Análisis
Tarea 3

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Problema 1

1.1 Enunciado

Demuestre el siguiente teorema:

Theorem 1.1.1

Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $a_n > 0$ y $b_n > 0$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0.$$

entonce $\sum_n a_n$ converge si y solo si $\sum_n b_n$ converge

1.2 Solución

Definition 1.2.1: Test de Comparación

Suponga que existe un entero N tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

En este caso vamos a tomar la sucesión $\frac{a_n}{b_n}$ como una sucesión que converge a L. Ademas, dado que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ sabemos que $L > 0$. Ahora bien, dado que esta serie converge a L sabemos que existe un N tal que para todo $n \geq N$ se cumple:

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L.$$

y con esto sabiendo que $b_n > 0$ entonces podemos encontrar rápidamente

$$\frac{1}{2}Lb_n \leq \frac{a_n}{b_n}b_n \leq 2Lb_n$$
$$\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n \leq 2Lb_n.$$

Ahora con esto, podemos dividir la demostración para cada caso.

$\Longrightarrow$ Sea $\{a_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ y dado que $\frac{1}{2}L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que b_n converge.

$\Longleftarrow$ Sea $\{b_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $a_n \leq 2Lb_n$ y dado que $2L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que a_n converge.

Chapter 2

Problema 2

2.1 Enunciado

Sea

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n};\ x_0 = 2.$$

a. Demuestre que $x_n^2 \geq 2$. *Ayuda:* considere la ecuación:

$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 2 = 0.$$

donde la incógnita es x_n. ¿Que puede decir del discriminante de dicha ecuación.

b. Demuestre que $x_{n+1} \leq x_n$, el punto anterior puede ser de ayuda.

c. Demuestre que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente y que su limite es $\sqrt{2}$

2.2 Solución

a. Para iniciar tomemos la ecuación

$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 2 = 0.$$

ahora dada la definición de x_{n+1} podemos:

$$x_n^2 - 2\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}\right)x_n + 2 = 0.$$

Con esto entonces

$$x_n^2 - x_n^2 - 2 + 2 = 0.$$

Con lo que demostramos que esta ecuación se sostiene.

Ahora bien, dado que esta ecuación se cumple entonces podemos ahora si asegurar que el discriminante existe y es mayor o igual a 0. Por lo tanto nos queda

$$\begin{aligned}
(2x_{n+1})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 &= 4x_{n+1}^2 - 8 \\
4x_{n+1}^2 - 8 &\geq 0 \\
4x_{n+1}^2 &\geq 8 \\
x_{n+1}^2 &\geq \frac{8}{4} \\
x_{n+1}^2 &\geq 2.
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que conocemos $x_0 = 2 \implies x_0^2 = 4 \geq 2$ entonces podemos aplicar por inducción este resultado y llegar a que $x_n^2 \geq 2$

b. Para iniciar tenemos
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}.$$
Por otro lado sabemos que $x_n^2 \geq 2$ por lo tanto es cierto decir que:
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n} \leq \frac{x_n^2+x_n^2}{2x_n}.$$
Que esto ultimo se puede reducir hasta que encontramos por tanto:
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n} \leq \frac{x_n^2+x_n^2}{2x_n} = x_n \implies x_{n+1} \leq x_n.$$

c. Por los puntos anteriores sabemos que $\{x_n\}$ es una sucesión descendiente. Por lo tanto solo nos falta mostrar que esta acotada por abajo para mostrar que converge a esa cota. Esto lo podemos hacer de la siguiente manera:
$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}L + \frac{1}{L} \\
L \cdot L &= \left(\frac{1}{2}L + \frac{1}{L}\right)L \\
L^2 &= \frac{L^2}{2} + 1 \\
L^2 - \frac{L^2}{2} &= \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2} + 1 \\
\frac{L^2}{2} &= 1 \\
\frac{L^2}{2} \cdot 2 &= 1 \cdot 2 \\
L^2 &= 2 \\
L &= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado el punto **a.** podemos saber que $x_n \geq \sqrt{2}$ por lo que escogemos la raíz positiva. Es decir que esta sucesión esta acotada por $\sqrt{2}$ y dado que ademas es decreciente entonces llegamos a que la sucesión $\{x_n\}$ converge a $\sqrt{2}$

Chapter 3

Problema 3

3.1 Enunciado

Cada racional x puede ser escrito en la forma $x = \frac{m}{n}$, donde $n > 0$, con m y n enteros sin divisores en común. Cuando $x = 0$, tomamos $n = 1$. Considere la función f definida en R^1 por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}' \\ \frac{1}{n} & \left(x = \frac{m}{n}\right) \end{cases}.$$

Pruebe que f es continuo en cada punto irracional, y que f tiene una discontinuidad simple en cada punto racional.

3.2 Solución

En este caso, lo que nos pide el enunciado es esencialmente lo mismo que mostrar que $\lim\limits_{t \to x} f(t) = 0$ para todo x. Para esto sea $\varepsilon > 0$ y sea x cualquier numero real. Sea N el único entero positivo tal que $N < \frac{1}{\varepsilon} < N + 1$ y para cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ sea k_n un entero tal que

$$\frac{k_n}{n} \leq x \leq \frac{k_n + 1}{n}.$$

Entonces, por cada n sea $\delta_n = \frac{1}{n}$ si $x = \frac{k_n}{n}$, en cualquier otro caso sea $\delta_n = \min\left(x - \frac{k_n}{n}, \frac{k_n+1}{n} - x\right)$. Finalmente, sea $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_N)$. Ahora con todo esto definido, podemos decir que $\left|f(t)\right| < \varepsilon$ si $0 < |x - t| < \delta$. Esto es bastante claro para un numero irracional, sin embargo, si t es racional y $t = \frac{m}{n}$, tenemos necesariamente que $n > N$ por la manera en la que escogimos δ_n para $n \leq N$. Por lo tanto, si t es racional, entonces $f(t) \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon$. Con lo que completamos la prueba.

Una vez tenemos que $\lim\limits_{t \to x} f(t) = 0$. Entonces nos siguen ambas cosas pues para cualquier irracional se cumple que $\lim\limits_{t \to x} f(t) = f(t) = 0$ y lo contrario ocurre para cualquier racional.

Chapter 4

Problema 4

4.1 Enunciado

Definition 4.1.1: Propiedad del valor Intermedio

Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b

Sea f una función real con dominio en R^1 que tiene la propiedad del valor intermedio. Suponga también, para cada racional r, que el conjunto de todos los x con $f(x) = r$ es cerrado. Pruebe que f es continuo.

4.1.1 Ayuda

Si $x_n \longrightarrow x_0$ pero $f(x_n) > r > f(x_0)$ para algún r y todo n, entonces $f(t_n) = r$ para algún t_n entre x_0 y x_n ; por lo tanto $t_n \longrightarrow x_0$. Encuentre una contradicción.

4.2 Solución

La contradicción que se nos pide encontrar en la ayuda esta en que x_0 es un punto limite del conjunto de t tal que $f(t) = r$, sin embargo, x_0 no pertenece al conjunto. Lo anterior, es una contradicción directa con que este conjunto es cerrado.

Chapter 5

Problema 5

5.1 Enunciado

Asuma que f es una función real continua definida en (a, b) tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

para todo $x, y \in (a, b)$. Pruebe que f es convexo.

5.2 Solución

Debemos mostrar que

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f\left(y\right).$$

Para todos los números de la forma $\lambda = \frac{k}{2^n}$, donde k es un entero no negativo menor o igual a 2^n. Esto lo haremos por inducción en n.

Caso $n = 0$ **:** Para esto por la definición de λ nos queda que los únicos valores que puede tomar son 0 y 1.

$\lambda = 0$ En este caso:

$$\begin{aligned} f\left(0 \cdot x + (1-0) y\right) &\leq 0 f(x) + (1-0) f\left(y\right) \\ f\left(y\right) &\leq (1) f\left(y\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la desigualdad.

$\lambda = 1$ En este caso:

$$\begin{aligned} f\left(1x + (1-1) y\right) &\leq 1 f(x) + (1-1) f\left(y\right) \\ f(x) &\leq f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto también se cumple la desigualdad.

Suposición : Suponga que el resultado se cumple para todo $n \leq r$, y considere $\lambda = \frac{k}{2^{r+1}}$.

Demostración : Si k es par, digamos $k = 2l$, entonces $\frac{k}{2^{r+1}} = \frac{l}{2r}$ y podemos apelar a la hipótesis de inducción. Ahora suponga que k es impar. Entonces $1 \leq k \leq 2^{r+1} - 1$, y entonces podemos tener los números $l = \frac{k-1}{2}$ y $m = \frac{k+1}{2}$ son enteros con $0 \leq l \leq m \leq 2^r$. Con esto podemos entonces re escribir

$$\lambda = \frac{s+t}{2}.$$

donde $s = \frac{k-1}{2^{r+1}} = \frac{l}{2^r}$ y $t = \frac{k+1}{2^{r+1}} = \frac{m}{2^r}$. Tenemos entonces

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \frac{\left[sx + (1-s) y\right] + \left[tx + (1-t) y\right]}{2}.$$

Por lo tanto por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) &\le \frac{f\left(sx+(1-s)y\right)+f\left(tx+(1-t)y\right)}{2}\\
&\le \frac{sf(x)+(1-s)f\left(y\right)+tf(x)+(1-t)f\left(y\right)}{2}\\
&= \left(\frac{s+t}{2}\right)f(x)+\left(1-\frac{s+t}{2}\right)f\left(y\right)\\
&= \lambda f(x)+(1-\lambda)f\left(y\right).
\end{aligned}$$

Esto completa la inducción. Ahora por cada x y y fijadas y cada lado de la inecuación:

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f\left(y\right).$$

son funciones continuas de λ. Por lo tanto, el conjunto en el cual la inecuación se sostiene (la imagen inversa cerrada del conjunto $[0,\infty)$ bajo el mapa $\lambda \to \lambda f(x)+(1-\lambda)f\left(y\right)-f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)$) es un conjunto cerrado. Dado que contiene todos los puntos $\frac{k}{2^n}$, $0\le k\le n,\ n=1,2,\ldots$ debe contener una cerradura de este conjunto de puntos. Por lo tanto f es convexo.

Chapter 6

Problema 6

6.1 Enunciado

Sea

$$X = \left\{ f : [0, 2\pi] \to R : f \text{ continua} \right\}.$$

Naturalmente X tiene una estructura de espacio vectorial.

a. Defina

$$\left\langle f, g \right\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

Muestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno sobre X.

b. A partir del producto interno definido en el punto anterior, se puede definir una norma como sigue:

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

y a partir de dicha norma una métrica:

$$d(u, v) = ||u - v||.$$

Calcule para $m \neq n$

$$||\sin(mx) - \sin(nx)||.$$

c. Concluya que ninguna bola cerrada centrada en el origen de X es compacta. ¿Tiene X dimensión finita?

6.2 Solución

a. Para comenzar recordemos las definiciones de producto interno.

Definition 6.2.1: Producto Interno

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *Producto Interno sobre* V es una función $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple

(a) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v, w, z \in V$

- $\Phi(v + w, z) = \Phi(v, z) + \Phi(w, z)$
- $\Phi(\alpha \cdot v, z) = \alpha \cdot \Phi(v, z)$

(b) $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$

(c) $\Phi(v, v) > 0$ si $v \neq 0$

Ahora con esto ya definido podemos verificar todas las propiedades para saber que es efectivamente un producto interno.

(a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g, h \in$ X entonces

- $$\begin{aligned}
\langle f+g, h\rangle &= \int_0^{2\pi} \left(f(x)+g(x)\right) h(x)\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)\, h(x) + g(x)\, h(x) \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)\, h(x) + \int_0^{2\pi} g(x)\, h(x) \\
&= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle
\end{aligned}$$
.

- $$\begin{aligned}
\langle \alpha f, g\rangle &= \int_0^{2\pi} \alpha f(x)\, g(x)\, dx \\
&= \alpha \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \\
&= \alpha \langle f, g\rangle
\end{aligned}$$
.

(b) Dado que $f(x)\, g(x) = g(x)\, f(x)$ entonces

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle .$$

(c) En este caso siempre y cuando $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx \neq 0$ entonces el doble de eso es diferente de 0.

b. Solo por facilidad definamos

$$\sin(mx) - \sin(nx) = f(x) .$$

Con esto

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sqrt{\langle f, f\rangle} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi} f(x)\, f(x)\, dx} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin(mx) - \sin(nx))(\sin(mx) - \sin(nx))\, dx} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(mx) - 2\sin(mx)\sin(nx) + \sin^2(nx)\, dx} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(mx)\, dx - 2\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx + \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\, dx}
\end{aligned}$$
.

1. Considere una bola cerrada Arbitraria