Mecánica
Tarea 1

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Theorem 1.0.1 Principio de D'Alembert

Para un objeto se cumple que

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} - p_i\right) \cdot \delta r_i = 0 \tag{1.1}$$

- $F_i^{(a)}$ son las fuerzas activas.
- $p_i = m \cdot \ddot{r}_i$ es la masa por la aceleración respecto a esa fuerza
- δr_i son desplazamientos virtuales descritos en las coordenadas r_i (Que no son independientes entre si)

Partiendo de 1.1 podemos notar que esta definido en coordenadas r_i lo que hace que no sean independientes pues existen las ligaduras. Por lo tanto necesitamos pasar esta ecuación para que estén en coordenadas generalizadas.

$$r_i = (q_1, q_2, \ldots, q_m) . \tag{1.2}$$

Donde m son el numero de grados de libertad:

$$m = 3N - n.$$

Con esto entonces podemos definir la velocidad

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Y podemos conectar también los desplazamientos virtuales δr_i con

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{1.4}$$

Ahora, con esto entonces podemos tener un trabajo virtual de F_i:

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}.$$

Lo que nos deja

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = \sum_j Q_j \delta q_j. \tag{1.5}$$

Ahora bien, esto no considera la otra parte de la ecuación 1.1. Esta la podemos describir como:

$$\sum_i p_i \cdot \delta r_i = \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i$$

Usando 1.4

$$\sum_i p_i \cdot \delta r_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Ahora bien, podemos ver

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left[m \frac{d \dot{r}_i}{dt} - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\right] \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\right]\end{aligned}$$

.

Ahora centrémonos en la ultima expresión

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$$

Usando 1.3

$$\begin{aligned}&= \sum_k \frac{\partial \frac{\partial r_i}{\partial q_j}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \frac{\partial r_i}{\partial q_j}}{\partial q_t} \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}.\end{aligned}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right] \\ &= \frac{\partial r_i}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial r_i}{\partial t} \\ &= \frac{\partial r_i}{\partial q_j}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}. \tag{1.6}$$

Con lo cual podemos devolvernos y encontrar:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_j}\right]. \tag{1.7}$$

Con lo cual volvemos a 1.1

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} - p_i\right) \cdot \delta r_i = \sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}\right) + m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_j}\right] q_j$$

.

Ahora, revisemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_j}(\dot{x}\dot{x}) &= \dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}\dot{x}_i \\
&= 2\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\
&= 2v_i\frac{\partial v_i}{\partial q_j} \\
\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{2}v_i^2 &= v_i\frac{\partial v_i}{\partial q_j} \\
\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\dot{x}\dot{x}) &= \dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\dot{x}_i \\
&= 2\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \\
&= 2v_i\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \\
\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{1}{2}v_i^2 &= v_i\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_i(\mathbf{F}_i^{(a)} - \mathbf{p}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i &= -\sum_j^N\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i^N\frac{1}{2}m_iv_i^2\right) - Q_j\right]\delta q_j = 0 \\
T &= \sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2 \\
&= -\sum_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right].
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que podemos escoger de manera arbitraria los desplazamientos virtuales δq_j y todo esto debe dar 0 la única manera en que esto se cumple es si se da que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0. \tag{1.8}$$

O de manera equivalente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \tag{1.9}$$

Con lo que llegamos a una primera parte. Sin embargo, terminemos deduciendo el Lagrangiano. Ahora, si las fuerzas se pueden expresar del potencial escalar de la función V. Es decir:

$$F_i = -\Delta_i V.$$

Por lo tanto, Q_j queda:

$$Q_j = \sum_i F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_i\Delta_i V\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}.$$

Y esto es

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Con lo cual podemos volver a la ecuación y tener:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} &= 0 \\
\frac{\partial d}{\partial dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} &= 0.
\end{aligned}$$

Como se dijo arriba V no esta definido con respecto en las velocidades de las coordenadas generalizadas. Por lo tanto, se le puede restar a la primera parte sin alterar el resultado:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0.$$

Con esto entonces defina

$$L = T - V. \tag{1.10}$$

Esto se denomina Lagrangiano y nos deja el resultado como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{1.11}$$

Con lo cual terminamos.