Complementaria Moderna **Name:** *Sergio Montoya Ramírez*
Taller 6
April 15, 2023

1. Para este punto utilizaremos las notas sobre osciladores y preguntas realizadas al monitor.

   Para comenzar, se tomaron los operadores escalera con los cuales entonces se define

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^+ + a)\\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^+ - a)\\ \hat{p}^2 &= -\frac{m\omega\hbar}{2}(a^+a^+ - a^+a - aa^+ + aa)\\ \hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}(a^+a^+ + a^+a + aa^+ + aa)\\ &.\end{aligned}$$

   Una vez tenemos estos resultados, podemos aprovecharlos para calcular σ_x y σ_p sin embargo para esto se da un caso curioso. Para averiguar de que se trata encontremos $< x >^2$

$$\begin{aligned}< x >^2 &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^+ + a)\right)^2\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}(a^+ + a)(a^+ + a)\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}(a^+a^+ + a^+a + aa^+ + aa)\\ < x^2 > &= \frac{\hbar}{2m\omega}(a^+a^+ + a^+a + aa^+ + aa).\end{aligned}$$

   Lo mismo ocurre para $< p >$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{< x >^2 + < x^2 >}\\ &= \sqrt{2 < x >^2}\\ &= \sqrt{2} < x >\\ \sigma_p &= \sqrt{2} < p > .\end{aligned}$$

   Ahora, para encontrar si se cumple el principio de incertidumbre solo hace falta multiplicar ambos lo cual nos da

$$\sigma_x\sigma_p = \sqrt{2} < x > \sqrt{2} < p >= 2\hat{x}\hat{p}.$$

2. Para este punto utilizaremos las notas sobre osciladores de la complementaria.

Para comenzar utilizaremos la definición de ψ_n encontrada en la ultima parte de las notas. Con esta encontramos que

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n\psi_0.$$

Con esto podemos encontrar que

$$\psi_1 = (\hat{a}^2)^n \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}.$$

(a) Por lo tanto podemos partir desde

$$\psi(x,t=0) = A\left[3\left(\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}\right) + 4\left((\hat{a}^2)^n \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}\right)\right]$$

lo que se puede resumir en

$$= A\left[\left(\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}\right)\left(3 + 4\left((\hat{a}^2)^n\right)\right)\right]$$

3. Por facilidad representaremos $|\alpha >= \left(\begin{smallmatrix} i \\ -2 \\ -i \end{smallmatrix}\right)$ y de manera similar $|\beta >= \left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

(a) Para encontrar los bras solo debemos convertir los kets en vectores fila y conjugarlos lo que nos da

$$< \alpha| = \begin{pmatrix} -i & -2 & i \end{pmatrix}$$
$$< \beta| = \begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Para conseguir los resultados que nos piden solo debemos multiplicar las cosas que nos piden.

$$< \alpha|\beta > = \begin{pmatrix} -i & -2 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 2i$$
$$< \beta|\alpha > = \begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -i \end{pmatrix} = 1 - 2i.$$

Como se pueden ver son conjugados.

(c) Definimos el operador

$$\hat{A} = |\alpha >< \beta| = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, lo único que necesitamos es multiplicar ambas cosas. El resultado de esto es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i2 \\ 2i & 0 & -4 \\ 1 & 0 & i2 \end{pmatrix}.$$

4. Tenemos que $|1>$ y $|2>$ son una base ortonormal. Por lo tanto, $|1><1|$ es una multiplicación de un vector columna por uno fila con sus coordenadas conjugadas. En el caso de los primeros términos

5. (a) Para conseguir el resultado deseado, partamos desde el Hamiltoniano y diagonal icemos para encontrar su valor propio

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
det(H - \alpha I) &= (1-\alpha)(2-\alpha)(2-\alpha) = 0 \\
\alpha &= 1 \\
\alpha &= 2 \\
\alpha &= 2
\end{aligned}
$$

Este α es para el $\hat{H}$ sin constante λ pero lo único que esto significa es que los resultados obtenidos los multipliquemos por lambda

(b) Para cada uno de los casos solo debemos aplicar.

$$
A|v>= \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda c_2 \\ \lambda c_1 \\ 2\lambda c_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 2c_3 \end{pmatrix}
.
$$

Por otro lado para B tenemos

$$
B|v>= \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu c_1 \\ \mu c_3 \\ \mu c_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}.
$$