

1. 2.6-4 Para el sistema que tenemos sabemos que sus ecuaciones de estado son:

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{3}{2}R \frac{N^{(1)}}{U^{(1)}}$$
$$\frac{1}{T^{(2)}} = \frac{5}{2}R \frac{N^{(2)}}{U^{(2)}}$$

Ahora bien, con esto podemos despejar $U^{(n)}$ para cada caso que nos queda

$$U^{(1)} = \frac{3}{2}RN^{(1)}T^{(1)}_0$$
$$U^{(2)} = \frac{5}{2}RN^{(2)}T^{(2)}_0$$

Y con eso podemos calcular U_T lo cual nos queda

$$U_T = \frac{3}{2}RN^{(1)}T^{(1)}_0 + \frac{5}{2}RN^{(2)}T^{(2)}_0$$
$$U_T = R\left(\frac{3}{2}N^{(1)}T^{(1)}_0 + \frac{5}{2}N^{(2)}T^{(2)}_0\right)$$

Y ahora podemos igualar U_T a las ecuaciones de estado cuando ya estan en equilibrio. lo que nos queda

$$U_T = RT_f\left(\frac{3}{2}N^{(1)} + \frac{5}{2}N^{(2)}\right)$$

Que si despejamos T_f nos queda

$$\frac{U_T}{R\left(\frac{3}{2}N^{(1)} + \frac{5}{2}N^{(2)}\right)} = T_f$$
$$\frac{\cancel{R}\left(\frac{3}{2}N^{(1)}T^{(1)}_0 + \frac{5}{2}N^{(2)}T^{(2)}_0\right)}{\cancel{R}\left(\frac{3}{2}N^{(1)} + \frac{5}{2}N^{(2)}\right)} = T_f$$
$$321 = T_f$$

2. 2.7-1 para iniciar podemos saber que

$$0 = \delta U^1 + \delta U^2 + \delta U^3 \quad (1)$$

$$\delta V^1 = \frac{\delta V^2}{2} = \frac{\delta V^3}{3} \quad (2)$$

y con esto podemos plantear ΔS lo que nos queda

$$\Delta S = \frac{1}{T^1} \delta U^1 + \frac{1}{T^2} \delta U^2 + \frac{1}{T^3} \delta U^3 \\ + \frac{P^1}{T^1} \delta V^1 + \frac{P^2}{T^2} \delta V^2 + \frac{P^3}{T^3} \delta V^3$$

Ahora bien, utilizando las ecuaciones 1 y 2 tenemos que

$$\Delta S = \frac{1}{T^1} (-\delta U^2 - \delta U^3) + \frac{1}{T^3} \delta U^2 + \delta U^3 \\ + \delta v \left(\frac{P^1}{T^1} + \frac{2P^2}{T^2} + \frac{3P^3}{T^3} \right) \\ \Delta S = \delta U^2 \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T^1} \right) + \delta U^3 \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T^1} \right) \\ + \delta v \left(\frac{P^1}{T^1} + \frac{2P^2}{T^2} + \frac{3P^3}{T^3} \right)$$

como $\delta U^1, \delta U^2 > 0$ entonces $T^2 = T^1 = T^3$ y como $\Delta S = 0$ entonces

$$0 = \frac{P^1 + 2P^2 + 3P^3}{T} \\ 0 = P^1 + 2P^2 + 3P^3$$

3. **2.8-1** Para esto comenzamos con

$$\frac{\partial S}{\partial U} = 0 + \frac{NR}{\left(\frac{U^{\frac{3}{2}}V}{N^{\frac{5}{2}}}\right)} U^{\frac{1}{2}} \left(\frac{V}{N^{\frac{5}{2}}}\right) \frac{3}{2} + 0 = \frac{1}{T} = \frac{3NR}{2U}$$

Donde

$$U = \frac{3NRT}{2} \\ U_T = U_1 + U_2 = \frac{3}{2}R(N^1T^1 + N^2T^2) \\ T_{final} = \frac{2U_T}{3NR} = \frac{2\left(\frac{3}{2}R(N^1T^1 + N^2T^2)\right)}{3NR} = \frac{N^1T^1 + N^2T^2}{N} = 272.7K$$

Por otro lado

$$\frac{\partial S}{\partial V} = 0 + \frac{NR}{\left(\frac{U^{\frac{3}{2}}V}{N^{\frac{5}{2}}}\right)} \frac{U^{\frac{3}{2}}}{N^{\frac{5}{2}}} = \frac{NR}{V} = \frac{P}{T}$$

Ademas

$$-\frac{\mu_1}{T} = A + R \ln \left(\frac{U^{\frac{3}{2}}V}{N^{\frac{5}{2}}} \right) - \frac{5}{2}R - R \ln \left(\frac{N_1}{N_1 + N_2} \right) \\ = R \ln \frac{U^{\frac{3}{2}}V}{N_1 N^{\frac{3}{2}}} + \left[A - \frac{5}{2}R \right]$$

Ahora bien, las condiciones de equilibrio que buscamos son

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$$

$$\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}$$

Con lo cual nos queda

$$R \ln \frac{U_2^{\frac{3}{2}} V}{N_1 N^{\frac{3}{2}}} + \left[A - \frac{5}{2} R \right] = R \ln \frac{U_2^{\frac{3}{2}} V}{N_1 N^{\frac{3}{2}}} + \left[A - \frac{5}{2} R \right]$$

$$e^{\ln \frac{U_2^{\frac{3}{2}} V}{N_1 N^{\frac{3}{2}}} + [A - \frac{5}{2} R]} = e^{\ln \frac{U_2^{\frac{3}{2}} V}{N_1 N^{\frac{3}{2}}} + [A - \frac{5}{2} R]} \frac{U_1^{\frac{3}{2}}}{N_1 (N_1 + N_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{U_2^{\frac{3}{2}}}{N_1 (N_1 + N_2)^{\frac{3}{2}}}$$

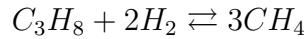
$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{N_2} N_1 = 0.75$$

Y por la ecuación fundamental $PV = NRT$

$$P_1 = 678504 Pa$$

$$P_2 = 565420 Pa$$

4. **2.9-1** Tenemos en este caso, una reacción de la forma



Por otro lado, tenemos para el *Ejemplo 1* de la sección 2.7 tenemos un sistema con una relación de volúmenes 1:2:3. Por lo tanto podemos comparar el coeficiente estequiométrico con el volumen. Ahora bien, con esto y como nos indica el libro lo único que debemos hacer es seguir el razonamiento de este ejemplo y con ello llegar al resultado. Lo primero que se hace es plantear la ecuación de δS como realmente no nos interesa nada por fuera de μ entonces quedémonos con

$$\delta S = \frac{N_1}{T} \delta \mu_1 + \frac{N_2}{T} \delta \mu_2 + \frac{N_3}{T} \delta \mu_3$$

Por lo planteado al inicio sabemos que

$$N_1 = \frac{N_2}{2} = \frac{N_3}{3}$$

por lo tanto si intercambiamos nos queda

$$\delta S = \frac{N_1}{T} \delta \mu_1 + \frac{2N_1}{T} \delta \mu_1 + \frac{3N_1}{T} \delta \mu_1$$

$$\delta S = \left(\frac{N_1}{T} + \frac{N_2}{T} + \frac{N_3}{T} \right) \delta \mu_1$$

Y de ahí sacamos que en equilibrio se tiene que

$$\mu_{C_3H_8} + 2\mu_{H_2} = 3\mu_{CH_4}$$

Esto era más fácil sacarlo desde la ecuación (2.72)

5. 3.1-1

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{2} K (NU + CV^2)^{-\frac{1}{2}} N$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{2} K (NU + CV^2)^{-\frac{1}{2}} 2cv$$

6. 3.2-1 Tenemos que la ecuación es

$$U = \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^4}{NV^2}$$

por lo tanto queda

$$\frac{\partial U}{\partial s} = T = 4 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^3}{NV^2}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial v} = P = 2 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^4}{NV^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial N} = \mu = - \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^4}{N^2 V^2}$$

Una vez tenemos estas ecuaciones de estado entonces podemos calcular

$$\frac{P}{T} = \frac{2 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^4}{NV^3}}{4 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^3}{NV^2}} = \frac{S}{2V}$$

$$\frac{\mu}{T} = \frac{- \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^4}{N^2 V^2}}{4 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^3}{NV^2}} = - \frac{S}{4N}$$

Ahora bien, con esto ya podemos separar parte por parte la primera expresión (Que nos relaciona la temperatura para que esta tenga los otros dos valores de la siguiente manera)

$$T = 4 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S^3}{NV^2}$$

$$T = 4 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S}{N} \frac{S^2}{V^2}$$

$$T = 4 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \frac{S}{N} \left(\frac{S}{V} \right)^2$$

$$T = 4 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) - 4 \frac{\mu}{T} \left(2 \frac{P}{T} \right)^2$$

$$T^4 = -32 \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3} \right) \mu P^2$$

7. **3.3-1** Para iniciar tenemos que

$$T = \frac{3AS^2}{V}$$

$$P = \frac{AS^3}{V^2}$$

(a)

$$\begin{aligned}\delta\mu &= -S\delta T + V\delta P \\ &= -S\delta\left(\frac{3AS^2}{V}\right) + V\delta\left(\frac{AS^3}{V^2}\right) = \left(-\frac{GAS}{V}dS + \frac{3AS^2}{V^2}\right)dS + \left(\frac{3AS^3}{V^2} - \frac{2AS^3}{V^2}\right)dV\delta\left(-\frac{AS}{V}\right)\end{aligned}$$

Si integramos esto nos queda

$$\mu = -\frac{AS^3}{V} + \text{const}$$

Ahora por euler sabemos que

$$U = TS - PV + \mu N$$

$$U = \frac{AS^3}{VN}$$

(b)

$$\begin{aligned}\delta u &= T\delta S - P\delta V \\ \left(\frac{3AS^2}{V}\right)dS - \frac{AS^3}{V^2}dV\end{aligned}$$

Con esto podemos plantear que

$$\phi = \frac{AS^3}{V}$$

entonces

$$\delta u = d\frac{AS^3}{V}$$

Una vez mas si integramos y ademas dividimos en N nos queda

$$U = \frac{A\frac{S^3}{N^3}}{\frac{V}{N}} = \frac{AS^3}{VN}$$

8. **3.3-2** Iniciemos nombrando las ecuaciones de estado encontradas que son

$$U = PV$$

$$P = BT^2$$

Ahora bien tenemos que

$$\sqrt{P} = \sqrt{BT}$$

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{B}{P}} = \sqrt{\frac{BV}{U}}$$

Por otro lado

$$U = PV$$

$$UP = P^2V$$

$$UBT^2 = P^2V$$

$$P = \sqrt{\frac{UB}{V}}T$$

$$\frac{P}{T} = \sqrt{\frac{UB}{V}}$$

Por otro lado

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dv$$

$$dS = \sqrt{\frac{B}{P}} = \sqrt{\frac{BV}{U}}dU + \sqrt{\frac{UB}{V}}dV$$

$$dS = d\left(2\sqrt{BVU}\right)$$

Sacando la derivada nos queda

$$S = 2\sqrt{BVU}$$

Si ponemos su versión molar queda

$$\frac{S}{N} = 2\sqrt{B\frac{U}{N}\frac{V}{N}} = 2\frac{\sqrt{BVU}}{N}$$

$$S = 2\sqrt{BVU}$$

9. 3.4-1

- (a) Por hidrostática sabemos que $P_A = P_B$ y por el problema per se sabemos que P_A es la presión de equilibrio. Por lo tanto, solo debemos encontrar P_B . Ahora bien, para hacer esto utilizaremos una ecuación vista en *Ondas y Fluidos*

$$\rho - \Delta \vec{f} = \Delta P$$

$$\rho g = \frac{\delta P}{\delta h}$$

$$P = \int \rho g \delta h = \rho gh + P_0 = \frac{mgh}{V_{hg}} + P_0 = \frac{Wh}{V} + P_{atm}$$

- (b) Por la ecuación de un gas ideal $PV = NRT$ aplicada para este caso (Donde V es constante) y por tanto podemos plantear

$$\begin{aligned} V &= V \\ \frac{N_1 R T_1}{P_1} &= \frac{N_2 R T_2}{P_2} \\ N_1 &= N_2 \text{ Por el sistema} \\ \frac{T_1}{P_1} &= \frac{T_2}{P_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se mide k para un caso conocido esto queda

$$T = KP = K \left(\frac{mgh}{v} + p_0 \right)$$

- (c) Un termometro de presión constante significa que trabajaria bajo $\frac{T}{V} = \text{const.}$ Es decir $T = kV$ por lo que solo harian falta estos dos para medir temperatura.

10. **3.4-2** Al ser un gas ideal con compresion adiabática se cumple que $dU = -PdV$. Además, $U = \frac{3}{2}NRT = PV$ por la ecuación de un gas ideal. Así pues:

$$\begin{aligned} dU &= d \left(\frac{3}{2}PV \right) = \frac{3}{2}PdV + \frac{3}{2}VdP = -PdV \\ &= \frac{5}{2}PdV = \frac{-3}{2}VdP \\ &= \frac{5}{V}dV = \frac{-3}{P}dP \\ 5 \ln(V) &= -3 \ln(P) + \phi \\ PV^{\frac{5}{3}} &= \text{const} \end{aligned}$$

Además, se logra ver que:

$$\begin{aligned} s &= s_0 + \ln \left(\frac{U}{U_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \\ s - s_0 &= \ln \left(\frac{U}{U_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \\ e^{s-s_0} &= \frac{U}{U_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{2}{3}} \\ e^{\frac{2(s-s_0)}{3R}} &= \frac{\frac{3}{2}PV}{U_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \frac{PV^{\frac{5}{3}}}{U_0 V_0^{\frac{2}{3}}} \\ PV^{\frac{5}{3}} &= \frac{2}{3} U_0 V_0^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2(s-s_0)}{3R}} = \text{const} \end{aligned}$$

Parte Escrita

La entropía en un gas puede estudiarse matemáticamente. Sin embargo, es quizás más interesante para este ejercicio dado el contexto (en donde llevamos varios puntos del taller trabajando con su definición matemática) el dar una intuición de ello. Imagine usted a la entropía como el número de microestados. ¿Qué son los microestados? Pues bien su definición formal son la cantidad de posiciones que puede tomar un cuerpo. Es decir, un documento organizado tiene una configuración correcta, la secuencial. Sin embargo, usted puede poner las hojas en un orden arbitrario. Concretamente, tome un documento de 10 páginas. La cantidad de posibilidades para que el documento este ordenado son 1. pero si queremos cambiar solo una hoja entonces las posibilidades serían 10 y si lo que quisiéramos es ordenar aleatoriamente las 10 hojas tendríamos $10! = 3628800$ formas de organizarlo de las cuales solo 1 se considera correcta. Hay tres anotaciones muy importantes que dar con este ejemplo. Primero, Este es un ejemplo macroscópico. Imagine las hojas como partículas de un gas y por ende sus características cambian ya no hablaríamos de 10 partículas si no de moles completos (Más de 20 órdenes de magnitud por encima). Segundo, este es un ejemplo lineal, es decir, todo lo que puedes hacer con un documento es cambiarle la secuencia de sus páginas. Sin embargo, un gas puede tomar esencialmente cualquier configuración en un espacio dado, esto imagínese con el volumen. Por último, está el tema de la presión. En nuestro ejemplo, no existe realmente un equivalente de la presión pero esta es en esencia la manera en la que evitamos que la entropía aumente. Por eso mismo la presión aumenta cuando aumentan las partículas y disminuye cuando aumenta el volumen (con las mismas partículas). En esencia esta es una intuición de lo que la entropía representa para un gas.