Metodos Matematicos **Nombre:** *Sergio Montoya*
Tarea 2
5 de marzo de 2024

Pregunta 1

a)

$$z^2(z-1-i) \implies z=\{0,1+i\}$$

Con esto

$$\begin{aligned} 2\pi i f'(0) &= \int \frac{f(0)dz}{(z-0)^2} = \frac{3+i}{2} \\ \implies \pi\left(3+i\right) &= -\pi + 3\pi i = \pi\left(-1+3i\right). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2\pi i f\left(1+i\right) &= \int \frac{f\left(1+i\right)}{z-1-i} \\ &\frac{f\left(z+2\right)}{z^2} \\ &\implies \frac{1-3i}{2} \\ \pi i\left(1-3i\right) &= 3\pi + \pi i = \pi\left(3+i\right). \end{aligned}$$

Pregunta 2

Pregunta 3

$\sin(z)$

En este caso

$$\sin\left(z\right) = z\frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
.

Dado que es analítica en todo el plano entonces el radio de convergencia es $\mathbb{R}$

$\sin^3(z)$

$$\sin^3(z) = \frac{3}{4}\sin(z) - \frac{1}{4}\sin(3z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n+1}.$$

Dado que es analítica en todo el plano entonces el radio de convergencia es $\mathbb{R}$

$\ln(z+1)$

En este caso, necesitamos:

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln(1+0) = 0 \\ f'(0) &= (1+0)^{-1} = 1 \\ f''(0) &= -(1+0)^{-2} = -1 \\ f'''(0) &= 2(1+0)^{-3} = 2 \\ f^{(n)}(0) &= (-1)^{n+1}(n-1)! \end{aligned}$$

Por lo tanto en la formula queda como:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Pregunta 4

Pregunta 5

Pregunta 6

Pregunta 7

a)

Tomemos el semicirculo superior orientado positivamente. Ademas, note que $\lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{a+\cos(\theta)} = 0$

Pregunta 8

Pregunta 9

Pregunta 10

1.6.2.1

a)

En este caso nos interesa ver que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ por lo tanto integremos por partes

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z+1-1} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t} t^{z} dt \\
u(t) &= t^z \\
du &= z t^{z-1} \\
dv &= e^{-t} \\
v(t) &= -e^{-t} \\
\int u dv &= uv - \int v du \\
\int_0^\infty e^{-t} t^z dt &= t^z \cdot (-e^{-t}) - \int_0^\infty -e^{-t} z t^{z-1} dt \\
&= -t^z e^{-t} + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= -t^z e^{-t} + z\Gamma(z)
\end{aligned}
$$

Ahora ya vamos en buena parte de la demostración. Solo nos falta mostrar que $-t^z e^{-t}$ tiende a 0.

$$
-t^z e^{-t} = \frac{-t^z}{e^{-t}}
$$

Aqui en este caso podemos aplicar L'Hopital z veces y con eso nos quedaria una constante (Sabemos que llegaremos a una constante pues $-t^z$ es un polinomio) y por tanto esta serie al intentar llegar a infinito se hara 0. Ademas, cuando t = 0 este tambien se hara 0 por el primer termino.

b)

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{1-1}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^0 dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}dt \\ &= -e^{-t}|_0^\infty \\ &= -e^{-\infty} - (-e^0) \\ &= 1\end{aligned}$$

c)

En este caso para un n entero vamos a hacer una pequeña inducción. El caso base lo demostramos en el punto anterior pues $1 = 1!$. Ahora suponga que funciona para $n-1$ y entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$. Ahora deduzcamos utilizando el apartado **a**:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot (n-1)! \\ \Gamma(n+1) &= n!\end{aligned}$$

Por lo tanto, esto queda demostrado.

d)

En este caso nos interesa mostrar lo que nos piden para los naturales. Por lo tanto lo mas prudente es hacer una demostración por inducción. Mostremos que para $n = 1$ esto se cumple.

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{(z)} \\ &= \frac{z\Gamma(z)}{z} \\ &= \Gamma(z)\end{aligned}$$

Ahora supongamos que esto funciona para $n-1$ por lo tanto

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+(n-1))}{(z+n-2)(z+n-3)}$$

Ahora lo debemos intentar demostrar para n

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\dots z}\\ &= \frac{(z+n-1)\Gamma(z+n-1)}{(z+n-1)(z+n-2)\dots z}\\ &= \frac{\Gamma(z+n-1)}{(z+n-2)(z+n-3)\dots z}\end{aligned}$$

Que asumimos en el paso inductivo que era verdad por lo que sabemos que es cierto y esto se demuestra.

Ahora para la otra parte es bastante mas sencillo. Simplemente tenemos que saber que para cualquier numero real (Como $\mathbb{R}(z)$) existe un numero natural que sea mayor que este numero. Cosa que es bastante clara por la propia definición de natural.

Por ultimo, esta prolongación no se puede hacer para $z = 0$ pues en ese caso estariamos dividiendo por 0 cosa que da indefinido

e)

Ahora en este caso utilizaremos la definición de residuo que es:

$$\begin{aligned}Res(f(z_0)) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\\ &= \lim_{z\to -m}(z+m)\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\dots(z+m)\dots(z+1)z}\\ &= (z+m)\Gamma(z)\\ z+m &= 0\\ &= 0\end{aligned}$$

1.6.3.1

En este caso vamos a asumir que

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du\Gamma(y) = 2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv$$

Esta representación es una de las muchas definiciones que puede tomar Γ. Ahora para mostrar esto note que

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha\int f(x)dx\alpha = \int g(y)dy$$
$$\int g(y)dy\int f(x)dx = \int\int g(y)f(x)dydx$$

Por lo tanto solo tendriamos que reemplazar

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-v^2}v^{2y-1}e^{-v^2}dudv\\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-v^2-u^2}dudv\end{aligned}$$