Análisis
Tarea 4

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Problema 1

1.1 Enunciado

Theorem 1.1.1 Teorema del valor fijo de Banach

Sea (X, d) un espacio métrico completo. Decimos que $f : X \longrightarrow X$ es una contracción si existe $0 < \eta < 1$ tal que

$$d\left(f(x), f(y)\right) \le \left(1-\eta\right) d\left(x, y\right).$$

Muestre que la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in X$ un punto arbitrario, converge a un punto x^* y ademas que

$$x^* = f(x^*).$$

esto es, que x^* es un punto fijo de f. *El Teorema del Punto Fijo de Banach* es una herramienta básica para encontrar soluciones de ecuaciones.

Ayuda: Demuestre que

$$d(x_{n+1}, x_n) \le \left(1-\eta\right)^n d(x_1, x_0).$$

use lo anterior y la desigualdad triangular para estimar

$$d(x_{n+k}, x_n).$$

1.2 Solución

Siguiendo la Ayuda planteada lo primero que debemos mostrar es

$$d(x_{n+1}, x_n) \le \left(1-\eta\right)^n d(x_1, x_0).$$

para lo cual utilizaremos una inducción.

Caso Base: En este caso necesitamos mostrar que $d(x_2, x_1) \le (1-n)^n d(x_1, x_0)$. Sin embargo por la definición de x_{n+1} tenemos $x_2 = f(x_1)$ y por lo tanto

$$d(x_2, x_1) = d\left(f(x_1), f(x_0)\right).$$

Ademas, dado que f es una contracción entonces tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) = d\left(f(x_1), f(x_0)\right) &\le \left(1-\eta\right) d(x_1, x_0) \\ d(x_2, x_1) &\le \left(1-\eta\right) d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Hipótesis: Asuma

$$d(x_{n+1}, x_n) \le \left(1-\eta\right)^n d(x_1, x_0).$$

Demostración: Para mostrar esto tomemos:

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right) &= d\left(f\left(x_{n+1}\right), f\left(x_n\right)\right) \\ &\leq \left(1-\eta\right) d\left(x_{n+1}, x_n\right) \end{aligned}$$

.

Ahora bien, por la hipótesis de inducción $d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq (1-n)^n d\left(x_1, x_0\right)$ lo que quiere decir:

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right) &\leq \left(1-\eta\right)\left(1-\eta\right)^n d\left(x_1, x_0\right) \\ &\leq \left(1-\eta\right)^{n+1} d\left(x_1, x_0\right). \end{aligned}$$

Ahora, con esta desigualdad vamos a demostrar que la sucesión $\{x_{n+1}\}$ es de Cauchy. Para esto lo primero es mostrar que la distancia disminuye. En este caso solo hace falta darnos cuenta que $\left(1-\eta\right)^{n+1} < \left(1-\eta\right)^n$ dado que $0 < \eta < 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+1}, x_n\right) &\leq \left(1-\eta\right)^n d\left(x_1, x_0\right) \\ &\leq (1-n)^{n-1} d\left(x_1, x_0\right) \\ &\leq \ldots \\ &\leq (1-n)\, d\left(x_1, x_0\right). \end{aligned}$$

Ahora tomemos en consideración la desigualdad triangular para definir $d\left(x_{n+k}, x_n\right)$ con esto seria:

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+k}, x_n\right) &\leq d\left(x_{n+1}, x_n\right) + d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right) + \ldots + d\left(x_{n+k}, x_{n+k-1}\right) \\ &= \left(1-\eta\right)^n d\left(x_1, x_0\right) + \left(1-\eta\right)^{n+1} d\left(x_1, x_0\right) + \ldots + \left(1-\eta\right)^{n+k-1} d\left(x_1, x_0\right) \\ &= \left(1-\eta\right)^n d\left(x_0, x_1\right)\left(1 + \left(1-\eta\right) + \ldots + \left(1-\eta\right)^{k-1}\right) \\ \text{Tome en consideración que : } & \left(1-\eta\right)^m \leq 1 \ \forall m > 0 \\ &\leq \left(1-\eta\right)^n d\left(x_0, x_1\right) k. \end{aligned}$$

Ahora sea $\epsilon > 0$. Sabemos por el teorema Arquimediano que existe un N tal que para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $\left(1-\eta\right)^n < \frac{\epsilon}{d(x_0,x_1)k}$ con lo cual mostramos que la distancia tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Ahora bien, sabemos que esta sucesión vive en X que es un espacio métrico completo y por lo tanto converge a un limite. Sea x^* el limite de esta sucesión.

Ademas, dado que f es continua por la propia definición de contracción sabemos que

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ f\left(x^*\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n = x^* \\ f\left(x^*\right) = x^*. \end{gathered}$$

Chapter 2

Problema 2

2.1 Enunciado

En este ejercicio vamos a demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

donde F_n es la sucesión de fibonacci definida por

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ para } n \geq 2.$$

2.1.1 I

Considere la función

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Demuestre que $f : \left[\frac{3}{2}, 2\right] \to \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ es una biyección.

2.1.2 II

Demuestre que f es una contracción. Idea: use *El Teorema del Valor Medio.*

2.1.3 III

Sea $x_1 = 2$ y defina la sucesión x_n mediante la recurrencia

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Muestre que $\{x_n\}$ converge.

2.1.4 IV

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

2.2 Solución

2.2.1 I

Note:-
Solo vamos a demostrar que la función $f(x)$ es inyectiva en ese intervalo por instrucciones del profesor.

Suponga por contradicción que f no es inyectiva. Por lo tanto, existen $x_1, x_2 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ tal que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
1 + \frac{1}{x_1} &= 1 + \frac{1}{x_2} \\
1 + \frac{1}{x_1} - 1 &= 1 + \frac{1}{x_2} - 1 \\
\frac{1}{x_1} &= \frac{1}{x_2} \\
\frac{1}{x_1} \cdot (x_1 \cdot x_2) &= \frac{1}{x_2} \cdot (x_1 \cdot x_2) \\
x_2 &= x_1 \\
&\Rightarrow\!\Leftarrow .
\end{aligned}$$

2.2.2 II

Theorem 2.2.1 Teorema del Valor Medio

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$y diferenciable en (a, b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ahora bien, considerando que por un lado sabemos que esta función es continua en el intervalo planteado y ademas que es diferenciable (dado que es la suma de funciones diferenciable) entonces podemos sacar la derivada de esta función que en este caso es:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

ahora bien, dado que esto es una igualdad podemos poner todo en valor absoluto y nos queda

$$\begin{aligned}
\left|f'(c)\right| &= \frac{\left|f(b) - f(a)\right|}{|b - a|} \\
\left|f(b) - f(a)\right| &= \left|f'(c)\right| |b - a| .
\end{aligned}$$

Ahora podemos definir en cada caso esto pero podemos tomar que el valor máximo es $\frac{1}{c^2} < \frac{4}{9}$ con lo cual esto queda como

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq \frac{4}{9} |b - a| .$$

ademas podemos definir $a, b \in [a, b]$

2.2.3 III

Para demostrar esto podemos hacer uso del capitulo 1. Esto pues f es una contracción y tenemos definido un $x_1 = 2$ y ademas de eso sigue la misma forma de este capitulo. Entonces podemos utilizar el teorema del punto fijo de Banach y saber que esta sucesión converge a un punto $x^* \in \left[\frac{3}{2}\right]$

2.2.4 IV

Partiendo del punto anterior donde ya demostramos que esta sucesión converge y continuando con lo que sabemos por el capitulo 1. Sabemos que, este limite tiene que cumplir $x^* = f(x^*)$ por lo tanto

$$
\begin{aligned}
x^* &= 1 + \frac{1}{x^*} \\
x^* - 1 &= \frac{1}{x^*} \\
x^{2*} - x^* &= 1 \\
x^{2*} - x^* - 1 &= 0 \\
\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\
x^* &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ Dado que es lo que pertenece al intervalo.}
\end{aligned}
$$

Chapter 3

Problema 3

3.1 Enunciado

Suponga

1. f es continua para $x \geq 0$
2. $f'(x)$ existe para $x > 0$
3. $f(0) = 0$
4. f' es monotonicamente incrementando

   Ponga
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \ (x > 0).$$
y pruebe que g es monotonicamente incrementando

3.2 Solución

Lo primero es que tenemos que mostrar que g' aumenta por lo tanto nos interesa saber que
$$g'(x) = \frac{xf(x) - f(x)}{x^2}.$$
aumenta monotónicamente. Por lo tanto nos interesa mostrar que $xf(x) > f(x)$.

Para esto utilizaremos que la función f cumple con todos los requerimientos para aplicarle el teorema del valor medio y por tanto
$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)\,x.$$
para cualquier intervalo de $[0, x]$. Ademas, sabemos por el propio teorema del valor medio que $0 < c < x$ y por f ser monotonicamente creciente $f'(c) < f'(x)$ y por lo tanto $f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)\,x < f'(x)\,x$. Con lo cual completamos ya la demostración.

Chapter 4

Problema 4

4.1 Enunciado

Suponga f y g son funciones complejas diferenciables en $(0,1)$, $f(x) \longrightarrow 0, g(x) \longrightarrow 0, f'(x) \longrightarrow A, g'(x) \longrightarrow B$ con $x \longrightarrow 0$, donde A y B son números complejos, $B \neq 0$. Pruebe que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

4.2 Solución

Sean f y g funciones complejas diferenciables en $(0,1)$ con todo lo enunciado previamente. Por lo tanto de ahí podemos deducir que ambas funciones son continuas en $[0,)$ pues $f(x) = 0 = g(x)$ con lo cual podemos utilizar el teorema de L'Hopital para llegar al resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= \frac{A}{B} \\ B &\neq 0 \\ &. \end{aligned}$$

Chapter 5

Problema 5

5.1 Enunciado

Suponga f es una función real en $[a, b]$, n es un entero positivo y $f^{(n-1)}$ existe para todo $t \in [a, b]$. Sea α, β y P que sean como en el teorema de Taylor. Defina

$$Q(t) = \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta}.$$

para $t \in [a, b], t \neq \beta$, diferenciados

$$f(t) - f(\beta) = (t - \beta) Q(t).$$

$n - 1$ veces en $t = \alpha$, y derive la siguiente versión del teorema de Valor:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (\beta - \alpha)^n.$$

5.2 Solución

Dada la definición de $Q(t)$ esta es una función derivable hasta $(n - 1)$ (pues f es derivable esa cantidad de veces) con la posible excepción del punto $t = \beta$ por lo cual podemos hacer inducción fuerte en $t = \alpha$.

Caso Base: En este caso tenemos

$$P(\beta) = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (\beta - \alpha)^k = f(\alpha)$$

$$Q^0(\alpha) = Q(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned}
P(\beta) + \frac{Q^0(\alpha)}{0!} (\beta - \alpha) &= f(\alpha) + \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{(\alpha - \beta)} (-1)(\alpha - \beta) \\
&= f(\alpha) + (-1)(f(\alpha) - f(\beta)) \\
&= f(\beta).
\end{aligned}$$

Hipotesis: Suponga para todo $m < n$:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{m-1}(\alpha)}{(m-1)!} (\beta - \alpha)^m.$$

Demostración: Con esto entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
f^{(n-1)} &= (n-1)\, Q^{(n-2)}(t) + \left(t-\beta\right) Q^{(n-1)}(t) \\
P\left(\beta\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \left(\beta-\alpha\right)^{k} \\
Q^{(n-1)}(\alpha) &= \frac{f^{(n-1)}(\alpha) - (n-1)\, Q^{(n-2)}(\alpha)}{\alpha-\beta}.
\end{aligned}
$$

Con esto entonces se sigue:

$$
\begin{aligned}
P\left(\beta\right) + \frac{Q^{n-1}(\alpha)}{(n-1)!}\left(\beta-\alpha\right)^{n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left(\beta-\alpha\right)^{k} + \frac{f^{(n-1)}(\alpha) - (n-1)\, Q^{(n-2)}(\alpha)}{(\alpha-\beta)(n-1)!}\left(\beta-\alpha\right)^{n} \\
= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left(\beta-\alpha\right)^{k} + \frac{f^{n-1}(\alpha)}{((n-1)!)}\left(\beta-\alpha\right)^{n-1} &+ \frac{f^{(n-1)}(\alpha) - (n-1)\, Q^{(n-2)}(\alpha)}{(n-1)!}(-1)\left(\beta-\alpha\right)^{n-1} \\
= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left(\beta-\alpha\right)^{k} + \frac{f^{n-1}(\alpha)}{((n-1)!)}\left(\beta-\alpha\right)^{n-1} &+ \frac{(-1)\left(\beta-\alpha\right)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n-1)}(\alpha) - (n-1)\, Q^{(n-2)}(\alpha)\right) \\
= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left(\beta-\alpha\right)^{k} + \frac{Q^{n-2}(\alpha)}{(n-1)!}\left(\beta-\alpha\right)^{n-1} &+ \frac{f^{n-1}(\alpha)}{((n-1)!)}\left(\beta-\alpha\right)^{n-1} - \frac{f^{n-1}(\alpha)}{((n-1)!)}\left(\beta-\alpha\right)^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\left(\beta-\alpha\right)^{k} + \frac{Q^{n-2}(\alpha)}{(n-1)!}\left(\beta-\alpha\right)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Con esto podemos utilizar la hipótesis inductiva y llegamos al resultado buscado.