Cuantica **Name:** *Sergio Montoya*
Taller 3
May 21, 2025

1 Primer Punto

1.1 Enunciado

Considere un oscilador armonico simple en una dimensión. La función de onda ψ en $t = 0$ es

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} |1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |2\rangle \tag{1}$$

Donde $|n\rangle$ representa el estado propio para una energia E_n.

1. Escriba la función de onda para cualquier tiempo t.
2. Escriba el valor esperado para la energia.
3. Encuentre la expresión para el valor esperado de la posición dependiente del tiempo:

$$\langle\psi(t)| \hat{x} |\psi(t)\rangle \tag{2}$$

1.2 Solución

1. Para iniciar debemos considerar que para convertir una función de onda independiente del tiempo a una dependiente del tiempo en este caso debemos multiplicar por $e^{-iE_nt/\hbar}$ en cada uno de los terminos de 1. Tomando en consideración que para un oscilador armonico se cumple que:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

tendriamos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \\ &= \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad (3) \\ E_2 &= \left(2 + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \\ &= \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad (4) \end{aligned}$$

Con lo cual los valores serian:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} &= e^{-\frac{i\frac{3}{2}\hbar\omega t}{\hbar}} \\ &= e^{-i\frac{3}{2}\omega t} \\ e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} &= e^{-\frac{i\frac{5}{2}\hbar\omega t}{\hbar}} \\ &= e^{-i\frac{5}{2}\omega t} \end{aligned}$$

Con lo cual la función de onda para cualquier t seria:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i\frac{3}{2}\omega t} |1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\frac{5}{2}\omega t} |2\rangle \tag{5}$$

2. La expresión general para la energia promedio es:

$$\langle \psi(0)| \hat{H} |\psi(0)\rangle \tag{6}$$

Teniendo entonces dada la equación 1 nos queda

$$\begin{aligned} \langle E\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1| + \frac{2}{\sqrt{5}}\langle 2|\right) \hat{H} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1|\hat{H}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 1|\hat{H}|2\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2|\hat{H}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 2|\hat{H}|2\rangle \\ &= \frac{1}{5}\langle 1|\hat{H}|1\rangle + \frac{2}{5}\langle 1|\hat{H}|2\rangle + \frac{2}{5}\langle 2|\hat{H}|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 2|\hat{H}|2\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

Ahora bien, tambien necesitaremos que:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle \tag{8}$$

que al aplicarlo en 7

$$\begin{aligned} \langle E\rangle &= \frac{1}{5}\langle 1|\hat{H}|1\rangle + \frac{2}{5}\langle 1|\hat{H}|2\rangle + \frac{2}{5}\langle 2|\hat{H}|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 2|\hat{H}|2\rangle \\ &= \frac{1}{5}\langle 1|E_1|1\rangle + \frac{2}{5}\langle 1|E_2|2\rangle + \frac{2}{5}\langle 2|E_1|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 2|E_2|2\rangle \\ &= \frac{1}{5}E_1\langle 1|1\rangle + \frac{2}{5}E_2\langle 1|2\rangle + \frac{2}{5}E_1\langle 2|1\rangle + \frac{4}{5}E_2\langle 2|2\rangle \\ &= \frac{1}{5}E_1 + \frac{2}{5}E_2\cdot 0 + \frac{2}{5}E_1\cdot 0 + \frac{4}{5}E_2 \\ &= \frac{1}{5}E_1 + \frac{4}{5}E_2 \end{aligned}$$

Ahora recordando lo encontrado en 3 y 4 nos queda:

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \frac{1}{5}E_1 + \frac{4}{5}E_2 \\
&= \frac{1}{5}\frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{4}{5}\frac{5}{2}\hbar\omega \\
&= \frac{3}{10}\hbar\omega + \frac{20}{10}\hbar\omega \\
&= \frac{23}{10}\hbar\omega
\end{aligned}$$

3. Dada la descripción que tenemos en 2 consideremos que

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right) \tag{9}$$

Con esto entonces podemos reemplazar:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}\rangle(t) &= \langle\psi(t)|\,\hat{x}\,|\psi(t)\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\frac{3}{2}\omega t}\langle 1| + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\frac{5}{2}\omega t}\langle 2|\right)\hat{x}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\frac{3}{2}\omega t - i\frac{3}{2}\omega t}\langle 1|\,\hat{x}\,|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\frac{3}{2}\omega t - i\frac{5}{2}\omega t}\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle \\
&+ \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\frac{5}{2}\omega t - i\frac{3}{2}\omega t}\langle 2|\,\hat{x}\,|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\frac{5}{2}\omega t - i\frac{5}{2}\omega t}\langle 2|\,\hat{x}\,|2\rangle \\
&= \frac{1}{5}\langle 1|\,\hat{x}\,|1\rangle + \frac{2}{5}e^{-i\omega t}\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle + \frac{2}{5}e^{i\omega t}\langle 2|\,\hat{x}\,|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 2|\,\hat{x}\,|2\rangle
\end{aligned} \tag{10}$$

Podemos saber dada la definición 9 con los operadores de creación y aniquilación que para quelos estados no se aniquilen mutuamente deben estar separados por unicamente un paso. Es decir, para nuestro caso concreto con 10 tenemos que se aniquilan los puntos con $\langle n|\,\hat{x}\,|n\rangle$. Esto nos deja con:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}\rangle(t) &= \frac{1}{5}\langle 1|\,\hat{x}\,|1\rangle + \frac{2}{5}e^{-i\omega t}\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle + \frac{2}{5}e^{i\omega t}\langle 2|\,\hat{x}\,|1\rangle + \frac{4}{5}\langle 2|\,\hat{x}\,|2\rangle \\
&= \frac{2}{5}e^{-i\omega t}\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle + \frac{2}{5}e^{i\omega t}\langle 2|\,\hat{x}\,|1\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

Para cada uno de estos casos veamoslo por aparte:

- $\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|\left(a + a^\dagger\right)|2\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|\left(a\,|2\rangle + a^\dagger\,|2\rangle\right)
\end{aligned}$$

Considerando que

$$
\begin{aligned}
a\,|2\rangle &= \sqrt{2}\,|1\rangle \\
a^\dagger\,|2\rangle &= \sqrt{3}\,|3\rangle
\end{aligned}
$$

Podemos reemplazar directamente y obtener:

$$
\begin{aligned}
\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 1|\left(a\,|2\rangle + a^\dagger\,|2\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 1|\left(\sqrt{2}\,|1\rangle + \sqrt{3}\,|3\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle 1|\,\sqrt{2}\,|1\rangle + \langle 1|\,\sqrt{3}\,|3\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{2}\,\langle 1|1\rangle + \sqrt{3}\,\langle 1|3\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{2} \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{2m\omega}} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

- $\langle 2|\,\hat{x}\,|1\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle 2|\,\hat{x}\,|1\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 2|\left(a + a^\dagger\right)|1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 2|\left(a\,|1\rangle + a^\dagger\,|1\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Considerando que

$$
\begin{aligned}
a\,|1\rangle &= \sqrt{1}\,|0\rangle \\
a^\dagger\,|1\rangle &= \sqrt{2}\,|2\rangle
\end{aligned}
$$

Podemos reemplazar directamente y obtener

$$
\begin{aligned}
\langle 1|\, \hat{x}\, |2\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \langle 2| \left(a\, |1\rangle + a^{\dagger}\, |1\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \langle 2| \left(\sqrt{1}\, |0\rangle + \sqrt{2}\, |2\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle 2| \sqrt{1}\, |0\rangle + \langle 2| \sqrt{2}\, |2\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{1}\, \langle 1|0\rangle + \sqrt{2}\, \langle 2|2\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{2} \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{2m\omega}} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}
\end{aligned} \tag{13}
$$

- **Nota:** Decidi escribir explicitamente que los resultados eran los mismos para 13 y para 12. Sin embargo, se podia llegar al mismo resultado notando que

$$
\langle 2|\, \hat{x}\, |1\rangle = (\langle 1|\, \hat{x}\, |2\rangle)^{*} = \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)^{*} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.
$$

  Esto es valioso tomarlo en cuenta particularemente si uno se encuentra de afan en un parcial

Ahora bien, ingresando los resultado 12 y 13 en 11 nos quedaria:

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{x}\rangle (t) &= \frac{2}{5} e^{-i\omega t}\, \langle 1|\, \hat{x}\, |2\rangle + \frac{2}{5} e^{i\omega t}\, \langle 2|\, \hat{x}\, |1\rangle \\
&= \frac{2}{5} e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} + \frac{2}{5} e^{i\omega t}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \\
e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\
&= 2\cos(\theta) \\
&\implies e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos(\omega t) \\
\langle \hat{x}\rangle (t) &= \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

2 Pregunta 2

2.1 Enunciado

La función de onda, en $t = 0$, para un atomo de hidrogeno, esta dada por:

$$\psi(r, \theta, \phi) = 2\psi_{100} + \psi_{210} \tag{14}$$

1. Normalice esta función
2. ¿Cuales son los posibles resultados si se mide individualmente la energia, el momento angular, y la componente z del momento angular?
3. Calcule la probabilidad de obtener los valores de energia hallados en el punto (b)
4. Calcule el valor esperado para la energia, el momento angular y la componente z del momento angular.

2.2 Solución

1. Para normalizar nos interesa que sobre todo el espacio se cumpla que la suma de las probabilidades sea 1. Esto es equivalente a mostrar

$$\int |\psi(r, \theta, \phi)|^2 \, dV = 1 \tag{15}$$

Ahora con esto entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \int |\psi(r, \theta, \phi)|^2 \, dV &= 1 \\ \int |N \left(2\psi_{100} + \psi_{210}\right)|^2 \, dV &= 1 \end{aligned}$$

Por ortogonalidad en ψ_{nlm} se cancela cualquier combinación que no sea del mismo estado lo que nos deja con:

$$\begin{aligned} |N|^2 \int 4 \left|\psi_{100}\right|^2 + \left|\psi_{210}\right|^2 dV &= 1 \\ |N|^2 \left(\int 4 \left|\psi_{100}\right|^2 dV + \int \left|\psi_{210}\right|^2 dV \right) &= 1 \\ |N|^2 (4 + 1) &= 1 \\ |N|^2 (5) &= 1 \\ |N|^2 &= \frac{1}{5} \\ |N| &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ N &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

2.

3 Pregunta 3

3.1 Enunciado

Considere un electrón que es preparado en el estado $|\uparrow\rangle$ y que es inyectado en un campo magnético uniforme en la dirección y con magnitud B_y, durante un tiempo t.

1. Escriba el operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$ que describe la evolución temporal del estado del electrón como una expansión en la base de autoestados de $\hat{S}^2$ y $\hat{S}_y$.

2. Escriba al estado del electrón después de un tiempo t como una superposición de los estados en la base $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$.

3. ¿Cual es la probabilidad de que el electrón sea detectado en los estados $|\uparrow_x\rangle$ y $|\downarrow_x\rangle$ después de un tiempo t?

4. ¿Cual es la probabilidad de que el electrón sea detectado en los estados $|\uparrow_y\rangle$ y $|\downarrow_y\rangle$ después de un tiempo t?

3.2 Solución

1. En este caso, el Hamiltoniano de interacción entre el campo magnético y el spin del electrón conmutan con el operador de momento angular $\hat{S}^2$ y $\hat{S}_y$