Sergio Montoya Ramirez
202112171

Universidad de Los Andes
Taller 2
Ecuaciones Diferenciales

Bogotá D.C., Colombia
26 de junio de 2023

1. Solucione las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $3y'' + 2y' + y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 1$
   b) $y'' + 8y' + 16y = 0$
   c) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
   d) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)$
   e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$
   f) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$

   Solución:

   a) Sea la ecuación $3y'' + 2y' + y = 0$, Luego obtenemos la ecuación características. $3r^2+2r+1 = 0$. Podemos, entonces, resolver esta ecuación cuadrática factorizando tal que:
   $$(r+1)(3r+1) = 0.$$
   Esto nos da dos raices:
   $$r_1 = -1 \wedge r_2 = \frac{-1}{3}.$$
   Asi mismo, la solución general de la ecuación diferencial homogénea se puede escribir como:
   $$y_h = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \implies y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-\frac{x}{3}x}.$$
   Ahora bien, Dado que tenemos las condicones iniciales podemos encontrar los valores de las constantes c_i en la solución general.
   Si $x = 0$ entonces:
   $$y_h = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 = 0 \wedge y_h' = -c_1e^0 - \frac{c_2}{3}e^0 = -c_1 - \frac{c_2}{3} = 1.$$
   Lo que significa:
   $$c_1 = -\frac{3}{2}$$
   $$c_2 = \frac{3}{2}.$$

   b) Sea la ecuación $y'' + 8y' + 16y = 0$, Luego obtenemos la ecuación caracteristicas $r^2+8r+16 = 0$ Podemos, entonces, resolver esta ecuación cuadrática factorizando, tal que:
   $$(r+4)(r+4) = 0.$$

Esto nos da dos raices:

$$r_1 = r_2 = -4.$$

Luego,

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x} = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}.$$

c) Sea la ecuación $y'' + 3y = -48x^2 e^{3x}$. Luego, decimos que:

$$r^2 + 3r = 0.$$

Podemos, entonces, resolver esta ecuación cuadrática, tal que:

$$r_1 = \sqrt{3i} \wedge r_2 = -\sqrt{3i}.$$

Luego,

$$y_h = c_1 \cos\sqrt{3i} + c_2 \sin\sqrt{3i}.$$

Por otro lado, decimos que:

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^2 e^{3x} + Bxe^{3x} + Ce^{3x} \\ y_p' &= 2Axe^{3x} + 3Ax^2 e^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x} + 3Ce^{3x} \\ y_p'' &= 2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2 e^{3x} + 6Be^{3x} + 9Bxe^{3x} + 9Ce^{3x}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y'' + 3y' = 12Ax^2 e^{3x} + 12Axe^{3x} + 12Bxe^{3x} + 2Ae^{3x} + 6Be^{3x} + 12Ce^{3x} = -48x^2 e^{3x} \\ \implies 12Ax^2 e^{3x} = -48x^2 e^{3x} \wedge 12Axe^{3x} + 12Bxe^{3x} = 0 \implies A + B = 0 \\ \implies A = -4 \wedge B = 4. \end{aligned}$$

En base a esto, podemos hallar ahora C, dado que:

$$2Ae^{3x} + 6Be^{3x} 12Ce^{3x} = 0 \implies 2A + 6B + 12C = 0 \implies C = \frac{-4}{3}.$$

Por ultimo,

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos\sqrt{3i} + c_2 \sin\sqrt{3i} - 4x^2 e^{3x} + 4xe^{3x} - \frac{4}{3}e^{3x} \\ y &= c_1 \cos\sqrt{3i} + c_2 \sin\sqrt{3i} + e^{3x}\left(-4x^2 + 4x - \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

d) Sea $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)$ con este caso, lo primero que debemos hacer es encontrar la ecuación lineal homogenea correspondiente

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Para lo cual debemos hallar primero las raices de la ecuación característica que en nuestro caso tiene la forma $r^2 - 4r + 8 = 0$. La cual tiene soluciones complejas y en particular da

$$k_1 = 2 - 2i$$
$$k_2 = 2 + 2i.$$

Como se tienen dos raices la ecuación caracterizticas la solución tiene la forma:

$$y = c_1 e^{x(2-2i)} + c_2 e^{x(2+2i)}.$$

Ahora debemos encontrar la solución heterogénea. Para comenzar debemos saber que la solución general tiene la forma

$$y_c = C_1 e^{x(2-2i)} + C_2 e^{x(2+2i)}.$$

Con esto creamos el sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{x(2-2i)} u_1 + e^{x(2+2i)} u_2 \\ (2-2i)\, e^{x(2-2i)} u_1' + (2+2i)\, e^{x(2+2i)} u_2' &= e^{2x} + \sin(2x). \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{ie^{2ix}}{4} + \frac{ie^{-2x} e^{2ix} \sin(2x)}{4} \\ u_2' &= -\frac{ie^{-2ix}}{4} - \frac{ie^{-2x} e^{-2ix} \sin(2x)}{4}. \end{aligned}$$

Ahora con esto podemos hallar u_1 y u_2 con lo que nos quedaria

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{i\left((-2+2i)\sin(2x) - 2\cos(2x)\right) e^{-2x+2ix}}{16 + 4(-2+2i)^2} + \frac{e^{2ix}}{8} + C_1 \\ u_2 &= \frac{i\left((-2-2i)\sin(2x) - 2\cos(2x)\right) e^{-2x-2ix}}{16 + 4(-2-2i)^2} + \frac{e^{-2ix}}{8} + C_1. \end{aligned}$$

Ahora si juntamos todo lo que tenemos nos queda:

$$\begin{aligned} y &= u_1 e^{x(2-2i)} + u_2 e^{x(2+2i)} \\ y &= C_4 e^{2x} e^{2xi} + \frac{e^{2x}}{4} + C_3 e^{2x} e^{-2ix} + \frac{\sin(2x)}{20} + \frac{\cos(2x)}{10}. \end{aligned}$$

e) Lo primero que debemos hacer es encontrar la solución de la ecuación auxiliar la cual es $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$. Esta ecuación se puede factorizar como $(x-1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)(x-1)(x-1) = 0$ por lo tanto, la unica solución es el 1 lo que nos deja con una solución general de la forma:

$$y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

Ahora, teniendo y_c podemos pensar en una solución:

$$\begin{aligned}
y_p &= Ax + B + Cx^3e^x \\
y_p' &= A + 3Cx^2e^x + Cx^3e^x \\
y_p'' &= 6Cxe^x + 3Cx^2e^x + 3Cx^2e^x + Cx^3e^x \\
y_p''' &= 6Ce^x + 6Cxe^x + 6Cxe^x + 3Cx^2e^x + 6Cxe^x \\
&\quad +3Cx^2e^x + 3Cx^2e^x + Cx^3e^x.
\end{aligned}$$

Ahora, si sustituimos los valores nos queda

$$\begin{aligned}
&6Ce^x + 18Cxe^x + 9Cx^2 + Cx^3e^x \\
&-3\left(6Cxe^x + 6Cx^2e^x + Cx^3e^x\right) \\
&+3\left(A + 3Cx^2e^x + Cx^3e^x\right) \\
&-\left(Ax + B + Cx^3e^x\right) \\
&= 6Ce^x + 3A - Ax - B.
\end{aligned}$$

Ahora con las condiciones que teniamos previamente nos queda:

$$\begin{aligned}
6Ce^x = -4e^x &\implies C = -\frac{2}{3} \\
-Ax = x &\implies A = -1 \\
3A - B = 0 \implies B = -3 y_p &= -x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x \\
y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x &- x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x.
\end{aligned}$$

f) Para comenzar debemos tomar en cuenta la ecuación auxiliar $r^2 + 3r + 2 = 0$ la cual puede ser factorizada a $(r+1)(r+2) = 0$ por lo tanto $r = \{-1, -2\}$ y en consecuencia las soluciones de la ecuación homogenea asociada es:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{e^x + 1} \\
y_1 &= e^{-x} \\
y_2 &= e^{-2x} \\
y_c &= c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Ahora entonces el Wronskiano:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{bmatrix}$$
$$= -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$$

.

Ahora ya con esto podemos calcular w_1 y w_2

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{e^x+1} & -2e^{-2x} \end{bmatrix} = -\frac{e^{-2x}}{1+e^x}$$
$$w_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{1+e^x} \end{bmatrix} = \frac{e^{-x}}{1+e^x}.$$

Ahora con esto, podemos

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w} dx = \int \frac{\frac{e^{-2x}}{1+e^x}}{e^{-3x}} dx$$
$$= \int \frac{1}{e^{-x}(1+e^x)} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(1+e^x)$$
$$u_2 = \int \frac{w_2}{w} dx = \int \frac{\frac{e^{-x}}{1+e^x}}{-e^{-3x}} dx$$
$$= -\int \frac{1}{e^{-2x}(1+e^x)} dx = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$
$$p = 1 + e^x$$
$$p - 1 = e^x$$
$$dp = e^x dx$$
$$u_2 = -\int \frac{p-1}{p} = -\int \left(1 - \frac{1}{p}\right) dP = -(p - \ln(p)) = -p + \ln(p)$$
$$= -(1+e^x) + \ln(1+x) = -1 - e^x + \ln(1+e^x)$$

.

Ahora por ultimo debemos reunir todo lo que sabemos hasta ahora, lo que nos deja con:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
$$y_p = (\ln(1+e^x)) \left(e^{-x}\right) + (-1 - e^x + \ln(1+e^x)) \left(e^{-2x}\right)$$
$$y_p = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x).$$

Por lo tanto la solución general es $y = y_h + y_p$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x} \ln\left(1 + e^{x}\right) + e^{-2x} \ln\left(1 + e^{x}\right).$$

2. Un objeto de masa $100g$ estira un resorte $5cm$. La masa es puesta en movimiento hacia abajo con una velocidad $100\frac{cm}{s}$. Halle la posición del objeto en cualquier momento del tiempo t, suponiendo que no existe ningún tipo de amortiguamiento. Establezca la posición del objeto en cualquier momento del tiempo t. Determine el tiempo donde el objeto retorna por primera vez a la posición de equilibrio.

   En este caso tenemos que partir desde la expresión general de

$$mu\left(t\right)'' + ku\left(t\right) = 0.$$

   En esta situación debemos saber que la solución general es de la forma:

$$u\left(t\right) = A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right).$$

   En donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

   Por lo tanto nos interesa saber cual es la constante de este resorte. Para eso, vamos a tomar los dos datos iniciales y la ley de Hook. Con esto podemos obtener que:

$$F = ke.$$

   Donde k es la constante, e es la elongación y F es la fuerza que en particular para este caso coincide con el peso de la masa. Por lo tanto, tenemos:

$$O{,}1kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} = 0{,}98N = k\left(5cm\right).$$

   Con esto entonces despejamos simplemente k y nos queda para esa situación:

$$\frac{0{,}98N}{0{,}05m} = k = 19{,}6\frac{kg}{s^2}.$$

   Ahora con esto podemos volver a la ecuación de ω con lo que nos quedaria que es

$$w = \sqrt{\frac{19{,}6\frac{kg}{s^2}}{0{,}1kg}}$$
$$w = \sqrt{1{,}96\frac{1}{s^2}}$$
$$w = \frac{1{,}4}{s}$$

.

Con esto ya obtenido nos queda entonces unicamente reemplazar ω y encontrar los valores de A y B en función de las condiciones iniciales. Por lo tanto, debemos desarrollar como sigue:

$$\begin{aligned} u &= A\cos(1{,}4t) + B\sin(1{,}4t) \\ 5 &= A\cos(0) + B\sin(0) \\ 5 &= A \\ u' &= -1{,}4A\sin(1{,}4t) + B1{,}4\sin(1{,}4t) \\ 100 &= B\cdot 1{,}4 \\ B &= 71{,}42 \\ &. \end{aligned}$$

3. En cada caso encuentre una ecuación diferencial de segundo orden para la cual y_1 y y_2 sean soluciones:

   a) $y_1(x) = e^x; y_2(x) = e^{-x}$ En este caso, la via mas facil es encontrar una ecuación de segundo orden tal que para su solución $ar^2 + br + c$ tenga como soluciones $r = \{1, -1\}$. En este caso, sabemos que la ecuación $y'' - y = 0$ cumple esta condicion a la perfección.

   b) $y_1(x) = e^{2x}; y_2(x) = xe^{2x}$

   Sea:

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \\ y_1(x) = e^{2x}; y_1' = 2e^{2x}; y_1'' = 4e^{2x} \\ y_2(x) = xe^{2x}; y_2' = e^{2x} + 2xe^{2x}; y_2'' = 4e^{2x}(1+x). \end{aligned}$$

   Ahora sustituimos estas derivadas en la ecuación diferencial tal que

$$\begin{aligned} 4e^{2x} + 4xe^{2x} + P(x)\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) + Q(x)\left(xe^{2x}\right) = 0 \\ \Rightarrow (4 + P(x))e^{2x} + (4 + 2P(x) + Q(x))xe^{2x} = 0. \end{aligned}$$

   Para que esta ecuación sea válida para cualquier x los coeficientes de e^{2x} y xe^{2x} deben ser igual a 0. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 4 + P(x) = 0 \\ 4 + 2P(x) + Q(x) = 0 \\ P(x) = -4 \\ Q(x) = 4. \end{aligned}$$

   Lo que queda como:

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

4. Halle la solución general de la ecuación diferencial dada utilizando el método de reducción de orden y la solución de la ecuación homogénea $(1-x^2)\,y''-2xy'+6y=0; y_1=3x^2-1$

Para iniciar partimos de la ecuación original:

$$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0.$$

y ademas tenemos la siguiente información que nos resultara de interes

$y_1=3x^2-1$	$y=vy_1$
$y_1'=6x$	$y'=v'y_1+vy_1'$
$y_1''=6$	$y''=v''y_1+2v'y_1'+vy_1''$

Ahora con esto, si reemplazamos los valores que conocemos en la ecuación original desarrollamos como sigue

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)\left(v''y_1+2v'y_1'+vy_1''\right)-2x\left(v'y_1+vy_1'\right)+6y_1v=0\\ \left(1-x^2\right)\left(v''y_1+2v'y_1'\right)-2xv'y_1+\left[\left(1-x^2\right)y_1''-2xy_1'+6y_1\right]v=0\\ \left(1-x^2\right)v''y_1+\left[\left(1-x^2\right)y_1'-xy_1\right]2v'=0.\end{aligned}$$

Ahora que tenemos la ecuación de una manera mucho mas comprensible podemos separar las variables lo que nos quedaria como:

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)v''y_1=2v'\left[xy_1-\left(1-x^2\right)y_1'\right]\\ \frac{v''}{v'}=\frac{2\left[xy_1-\left(1-x^2\right)y_1'\right]}{\left(1-x^2\right)y_1}.\end{aligned}$$

Ahora si hacemos una reducción de variable tal que $w=v'\wedge w'=v''$ con lo que esto nos queda como

$$\begin{aligned}\frac{dw}{w}=\frac{2\left[xy_1-\left(1-x^2\right)y_1'\right]}{\left(1-x^2\right)y_1}dx\\ \frac{dw}{w}=2\left[\frac{x}{(1-x^2)}-\frac{y_1'}{y_1}\right]dx\\ \int\frac{dw}{w}=2\int\left(\frac{x}{1-x^2}-\frac{y_1'}{y_1}\right)dx\\ \ln(w)=2\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)-\ln\left(y_1\right)\right)\\ w=e^{-\ln\left(1-x^2\right)-2\ln(y_1)}\\ w=\left(1-x^2\right)^{-1}\left(3x^2-1\right)^{-2}.\end{aligned}$$

Entonces, con esto podemos volver a la definición de w y por lo tanto sabemos que

$$
\begin{aligned}
v &= \int \frac{1}{\left(1-x^2\right)\left(3x^2-1\right)^2} \\
v &= \frac{1}{8}\ln\left(x+1\right) - \frac{1}{8}\ln\left(x-1\right) - \frac{\sqrt{3}}{8\left(\sqrt{3}x+1\right)} - \frac{\sqrt{3}}{8\left(\sqrt{3}x-1\right)} \\
y &= \frac{1}{8}\ln\left(x+1\right) - \frac{1}{8}\ln\left(x-1\right) - \frac{\sqrt{3}}{8\left(\sqrt{3}x+1\right)} - \frac{\sqrt{3}}{8\left(\sqrt{3}x-1\right)}\left(3x^2-1\right) \\
y &= \frac{12x^2\ln\left(\sqrt[8]{\frac{x+1}{x-1}}\right) - 3x - 4\ln\left(\sqrt[8]{\frac{x+1}{x-1}}\right)}{4}.
\end{aligned}
$$

5. Encuentre una solución particular de la ecuación $x^2y'' - x\left(x+2\right)y' + \left(x+2\right)y = 2x^3$ conociendo que $y_1\left(x\right) = x$ y $y_2\left(x\right) = xe^x$ son soluciones independientes de la ecuación homogénea asociada.

   En este caso vale la pena iniciar por despejar y'' con lo que nos quedaria

$$
y'' - \frac{\left(x+2\right)}{x}y' + \frac{\left(x+2\right)}{x^2}y = 2x.
$$

   Con esto entonces podemos desarrollar

$$
\begin{aligned}
y_h &= c_1y_1\left(x\right) + c_2y_2\left(x\right) \\
0 &= u_1'y_1 + u_2'y_2 \\
y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\
0 &= u_1y_1 + u_2y_2 \\
2x &= u_1'y_1 + u_2'y_2 = 2x.
\end{aligned}
$$

   Con esto por tanto nos queda

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{bmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{bmatrix} = \left(xe^x + x^2e^x\right) - xe^x = x^2e^x \\
u_1' &= \begin{bmatrix} 0 & xe^x \\ 2x & e^x + xe^x \end{bmatrix} = \frac{-2x^2e^x}{w} = -2 \\
u_2' &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} = \frac{2x^2}{w} = 2e^{-x} \\
u_1 &= -2x \\
u_2 &= -2e^{-x}.
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto y quedaria como

$$
y = y_1 + y_2 + \left(-2x^2\right) + \left(-2x\right).
$$