

1. (a) Ecuaciones de Maxwell en forma integral:

i. Ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

ii. Ley de Gauss para el campo magnético

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

iii. Ley de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

iv. Ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

(b) Leyes de Maxwell vectoriales

i. Ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{E}) dV \text{ Ley de Gauss}$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{ Hipotesis } \square$$

ii. Ley de Gauss para el magnetismo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \cdot \vec{B}) dV \text{ Ley de Gauss}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ Hipotesis } \square$$

iii. Ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{E}) d\vec{a}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

iv. Ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{B}) d\vec{a}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \mu\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

v. Aclaración Importante: En este punto varias integrales fueron evitadas y retiradas como si nunca hubieran estado esto se da gracias a que la premisa nos da un espacio libre (Es decir Vacío) y por ende sería absurdo intentar Hacer una integral de volumen en él.

2. (a) Para mostrar esto solo debemos mostrar que la aceleración es la misma en ambos casos (Mas precisamente que difieren unicamente por una matriz de rotación). Para esto partimos de que la aceleración es la doble integral de la posición con respecto al tiempo. Mostremos primero la doble derivada de x

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

No podemos poner algo distinto pues no sabemos que función es x, pero si sabemos que x depende de t.

Ahora bien por otro lado tenemos que $x' = Rx + vt$ y con esto vamos a encontrar su segunda derivada.

$$x' = Rx + vt$$

$$\frac{dx'}{dt} = R \frac{dx}{dt} + v$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R \frac{d^2x}{dt^2}$$

Como se puede ver la única diferencia real es solamente la matriz de rotación. Dado que estos son un conjunto de transformaciones que mantiene la norma de los vectores entonces estas leyes son invariantes.

- (b) Para llegar a este resultado debemos conseguir mostrar que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \neq \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}$$

Para hacer esto vamos a tomar x' como $x' = x + vt$ Ya que si tomáramos lo mismo pero con el rotacional solo sería complicarnos y no aportaría realmente nada a la demostración. Ahora bien para la primera derivada vamos a tomar la ley de la cadena

en calculo vectorial y luego utilizaremos el hecho de que $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \neq \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

- (c) Esto se debe a que las rotaciones son el unico conjunto de transformaciones que mantienen la norma de los vectores constante y por tanto no afecta los resultados de los calculos.
- (d) Para lograr esto debemos tomar las diferencias que nos encontramos en el punto b y debemos hacer que sea igual a 0 de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial x \partial t} &= 0 \\ \int \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial x \partial t} \right) dt &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Note que esto es ∇

$$\frac{2}{v} (\nabla \cdot \vec{E}) = 0$$

y esta es la ley de Gauss que deberia ocurrir para que se conserve.

c) Haciendo uso de la identidad $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ (P1) muestre que los campos obedecen la ecuación de onda

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad (P_1)$$

$$\nabla \times (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \nabla(0) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 - \nabla^2 \vec{B}$$

$$-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}}$$

llegamos a $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0$$

por medio de las ecuaciones de Maxwell.

llegamos a la ecuación de onda.

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{F} = 0}$$

$$\rightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{v^2} \rightarrow v = c$$

¿Cuanto vale la velocidad de las ondas? $v = c$ vale lo que la velocidad de la luz 299792 km/s