Física Moderna - Complementaria **Name:** *David Santiago Pachon Ballen*
Trabajo 6 *Sergio Montoya Ramírez*
03/03/2023

1. (a) A Para encontrar A despejemos desde la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a_0^2}} = 1$$
$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a_0^2}} dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \text{ Gaussiana}$$
$$b = \frac{2}{a_0^2}$$
$$A^2 \sqrt{\frac{\pi a_0^2}{2}} = 1$$
$$A^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a_0^2}}$$
$$A = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi a_0^2}}$$

(b)

$$< p >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi * \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-2x}{a_0^2} A e^{-\frac{x^2}{a_0^2}}$$
$$= \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} x A^2 e^{-\frac{2x^2}{a_0^2}} dx$$
$$= 0$$

Nota que la función que esta adentro es una función impar y como el intervalo en el que estamos integrando es par entonces esta integral es 0

(c) Para este caso necesitaremos definir $\hat{p}^2 = \hbar \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ en particular necesitaremos hallarlo aplicado en ψ por lo tanto esto nos quedaria

$$< p^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \hbar\psi \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{2Ae^{-\frac{x^2}{a_0^2}}(a_0^2 - 2x^2)}{a_0^4} \text{ Sacado de Wolfram}$$

$$= \psi \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = Ae^{-\frac{x^2}{a_0^2}} \cdot \frac{2Ae^{-\frac{x^2}{a_0^2}}(a_0^2 - 2x^2)}{a_0^4}$$

$$= \frac{A^2e^{-\frac{2x^2}{a_0^2}}(a_o^2 - 2x^2)}{a_0^4}$$

$$= \frac{\hbar A^2}{a_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x^2}{a_0^2}}(a_0^2 - 2x^2)$$

$$= \frac{\hbar A^2}{a_0^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} a_0^2 e^{-\frac{2x^2}{a_0}} - \int_{-\infty}^{\infty} 2x^2 e^{-\frac{2x^2}{a_0^2}} \right)$$

$$= \frac{\hbar A^2}{a_0^4} \left(a_0^2 \sqrt{\frac{\pi a_0^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0^3 \right)$$

(d)

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{x^2}{a_0^2}} x dx$$

$$< x >= 0$$

Note que tal cual como en la sección (b), la función a integrar es impar y el intervalo par. Por lo tanto el valor es 0.

(e)

$$< x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi * x^2 \psi dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{x^2}{a_0^2}} x^2 Ae^{-\frac{x^2}{a_0^2}} dx$$

$$= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{2x^2}{a_0^2}} = A^2 \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0^3$$

(f) Ahora bien, para encontrar esto vamos a utilizar que

$$\sigma_p = \sqrt{< p^2 > - < p >^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$$

Con esto ya en mente notemos que $<x>$ y $<p>$ son 0 y por tanto su cuadrado tambien lo es lo que nos deja con unicamente

$$\sigma_p = \sqrt{<p^2>}$$
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\hbar A^2}{a_0^4}\left(a_0^2\sqrt{\frac{\pi a_0^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0^3\right)}$$
$$\sigma_x = \sqrt{<x^2>}$$
$$\sigma_x = \sqrt{A^2\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0^3}$$

Ahora una vez tenemos esto las multiplicamos que nos quedaria

$$\sigma_p\sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar A^2}{a_0^4}\left(a_0^2\sqrt{\frac{\pi a_0^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0^3\right)A^2\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0^3}$$
$$= \frac{A^2}{2a_0^2}\sqrt{\hbar\left(a_0^2\sqrt{\frac{\pi a_0^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0^3\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0^3}$$
$$= \frac{A^2}{2a_0^2}\sqrt{\hbar\left(\frac{\pi a_0^7}{2} - \frac{\pi}{4}a_0^6\right)}$$
$$= \frac{A^2 a_0}{2}\sqrt{\hbar\left(\frac{\pi}{2}a_0 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

2. (a) Para este caso vamos a dividir la derivada en intervalos en particular los intervalos que estan en de 0 a $\frac{L}{2}$ y de $\frac{L}{2}$ a L. Los otros dos intervalos los ignoraremos pues como estamos en un pozo infinito lo que se sale de este caso podemos suponer que es 0. Esto nos deja con

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2 dx = 1$$
$$\int_0^{\frac{L}{2}} A^2x^2dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}(AL - Ax)^2dx$$
$$\frac{A^2L^3}{12} = 1 \text{ Resultado sacado de Symbolab}$$
$$A = \sqrt{\frac{12}{L^3}}$$

Esta es una expresión para una longitud general. Sin embargo, es imposible graficar con una longitud de este estilo. entonces determinamos que L=1 de manera arbitraria solo para que nuestra grafica tenga sentido. Esta grafica es la 1

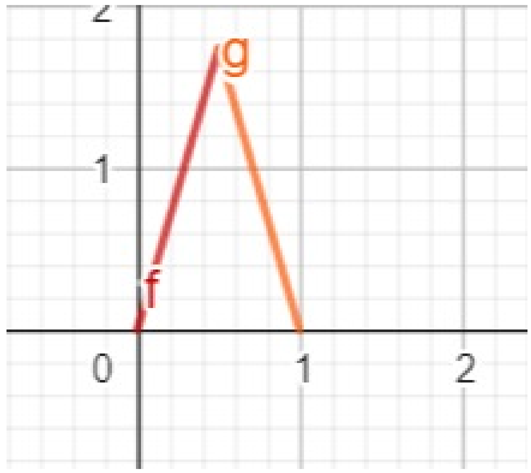

Figure 1: Grafica de la función hallada para una longitud aribtraria. En particular, L=1

(b) Para calcular la probabilidad que necesitamos vamos a utilizar 2 ecuaciones.

$$a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \psi(x) dx \tag{1}$$

$$P(E_1) = a_1^2 \tag{2}$$

Ahora bien con esto podemos separa la división en los mismos intervalos que previamente lo que nos dejara con

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} Axdx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} (AL - Ax)dx \right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{L}} \left(A\frac{L^2}{4} + AL - A\frac{3L^2}{4} \right)$$

$$a_i = \sqrt{\frac{2}{L}} \left(A\frac{L^2}{4} + AL - A\frac{3L^2}{4} \right)$$

$$P(E_1) = \frac{2}{L} \left(\frac{L^2}{2} + AL \right)^2$$