Física Moderna-Complementaria **Name:** *Sergio Montoya Ramirez*
Taller 5
31/03/2023

---

1. (a) *Cual es la función de onda para $t > 0$?* Para esto vamos a utilizar la propiedad

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Con la cual si jugamos un poco con ella tambien obtenemos

$$\sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\frac{\sin\left(2\frac{\pi x}{a}\right)}{2} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Ahora bien, partiendo de la expresión del eneunciado podemos obtener con facilidad

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}[\sin(\frac{pix}{a}) + \sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi x}{a})]$$

Por lo cual podemos desarrollar como sigue:

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \sqrt{\frac{8}{5}}[\sin(\frac{\pi x}{a}) + \frac{\sin(\frac{2\pi x}{a})}{2}] \\
&= \sqrt{\frac{8}{5}}\sin(\frac{\pi x}{a}) + \sqrt{\frac{8}{5}}\sqrt{\frac{\sin(\frac{2\pi x}{a})}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a}) + \frac{2}{2\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi x}{a}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi_2 \\
\phi(x,t) &= \frac{2}{\sqrt{5}}\phi_1 e^{\frac{-E_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}}
\end{aligned}$$

(b) *Cuál es el valor esperado de energía en $t = 0$ y en $t = t_0$*
Para iniciar partimos de que

$$< E >= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{E}\psi dx = \int_0^a \psi^* i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

y entonces realizamos el siguiente analisis

$$\begin{aligned}
\psi^* &= \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1 e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2 e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} \\
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (-\frac{iE_1}{\hbar}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\psi_1\cdot e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{iE}{\hbar})\psi_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}})i\hbar \\
&= (E_1\frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{5}}E_2\psi_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}})
\end{aligned}$$

Ahora bien, con esto entonces realizando la integral planteada prebviamente nos queda que

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^a E_1\frac{4}{5}\psi_1^2 + \frac{2}{5}E_2\cancel{\psi_1\psi_2}e^{\frac{it}{\hbar}(E_1-E_2)} + \frac{2}{5}E_1\cancel{\psi_1\psi_2}e^{\frac{it}{\hbar}(E_2-E_1)} + \frac{1}{5}E_2\psi_2^2dx \\
&= \int_0^a \frac{4}{5}E_1\psi_1^2dx + 0 + 0 + \int_0^a \frac{1}{5}E_2\psi_2^2dx = \frac{4}{5}E_1 + \frac{1}{5}E_2 \\
E_n &= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \\
&= \frac{4}{5}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2}\frac{2^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{8}{5}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}
\end{aligned}
$$

Dado que las T se cancelan el resultado es independiente del tiempo.

(c) *Cual es la probabilidad de que la partícula esté a la izquierda del pozo, es decir en* $x \in [0, \frac{a}{2}]$ *para* $t = t_0$

Para obtener el resultado que esperamos lo que debemos conseguir es la integral de 0 a $\frac{a}{2}$ por lo tanto partimos de

$$
\begin{aligned}
\psi^* &= \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1 e^{\frac{iE_1t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2 e^{\frac{iE_2t}{\hbar}} \\
\psi &= \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_1 e^{\frac{-iE_1t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2 e^{\frac{iE_2t}{\hbar}} \\
\int_0^{\frac{a}{2}} \psi^*\psi dx &= \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{4}{5}\psi_1^2 e^{\frac{2it}{\hbar}(E_1-E_2)} + \frac{2}{5}\cancel{\psi_1\psi_2}e^{\frac{it}{\hbar}} + \frac{2}{5}\cancel{\psi_1\psi_2}e^{\frac{it}{\hbar}(E_1-E_2)} + \frac{1}{5}\psi_2^2 e^{\frac{it}{\hbar}(E_1-E_2)}dx \\
\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{4}{5}\psi_1^2 + \frac{1}{5}\psi_2^2dx &= \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{a}\sin^2(\frac{\pi x}{a}) + \frac{1}{5}\frac{2}{a}\int \sin(\frac{2\pi x}{a})dx \\
&= \frac{8}{5a}\frac{a}{4} + \frac{2}{5a}\frac{a}{4} = \frac{8}{20} + \frac{2}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2. (a) *Encuentra las energías y funciones propias. Para este caso,* ϕ*, no puede ser multivariada*

Para iniciar partimos desde

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Esta ecuación tambien la podemos plantear en terminos diferenciales como

$$-\frac{\hbar}{2I_z}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = E\psi$$

La solución de esta ecuación es

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = -\frac{2EI_z}{\hbar^2}\psi = k^2$$

$$\psi = Ae^{ik\phi} + Be^{-ik\phi}$$

Como tomamos el giro de manera antihoraria entonces $B = 0$ por lo cual

$$\psi = Ae^{ik\phi}$$

Ahora bien, tenemos que tomar en cuenta que estamos en un circulo y como tal se debe cumplir la condición

$$\phi(0) = \phi(2\pi) \to Ae^{ik(0)} = Ae^{ik(2\pi)} \to 1 = e^{2\pi ik}$$

de ahi entonces podemos concluir que k es un entero distinto de 0
Ahora bien, dado que tenemos ϕ podemos tomar

$$\int_0^{2\pi} \psi^* \psi dx = 1$$

Ahora bien, los valores de estos son

$$\psi = Ae^{ik\phi}$$
$$\psi^* = Ae^{ik\phi}$$

Por lo tanto se desarrolla de la siguiente manera

$$\int_0^{2\pi} Ae^{-ik\phi}Ae^{ik\phi} = A^2 \int_0^{2\pi} e^{ik\phi - ik\phi} = A^2 \int_0^{2\pi} dx = 1$$
$$A^2 2\pi = 1 \to A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Por otro lado, como tenemos K^2 podemos obtener los resultados de energia sabiendo que k es un entero distinto de 0

$$K^2 = -\frac{2EI_z}{\hbar^2}$$
$$E = -\frac{k^2\hbar^2}{2I_z}$$

(b) *Se ha medido que* $\psi(x, t = 0) = A\sin^2\phi$. *Encuentre* $\psi(x, t)$ Para esto entonces debemos realizar el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= A\sin^2\phi \\
&= \frac{A}{2}(1 - \cos(2\phi)) \\
&= \frac{A}{2}(1 - \frac{e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}}{2}) \\
&= \frac{A}{2}(1 - \frac{1}{2}\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}(1 - \frac{1}{2}\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_{-2})
\end{aligned}$$
$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}(1 - \frac{1}{2}\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_{-2})e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

3. (a) *Encuentre la constante de normalización:* Para solucionar este punto vamos a hacer provecho de lo visto en la clase del dia 31/03/2023. Iniciaremos escribiendo esto de la forma

$$|\psi >= A\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}|\phi_n >$$

Con esto ya presente vamos a utilizar que

$$< \psi|\psi >= 1$$

Por lo tanto vamos a calcular esta norma lo que se representa como

$$< \psi|\psi >= |A|^2\sum_{m}\sum_{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m} < \phi_m|\phi_n >$$

Este ultimo termino cumple una propiedad interesante, lo que ocurre es que dado que estos vectores representan una base y esta esta ortonormalizada su producto punto es 0 en todos los casos exceptuando cuando son iguales (en los cuales es 1) Por lo tanto, los unicos valores que nos interesan son los n y ese termino puede desaparecer para dejarnos solo con:

$$< \psi|\psi >= |A|^2\sum_{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = |A|^2\sum_{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Esta es una serie geometrica de la cual es demostrable que

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$

En nuestro caso $x = \frac{1}{2}$ y por lo tanto nos queda reemplazando que

$$\begin{aligned} < \psi|\psi > &= |A|^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ 1 &= |A|^2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ 1(1-\frac{1}{2}) &= |A|^2 \\ \frac{1}{2} &= |A|^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= A \end{aligned}$$

(b) *Encuentre una expresión general para* $\psi(x,t)$ Para esto vamos a utilizar la expresión

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}e^{\frac{-iE_nt}{\hbar}}\phi_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}\phi_n \end{aligned}$$

(c) *Muestre que* $|\psi(x,t)|^2$ *es periodica en t y encuentre el periodo máximo* Utilizando la expresión encontrada en el punto anterior tenemos que

$$\psi = \sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}\phi_n$$

$$\psi^* = \sum_m \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+1} e^{i\omega t(m+\frac{1}{2})}\phi_m$$

Por lo tanto,

$$|\psi^*\psi| = \sum_{n,m} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+1} e^{i\omega t(m+\frac{1}{2})}e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}\phi_n\phi_m$$

$$= \sum_{n,m} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m+2} e^{i\omega(m-n)t}\phi_n\phi_m$$

Note que $e^{i\omega(m-n)t}$ es una ecuación periodica que en particular corresponde con:

$$e^{i\omega(m-n)t} = \cos(\omega(m-n)t) + i\sin(\omega(m-n)t)$$

Por lo tanto, su periodo concuerda con

$$T = \frac{2\pi}{\omega(m-n)}$$

(d) *Encuentre el valor esperado de la energia para* $t = 0$ Para esto vamos a partir de

$$< E >= \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*\hat{E}\psi$$

Sin embargo, para este caso dado que nos piden $t = 0$ vamos a utilizar la ecuación del enunciado para ψ.

Volviendo entonces a lo que nos interesa vamos a notar 2 cosas

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\phi_n$$

$$\hat{E}\psi = \hat{E}\sum_{n=0}^{\infty} C_n\phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\hat{E}\phi_n$$

Por lo tanto con esto nos queda que:

$$< E > = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_n^{\infty} C_n^*\phi_n^* C_n E\phi_n$$

$$= \sum_n^{\infty} |C_n|^2 E_n \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n\phi_n^* dx}$$

$$= \sum_n^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\hbar$$

4. **Nota:** Este trabajo fue desarrollado en conjunto con mi compañero David Pachon