

2

Utilizando las representaciones vectoriales de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$. Comprobar las siguientes identidades trigonométricas.

1. $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

$$\begin{aligned}\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{-4} + \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} \\ &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2}{4} \\ &= \frac{(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}) - (e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta})}{4}\end{aligned}$$

Note que: $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta-i\theta} = e^0 = 1$

$$\begin{aligned}&= \frac{e^{2i\theta} - e^{2i\theta} + 2 + 2 + e^{-2i\theta} - e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) &= \left(\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \right) \\ &= \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{e^{2i\theta} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{2e^{2i\theta} + 2e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \\ &= \cos(2\theta)\end{aligned}$$

3. $2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta)$

$$\begin{aligned} 2 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= 2 \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{4i} \\ &= \frac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{2i} \\ &= \sin(2\theta) \end{aligned}$$

4. Analisis Dimencional: Lo trabajado aqui son equivalencias y por tanto no tiene ninguna relación real con dimensiones física.
5. Relación con la situación presentada: En todos los casos se demostraron las identidades trigonometricas solicitadas por los ejercicios.
6. Conclusión: Esto fueron ejemplos de la relación que hay entre los numeros complejos y la trigonometria permitiendo mostrar lo profundamente relacionados que estan estos dos temas y el por que fue una revolución en la faron las identidades trigonometricas solicitadas por los ejercicios.
7. Conclusión: Esto fueron ejemplos de la relación que hay entre los numeros complejos y la trigonometria permitiendo mostrar lo profundamente relacionados que estan estos dos temas y el por que fue una revolución en la física..