

Electromagnetismo 1

Tarea 5

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1	Punto 7.10	Page 2
Chapter 2	Punto 7.12	Page 3
Chapter 3	Punto 7.16	Page 4
3.1	Parte A	4
3.2	Parte B	4
Chapter 4	Punto 7.20	Page 5
4.1		5
4.2		5
4.3		6
Chapter 5	Punto 7.45	Page 7
Chapter 6	Punto 7.54	Page 8
6.1		8
6.2		8
6.3		9
6.4		9
6.5		9

Chapter 1

Punto 7.10

Para comenzar debemos tomar en consideración que la *FEM* seria:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Por lo tanto, debemos iniciar por encontrar el flujo magnético atreves de la *FEM*. Para esto entonces usemos

$$\Phi = BS \cos \theta.$$

Tenemos cuanto es el área (que corresponde con a^2 dado que es una espira cuadrada). Ademas, dado que esta rotando entonces θ varia con el tiempo respecto a ωt Ademas de tener un campo B lo que seria entonces.

$$\begin{aligned}\Phi &= B \cdot S \\ &= Ba^2 \cos(\omega t) \\ \mathcal{E}(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d(Ba^2 \cos(\omega t))}{dt} \\ &= -Ba^2(-\sin(\omega t))\omega \\ &= B\omega a^2 \sin(\omega t) \square.\end{aligned}$$

Chapter 2

Punto 7.12

Para este caso, volvemos a iniciar por calcular el flujo magnético. Para esto necesitamos saber cuanto es el área que dado que es una espira circular seria $\pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$. Además de que ya tenemos el campo magnético entonces esto seria

$$\Phi = B(t) \cdot A = \frac{\pi a^2}{4} B_0 \cos(\omega t).$$

Ahora con esto podemos de nuevo encontrar la *FEM* que seria

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{\pi a^2}{4} B_0 \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] \\ &= -\frac{\pi a^2}{4} B_0 [-\sin(\omega t)] \omega \\ &= \frac{\pi a^2}{4} \omega B_0 \sin(\omega t).\end{aligned}$$

Con todo esto entonces podemos terminar calculando la corriente inducida lo que quedaría como

$$\begin{aligned}I(t) &= \frac{\mathcal{E}}{R} \\ &= \frac{\frac{\pi a^2 \omega B_0}{4} \sin(\omega t)}{R} \\ &= \frac{\pi a^2 \omega B_0}{4R} \sin(\omega t) \square.\end{aligned}$$

Chapter 3

Punto 7.16

3.1 Parte A

Note que para el campo magnetico que genera el cilindro se cumple que por simetria se cancela de manera interna. Por lo tanto, solo queda el campo inducido por el cable que va saliendo de la pagina y por lo tanto induce una corriente de manera longitudinal.

3.2 Parte B

Para esto vamos a usar un loop amperiano. que sea un rectangulo que salga del cilindro y tomando en cuenta que este se cancela por fuera entonces esto daria $B = 0$ afuera. Con esto entonces

$$\begin{aligned}\oint E \cdot dl &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ \oint E \cdot dl &= El \\ -\frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{d}{dt} \int B \cdot da \\ &= -\frac{d}{dt} \int_s^a \frac{\mu_0 I}{2\pi s'} l ds' \\ El &= -\frac{dI}{dt} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{s}\right) l \\ E &= -\frac{dI}{dt} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{s}\right) \\ \frac{dI}{dt} &= -I_0 \omega \sin \omega t \\ E &= -\frac{dI}{dt} \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{a}{s}\right)\end{aligned}$$

Chapter 4

Punto 7.20

4.1

El campo en el eje es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

por lo tanto el flujo por el area es:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int B \cdot da \\ &= B\pi a^2 \\ &= \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

4.2

El campo es

$$B = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

, donde $m = I\pi a^2$ Ahora si integramos

$$\begin{aligned}\Phi &= \int B \cdot da \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\pi a^2}{r^3} \int (2 \cos \theta)(r^2 \sin \theta d\theta d\phi) \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2r} 2\pi \int_0^\theta \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I \pi a^2}{r} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^\theta \\ &= \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

4.3

Partimos desde

$$\phi_1 = M_{12}I_2$$

$$\phi_2 = M_{21}I_1$$

$$M_{12} = \frac{\frac{\mu_0 \pi I_1 a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)}^{\frac{3}{2}}}{I_1}$$

$$M_{21} = \frac{\frac{\mu_0 \pi I_2 a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)}^{\frac{3}{2}}}{I_2}$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Chapter 5

Punto 7.45

Para este caso tenemos

$$f = v \times B$$

$$v = \omega a \sin \theta \hat{\phi}$$

$$f = \omega a B_0 \sin \theta (\hat{\phi} \times \hat{z})$$

$$\mathcal{E} = \int f \cdot d\mathbf{l}$$

$$d\mathbf{l} = a d\theta \hat{\theta}$$

$$\mathcal{E} = \omega a^2 B_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\hat{\phi} \times \hat{z}) \cdot \hat{\theta} d\theta$$

$$\hat{\theta} \cdot (\hat{\phi} \times \hat{z}) = \hat{z} \cdot (\hat{\theta} \times \hat{\phi})$$

$$= \hat{z} \cdot \hat{r}$$

$$= \cos \theta$$

$$\mathcal{E} = \omega a^2 B_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$= \omega a^2 B_0 \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \omega a^2 B_0$$

Chapter 6

Punto 7.54

6.1

Suponga una corriente I_1 y I_2 entonces (Si Φ es el flujo atravez de un turno):

$$\Phi_1 = I_1 L_1 + M I_2 = N_1 \Phi$$

$$\Phi_2 = I_2 L_2 + M I_1 = N_2 \Phi$$

$$\Phi = I_1 \frac{L_1}{N_1} + I_2 \frac{M}{N_1} = I_2 \frac{L_2}{N_2} + I_1 \frac{M}{N_2}$$

En el caso de $I_1 = 0$ tenemos $\frac{M}{N_1} = \frac{L_2}{N_2}$. Por el otro lado, en el caso de $I_2 = 0$ tendremos $\frac{L_1}{N_1} = \frac{M}{N_2}$. Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{M}{N_1}}{\frac{L_1}{N_1}} &= \frac{\frac{L_2}{N_2}}{\frac{M}{N_2}} \\ \frac{M}{L_1} &= \frac{L_2}{M} \\ L_1 L_2 &= M^2 \end{aligned}$$

6.2

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_1 &= \frac{d\Phi_1}{dt} \\ &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ &= V_1 \cos(\omega t) \\ -\mathcal{E}_2 &= \frac{d\Phi_2}{dt} \\ &= L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \\ &= -I_2 R \end{aligned}$$

6.3

$$\begin{aligned}
L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} &= V_1 \cos(\omega t) \\
L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} &= -I_2 R \\
L_1 L_2 \frac{dI_1}{dt} + M L_2 \frac{dI_2}{dt} &= L_2 V_1 \cos(\omega t) \\
L_1 L_2 \frac{dI_1}{dt} + M(-I_2 R - M \frac{dI_1}{dt}) &= L_2 V_1 \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

Usando $L_1 L_2 = M^2$, los términos con $\frac{dI_1}{dt}$ se cancelan:

$$-MRI_2 = L_2 V_1 \cos(\omega t) \implies I_2(t) = -\frac{L_2 V_1}{MR} \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI_2}{dt} &= \frac{L_2 V_1 \omega}{MR} \sin(\omega t) \\
L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \left(\frac{L_2 V_1 \omega}{MR} \sin(\omega t) \right) &= V_1 \cos(\omega t) \\
\frac{dI_1}{dt} &= \frac{V_1}{L_1} \cos(\omega t) - \frac{L_2 \omega V_1}{L_1 R} \sin(\omega t) \\
I_1(t) &= \frac{V_1}{L_1} \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{L_2}{R} \cos(\omega t) \right) \\
I_2(t) &= -\frac{L_2 V_1}{MR} \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

6.4

$$\begin{aligned}
\frac{V_{out}}{V_{in}} &= \frac{I^2 R}{V_1 \cos \omega t} \\
&= \frac{-\frac{L_2 V_1}{MR} \cos \omega t R}{V_1 \cos \omega t} \\
&= -\frac{L_2}{M} \\
&= -\frac{N_2}{N_1}
\end{aligned}$$

6.5

Para P_{in}

$$\begin{aligned}
P_{in} &= V_{in} I_1 \\
&= (V_1 \cos \omega t) \left(\frac{V_1}{L_1} \right) \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + \frac{L_2}{R} \cos \omega t \right) \\
&= \frac{V_1^2}{L_1} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{L_2}{R} \cos^2 \omega t \right)
\end{aligned}$$

Para P_{out}

$$\begin{aligned}
P_{out} &= V_{out} I_2 \\
&= I_2^2 R \\
&= \frac{(L_2 V_1)^2}{M^2 R} \cos^2 \omega t
\end{aligned}$$

Para los valores promedio se tiene

$$\begin{aligned}
\cos^2(\omega t) &= \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \\
\langle \cos^2(\omega t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\omega t) \cos(\omega t) &= \frac{\sin(2\omega t)}{2} \\
\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual podemos reemplazar en las ecuaciones encontrada anteriormente para que nos de:

$$\begin{aligned}
\langle P_{in} \rangle &= \frac{V_1^2}{L_1} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{L_2}{R} \cos^2 \omega t \right) \\
\langle P_{in} \rangle &= \frac{V_1^2}{L_1} \left(\frac{L_2}{2R} \right) \\
\langle P_{in} \rangle &= \frac{V_1^2 L_2}{2RL_1}
\end{aligned}$$

Y por otro lado

$$\begin{aligned}
\langle P_{out} \rangle &= \frac{(L_2 V_1)^2}{M^2 R} \cos^2 \omega t \\
\langle P_{out} \rangle &= \frac{(L_2 V_1)^2}{2M^2 R} \\
\langle P_{out} \rangle &= \frac{(L_2^2 V_1)^2}{2L_1 L_2 R} \\
\langle P_{out} \rangle &= \frac{V_1^2 L_2}{2RL_1}
\end{aligned}$$

Lo que muestra lo que queriamos $\langle P_{in} \rangle = \langle P_{out} \rangle$