Complementaria Moderna **Name:** *David Santigo Pachon Ballen*
Taller 1 *Sergio Montoya Ramirez*
January 27, 2023

1. (a) Ecuaciones de Maxwell en forma integral:

i. Ley de Gauss

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

ii. Let de Gauss para el campo mágnetico

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

iii. Ley de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

iv. Ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

(b) Leyes de Maxwell vectoriales

i. Ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{E}) dV \text{Ley de Gauss}$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{ Hipotesis } \square$$

ii. Ley de Gauss para el magnetismo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \cdot \vec{B}) dV \text{Ley de Gauss}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ Hipotesis } \square$$

iii. Ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{E}) d\vec{a}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

iv. Ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{B}) d\vec{a}$$
$$\nabla \times \vec{E} = \mu\varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

v. Aclaración Importante: En este punto varias integrales fueron evitadas y retiradas como si nunca hubieran estado esto se da gracias a que la premisa nos da un espacio libre (Es decir Vacio) y por ende seria absurdo intentar Hacer una integral de volumen en el.

2. (a) Para mostrar esto solo debemos mostrar que la aceleración es la misma en ambos casos (Mas precisamente que difieren unicamente por una matriz de rotación). Para esto partimos de que la aceleración es la doble integral de la posición con respecto al tiempo. Mostremos primero la doble derivada de x

$$\frac{d^2x}{d^2t} = \frac{d^2x}{dt}$$

No podemos poner algo distinto pues no sabemos que función es x, pero si sabemos que x depende de t.

Ahora bien por otro lado tenemos que $x' = Rx + vt$ y con esto vamos a encontrar su segunda derivada.

$$x' = Rx + vt$$
$$\frac{dx'}{dt} = R\frac{dx}{dt} + v$$
$$\frac{d^2x}{d^2t} = R\frac{d^2x}{d^2t}$$

Como se puede ver la unica diferencia real es solamente la matriz de rotación. Dado que estos son un conjunto de transformaciones que mantiene la norma de los vectores entonces estas leyes son invariantes.

(b) Para llegar a este resultado debemos conseguir mostrar que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \neq \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}$$

Para hacer esto vamos a tomar x' como $x' = x + vt$ Ya que si tomaramos lo mismo pero con el rotacional solo seria complicarnos y no aportaria realmente nada a la demostracion. Ahora bien para la primera derivada vamos a tomar la ley de la cadena en calculo vectorial y luego utilizaremos el hecho de que $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2}{v}\frac{\partial}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Por lo tanto podemos concluir que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

(c) Esto se debe a que las rotaciones son el unico conjunto de transformaciones que mantienen la norma de los vectores constante y por tanto no afecta los resultados de los calculos.

(d) Para lograr esto debemos tomar las diferencias que nos encontramos en el punto b y debemos hacer que sea igual a 0 de la siguiente manera.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{v}\frac{\partial}{\partial x \partial t} = 0$$
$$\int (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{v}\frac{\partial}{\partial x \partial t}) dt = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{v}\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Note que esto es ∇

$$\frac{2}{v}(\nabla \cdot \vec{E}) = 0$$

y esta es la ley de Gauss que deberia ocurrrir para que se conserve.

Propiedad

c) Haciendo uso de la identidad $\nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$ (P1) muestre que los campos obedecen la ecuación de onda

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} \; (P_1)$$

$$\nabla\times\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \nabla(0) - \nabla^2\vec{B}$$

$$\mu_0\epsilon_0\left(\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0 - \nabla^2\vec{B}$$

$$-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t} = -\nabla^2\vec{B}$$

$$\boxed{\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}}$$

llegamos a $\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{B} = 0$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{B} = 0$$

por medio de las ecuaciones de Maxwell. llegamos a la ecuación de onda.

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial\vec{F}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{F} = 0}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{v^2} \longrightarrow v = c$$

¿Cuanto vale la velocidad de las ondas?

vale lo que la velocidad de la luz 299792 Km/s

Como se probó en el punto c. Los campos ambos eléctrico y magnético cumplen con la ecuación de la propagación de una onda electromagnética. Siendo así mapas espaciales de distribución de flujo. La atracción y repulsión eléctrica puede entenderse desde la divergencia de regiones de un espacio vectorial. Siendo una región de divergencia positiva una carga positiva. Y una región de divergencia negativa una carga negativa. La repulsión siempre se dará entre dos puntos de divergencia positiva. En tanto las líneas de flujo generadas por cada una tienden a desviarse ambas hacia una misma dirección. Que no es lo mismo que mantener ambas una dirección desde un inicio.