

Análisis

Tarea 3

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1	Problema 1	Page 2
1.1	Enunciado	2
1.2	Solución	2
Chapter 2	Problema 2	Page 3
2.1	Enunciado	3
2.2	Solución	3
Chapter 3	Problema 3	Page 4
3.1	Enunciado	4
3.2	Solución	4
Chapter 4	Problema 4	Page 5
4.1	Enunciado	5
	Ayuda — 5	
4.2	Solución	5
Chapter 5	Problema 5	Page 6
5.1	Enunciado	6
5.2	Solución	6
Chapter 6	Problema 6	Page 8
6.1	Enunciado	8

Chapter 1

Problema 1

1.1 Enunciado

Demuestre el siguiente teorema:

Theorem 1.1.1

Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $a_n > 0$ y $b_n > 0$. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0.$$

entonces $\sum_n a_n$ converge si y solo si $\sum_n b_n$ converge

1.2 Solución

Definition 1.2.1: Test de Comparación

Suponga que existe un entero N tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

En este caso vamos a tomar la sucesión $\frac{a_n}{b_n}$ como una sucesión que converge a L . Además, dado que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ sabemos que $L > 0$. Ahora bien, dado que esta serie converge a L sabemos que existe un N tal que para todo $n \geq N$ se cumple:

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L.$$

y con esto sabiendo que $b_n > 0$ entonces podemos encontrar rápidamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Lb_n &\leq \frac{a_n}{b_n}b_n \leq 2Lb_n \\ \frac{1}{2}Lb_n &\leq a_n \leq 2Lb_n. \end{aligned}$$

Ahora con esto, podemos dividir la demostración para cada caso.

\Rightarrow Sea $\{a_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ y dado que $\frac{1}{2}L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que b_n converge.

\Leftarrow Sea $\{b_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $a_n \leq 2Lb_n$ y dado que $2L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que a_n converge.

Chapter 2

Problema 2

2.1 Enunciado

Sea

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}; \quad x_0 = 2.$$

- a. Demuestre que $x_n^2 \geq 2$. *Ayuda:* considere la ecuación:

$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 2 = 0.$$

donde la incógnita es x_n . ¿Que puede decir del discriminante de dicha ecuación.

- b. Demuestre que $x_{n+1} \leq x_n$, el punto anterior puede ser de ayuda.
c. Demuestre que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente y que su límite es $\sqrt{2}$

2.2 Solución

- a.
b.
c.

Chapter 3

Problema 3

3.1 Enunciado

Cada racional x puede ser escrito en la forma $x = \frac{m}{n}$, donde $n > 0$, con m y n enteros sin divisores en común. Cuando $x = 0$, tomamos $n = 1$. Considere la función f definida en R^1 por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}' \\ \frac{1}{n} & (x = \frac{m}{n}) \end{cases}.$$

Pruebe que f es continuo en cada punto irracional, y que f tiene una discontinuidad simple en cada punto racional.

3.2 Solución

En este caso, lo que nos pide el enunciado es esencialmente lo mismo que mostrar que $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = 0$ para todo x . Para esto sea $\varepsilon > 0$ y sea x cualquier numero real. Sea N el único entero positivo tal que $N < \frac{1}{\varepsilon} < N + 1$ y para cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \dots, N$ sea k_n un entero tal que

$$\frac{k_n}{n} \leq x \leq \frac{k_n + 1}{n}.$$

Entonces, por cada n sea $\delta_n = \frac{1}{n}$ si $x = \frac{k_n}{n}$, en cualquier otro caso sea $\delta_n = \min\left(x - \frac{k_n}{n}, \frac{k_n + 1}{n} - x\right)$. Finalmente, sea $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_N)$. Ahora con todo esto definido, podemos decir que $|f(t)| < \varepsilon$ si $0 < |x - t| < \delta$. Esto es bastante claro para un numero irracional, sin embargo, si t es racional y $t = \frac{m}{n}$, tenemos necesariamente que $n > N$ por la manera en la que escogimos δ_n para $n \leq N$. Por lo tanto, si t es racional, entonces $f(t) \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Con lo que completamos la prueba.

Una vez tenemos que $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = 0$. Entonces nos siguen ambas cosas pues para cualquier irracional se cumple que $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(t) = 0$ y lo contrario ocurre para cualquier racional.

Chapter 4

Problema 4

4.1 Enunciado

Definition 4.1.1: Propiedad del valor Intermedio

Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b

Sea f una función real con dominio en \mathbb{R}^1 que tiene la propiedad del valor intermedio. Suponga también, para cada racional r , que el conjunto de todos los x con $f(x) = r$ es cerrado. Pruebe que f es continuo.

4.1.1 Ayuda

Si $x_n \rightarrow x_0$ pero $f(x_n) > r > f(x_0)$ para algún r y todo n , entonces $f(t_n) = r$ para algún t_n entre x_0 y x_n ; por lo tanto $t_n \rightarrow x_0$. Encuentre una contradicción.

4.2 Solución

La contradicción que se nos pide encontrar en la ayuda esta en que x_0 es un punto limite del conjunto de t tal que $f(t) = r$, sin embargo, x_0 no pertenece al conjunto. Lo anterior, es una contradicción directa con que este conjunto es cerrado.

Chapter 5

Problema 5

5.1 Enunciado

Asuma que f es una función real continua definida en (a, b) tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

para todo $x, y \in (a, b)$. Pruebe que f es convexo.

5.2 Solución

Debemos mostrar que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Para todos los números de la forma $\lambda = \frac{k}{2^n}$, donde k es un entero no negativo menor o igual a 2^n . Esto lo haremos por inducción en n .

Caso $n = 0$: Para esto por la definición de λ nos queda que los únicos valores que puede tomar son 0 y 1.

$\lambda = 0$ En este caso:

$$\begin{aligned} f(0 \cdot x + (1-0)y) &\leq 0f(x) + (1-0)f(y) \\ f(y) &\leq (1)f(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la desigualdad.

$\lambda = 1$ En este caso:

$$\begin{aligned} f(1x + (1-1)y) &\leq 1f(x) + (1-1)f(y) \\ f(x) &\leq f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto también se cumple la desigualdad.

Suposición : Suponga que el resultado se cumple para todo $n \leq r$, y considere $\lambda = \frac{k}{2^{r+1}}$.

Demostración : Si k es par, digamos $k = 2l$, entonces $\frac{k}{2^{r+1}} = \frac{l}{2^r}$ y podemos apelar a la hipótesis de inducción. Ahora suponga que k es impar. Entonces $1 \leq k \leq 2^{r+1} - 1$, y entonces podemos tener los números $l = \frac{k-1}{2}$ y $m = \frac{k+1}{2}$ son enteros con $0 \leq l \leq m \leq 2^r$. Con esto podemos entonces re escribir

$$\lambda = \frac{s+t}{2}.$$

donde $s = \frac{k-1}{2^{r+1}} = \frac{l}{2^r}$ y $t = \frac{k+1}{2^{r+1}} = \frac{m}{2^r}$. Tenemos entonces

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \frac{[sx + (1-s)y] + [tx + (1-t)y]}{2}.$$

Por lo tanto por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \frac{f(sx + (1 - s)y) + f(tx + (1 - t)y)}{2} \\
 &\leq \frac{sf(x) + (1 - s)f(y) + tf(x) + (1 - t)f(y)}{2} \\
 &= \left(\frac{s + t}{2}\right)f(x) + \left(1 - \frac{s + t}{2}\right)f(y) \\
 &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).
 \end{aligned}$$

Esto completa la inducción. Ahora por cada x y y fijadas y cada lado de la inecuación:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

son funciones continuas de λ . Por lo tanto, el conjunto en el cual la inecuación se sostiene (la imagen inversa cerrada del conjunto $[0, \infty)$ bajo el mapa $\lambda \rightarrow \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$) es un conjunto cerrado. Dado que contiene todos los puntos $\frac{k}{2^n}$, $0 \leq k \leq n$, $n = 1, 2, \dots$ debe contener una cerradura de este conjunto de puntos. Por lo tanto f es convexo.

Chapter 6

Problema 6

6.1 Enunciado

Sea

$$X = \{f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}.$$

Naturalmente X tiene una estructura de espacio vectorial.

a. Defina

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Muestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno sobre X .

b. A partir del producto interno definido en el punto anterior, se puede definir una norma como sigue:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

y a partir de dicha norma una métrica:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Calcule para $m \neq n$

$$\|\sin(mx) - \sin(nx)\|.$$

c. Concluya que ninguna bola cerrada centrada en el origen de X es compacta. ¿Tiene X dimensión finita?

6.2 Solución