Electro 1
Tarea 4

Sergio Montoya Ramirez

Contents

Chapter 1

Punto 2

1.1

Definition 1.1.1: Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Miremos entonces:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= E\hat{x} \\
\vec{B} &= B\hat{y} \\
\vec{v} &= v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \\
\vec{v} \times \vec{B} &= \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B & 0 \end{bmatrix} \\
&= \hat{x}\left(v_y 0 - v_z B\right) - \hat{y}\left(v_x 0 - v_z 0\right) + \hat{z}\left(v_x B - v_y 0\right) \\
&= -v_z B\hat{x} + v_x B\hat{z} \\
\vec{F} &= q\left(E\hat{x} - v_z B\hat{x} + v_x B\hat{z}\right) \\
\vec{F} &= q\left(\left(E - v_z B\right)\hat{x} + v_x B\hat{z}\right)
\end{aligned}$$

Con esta fuerza entonces podemos calcular con la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned}
m\vec{\dot{v}_x} &= q\left(E - v_z B\right)\hat{x} \\
m\vec{\dot{v}_y} &= q\left(0\right)\hat{y} \\
\implies \vec{\dot{v}_y} &= 0 \\
m\vec{\dot{v}_z} &= q\left(v_x B\right)\hat{z}
\end{aligned}$$

Dado que la particula sale del reposo, entonces $\vec{v_y} = 0$

1.2

1.3

Chapter 2

Punto 3

Chapter 3

Punto 7

Chapter 4

Punto 8

Chapter 5

Punto 9

Chapter 6

Punto 11

Chapter 7

Punto 12

7.1

Lo primero que debemos hacer para este punto es encontrar el campo magnético para una espira. Para ello, vamos a usar Biot-Savart.

Definition 7.1.1: Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{ds} \times \hat{r}}{r^2}$$

Ademas, este es el ejemplo 5.6 de la sexta edición del Griffiths. Tomemos entonces su grafica para ubicarnos mejor:

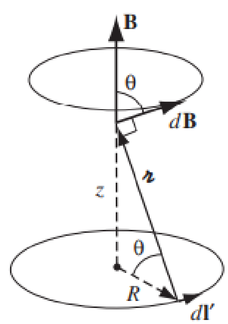

Figure 7.1: Figura de Representación para el problema de una espira.

Con esto entonces puede notar que los componentes de dI' y de dB se cancelan en todos los ejes excepto en el vertical en donde se suman. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{ds} \times \hat{r}}{r^2} \\
B &\propto \int dB_y = \int dB \cos\theta \\
B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\vec{ds} \sin(90°)}{r^2} \cos\theta \\
B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{ds}}{r^2} \cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \\
r &= \sqrt{z^2 + R^2} \\
B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{ds}}{(z^2 + R^2)} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \\
B &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi \left[z^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \int \vec{ds} \\
B &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi \left[z^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} (2\pi R) \\
B &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[z^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Ahora bien dado que tenemos dos espiras por superposición podemos poner:

1. $$z = \frac{d}{2} + z$$

$$
\begin{aligned}
B_+ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[z^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
B_+ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} + z\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

2. $$z = \frac{d}{2} - z$$

$$
\begin{aligned}
B_- &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[z^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
B_- &= \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[\left(\frac{d}{2} - z\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Con lo cual el resultado total es:

$$\begin{aligned} B &= B_+ + B_- \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[\left(\frac{d}{2}+z\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[\left(\frac{d}{2}-z\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2}+z\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2}-z\right)^2 + R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \end{aligned}$$

7.2

Podemos simplemente poner este resultado con python como:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu0 = 4 * np.pi * 1e-7

I = 1.0
R = 1.0
d = R


def Bz(z, I, R):
    term1 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z - d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    term2 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z + d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    return term1 + term2


z_vals = np.linspace(-2*R, 2*R, 300)

B_vals = [Bz(z, I, R) for z in z_vals]

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(z_vals, B_vals)
plt.xlabel('z [m]')
plt.ylabel('B [T]')
plt.title('Campo magnetico a lo largo del eje de dos bobinas de Helmholtz (d = R)')
plt.grid(True)
plt.savefig("../img/punto_12_b.png")
```

Con lo cual recibimos la siguiente grafica:

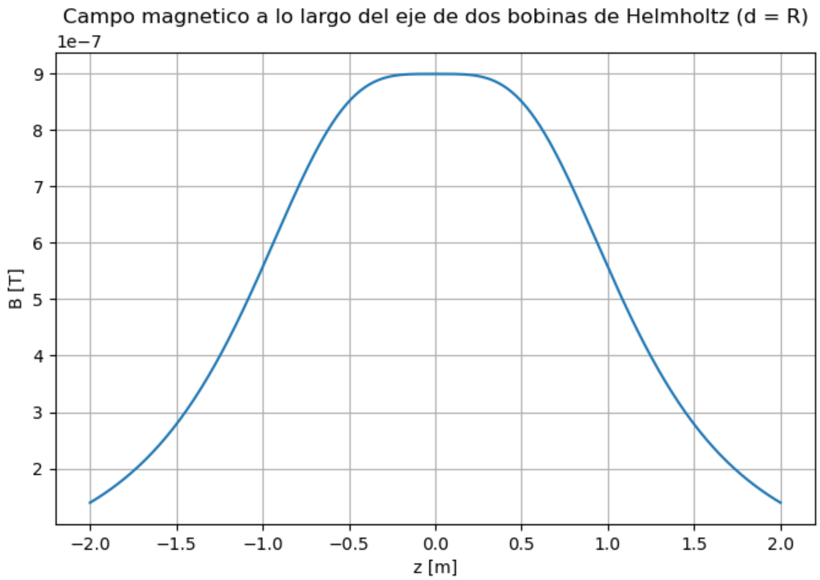

Figure 7.2: Campo magnetico a lo largo del eje de dos bobinas de Helmholtz (d = R)

7.3

Este punto lo podemos mirar basicamente como si esta corriente no varie mucho. Para hacer esto en esencia lo que nos interesa es encontrar que $\frac{d^2B}{dz^2}(0) = \frac{dB}{dz}(0) = 0$ para algun d. Por simetria ya sabemos que $\frac{dB}{dz}(0) = 0$. Por lo tanto solo nos queda encontrar una d en la que se cumpla lo primero.

Para esto vamos a ponerlo en Sympy:

```
import sympy as sp

z, R, d, I, mu0 = sp.symbols('z R d I mu0', real=True, positive=True)

B = (mu0*I*R**2/sp.Integer(2)) * (
    1 / ((R**2 + (z - d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2))) +
    1 / ((R**2 + (z + d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2)))
)

dBdz = sp.diff(B, z)

d2Bdz2 = sp.diff(dBdz, z)

print("B(z) =")
sp.print_latex(sp.simplify(B))
print("\n")
print("dB/dz =")
sp.print_latex(sp.simplify(dBdz))
print("\n")
print("d^2B/dz^2 =")
sp.print_latex(sp.simplify(d2Bdz2))
print("\n")

eq = sp.Eq(d2Bdz2.subs(z, 0), 0)

print("d^2B/dz^2(0) =")
```

```
sp.print_latex(sp.simplify(eq))
print("\n")

solution_for_d = sp.solve(eq, d, dict=True)
print("Solucion para d de modo que d^2B/dz^2(0) = 0:")
sp.print_latex(solution_for_d)
print("\n")
```

Con esto entonces podemos saber que para B tenemos:

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{24IR^2\mu_0\left(\left(4R^2+(d-2z)^2\right)^{\frac{5}{2}}(d+2z)-\left(4R^2+(d+2z)^2\right)^{\frac{5}{2}}(d-2z)\right)}{\left(4R^2+(d-2z)^2\right)^{\frac{5}{2}}\left(4R^2+(d+2z)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2B}{dz^2} = -\frac{48IR^2\mu_0}{\left(4R^2+(d+2z)^2\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{240IR^2\mu_0(d+2z)^2}{\left(4R^2+(d+2z)^2\right)^{\frac{7}{2}}}-\frac{48IR^2\mu_0}{\left(4R^2+(d-2z)^2\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{240IR^2\mu_0(d-2z)^2}{\left(4R^2+(d-2z)^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

Ahora para solucionar podemos simplemente reemplazar $z = 0$ que nos queda como:

$$\frac{d^2B}{dz^2}(0) = \frac{384IR^2\mu_0\left(-R^2+d^2\right)}{(4R^2+d^2)^{\frac{7}{2}}}$$

Y por ultimo bucamos un valor de d para el cual

$$\frac{d^2B}{dz^2}(0) = 0$$

Y nos da como resultado:

$$[\{d : R\}]$$

Y con esto queda solucionado. Ahora veamos esta, esta bobina de Helmholtz se hace mucho mas estable cuando $d = R$ cosa que explica el por que trabajamos con ello en el punto anterior.

7.4

Este punto es esencialmente equivalente al A por lo tanto no volveremos a mirar como solucionar el campo para una espira y simplemente partiremos de antes:

$$\begin{aligned} B &= B_+ + B_- \\ &= \frac{\mu_0 IR^2}{2\left[\left(\frac{d}{2}+z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu_0 - IR^2}{2\left[\left(\frac{d}{2}-z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 IR^2}{2}\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2}+z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2}-z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right] \end{aligned}$$

En esencia es evidente lo que estoy poniendo pues es simplemente decir que cuando las corrientes son inversas no se contribuyen si no que se restan.

7.5

Para graficar esto vamos a reutilizar el codigo de antes simplemente cambiando un signo:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu0 = 4 * np.pi * 1e-7

I = 1.0
R = 1.0
d = R


def Bz(z, I, R):
    term1 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z - d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    term2 = mu0 * I * R**2 / (2.0 * (R**2 + (z + d/2.0)**2)**(3.0/2.0))
    return term1 - term2  # ESTE TERMINO CAMBIO


z_vals = np.linspace(-2*R, 2*R, 300)

B_vals = [Bz(z, I, R) for z in z_vals]

plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(z_vals, B_vals)
plt.xlabel('z [m]')
plt.ylabel('B [T]')
plt.title('Campo magnetico a lo largo del eje de Anti-Helmholtz (d = R)')
plt.grid(True)
plt.savefig("../img/punto_12_e.png")
```

Con lo que nos queda el siguiente resultado:

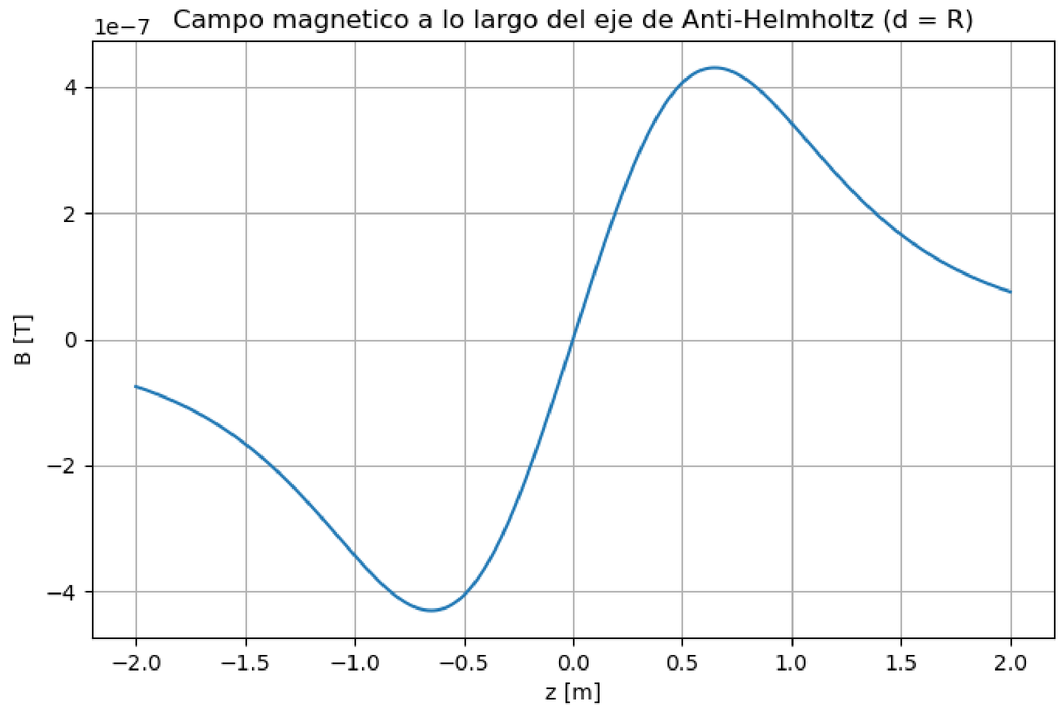

Figure 7.3: Campo magnetico a lo largo del eje de Anti-Helmholtz (d = R)

7.6

Ahora vamos a buscar que en el centro $B = -B_T$ que recordemos es aproximadamente $B_T = 50\mu T$. Lo primero es notar que este va a ser una bobina de Helmholtz y no una antibobina pues nos interesa que en el centro sea el mayor valor y no 0. Por lo tanto tomaremos los ejemplos anteriores.

Lo que haremos en esencia sera coger el termino anterior y reemplazarle $z = 0$ y $d = R$. Esto nos dara el resultado para $B(0)$ de una bobina de Helmholtz que queda como:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2}+z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left[\left(\frac{d}{2}-z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{R}{2}+0\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left[\left(\frac{R}{2}-0\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$B(0) = \frac{8\sqrt{5}I\mu_0}{25R}$$

Ahora con esto lo que nos interesa es ver cuando $B(0) = B_{tierra}$ lo cual nos permitiria despejar para la corriente y simplemente con eso ya tendriamos dado R cual deberia ser la corriente que pase para que en el centro el campo terrestre se anule:

$$B(0) = \frac{8\sqrt{5}I\mu_0}{25R} = B_{tierra}$$

$$B(0) = \frac{5\sqrt{5}B_{tierra}R}{8\mu_0}$$

Ahora ya apartir de esto podemos hacerlo tan arbitrario como querramos.

Para mostrar esto tambien lo hice con sympy y obtuve los mismos resultados:

```python
import sympy as sp

z, R, d, I, mu0, B_tierra = sp.symbols(
    'z R d I mu0 B_tierra', real=True, positive=True)

B = (mu0*I*R**2/sp.Integer(2)) * (
    1 / ((R**2 + (z - d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2))) +
    1 / ((R**2 + (z + d/sp.Integer(2))**2)**(sp.Rational(3, 2)))
)

B_center = B.subs({z: 0, d: R})
B_center_simp = sp.simplify(B_center)
print("B(0) =")
sp.print_latex(B_center_simp)

eq = sp.Eq(B_center_simp, B_tierra)
sp.print_latex(eq)

I_sol = sp.simplify(sp.solve(eq, I)[0])
print("I = ")
sp.print_latex(I_sol)
```