Metodos Matematicos
Tarea 1
14 de febrero de 2024

Nombre: *Sergio Montoya*

Pregunta 1

Pregunta 2

Pregunta 3

Pregunta 4

Pregunta 5

Pregunta 6

Pregunta 7

Pregunta 8

Pregunta 9

Pregunta 10

Parte A

En este caso, partimos de que tenemos la integral de una multiplicación. Por lo tanto, podemos aplicar integración por partes. De modo que nos queda:

$$\begin{aligned}
\oint udv &= uv - \oint vdu \\
u &= \ln(z) \\
du &= \frac{1}{z}dz \\
dv &= f'(z)dz \\
v &= f(z) \\
\oint (\ln(z))\, f'(z)dz &= \ln(z)f(z) - \oint \frac{f(z)}{z}dz \\
&= \ln(z)f(z) - 2\pi i f(0) \\
&= 2\pi i f(z_0) - 2\pi i f(0) \\
&= 2\pi i(f(z_0) - f(0))
\end{aligned}$$

En este caso, el logaritmo natural equivale a $2\pi i$ pues al poner todo el circulo en la integral (que es C) este seria el resultado. Por otro lado la integral tiene un $f(0)$ por la formula de cauchy para integrales.

Parte B

Sea b cualquier punto distinto a a en el vecindario definido. Sea p la distancia entre a y b. Si C_p denota el circulo orientado positivamente $|b-a|=p$, centrado en a y que pasa por b la formula integral de Cauchy nos dice que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{f(z)dz}{z-a}$$

y la representación parametrica nos permitiria expresar esto como:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+pe^{i\theta})d\theta$$

Ahora, notamos de esta ultima expresión

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+pe^{i\theta})|d\theta$$

Ahora, dado que

$$|f(a+pe^{i\theta})| \leq |f(a)|$$

encontramos que

$$\int_0^{2\pi} |f(a+pe^{i\theta})|d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(a)|d\theta = 2\pi|f(a)|$$

por lo tanto

$$|f(a)| \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+pe^{i\theta})|d\theta$$

ademas, por estas dos inecuaciónes queda

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+pe^{i\theta})|d\theta$$

lo cual nos lleva a concluir que

$$|f(a+pe^{i\theta})| = |f(a)|$$

por lo tanto todos los puntos del circulo $|a-b|=p$ tiene el mismo valor. Ademas dado que b puede ser cualquier punto entonces todos los puntos de este contorno valen exactamente lo mismo $f(a)$. Esta demostración fue adaptada del libro *Complex Variables and Applications* de *Churchill*.