Variable Compleja **Name:** *Sergio Montoya Ramírez*
Tarea 4
04/12/2022

1.
   - Demostrar que si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones enteras y $|f(z)| \leq |g(z)|$ entonces $f = \lambda g$ para algun $\lambda \in \mathbb{C}$.

     Sabemos que f(z) es entero y es acotado pues $|f(z)| \leq |g(z)|$ eso quiere decir que $f(z)$ es constante. Por otro lado, dado que, $|f(z)| \leq |g(z)|$ tambien podemos saber que $-|g(z)| \leq f(z)$ y como esta es una función entera entonces $g(z)$ tambien debe ser constante. Por lo tanto, lo unico quiere decir esto es que para cualquier numero complejo se puede llegar a otro multiplicandolo.
   - Demostrar que si f(z) es una función entera entonces su imagen es densa en $\mathbb{C}$

     Suponga por contradicción que $f(z)$ no es densa. Por tanto,

     $$\exists B(a, r) : |f(z) - a| \geq r; \forall z \in \mathbb{C}$$

     sin embargo podemos definir

     $$g(z) = \frac{r}{f(z) - a}$$

     Sabemos que $f(z) - a$ no es 0 pues debe ser mayor a r y si fuese 0 tendria imagen densa. Por otro lado, $g(z) \leq 1$ y por tanto $g(z)$ es constante lo que hace a $f(z)$ constante y por tanto densa. En todos los casos se llega a contradicción y en consecuencia $f(z)$ tiene imagen densa.
   - Demostrar que una función eliptica entera es constante.

     Considere $R = \{z \in \mathbb{C} : w_1 \leq Re(Z), w_2 \leq Im(z)\}$ entonces para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un $w \in R$ tal que $f(z) = f(w)$ puesto que $f(z) = f(z + w_1)$ y por tanto para cualquier valor de z podriamos encontrar un valor en R que al sumarle n o m veces w_1 o w_2 nos da como resultado el mismo z y por tanto, existe una cota que es en concreto $\sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ y por teorema de Leouville como estamos con una función acotada y entera nos da que esta debe ser constante.

2. Calcular las siguientes integrales.
   - $\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2}$ donde C es el contorno $|z - i| = 2$ orientado positivamente.

     Solución: Como el contorno en el que trabajamos es $|z - i| = 2$ entonces tenemos una circunferencia con centro en i y radio 2. Ademas sabemos que esta orientada positivamente (es decir en el sentido opuesto a las manecillas del reloj). Ahora bien para encontrar sus polos podemos:

     $$\begin{aligned} \frac{dz}{(z^2+4)^2} &= \frac{dz}{((z+2)(z-2))^2} \\ &= \frac{dz}{(z+2)^2(z-2)^2} \end{aligned}$$

Lo cual hace como se ve que las singularidades sean $\{-2,2\}$ Por tanto podemos plantear esta integral con la formula de Cauchy como sigue:

$$\int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-2)^2}}{(z+2)^2} + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z+2)^2}}{(z-2)}$$

Y por tanto con el teorema de Cauchy nos queda.

$$\int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-2)^2}}{(z+2)^2} + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z+2)^2}}{(z-2)} = 2\pi i \frac{1}{16} + 2\pi i \frac{1}{16}$$

- $\int_C \frac{zdz}{2z+1} d$ donde C es el controno compuesto por el cuadrado con lados dados por las lineas $x = \pm 3$, $y = \pm 3$

  Solución: Tenemos el siguiente contorno y por tanto para ese mismo contorno entonces debemos hallar sus polos los cuales son para este caso

  $$\frac{zdz}{2z+1}$$

  Por ende sus polos son $z = \frac{1}{2}$ y por lo tanto si acomodamos esto para que concuerde nos queda que.

  $$\frac{zdz}{2(z+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{2}{z}}{z+\frac{1}{2}} dz$$

  lo cual nos deja por la formula de cauchy con el siguiente resultado:

  $$\int_C \frac{zdz}{2z+1} = \int_C \frac{\frac{2}{z}}{z+\frac{1}{2}} dz = 2\pi i \frac{2}{\frac{1}{2}} = 8\pi i$$

- $\int_C \frac{dz}{z^2+2z+2}$ donde C es el controno $|z-1| = 1$ orientado positivamente.
  Solución: Una vez mas, encontremos cuales son los polos en este contorno con esta función, que en este caso es:

  $$\frac{dz}{z^2+2z+2} = \frac{dz}{(z+1+i)(z+1-i)}$$

  Por lo cual los polos son $\{-1-i, -1+i\}$Lo cual al separar en lo que nos interesa nos queda.

  $$\int_C \frac{dz}{z^2+2z+2} = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+1+i)}}{z+1-i} + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{z+1-i}}{z+1+i}$$
  $$= 2\pi i \frac{1}{z+1+i} + 2\pi i \frac{1}{z+1-i} = 2\pi i \left(\frac{1}{-1+i+1+i} + \frac{1}{-1-i+1-i} \right)$$
  $$= 2\pi i \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{-2i} \right)$$

3. • Encontrar la serie de Laurent en las regiones $0 < |z| < 2$ y $2 < |z| > \infty$ y usar eso para calcular el valor de la integral

$$\int_C \frac{z+1}{z^2-2z}$$

para el contorno $|z| = 4$ orientado positivamente.

• Encontrar el valor de la integral usando el teorema de los residuos:

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

para el contorno $|z+2| = 3$ orientado positivamente.

Como es claro los polos son $z = 0$ y $z = -4$ con orden 3 y 1 respectivamente. Dado que ambos estan en el contorno (Una esfera de Radio 3 centrada en 2) debemos sacar los residuos de ambos.

Sea $f(z) = \frac{1}{z^3(z+4)}$,

$$\begin{aligned} Res_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{2!}\right) \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{\cancel{z^3}}{\cancel{z^3}(z+4)}\right] \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{(z+4)^2}\right) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}(2(z+4)^{-3}) = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Sea $f(z) = \frac{1}{z^3(z+4)}$

$$Res_{z\to -4} f(z) = \lim_{z\to -4} \frac{\cancel{(z+4)}}{z^3\cancel{(z+4)}} = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{-4^3} = -\frac{1}{64}$$

y por tanto el resultado seria:

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)} = 2\pi i \sum Res\ f(z) = 2\pi i \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{64}\right) = 0$$

4. • Calcular

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$$

Sea

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4}$$

donde C es un contorno en el primer cuadrante tal que

$$C = (0, R) \cup Re^{i(0,\frac{\pi}{2})} \cup (Re^{i\frac{\pi}{2}}, 0)$$

En ese contorno hay solamente un polo

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

por lo tanto.

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{2}\pi i \frac{z}{z^4}$$

Sin embargo, como el lector pudo advertir esta no es una integral en x si no en z y por tanto podemos.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Re^{i\theta}d\theta}{1+R^4e^4i\theta} + \int_R^0 \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{1+(re^{i\frac{\pi}{2}})^4}$$

y por tanto

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = -\frac{1}{2}\pi i \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

- Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$$

La función tiene un polo $z = i$. Tomemos un semicirculo como contorno tal que cubre el eje complejo positivo.

$$Res_{z=i}(f(z)) = \lim_{z\to u} e^{iaz}\frac{\cancel{(z-i)}}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{e^{iaz}}{z+i} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

Por lo tanto la integral seria

$$\int_{-R}^{R} = \pi\cancel{2i}(\frac{e^{-a}}{\cancel{2i}}) = \pi e^i$$

Y si sacamos la parte real nos queda πe^i pero como solo nos interesa la mitad del plano nos quedamos con

$$\frac{\pi e^- a}{2}$$

- Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+1)^2}dx$$

Puesto que el integrando es par basta con encontrar el valor principal de Cauchy. Introduzcamos la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ note que esto es analitica con un polo en $z = i$. Esta singularidad se encuentra en la region interior del contorno del segmento $-R < x < R$ del eje real y la mitad superior del circulo $|z| = R(R > 1)$ si integramos en ese caso nos da

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i3x}}{(x^2+1)}dx = 2\pi B_1 - \int_C f(z)e^{i3z}dz$$

donde $B_1 = Res(f(z)e^{i3z})$

dado $f(z)e^{i3z}$ el punto $z = i$ es obviamente un polo de orden 2 y por tanto

$$B_1 = \frac{1}{e^{i3z}}$$

Igualando las partes reales de todo lo descrito hasta ahora nos da que

$$\int_{-} R^R \frac{cos(3x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2\pi}{e^3} - Re \int_C f(z)e^{i3z}$$

Por ultimo observe que si z es un punto en C

$$f(z) \leq M_R$$

donde $M_R = \frac{1}{(R^2-1)^2}$ Y por tanto

$$Re \int f(z)e^{i3z} \leq M_R \pi R$$

y por tanto cuando hacemos el limite nos queda que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}$

- Demostrar la igualdad

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

$-1 < a < 1$

Para el circulo unitario esto puede ser igual a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin\theta} = \int_c \frac{2id\theta}{2i + a(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$$

Ahora bien, si hacemos que $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ entonces podemos convertirlo en

$$= 2\int_C \frac{dz}{az^2 + 2iz - a}$$

que por cuadratica sabemos que sus residuos son $\frac{-i \pm \sqrt{a^2-1}}{a}$ Y como estamos en el circulo unitario solo tomamos el valor positivo. lo que nos deja con

$$Res_{z=zr} f(z) = \lim_{z \to zr} \frac{(z - zr)}{az^2 + 2iz - a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

y por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\sin(\theta)} = 2[2\pi i(\frac{1}{2\sqrt{a^{-}1}})] = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

5. Sea $z \in \mathbb{C}$ un numero complejo no nulo $(z = re^{i\theta})$.

(a) Demostrar que todos los valores de $\log(z^n)$ estan dados por

$$\log(z^n) = n\ln(r) + i(n\theta + 2\pi p)$$

donde $p \in \mathbb{Z}$
tenemos que

$$\log(z^n) = \log((re^{i\theta})^n) = \log(e^{n\ln(r)+in\theta}) = n\ln(r) + (\theta n + 2\pi p)$$

Con p dando los valores cuando se multievalua.

(b) Demostrar que todos los valores de $\log(z^{\frac{1}{n}})$ estan dados por

$$\log(z^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}ln(r) + i\frac{\theta + 2(pn+k)\pi}{n}$$

donde $p \in \mathbb{Z}, k \in \{0, ..., n-1\}$
De manera similar al punto anterior tenemos que

$$\log(z^{\frac{1}{n}}) = \log(e^{\frac{1}{n}(\ln(r)+i\theta)}) = \log(e^{\frac{\ln(r)}{n}+i\frac{\theta+2\pi k}{n}})$$

lo cual nos deja con un resultado de

$$\log(z^{\frac{1}{n}}) = \frac{\ln(r)}{n} + i\frac{\theta + 2(pn+k)\pi}{n}$$

en donde pn y k se ponen para ajustar los valores multivaluados y la n que aparece al lado de la p es por suma de fracciones.

(c) Demostrar o refutar que

$$\log(z^n) = n\log(z)$$

En la tarea 3 se vieron varios contraejemplos. En este caso tome i^2 cuyo conjunto de valores es diferente a $2\log(i)$ (Revisar la tarea 3 punto 3.4 para revisar la demostración de esto.)

(d) Demostrar o refutar que

$$\log(z^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\log(z)$$

(e) Es cierto que $\log(z) + \log(z) = 2\log(z)$

Como ya sabemos por identidades en los logaritmos (Revisar el cap 31 del libro en su septima edición) $\log(z_1) + \log(z_2) = \log(z_1 z_2)$ en nuestro caso entonces nos quedaria que $\log(z) + \log(z) = \log(z^2)$ lo cual como ya dijimos es falso y por tanto esto es falso.