

Electro 1

Tarea 4

Sergio Montoya Ramirez

Contents

| | | |
|------------------|-----------------|----------------|
| Chapter 1 | Punto 2 | Page 2 |
| 1.1 | | 2 |
| 1.2 | | 4 |
| 1.3 | | 4 |
| Chapter 2 | Punto 3 | Page 6 |
| Chapter 3 | Punto 7 | Page 7 |
| Chapter 4 | Punto 8 | Page 8 |
| Chapter 5 | Punto 9 | Page 9 |
| Chapter 6 | Punto 11 | Page 10 |
| Chapter 7 | Punto 12 | Page 11 |
| 7.1 | | 11 |
| 7.2 | | 13 |
| 7.3 | | 14 |
| 7.4 | | 15 |
| 7.5 | | 15 |
| 7.6 | | 17 |

Chapter 1

Punto 2

Definition 1.0.1: Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

1.1

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 0\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + z\hat{z} \\ \vec{B} &= B_0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z} \\ \vec{v} \times \vec{B} &= \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \dot{y} & z \\ B_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0\hat{x} + zB_0\hat{y} - \dot{y}B_0\hat{z} \\ &= zB_0\hat{y} - \dot{y}B_0\hat{z} \\ \vec{F} &= Q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \\ \vec{F} &= Q \left(E_0\hat{z} + zB_0\hat{y} - \dot{y}B_0\hat{z} \right) \\ \vec{F}_x &= 0 \\ \vec{F}_y &= QzB_0\hat{y} \\ \vec{F}_z &= Q \left(E_0 - \dot{y}B_0 \right) \hat{z} \\ m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= QzB_0 \\ m\ddot{z} &= Q \left(E_0 - \dot{y}B_0 \right) \hat{z}\end{aligned}$$

Con esto entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\ddot{z} + \frac{QB_0}{m}\dot{y} - \frac{QE_0}{m} &= 0 \\ \omega &= \frac{QB_0}{m} \\ \ddot{z} + \omega\dot{y} - \omega\frac{E_0}{B_0} &= 0 \\ \ddot{z} + \omega\left(\dot{y} - \frac{E_0}{B_0}\right) &= 0\end{aligned}$$

Y tambien:

$$\begin{aligned}\ddot{y} - \frac{QB_0}{m}\dot{z} &= 0 \\ \omega &= \frac{QB_0}{m} \\ \ddot{y} - \omega\dot{z} &= 0 \\ \ddot{y} &= \omega\dot{z}\end{aligned}$$

Juntando todo:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \omega\dot{z} \\ \iff \dot{z} &= \frac{\ddot{y}}{\omega} \\ \dot{z} &= \frac{\ddot{y}}{\omega} \\ &= \omega \left(\frac{E_0}{B_0} - \dot{y} \right) \\ \ddot{y} &= \omega^2 \left(\frac{E_0}{B_0} - \dot{y} \right)\end{aligned}$$

Con esto entonces:

$$\begin{aligned}y(t) &= C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{E_0}{B_0}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos(\omega t) - C_1 \sin(\omega t) + \frac{E_0}{B_0} + C_3\end{aligned}$$

Ahora lo que nos hace falta es encontrar los valores dadas las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned}\dot{y}(0) &= \dot{z}(0) = 0 \\ y(0) &= z(0) = 0\end{aligned}$$

Con esto entonces:

$$\begin{aligned}y(0) &= C_1 \cos(\omega 0) + C_2 \sin(\omega 0) + \frac{E_0}{B_0}0 + C_3 \\ y(0) &= C_1 + C_3 \\ z(0) &= C_2 \cos(\omega 0) - C_1 \sin(\omega 0) + C_4 \\ z(0) &= C_2 + C_4 \\ C_1 + C_3 &= C_2 + C_4 \\ \dot{y}(t) &= -C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t) + \frac{E_0}{B_0} \\ \dot{z}(t) &= -C_2\omega \sin(\omega t) - C_1\omega \cos(\omega t) \\ C_2\omega + \frac{E_0}{B_0} &= -C_1\omega \\ \iff C_2 &= \frac{1}{\omega} \left(-\frac{E_0}{B_0} - C_1\omega \right) \\ &= -\frac{E_0}{B_0\omega} - C_1\end{aligned}$$

Con esto entonces:

$$\begin{aligned}
C_1 + C_3 &= 0 \iff C_1 = -C_3 \\
C_2\omega + \frac{E_0}{B_0} &= 0 \iff C_2 = -\frac{E_0}{\omega B_0} \\
C_2 + C_4 &= 0 \\
C_2 &= -C_4 \\
C_4 &= \frac{E_0}{\omega B_0}
\end{aligned}$$

Con lo cual finalmente queda:

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{E_0}{\omega B_0} \sin(\omega t) + \frac{E_0}{B_0} t \\
&= \frac{E_0}{B_0 \omega} (\omega t - \sin(\omega t)) \\
z(t) &= -\frac{E_0}{\omega B_0} \cos(\omega t) + \frac{E_0}{\omega B_0} \\
z(t) &= \frac{E_0}{\omega B_0} (1 - \cos(\omega t))
\end{aligned}$$

1.2

Ahora con esto para encontrar el Radio tomemos

$$\begin{aligned}
R &= \frac{E_0}{\omega B_0} \\
y(t) &= \frac{E_0}{B_0 \omega} (\omega t - \sin(\omega t)) \\
-\sin(\omega t) &= \frac{B_0 \omega}{E_0} \left(y(t) - \frac{E_0 t}{B_0} \right) \\
Z(t) &= \frac{E_0}{\omega B_0} (1 - \cos(\omega t)) \\
-\cos(\omega t) &= \frac{\omega B_0}{E_0} \left(z(t) - \frac{E_0}{\omega B_0} \right) \\
-\cos(\omega t) &= \frac{1}{R} (z(t) - R) \\
\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) &= 1 \\
a^2 &= -a^2 \\
\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) &= (-\sin(\omega t))^2 + (-\cos(\omega t))^2 \\
\left(\frac{1}{R^2} (y(t) - R\omega t)^2 \right) + \left(\frac{1}{R^2} (z(t) - R)^2 \right) &= 1 \\
(y(t) - R\omega t)^2 + (z(t) - R)^2 &= R^2
\end{aligned}$$

Con esto encontramos un circulo con radio R

1.3

Este problema es en esencia el ejemplo 5.2 de la cuarta edición del Griffiths. Por lo tanto reutilizare su dibujo para no complicarme con ello.

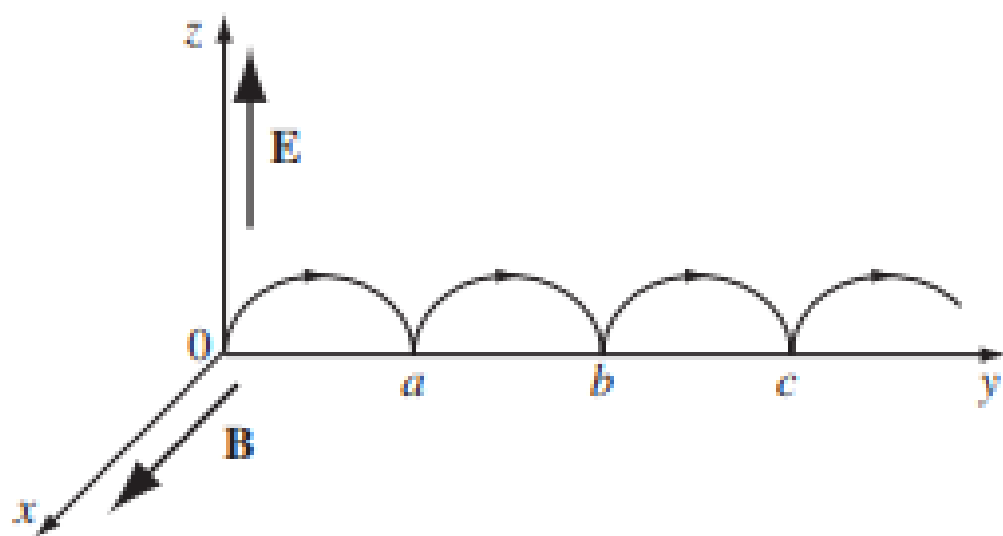


Figure 1.1: Dibujo del movimiento.

Chapter 2

Punto 3

Chapter 3

Punto 7

Chapter 4

Punto 8

Chapter 5

Punto 9

Chapter 6

Punto 11

Para este fonografo dado que rota a una velocidad angular ω tenemos

$$\begin{aligned} I &= \sigma v dr \\ &= \sigma \omega r dr \end{aligned}$$

Y podemos ver esto como la suma infinitesimal de pequeños arcos como:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^R \pi r^2 \sigma \omega r dr \\ \mu &= \pi \sigma \omega \int_0^R r^3 dr \\ \mu &= \pi \sigma \omega \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ \mu &= \pi \sigma \omega \frac{R^4}{4} \square \end{aligned}$$

Chapter 7

Punto 12

7.1

Lo primero que debemos hacer para este punto es encontrar el campo magnético para una espira. Para ello, vamos a usar Biot-Savart.

Definition 7.1.1: Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \vec{ds} \times \hat{r}}{r^2}$$

Ademas, este es el ejemplo 5.6 de la sexta edición del Griffiths. Tomemos entonces su grafica para ubicarnos mejor:

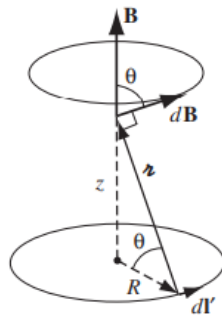


Figure 7.1: Figura de Representación para el problema de una espira.

Con esto entonces puede notar que los componentes de dI' y de dB se cancelan en todos los ejes excepto

en el vertical en donde se suman. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \vec{ds} \times \hat{r}}{r^2} \\
B &\propto \int dB_y = \int dB \cos \theta \\
B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \vec{ds} \sin(90^\circ)}{r^2} \cos \theta \\
B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{ds}}{r^2} \cos \theta \\
\cos \theta &= \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \\
r &= \sqrt{z^2 + R^2} \\
B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{ds}}{(z^2 + R^2)} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \\
B &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \int \vec{ds} \\
B &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} (2\pi R) \\
B &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Ahora bien dado que tenemos dos espiras por superposición podemos poner:

1.

$$z = \frac{d}{2} + z$$

$$\begin{aligned}
B_+ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\
B_+ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} + z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

2.

$$z = \frac{d}{2} - z$$

$$\begin{aligned}
B_- &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\
B_- &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} - z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Con lo cual el resultado total es:

$$\begin{aligned}
 B &= B_+ + B_- \\
 &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} + z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} - z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2} + z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2} - z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]
 \end{aligned}$$

7.2

Podemos simplemente poner este resultado con python como:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu0 = 4 * np.pi * 1e-7

I = 1.0
R = 1.0
d = R

def Bz(z, I, R):
    term1 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z - d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    term2 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z + d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    return term1 + term2

z_vals = np.linspace(-2*R, 2*R, 300)

B_vals = [Bz(z, I, R) for z in z_vals]

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(z_vals, B_vals)
plt.xlabel('z [m]')
plt.ylabel('B [T]')
plt.title('Campo magnetico a lo largo del eje de dos bobinas de Helmholtz (d=R)')
plt.grid(True)
plt.savefig("../img/punto_12_b.png")

```

Con lo cual recibimos la siguiente grafica:

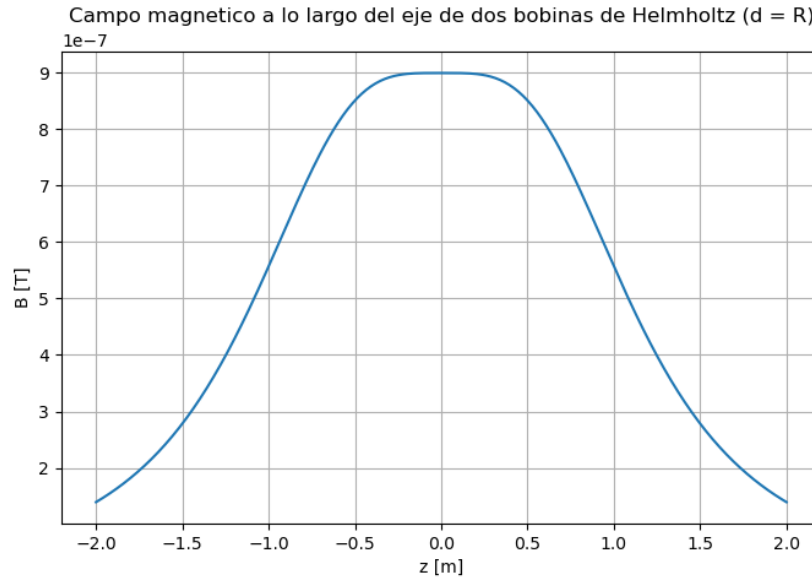


Figure 7.2: Campo magnetico a lo largo del eje de dos bobinas de Helmholtz ($d = R$)

7.3

Este punto lo podemos mirar basicamente como si esta corriente no varie mucho. Para hacer esto en esencia lo que nos interesa es encontrar que $\frac{d^2 B}{dz^2}(0) = \frac{dB}{dz}(0) = 0$ para algun d . Por simetria ya sabemos que $\frac{dB}{dz}(0) = 0$. Por lo tanto solo nos queda encontrar una d en la que se cumpla lo primero.

Para esto vamos a ponerlo en Sympy:

```
import sympy as sp

z, R, d, I, mu0 = sp.symbols('z-R-d-I-mu0', real=True, positive=True)

B = (mu0*I*R**2/sp.Integer(2)) * (
    1 / ((R**2 + (z - d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2))) +
    1 / ((R**2 + (z + d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2)))
)

dBdz = sp.diff(B, z)

d2Bdz2 = sp.diff(dBdz, z)

print("B(z) -=")
sp.print_latex(sp.simplify(B))
print("\n")
print("dB/dz -=")
sp.print_latex(sp.simplify(dBdz))
print("\n")
print("d^2B/dz^2 -=")
sp.print_latex(sp.simplify(d2Bdz2))
print("\n")

eq = sp.Eq(d2Bdz2.subs(z, 0), 0)

print("d^2B/dz^2(0) -=")
```

```

sp.print_latex(sp.simplify(eq))
print("\n")

solution_for_d = sp.solve(eq, d, dict=True)
print(" Solucion para d de modo que d^2B/dz^2(0) == 0:")
sp.print_latex(solution_for_d)
print("\n")

```

Con esto entonces podemos saber que para B tenemos:

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{24IR^2\mu_0 \left((4R^2 + (d-2z)^2)^{\frac{5}{2}}(d+2z) - (4R^2 + (d+2z)^2)^{\frac{5}{2}}(d-2z) \right)}{(4R^2 + (d-2z)^2)^{\frac{5}{2}}(4R^2 + (d+2z)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2B}{dz^2} = -\frac{48IR^2\mu_0}{(4R^2 + (d+2z)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{240IR^2\mu_0(d+2z)^2}{(4R^2 + (d+2z)^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{48IR^2\mu_0}{(4R^2 + (d-2z)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{240IR^2\mu_0(d-2z)^2}{(4R^2 + (d-2z)^2)^{\frac{7}{2}}}$$

Ahora para solucionar podemos simplemente reemplazar $z = 0$ que nos queda como:

$$\frac{d^2B}{dz^2}(0) = \frac{384IR^2\mu_0(-R^2 + d^2)}{(4R^2 + d^2)^{\frac{7}{2}}}$$

Y por ultimo buscamos un valor de d para el cual

$$\frac{d^2B}{dz^2}(0) = 0$$

Y nos da como resultado:

$$[\{d : R\}]$$

Y con esto queda solucionado. Ahora veamos esta, esta bobina de Helmholtz se hace mucho mas estable cuando $d = R$ cosa que explica el por que trabajamos con ello en el punto anterior.

7.4

Este punto es esencialmente equivalente al A por lo tanto no volveremos a mirar como solucionar el campo para una espira y simplemente partiremos de antes:

$$\begin{aligned}
B &= B_+ + B_- \\
&= \frac{\mu_0 IR^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} + z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 - IR^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} - z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left[\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2} + z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2} - z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]
\end{aligned}$$

En esencia es evidente lo que estoy poniendo pues es simplemente decir que cuando las corrientes son inversas no se contribuyen si no que se restan.

7.5

Para graficar esto vamos a reutilizar el codigo de antes simplemente cambiando un signo:


```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu0 = 4 * np.pi * 1e-7

I = 1.0
R = 1.0
d = R

def Bz(z, I, R):
    term1 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z - d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    term2 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z + d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    return term1 - term2 # ESTE TERMINO CAMBIO

z_vals = np.linspace(-2*R, 2*R, 300)

B_vals = [Bz(z, I, R) for z in z_vals]

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(z_vals, B_vals)
plt.xlabel('z [m]')
plt.ylabel('B [T]')
plt.title('Campo magnetico a lo largo del eje de Anti-Helmholtz (d=R)')
plt.grid(True)
plt.savefig("../img/punto_12_e.png")

```

Con lo que nos queda el siguiente resultado:

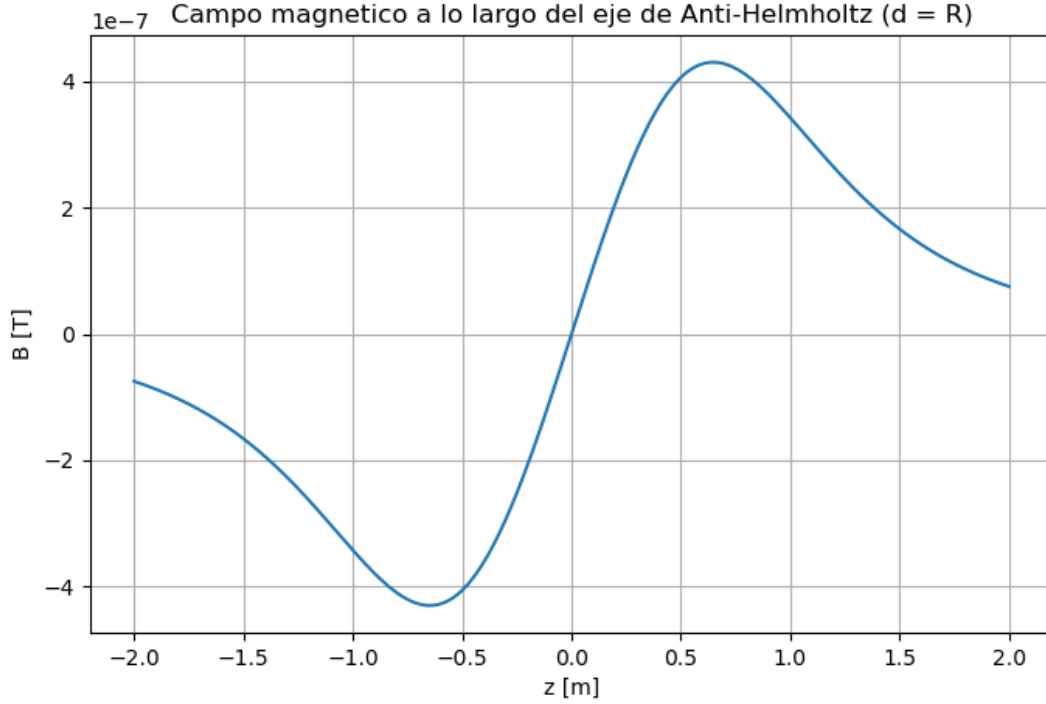


Figure 7.3: Campo magnetico a lo largo del eje de Anti-Helmholtz ($d = R$)

7.6

Ahora vamos a buscar que en el centro $B = -B_T$ que recordemos es aproximadamente $B_T = 50\mu T$. Lo primero es notar que este va a ser una bobina de Helmholtz y no una antibobina pues nos interesa que en el centro sea el mayor valor y no 0. Por lo tanto tomaremos los ejemplos anteriores.

Lo que haremos en esencia sera coger el termino anterior y reemplazarle $z = 0$ y $d = R$. Esto nos dara el resultado para $B(0)$ de una bobina de Helmholtz que queda como:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2} + z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2} - z \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{\left[\left(\frac{R}{2} + 0 \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{R}{2} - 0 \right)^2 + R^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$B(0) = \frac{8\sqrt{5}I\mu_0}{25R}$$

Ahora con esto lo que nos interesa es ver cuando $B(0) = B_{tierra}$ lo cual nos permitiria despejar para la corriente y simplemente con eso ya tendríamos dado R cual deberia ser la corriente que pase para que en el centro el campo terrestre se anule:

$$B(0) = \frac{8\sqrt{5}I\mu_0}{25R} = B_{tierra}$$

$$B(0) = \frac{5\sqrt{5}B_{tierra}R}{8\mu_0}$$

Ahora ya apartir de esto podemos hacerlo tan arbitrario como querramos.

Para mostrar esto tambien lo hice con sympy y obtuve los mismos resultados:

```
import sympy as sp

z, R, d, I, mu0, B_tierra = sp.symbols(
    'z R d I mu0 B_tierra', real=True, positive=True)

B = (mu0*I*R**2/sp.Integer(2)) * (
    1 / ((R**2 + (z - d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2))) +
    1 / ((R**2 + (z + d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2)))
)

B_center = B.subs({z: 0, d: R})
B_center_simp = sp.simplify(B_center)
print("B(0) =")
sp.print_latex(B_center_simp)

eq = sp.Eq(B_center_simp, B_tierra)
sp.print_latex(eq)

I_sol = sp.simplify(sp.solve(eq, I)[0])
print("I =")
sp.print_latex(I_sol)
```