

Mecánica

Tarea 2

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Page 2

Chapter 2

Page 5

Chapter 3

Page 6

3.1

6

— 6 • — 9

3.2

10

Chapter 4

Page 11

4.1

12

Chapter 5

Page 15

Chapter 6

Page 17

Chapter 1

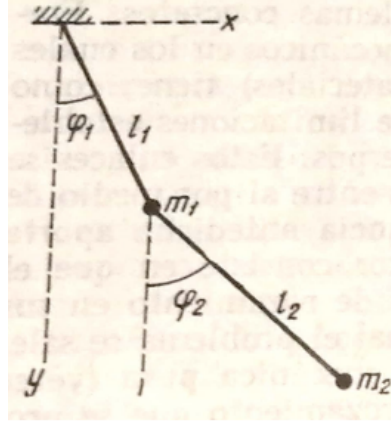


Figure 1.1: Péndulo Doble

En este caso, tenemos $3 \cdot N = 3 \cdot 2 = 6$ coordenadas cartesianas. Sin embargo, tenemos las siguientes ligaduras:

1. $z = 0$
2. $l_1 = cte$
3. $l_2 = cte$

Por lo cual tenemos $3N - n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Por lo tanto tenemos dos grados de libertad. Con esto entonces definamos las coordenadas generalizadas de la manera en la que nos propone la imagen 1.1. Con lo cual nos queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cdot \sin(\varphi_1) \implies \dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) \\ y_1 &= -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) \implies \dot{y}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) . \end{aligned}$$

Dado que este primer caso es esencialmente un triangulo en donde estamos calculando los dos catetos (Note que el valor de y es negativo)

Ahora bien, de manera similar, para la masa 2 esto seria como calcular estos mismos catetos. Sin embargo, debe iniciar desde los valores de m_1

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \implies \dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \\ y_2 &= -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \implies \dot{y}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) \end{aligned}$$

Con esto entonces, podemos calcular la energía cinética que es:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \cos^2(\phi_1) + l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2(\phi_1)) \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2) (\cos^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_1)) \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2) .
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2} m_2 \left((l_1 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2))^2 + (l_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2))^2 \right) \\
(l_1 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2))^2 &= l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \cos^2(\phi_1) + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \cos^2(\phi_2) \\
(l_1 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1) + l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_2))^2 &= l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2(\phi_1) + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \sin^2(\phi_2) \\
l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \sin^2(\phi_1) + l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \cos^2(\phi_1) &= l_1^2 \dot{\phi}_1^2 (\sin^2(\phi_1) + \cos^2(\phi_1)) \\
&\Rightarrow l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \\
l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \sin^2(\phi_2) + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \cos^2(\phi_2) &= l_2^2 \dot{\phi}_2^2 (\sin^2(\phi_2) + \cos^2(\phi_2)) \\
&\Rightarrow l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \\
2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) &= 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 (\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2)) \\
&\Rightarrow 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\
&= \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) .
\end{aligned}$$

Ahora bien, para el caso de la energía potencial tenemos

$$\begin{aligned}
V_1 &= m_1 g y_1 \\
&= -m_1 g l_1 \cos(\phi_1) \\
V_2 &= m_2 g y_2 \\
&= -m_2 g (l_1 \cos(\phi_1) + l_2 \cos(\phi_2)) .
\end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)) \\
&= \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) .
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= -m_1 g l_1 \cos(\phi_1) - m_2 g l_1 \cos(\phi_1) - m_2 g l_2 \cos(\phi_2) \\
&= -g l_1 \cos(\phi_1) (m_1 + m_2) - m_2 g l_2 \cos(\phi_2) .
\end{aligned}$$

Por lo tanto dado que $L = T - V$ nos queda:

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}l_1^2\dot{\phi}_1^2(m_1 + m_2) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (-gl_1\cos(\varphi_1)(m_1 + m_2) - m_2gl_2\cos(\varphi_2)) \\ &= \frac{1}{2}l_1^2\dot{\phi}_1^2(m_1 + m_2) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + gl_1\cos(\varphi_1)(m_1 + m_2) + m_2gl_2\cos(\varphi_2). \end{aligned}$$

Chapter 2

Quizás lo mejor en este caso es iniciar por notar que la altura del pivote depende de $L \cos(\theta)$ que es la altura dada por el ángulo θ y también depende de $a \cos(\gamma t)$ que nos lo da el enunciado. Con esto entonces, podemos conseguir la energía potencial del sistema como:

$$V = -mg(a \cos(\gamma t) + L \cos(\theta)).$$

Note que es negativo por que el sistema de coordenadas esta ordenado en ese sentido.

Una vez con esto, intentemos describir T

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m \left(L^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 - (a \sin(\gamma t) + L \sin(\theta) \dot{\theta})^2 \right) \\ (a \sin(\gamma t) + L \sin(\theta) \dot{\theta})^2 &= a^2 \sin^2(\gamma t) + a \sin(\gamma t) L \sin(\theta) \dot{\theta} + L^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 \\ L^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 - L^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 &= L^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left[L^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t) + 2a\gamma \dot{\theta} L \sin(\gamma t) \sin(\theta) \right]. \end{aligned}$$

Y con esto podemos encontrar el lagrangiano simplemente con

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left[L^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t) + 2a\gamma \dot{\theta} L \sin(\gamma t) \sin(\theta) \right] + mg(a \cos(\gamma t) + L \cos(\theta)).$$

Chapter 3

3.1

3.1.1

Para comenzar, definamos cuantas coordenadas generalizadas existen. Dado que tenemos dos partículas tenemos $3N$ en coordenadas cartesianas. Ahora bien, tenemos 5 ligaduras las cuales son:

1. $z_1 = 0$
2. $z_2 = 0$
- 3.

$$\begin{aligned}\ell' &= \ell + \pi R \\ \ell &= \ell' - \pi R \\ \ell &= CTE \\ \ell &= y_1 + y_2 = CTE.\end{aligned}$$

4. $x_1 = -R$
5. $x_2 = R$

Con esto entonces sabemos que tenemos $3N - n = 3 \cdot 2 - 5 = 1$ grados de libertad. Por lo cual solo lo describiremos como ϕ . En particular, tendremos que

$$\begin{aligned}y_1 &= \phi \\ y_2 &= \ell - \phi.\end{aligned}$$

Una vez definimos esto, podemos calcular el lagrangiano:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_1 (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}m_2 (\dot{\phi})^2 \\ V &= m_1 g \phi + m_2 g (\ell - \phi) \\ \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1 (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}m_2 (\dot{\phi})^2 - (m_1 g \phi + m_2 g (\ell - \phi)) \\ &= \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right)(m_1 + m_2) - g(m_1 \phi + m_2 \ell - m_2 \phi).\end{aligned}$$

Con lo cual podemos mirar las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right) (m_1 + m_2) - g (m_1 \phi + m_2 \ell - m_2 \phi) \\
&= (m_1 + m_2) \dot{\phi} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{d}{dt} ((m_1 + m_2) \dot{\phi}) \\
&= (m_1 + m_2) \ddot{\phi} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right) (m_1 + m_2) - g (m_1 \phi + m_2 \ell - m_2 \phi) \right) \\
&= -g (m_1 - m_2) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= (m_1 + m_2) \ddot{\phi} - (-g (m_1 - m_2)) = 0 \\
(m_1 + m_2) \ddot{\phi} - (g (m_2 - m_1)) &= 0 \\
(m_1 + m_2) \ddot{\phi} &= g (m_2 - m_1) \\
\ddot{\phi} &= \frac{g (m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}.
\end{aligned}$$

Sin embargo, esto no es en si mismo lo que nos pedía el ejercicio. Para esto debemos romper una ligadura pues como se ve la tensión no tendría sentido para este caso. En ese caso romperemos la ligadura de 3 o $\ell = CTE$. El procedimiento aunque no igual es semejante a medir la tensión con un dinamómetro. Con lo cual tendríamos:

$$\frac{\delta T}{\delta x} = Q_x \wedge \frac{\delta T}{\delta \ell} = Q_\ell.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
\delta \omega &= (m_1 g - \tau) \delta x + (m_2 g - \tau) (-\delta x) \\
\delta \omega &= (m_1 - m_2) g \delta x = Q_x \delta x \\
Q_x &= (m_1 - m_2) g.
\end{aligned}$$

Ahora bien, dejando x constante y variando ℓ entonces nos queda

$$\begin{aligned}
\delta \omega &= (m_2 g - \tau) \delta \ell = Q_\ell d\ell \\
Q_\ell &= (m_2 g - \tau).
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que lo que estamos variando es ℓ entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} (\ell - x_1) \\
&= \frac{d\ell}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \\
&= \dot{\ell} - \dot{x}_1.
\end{aligned}$$

Con lo cual podemos ponerlo en T

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\ell} - \dot{x}_1)^2.$$

Y ahora con esto entonces podemos volver a las ecuaciones de segundo orden

$$\begin{aligned}
\frac{\delta T}{\delta x} &= Q_x \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_{x_1} \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{\ell} - \dot{x}) (-1) \\
\frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= m_1 \ddot{x}_1 - m_2 (\ddot{\ell} - \ddot{x}_1) \\
&= (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 \\
\frac{\delta T}{\delta x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) \\
&= (m_1 + m_2) \ddot{x}_1.
\end{aligned}$$

Y por el otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\delta T}{\delta \ell} &= Q_\ell \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \ell} &= Q_\ell \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} &= m_2 (\dot{\ell} - \dot{x}_1) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} \right) &= m_2 \ddot{\ell} - m_2 \ddot{x}_1 \\
\frac{\partial T}{\partial \ell} &= 0 \\
\frac{\delta T}{\delta \ell} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \ell} \\
&= -m_2 \ddot{x}_1 = Q_\ell \\
&= m_2 g - \tau.
\end{aligned}$$

Con lo cual tendríamos

$$\begin{aligned}
\tau &= m_2 \ddot{x}_1 + m_2 g \\
&= m_2 (\ddot{x}_1 + g) \\
&= m_2 \left(g + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g \right) \\
&= m_2 \left(\frac{g(m_1 - m_2) + g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \right) \\
&= \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.
\end{aligned}$$

3.1.2

Ahora con multiplicadores de Lagrange tendríamos dos coordenadas generalizadas y por tanto esto quedaría:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = \sum_{n=1}^2 \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_n} = Q \\ \mathcal{L} &= T - V \\ \mathcal{L} &= \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \right) - (m_1 g x_1 + m_2 g x_2)\end{aligned}$$

Con este lagrangiano podemos obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= m_1 \dot{x}_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m_1 \ddot{x}_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= -m_1 g \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_1} &= m_1 \ddot{x}_1 + m_1 g = \lambda \frac{\partial F}{\partial q_1} = \lambda.\end{aligned}$$

Igual que para q_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 \dot{x}_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 \ddot{x}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= -m_2 g \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_2} &= m_2 \ddot{x}_2 + m_2 g = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_2} = \lambda.\end{aligned}$$

Con esto entonces podemos desarrollar

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + m_1 g &= \lambda \\ m_2 \ddot{x}_2 + m_2 g &= \lambda \\ F &= x_1 + x_2 \\ m_1 \ddot{x}_1 + m_1 g &= m_2 \ddot{x}_2 + m_2 g \\ m_1 (-\ddot{x}_2) - m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - m_1 g \\ -\ddot{x}_2 (m_1 + m_2) &= g (m_2 - m_1) \\ -\ddot{x}_2 &= \frac{g (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \\ \ddot{x}_1 &= \frac{g (m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}.\end{aligned}$$

Que ahora con la primera ecuación nos queda:

$$\lambda = m_1 (\ddot{x}_1 + g).$$

Ahora podemos desarrollar la tensión como

$$\begin{aligned}
\tau &= m_1 \left(g + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g \right) \\
&= m_1 \left(\frac{g(m_2 - m_1) + g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \right) \\
&= \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.
\end{aligned}$$

3.2

Con esta cuenta, lo que podemos hacer es definir unas coordenadas generalizadas que sean solo el radio en el que se encuentra la cuenta respecto al eje desde donde ocurre la rotación. Por lo tanto, esto lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos(\dot{\theta}t) \implies \dot{x} = \dot{r} \cos(\dot{\theta}t) - r\dot{\theta} \sin(\dot{\theta}t) \\
y &= r \sin(\dot{\theta}t) \implies \dot{y} = \dot{r} \sin(\dot{\theta}t) + r\dot{\theta} \cos(\dot{\theta}t).
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que esta cuenta se esta moviendo solamente y no tenemos efectos de otras fuerzas entonces este sistema no tiene energía potencial. Por lo tanto solo necesitamos la energía cinética para encontrar el lagrangiano.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m \left[(\dot{r} \cos(\dot{\theta}t) - r\dot{\theta} \sin(\dot{\theta}t))^2 + (\dot{r} \sin(\dot{\theta}t) + r\dot{\theta} \cos(\dot{\theta}t))^2 \right] \\
(\dot{r} \cos(\dot{\theta}t) - r\dot{\theta} \sin(\dot{\theta}t))^2 &= \dot{r}^2 \cos^2(\dot{\theta}t) - 2\dot{r}r\dot{\theta} \cos(\dot{\theta}t) \sin(\dot{\theta}t) + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\dot{\theta}t) \\
(\dot{r} \sin(\dot{\theta}t) + r\dot{\theta} \cos(\dot{\theta}t))^2 &= \dot{r}^2 \sin^2(\dot{\theta}t) + 2\dot{r}r\dot{\theta} \sin(\dot{\theta}t) \cos(\dot{\theta}t) + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\dot{\theta}t) \\
\dot{r}^2 \sin^2(\dot{\theta}t) + \dot{r}^2 \cos^2(\dot{\theta}t) &= \dot{r}^2 (\cos^2(\dot{\theta}t) + \sin^2(\dot{\theta}t)) \\
&\implies \dot{r}^2 \\
2\dot{r}r\dot{\theta} \cos(\dot{\theta}t) \sin(\dot{\theta}t) - 2\dot{r}r\dot{\theta} \cos(\dot{\theta}t) \sin(\dot{\theta}t) &= 0 \\
r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\dot{\theta}t) + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\dot{\theta}t) &= r^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2(\dot{\theta}t) + \sin^2(\dot{\theta}t)) \\
&\implies r^2 \dot{\theta}^2 \\
T &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Ahora con esto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) &= m\ddot{r} \\
m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= 0 \\
\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= 0 \\
r &= \dot{\theta}^2.
\end{aligned}$$

Chapter 4

En este caso vamos a partir de que un cilindro rueda sobre otro. Para este caso tenemos dos cilindros, uno de radio a y uno de radio aa . Las medidas se pueden observar en la figura 4.1.

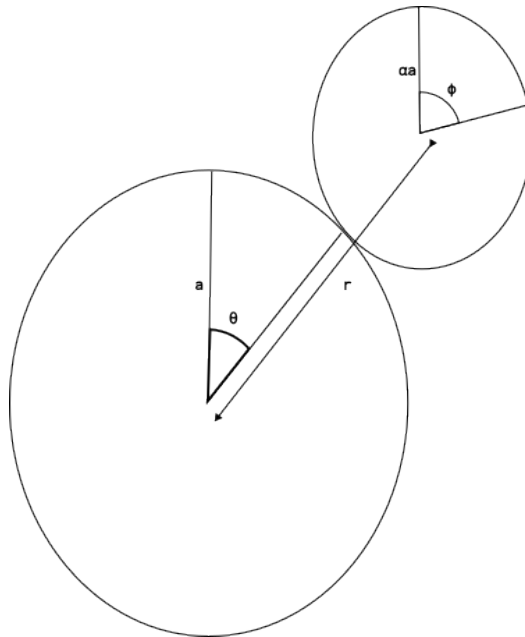


Figure 4.1: Dimensiones y descripción del problema

Con esto entonces nos hace falta ver las fuerzas que las puede encontrar en la figura 4.2

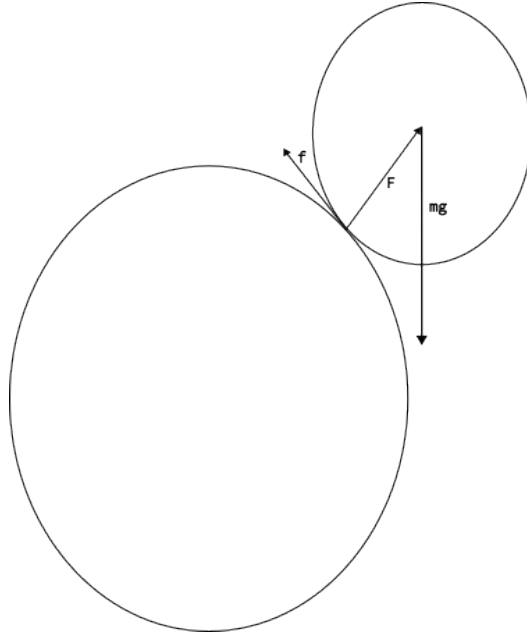


Figure 4.2: Fuerzas en el sistema

En este caso, dado que el cilindro aa ira teniendo cada vez una menor fuerza Z (dado que el angulo en el que se encuentra con respecto a su eje disminuye) entonces sabemos que eventualmente este cilindro se despegara del fijo a . Ademas, sabemos que estos dos perderán contacto en cuanto la fuerza normal F ya no tenga ingerencia. Es decir, cuando

$$F = 0.$$

Ademas, sabemos por el como funciona la fricción que

$$f \leq \mu F.$$

donde μ es el coeficiente de fricción. Lo que implica que este movimiento eventualmente empezara a deslizar sobre la superficie. Por lo tanto, podemos dividir este análisis en 3 momentos definidos por los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 . Para iniciar, desde 0 hasta θ_1 el cilindro rueda sin deslizar, lo que se describe en que la fricción seria

$$f = \mu F.$$

Ahora, entre θ_1 y θ_2 el cilindro se deslizaría pues la fricción es muy pequeña y en θ_2 el cilindro dejaría de estar en contacto con el otro y por lo tanto se sostendría $F = 0$ y de ahí en adelante caería libremente.

Ahora bien iniciemos caso a caso

4.1

Para empezar para un movimiento que no desliza entonces sabemos que:

$$\begin{aligned} a\theta &= \alpha a (\varphi - \theta) \\ \theta &= \alpha (\varphi - \theta) \\ \theta &= \alpha \varphi - \alpha \theta \\ \theta + \alpha \theta &= \alpha \varphi \\ (1 + \alpha) \theta &= \alpha \varphi. \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos definir una función desarrollando:

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha) \theta &= \alpha \varphi \\
\theta &= \frac{\alpha \varphi}{(1 + \alpha)} \\
\gamma &= \theta - \frac{\alpha \varphi}{(1 + \alpha)} \\
\frac{\alpha \varphi}{(1 + \alpha)} &= \theta - \gamma \\
\alpha \varphi &= (\theta - \gamma)(1 + \alpha) \\
\varphi &= \frac{(\theta - \gamma)(1 + \alpha)}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Donde, como se puede notar cuando esto no desliza $\gamma = 0$. Ahora bien, por otro lado, tenemos que al estar estos dos cilindros en contacto la distancia entre los centros queda:

$$r = a + \alpha a = (1 + \alpha) a.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \right) (\alpha^2 a^2 \dot{\varphi}^2) \\
&= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m \left(\alpha^2 a^2 \left(\frac{(\theta - \gamma)(1 + \alpha)}{\alpha} \right)^2 \right) \\
\frac{1}{4} m \left(\alpha^2 a^2 \left(\frac{(\theta - \gamma)(1 + \alpha)}{\alpha} \right)^2 \right) &= \frac{1}{4} m \left(\alpha^2 a^2 \frac{(\theta - \gamma)^2 (1 + \alpha)^2}{\alpha^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} m (a^2 (1 + \alpha)^2 (\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2)) \\
T &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m (a^2 (1 + \alpha)^2 (\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2)).
\end{aligned}$$

Ahora bien, podemos encontrar las fuerzas generalizadas con la ecuación

$$\begin{aligned}
\delta W_k &= Q_k \delta q_k \\
Q_k &= \frac{\delta W_k}{\delta q_k} \\
Q_k &= -\frac{\partial V}{\partial q_k}.
\end{aligned}$$

Con lo cual, podríamos usar:

$$\begin{aligned}
V &= m g r \cos(\theta) + \gamma f a (1 + \alpha) - F r \\
Q_k &= -\frac{\partial V}{\partial k} \\
Q_\theta &= -(-m g r \sin(\theta) + 0 + 0) \\
&= m g r \sin(\theta) \\
Q_\gamma &= -(0 + f(1 + \alpha) - 0) \\
&= -f a (1 + \alpha) \\
Q_r &= -(m g \cos(\theta) - F) \\
&= F - m g \cos(\theta).
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
Q_\theta &= mgr \sin(\theta) \\
Q_\gamma &= -fa(1+\alpha) \\
Q_r &= F - mg \cos(\theta).
\end{aligned}$$

Ahora bien, queda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m(a^2(1+\alpha)^2(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2)) \\
&\quad - (mgr \cos(\theta) + \gamma fa(1+\alpha) - Fr).
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k.$$

Ahora para esto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}m(a^2(1+\alpha)^2)(\dot{\theta} - \dot{\gamma})$$

Chapter 5

Dado que estamos en un péndulo esférico lo mas simple es pasar nuestras coordenadas generalizadas para que sean esféricas. En este caso, las velocidades son:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\ell}^2 \sin^2(\theta).$$

Ahora bien, dado que este es un péndulo sabemos que r es constante. Por lo tanto, mis coordenadas generalizadas serian θ y ℓ . Y con la velocidad descrita como arriba la energía cinética me queda como:

$$T = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\ell}^2 \sin^2(\theta))$$

Por otro lado, el único potencial que existe en este sistema es el gravitacional y este solo depende de θ dado que solo esta definido por la altura. Por lo tanto este queda como

$$V = mgr \cos(\theta).$$

Con esto ya calculado podemos saber que el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\ell}^2 \sin^2(\theta)) - mgr \cos(\theta).$$

Con esto entonces las ecuaciones de Euler Lagrange nos quedan como

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m \ddot{\theta} r^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= mr^2 \dot{\ell}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + mgr \sin(\theta) \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta} &= mr^2 \ddot{\theta} - mr^2 \dot{\ell}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - mgr \sin(\theta) = 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \ell} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}} &= mr^2 \dot{\ell} \sin^2(\theta) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}} &= mr^2 \ddot{\ell} \sin^2(\theta) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} &= 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \ell} &= mr^2 \ddot{\ell} \sin^2(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \ell} &= mr^2 \ddot{\ell} \sin^2(\theta) = 0 \\ 0 &= \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\ell} \sin^2(\theta)) \\ p_\ell &= \text{CTE} = mr^2 \dot{\ell} \sin^2(\theta).\end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\ell} \frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} - L = E.$$

donde E es una constante, que al reemplazar todo nos queda como

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\ell^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta) = E$$

Con esto podemos tomar lo que esencialmente es un potencial en este caso como:

$$\mathcal{V} = \frac{p_\ell^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta).$$

Chapter 6

Para iniciar podemos describir la energía cinética como:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}mv^2 \\T &= \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2 \sin^2(\theta)) \\T &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\theta) \\V &= -mgy \\V &= -mg(a \cos(\theta)) \\\mathcal{L} &= T - V \\\mathcal{L} &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\theta) + mg(a \cos(\theta)).\end{aligned}$$

Ademas, podemos notar que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Con esto entonces, podemos utilizar la ecuación:

$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} = CTE.$$

Que dado que solo tenemos un grado de libertad esto se puede resumir a

$$\begin{aligned}\dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} &= (ma^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\theta) - mg(a \cos(\theta)) \\&= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\theta) - mg(a \cos(\theta)) \\&= \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Que esto lo podemos tomar como un lagrangiano con un eje fijo. Con lo cual

$$\mathcal{V}(\theta) = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2(\theta) - mga \cos(\theta)$$

.

Que para comprobar la velocidad angular limite tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\theta) &= -\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\theta) - mga\cos(\theta) \\ &= -\frac{1}{2}ma^2\left(\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\sin^2(\theta) - mga\cos(\theta) \\ &= -\frac{1}{2}mag\sin^2(\theta) - mga\cos(\theta) \\ &= -\frac{1}{2}\sin^2(\theta) - \cos(\theta)\end{aligned}$$

.