Sergio Montoya Ramirez
202112171

Universidad de Los Andes
Tarea 1
Geometría de Curvas y Superficies

Bogotá D.C., Colombia
31 de agosto de 2023

1. *a*) En este caso necesitamos dos v_1 y v_2 tales que al hacer producto punto entre ellos y n el resultado sea 0 para ello entonces:

$$\begin{aligned} n \cdot v_1 &= (a, b, c) \cdot (x, y, z) \\ &= a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \\ x &= b \\ y &= -a \\ z &= 0 \\ &= a \cdot b + b \cdot (-a) + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
.

Y por otro lado

$$\begin{aligned} n \cdot v_2 &= (a, b, c) \cdot (x, y, z) \\ &= a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \\ x &= 0 \\ y &= c \\ z &= -b \\ &= a \cdot 0 + b \cdot c + c \cdot (-b) \\ &= 0 + bc - bc \\ &= 0 \end{aligned}$$
.

b) En este caso necesitariamos un vector normal al plano que generan por lo tanto hacemos producto cruz entre ambos vectores

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= (b, -a, 0) \times (0, c, -b) \\ &= \left(ba, b^2, bc\right) \end{aligned}$$
.

Y ya con esto podemos escribir la ecuación de un plano a partir de su vector normal

$$\begin{aligned} P_{v_1,v_2} &= bax + b^2y + bcz + d = 0 \\ -d &= ba \cdot b - b^2a + bc0 \\ -d &= b^2a - b^2a \\ -d &= 0 \\ &. \end{aligned}$$

Por lo tanto el plano es:

$$\begin{aligned} 0 &= bax + b^2y + bcz \\ &. \end{aligned}$$

Ahora necesitamos dos vectores u_1 y u_2 que sean perpendiculares entre si y que esten en el plano. Para esto y por simplificarnos tomemos $u_1 = v_1$ dado que este vector ya esta en el plano y entonces encontremos un vector perpendicular a este con:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot u_2 &= (a, -b, 0) \cdot (x, y, z) \\ &= ax - by \\ ax &= by \\ 0 &= bax + b^2y + bcz \\ x &= b^2c \\ y &= bac \\ z &= -2b^2a \\ 0 &= b^3ac + b^3ac - 2b^3ac \\ b^2ac &= b^2ac \\ &. \end{aligned}$$

Tambien lo podiamos conseguir con un producto cruz entre el vector v_1 y el normal que encontramos previemente.

c) Dado que sabemos que este plano pasa por el origen. Por lo tanto podemos paramtrizar simplemente con:

$$\begin{aligned} p(t) &= R\cos(t)\, v_1 + R\sin(t)\, u_2 \\ &= R\cos(t)\,(a, -b, 0) + R\sin(t)\left(b^2c, bac, -2b^2a\right). \end{aligned}$$

2. *a*) En este caso, la aproximación de Taylor de segundo orden seria:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
a &= 0 \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\
&= \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\
&= \frac{1}{2r}x^2.
\end{aligned}
$$

b) En este caso tenemos que primero despejar y

$$
\begin{aligned}
x^2 + (y-r)^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 - 2yr + r^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 - 2yr &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4x^2}}{2} \\
&= \frac{2\left(r \pm \sqrt{r^2 - x^2}\right)}{2} \\
&= r \pm \sqrt{r^2 - x^2}
\end{aligned}
$$

.

Ahora con esto, podemos sacar el polinomio de segundo orden que en este caso nos requiere saber:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= r \pm \sqrt{r^2 - 0} = r \pm r = 0 \\
y' &= \pm \frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \\
y'(0) &= \pm \frac{2(0)}{2\sqrt{r^2 - 0}} = 0 \\
y'' &= \pm 2 \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
y''(0) &= \pm 2 \frac{r^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r} \\
y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{r}x^2 \\
&= \frac{1}{r}x^2.
\end{aligned}
$$

3. *a*) Recta Tangente. Llamemos a los gradientes de $F = \vec{n_1}$ y $G = \vec{n_2}$ entonces si sacamos el producto cruz de ambos obtenemos un vector perpendicular a ambos que podremos reemplazar en la ecuación de la recta y encontrar su valor. En este caso tendremos $\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$. Y reemplazamos esto y nos da:

$$\begin{aligned} r(t) &= (0,0,0) + \vec{v}t \\ &= \vec{v}t. \end{aligned}$$

b) En este caso utilizaremos:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \\ &= \frac{\vec{v}}{ds} \end{aligned}$$

.