

Tarea 2, para entregar Jueves 13 de Abril en papel. Puede ser escrita a mano o en latex
Ese día se corrige la tarea

ES UNA TAREA EN LA CASA, ENTONCES LA REDACCIÓN Y LA PRESENTACIÓN DEBEN SER IRREPROCHABLES

1. [/12 pts]

Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (es decir hallar el conjunto donde f es continua)

a) [/6 pts]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

b) [/6 pts]

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si } x = p/q \in \mathbb{Q}, (p, q) \text{ primos relativos no nulos con } q > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ó } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. [/14 pts] Sea $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(x) > g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

a) [/8 pts] Mostrar que existe $k > 0$ tal que $f(x) > k + g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

b) [/6 pts] ¿Sigue el resultado válido si reemplazamos $[a, b]$ por \mathbb{R} ?

3. [/12 pts] Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobreyectiva. Mostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene infinitas soluciones.

4. [/12 pts] Sea (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$ denso en X y $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua.

a) [/8 pts] Mostrar que existe una única función $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua tal que g restringida a Y es f

b) [/4 pts] Mostrar que solamente la continuidad de f no es suficiente.