

# Electromagnetismo 1

## Tarea 5

Sergio Montoya Ramirez

# Contents

<b>Chapter 1</b>	<b>Punto 1</b>	<b>Page 2</b>
1.1		2
1.2		3
<b>Chapter 2</b>	<b>Punto 3</b>	<b>Page 4</b>
2.1	Esfera Magnetizada	4
2.2	Cascaron	4
2.3	Igualdad	4
<b>Chapter 3</b>	<b>Punto 5</b>	<b>Page 5</b>
<b>Chapter 4</b>	<b>Punto 8</b>	<b>Page 6</b>
<b>Chapter 5</b>	<b>Punto 9</b>	<b>Page 7</b>
<b>Chapter 6</b>	<b>Punto 11</b>	<b>Page 8</b>
6.1		8
6.2		8

# Chapter 1

## Punto 1

### 1.1

Tenemos que:

$$F = 2\pi IRB \cos \theta$$

Pero ademas

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[3(m_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - m_1]}{r^3} \\ B \cos \theta &= B \cdot \hat{y} \\ B \cos \theta &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(m_1 \cdot \hat{r})(\hat{r} \cdot \hat{y}) - (m_1 \cdot \hat{y})] \\ m_1 \cdot \hat{y} &= 0 \\ \hat{r} \cdot \hat{y} &= \sin \phi \\ m_1 \cdot \hat{r} &= m_1 \cos \theta \\ B \cos \theta &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3m_1 \sin \phi \cos \phi] \end{aligned}$$

Ahora bien, si reemplazamos en la ecuación previa:

$$\begin{aligned} F &= 2\pi IR \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3m_1 \sin \phi \cos \phi] \\ \sin \phi &= \frac{R}{r} \\ \cos \phi &= \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r} \\ F &= 3 \frac{\mu_0}{2} m_1 IR^2 \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r^5} \\ IR^2 \pi &= m_2 \\ F &= 3 \frac{\mu_0}{2\pi} m_1 m_2 \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r^5} \end{aligned}$$

Ahora bien, en el caso de que  $R \ll r$

$$\begin{aligned} F &= 3 \frac{\mu_0}{2\pi} m_1 m_2 \frac{\sqrt{r^2}}{r^5} \\ F &= 3 \frac{\mu_0}{2\pi} m_1 m_2 \frac{r}{r^5} \\ F &= 3 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{r^4} \end{aligned}$$

## 1.2

Tenemos que

$$\begin{aligned}
F &= \nabla(m_2 \cdot B) \\
&= (m_2 \cdot \nabla)B \\
&= \left(m_2 \frac{d}{dz}\right) \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{z^3} (3(m_1 \cdot \hat{z})\hat{z} - m_1) \right] \\
2m_1 &= (3(m_1 \cdot \hat{z})\hat{z} - m_1) \\
&= \left(m_2 \frac{d}{dz}\right) \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{z^3} 2m_1 \right] \\
&= \left(m_2 \frac{d}{dz}\right) \left[ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{z^3} m_1 \right] \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi} m_1 m_2 \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z^3} \right] \\
\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z^3} \right] &= -3 \frac{1}{z^4} \\
F &= \frac{\mu_0}{2\pi} m_1 m_2 \left( -3 \frac{1}{z^4} \right) \\
F &= 3 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{r^4}
\end{aligned}$$

# Chapter 2

## Punto 3

### 2.1 Esfera Magnetizada

Tenemos  $K_M = M \times \hat{n}$  que teniendo un vector normal  $\hat{n} = \hat{r}$  nos quedamos con:

$$K_M = M \times \hat{r}$$

### 2.2 Cascaron

Ahora, teniendo un cascaron con carga superficial tenemos

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \sigma v \\ &= \sigma(\omega \times r) \\ &= \sigma(\omega \times R\hat{r}) \\ &= R\sigma(\omega \times \hat{r}) \end{aligned}$$

### 2.3 Igualdad

Tenemos que mostrar:

$$\begin{aligned} K_M &= K_\sigma \\ M \times \hat{r} &= \sigma R(\omega \times \hat{r}) \\ M &= \sigma R\omega \end{aligned}$$

Con esto entonces mostramos que si se cumple esta condición estos tendran una densidad de corriente igual.

## Chapter 3

### Punto 5

Tenemos

$$\begin{aligned}\nabla \times M &= J_b \\ &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s k s^2) \hat{z} \\ &= \frac{1}{s} (3 k s^2) \hat{z} \\ &= 3 k s \hat{z}\end{aligned}$$

Ademas, tenemos

$$\begin{aligned}K_b &= M \times \hat{n} \\ &= k s^2 (\hat{\phi} \times \hat{s}) \\ &= -k R^2 \hat{z}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la corriente fluye encima del cilindro y luego vuelve a bajar a la superficie. Ahora, dado que las corrientes son simetricas en la simetria podemos conseguir el campo con la ley de Ampere.

$$\begin{aligned}B \cdot 2\pi s &= \mu_0 I_{enc} \\ &= \mu_0 \int_0^s J_b da \\ &= 2\pi k \mu_0 s^3 \\ B &= \mu_0 k s^2 \hat{\phi} \\ &= \mu_0 M\end{aligned}$$

Fuera del cilindro  $I_{enc} = 0 \implies B = 0$

## Chapter 4

### Punto 8

Iniciamos con

$$\begin{aligned}\oint H \cdot dl &= I_{f_{enc}} \\ &= I \\ \Rightarrow H &= \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi} \\ B &= \mu_0(1 + \chi_m)H \\ &= \mu_0(1 + \chi_m) \frac{I}{2\pi s} \hat{\phi} \\ M &= \chi_m H \\ &= \frac{\chi_m I}{2\pi s} \hat{\phi} \\ J_b &= \nabla \times M \\ &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\chi_m I}{2\pi s} \right) \hat{z} \\ &= 0 \\ K_b &= M \times \hat{n} \\ &= \begin{cases} \frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z} & s = a \\ -\frac{\chi_m I}{2\pi b} \hat{z} & r = b \end{cases}\end{aligned}$$

La corriente total de un loop entre los cilindros:

$$\begin{aligned}I + \frac{\chi_m I}{2\pi a} 2\pi a &= (1 + \chi_m)I \\ \oint B \cdot dl &= \mu_0 I_{enc} \\ &= \mu_0(1 + \chi_m)I \\ B &= \frac{\mu_0(1 + \chi_m)I}{2\pi s} \hat{\phi}\end{aligned}$$

## Chapter 5

### Punto 9

Tenemos

$$\begin{aligned}\oint H \cdot dl &= H(2\pi s) \\ &= I_{f_{enc}} \\ &= \begin{cases} I \left( \frac{s^2}{a^2} \right), & (s < a) \\ I, & (s > a) \end{cases} \\ H &= \begin{cases} \frac{Is}{2\pi a^2}, & (s < a) \\ \frac{I}{2\pi s}, & (s > a) \end{cases}\end{aligned}$$

Ahora por lo tanto

$$\begin{aligned}B &= \mu H \\ &= \begin{cases} \frac{\mu_0(1+\chi_m)Is}{2\pi a^2}, & (s < a) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi s}, & (s > a) \end{cases}\end{aligned}$$

Para el  $J_b$ ,  $K_b$  y  $I_b$

$$\begin{aligned}J_b &= \chi_m J_f \\ J_f &= \frac{I}{\pi a^2} \\ J_b &= \frac{\chi_m I}{\pi a^2} \\ K_b &= M \times \hat{n} = \chi_m H \times \hat{n} \\ &= \frac{\chi_m I}{2\pi a} \\ I_b &= J_b(\pi a^2) + K_b(2\pi a) \\ &= \chi_m I - \chi_m I \\ &= 0\end{aligned}$$



## Chapter 6

## Punto 11

### 6.1

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \hat{z} \\m_2 \cdot B_1 &= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m^2}{z^3} \\F &= \nabla(m \cdot B) \\&= \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m^2}{z^3} \right] \hat{z} \\&= \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4} \hat{z}\end{aligned}$$

Esta fuerza tiene que ser igual a la fuerza gravitacional para cancelarse por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4} - m_d g &= 0 \\\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4} &= m_d g \\\frac{1}{2\pi z^4} &= \frac{m_d g}{3\mu_0 m^2} \\\frac{1}{z^4} &= \frac{2\pi m_d g}{3\mu_0 m^2} \\z^4 &= \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi m_d g} \\z &= \left( \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi m_d g} \right)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

### 6.2

Agregando un iman entonces el iman en el medio siente dos fuerzas, una hacia arriba y una hacia abajo quedando

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi x^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} - m_d g = 0$$

Ahora bien, el iman de arriba es repelido por el iman del medio y atraido por el de abajo lo que queda:

$$\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(x+y)^4} - m_d g = 0$$

Ahora si sustraemos todo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi x^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} - m_d g - \left( \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(x+y)^4} - m_d g \right) &= 0 \\ \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi x^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} - m_d g - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} + \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(x+y)^4} + m_d g &= 0 \\ \left( \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi x^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} - \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi y^4} + \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi(x+y)^4} \right) + m_d g - m_d g &= 0 \\ \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi} \left( \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^4} + \frac{1}{(x+y)^4} \right) &= 0 \\ \frac{1}{x^4} - \frac{2}{y^4} + \frac{1}{(x+y)^4} &= 0 \\ \left( \frac{1}{x^4} - \frac{2}{y^4} + \frac{1}{(x+y)^4} \right) y^4 &= 0 \\ \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^4} - 2 + \frac{1}{\left(\frac{x}{y} + 1\right)^4} &= 0 \\ \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^4} + \frac{1}{\left(\frac{x}{y} + 1\right)^4} &= 2 \\ a = \frac{x}{y} \\ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{(a+1)^4} &= 2 \end{aligned}$$

Ahora podemos meter esto en sympy de la siguiente manera

```
1 from sympy import symbols, Eq, Poly, print_latex
2
3 a = symbols('a')
4
5 ecuacion = Eq(1/a**4 + 1/(a + 1)**4, 2)
6
7 numerador = (ecuacion.lhs - ecuacion.rhs).together().as_numer_denom()[0]
8
9 polinomio = Poly(numerador, a)
10
11 raices = polinomio.nroots()
12
13 for raiz in raices:
14     print_latex(raiz)
```

Esto nos da como resultado:

$$\begin{aligned}
a = & \\
& -1.85011497953762 \\
& 0.850114979537622 \\
& -1.01324463844346 - 0.809817345066314i \\
& -1.01324463844346 + 0.809817345066314i \\
& -0.5 - 0.195044382162859i \\
& -0.5 + 0.195044382162859i \\
& 0.0132446384434638 - 0.809817345066314i \\
& 0.0132446384434638 + 0.809817345066314i
\end{aligned}$$

En donde el unico que nos sirve es

$$\frac{x}{y} = 0.850114979537622$$