Mecanica Cuantica
Tarea 4

Sergio Montoya
David Pachon

Contents

Chapter 1

1.1

Para iniciar este punto simplemente podemos solucionar:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^2 - 3\hat{A} + 2 = 0 \\
\hat{A} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \\
&= \frac{3 \pm 1}{2} \\
A_+ &= \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\
A_- &= \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

Dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\hat{A}$ es diagonalizable en su base canónica. Esto quiere decir que podemos escribir A como:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo que nos sera de mucha utilidad para los siguientes puntos.

1.2

En este punto podemos utilizar que ya encontramos los eigenvalues de la matriz A. Lo que seria:

$$
\begin{aligned}
\hat{A}\left|\psi_1\right\rangle &= \lambda_1\psi_1 \\
\hat{A}\left|\psi_1\right\rangle &= 1\psi_1 \\
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\psi_1 + 0\psi_2 \\ 0\psi_1 + 1\psi_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2\psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\
\implies \left|\psi_1\right\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Para el segundo eigenvector:

$$
\begin{aligned}
\hat{A}\left|\psi_2\right\rangle &= \lambda_2\psi_2 \\
\hat{A}\left|\psi_2\right\rangle &= 2\psi_2 \\
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2\psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2\psi_1 \\ 2\psi_2 \end{bmatrix} \\
\implies \left|\psi_2\right\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Aunque para ser completamente honesto, este resultado es trivial, puesto que la matriz A con la que estamos trabajando fue construida en la base de sus vectores propios diagonalizando sus eigenvalues.

1.3

Lo unico que nos falta para mostrar que A es un observable (dado que ya mostramos que es diagonalizable) es que A es hermitica. Lo cual significa que tenemos que mostrar

$$
\begin{aligned}
\hat{A}^\dagger &= \bar{\hat{A}}^* && (1.1) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* && (1.2) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && (1.3) \\
\hat{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && (1.4) \\
\implies \hat{A}^\dagger &= \hat{A} && (1.5)
\end{aligned}
$$

Con esto ya tenemos que A es hermitica. Ademas, como sabemos que A tiene valores propios reales. Esto demuestra que A es observable.

Chapter 2

En este caso iniciamos por definir $\hat{v}$ como:

$$\hat{v}_i = \frac{1}{m}\left(\hat{p}_i - qA_i\right)$$

Ahora, podemos calcular el conmutador $\left[v_i, v_j\right]$ como:

$$\left[v_i, v_j\right] = \left[\frac{1}{m}\left(\hat{p}_i - qA_i\right), \frac{1}{m}\left(\hat{p}_j - qA_j\right)\right]$$

$$3. \quad \left[\alpha\hat{\Omega}, \hat{\Lambda}\right] = \alpha\left[\hat{\Omega}, \hat{\Lambda}\right],$$

$$\left[v_i, v_j\right] = \frac{1}{m^2}\left[\hat{p}_i - qA_i, \hat{p}_j - qA_j\right]$$

$$2. \quad \left[\hat{\Omega}, \hat{\Lambda} + \hat{\Sigma}\right] = \left[\hat{\Omega}, \hat{\Lambda}\right] + \left[\hat{\Omega}, \hat{\Sigma}\right],$$

$$\left[v_i, v_j\right] = \frac{1}{m^2}\left(\left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] - q\left[\hat{p}_i, A_j\right] - q\left[A_i, \hat{p}_j\right] + q^2\left[A_i, A_j\right]\right)$$

$$\left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] = 0$$

$$\left[A_i, A_j\right] = 0$$

$$\left[v_i, v_j\right] = \frac{1}{m^2}\left(-q\left[\hat{p}_i, A_j\right] - q\left[A_i, \hat{p}_j\right]\right)$$

$$\left[v_i, v_j\right] = \frac{-q}{m^2}\left(\left[\hat{p}_i, A_j\right] + \left[A_i, \hat{p}_j\right]\right)$$

$$\left[\hat{p}_i, A_j\right] = \hat{p}_i A_j - A_j \hat{p}_i$$

$$\left[\hat{p}_i, A_j\right]\psi = -i\hbar\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\psi - i\hbar A_j\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + A_j i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

$$\left[\hat{p}_i, A_j\right]\psi = -i\hbar\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\psi$$

$$\left[\hat{p}_i, A_j\right] = -i\hbar\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\left[A_i, \hat{p}_j\right] = -\left[\hat{p}_j, A_i\right]$$

$$= i\hbar\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

$$\left[v_i, v_j\right] = \frac{-q}{m^2}\left(-i\hbar\frac{\partial A_j}{\partial x_i} + i\hbar\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\left[v_i, v_j\right] = \frac{i\hbar q}{m^2}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\left[v_i, v_j\right] = \frac{i\hbar q}{m^2}\epsilon_{ijk}\left(\nabla \times A\right)_k$$