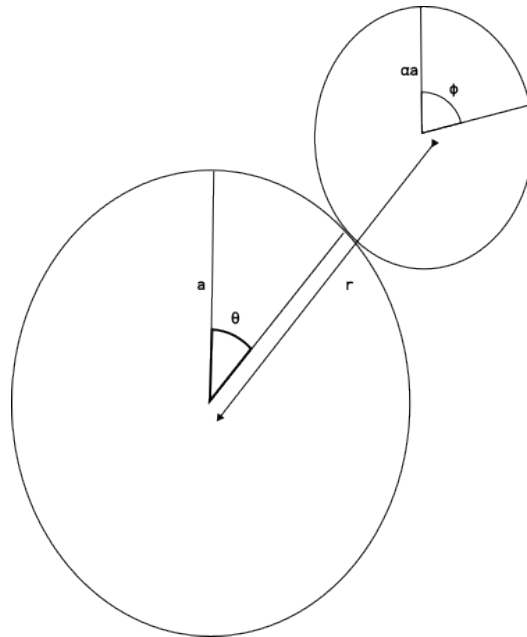


Figure 3.1: Dimensiones y descripción del problema

Con esto entonces nos hace falta ver las fuerzas que las puede encontrar en la figura 3.2

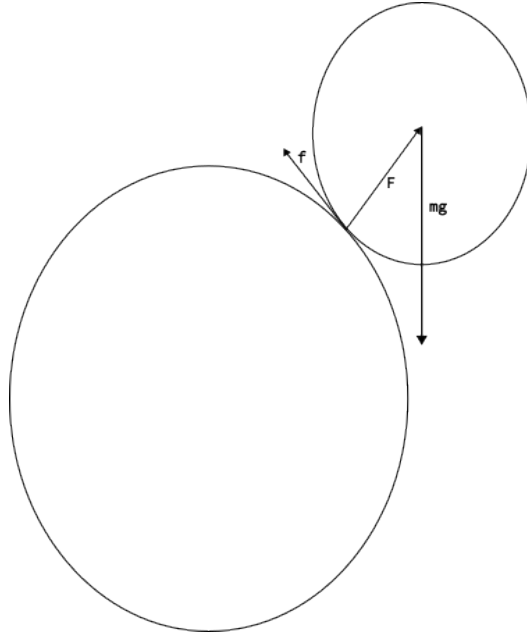


Figure 3.2: Fuerzas en el sistema

En este caso, dado que el cilindro aa ira teniendo cada vez una menor fuerza Z (dado que el angulo en el que se encuentra con respecto a su eje disminuye) entonces sabemos que eventualmente este cilindro se despegara del fijo a . Ademas, sabemos que estos dos perderán contacto en cuanto la fuerza normal F ya no tenga ingerencia. Es decir, cuando

$$F = 0.$$

Ademas, sabemos por el como funciona la fricción que

$$f \leq \mu F.$$

donde μ es el coeficiente de fricción. Lo que implica que este movimiento eventualmente empezara a deslizar sobre la superficie. Por lo tanto, podemos dividir este análisis en 3 momentos definidos por los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 . Para iniciar, desde 0 hasta θ_1 el cilindro rueda sin deslizar, lo que se describe en que la fricción seria

$$f = \mu F.$$

Ahora, entre θ_1 y θ_2 el cilindro se deslizaría pues la fricción es muy pequeña y en θ_2 el cilindro dejaría de estar en contacto con el otro y por lo tanto se sostendría $F = 0$ y de ahí en adelante caería libremente.

Ahora bien iniciemos caso a caso

3.1

Para empezar para un movimiento que no desliza entonces sabemos que:

$$\begin{aligned} a\theta &= \alpha a (\varphi - \theta) \\ \theta &= \alpha (\varphi - \theta) \\ \theta &= \alpha \varphi - \alpha \theta \\ \theta + \alpha \theta &= \alpha \varphi \\ (1 + \alpha) \theta &= \alpha \varphi. \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos definir una función desarrollando:

$$\begin{aligned}(1 + \alpha) \theta &= \alpha \varphi \\ \theta &= \frac{\alpha \varphi}{(1 + \alpha)} \\ \gamma &= \theta - \frac{\alpha \varphi}{(1 + \alpha)}.\end{aligned}$$

Donde, como se puede notar cuando esto no desliza $\gamma = 0$. Ahora bien, por otro lado, tenemos que al estar estos dos cilindros en contacto la distancia entre los centros queda:

$$r = a + \alpha a = (1 + \alpha) a.$$

Ahora bien,

$$T_1 = \frac{1}{2} m$$

.