Sergio Montoya Ramirez
202112171

Universidad de Los Andes
Tarea 5
Metodos Matematicos

Bogotá D.C., Colombia
23 de mayo de 2024

1. tenemos la función:
$$f(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x \leq 1 \\ -V_0 & -1 \leq x < 0 \end{cases}.$$
Decimos entonces que la expresión de f en polinomios de Legendre es:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x).$$
Donde los coeficientes están determinados por:
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \\ &= \frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{0} (-V_0) P_n dx + \int_0^1 V_0 P_n dx\right] \\ &= \frac{2n+1}{2} V_0 \left[\int_0^1 P_n(x)\, dx - \int_{-1}^{0} P_n(x)\, dx\right]. \end{aligned}$$
Ahora bien, se tienen dos casos, P_n par o impar:
   - Para P_n impar, $P_n(-x) = -P_n(x) \implies \int_{-1}^{0} P_n(x)\, dx = -\int_0^1 P_n(x)\, dx$
   - Para P_n par, $P_n(-x) = P_n(x) \implies \int_{-1}^{0} P_n(x)\, dx = \int_0^1 P_n(x)\, dx$

   Con lo cual que podemos ver que los términos pares se contrarrestan. Por lo cual, tenemos que:
$$a_n = \frac{2n+1}{2} V_0 \left[\int_0^1 P_n(x)\, dx - \int_{-1}^{0} P_n(x)\, dx\right] = (2n+1) V_0 \int_0^1 P_n(x)\, dx.$$
Luego:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) V_0 \int_0^1 P_n(x)\, dx P_n(x).$$
Ademas, recordemos que P_n es impar. Con esto entonces calculemos:
$$\begin{aligned} \int_0^1 P_1(x)\, dx &= \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\ \int_0^1 P_3(x)\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2} - 3\right) \\ \implies f(x) &= \frac{3}{2} V_0 x - \frac{7}{8} V_0 \left(5x^3 - 3x\right) + \ldots. \end{aligned}$$

2. Para comenzar en este caso seria prudente darnos una idea de las ubicaciones con las que estamos trabajando. Si hacemos un gráfico con la descripción dada en el enunciado nos queda:

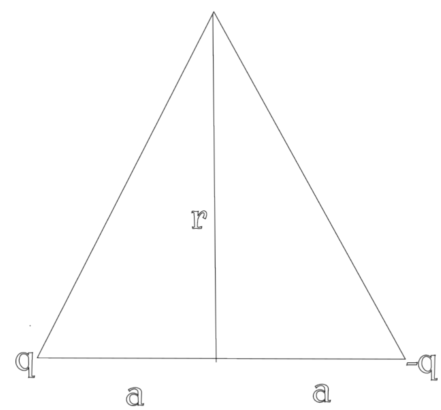

Figura 1: Imagen que gráfica el caso descrito por el enunciado del punto.

Como podemos ver en la imagen la distancia que hay desde el punto que se nos solicita a ambos otros puntos es básicamente la misma. Esta distancia, la podemos encontrar por medio del teorema de pitagoras:

$$\begin{aligned} h^2 &= c_1^2 + c_2^2 \\ h^2 &= a^2 + r^2 \\ h &= \sqrt{a^2 + r^2} \end{aligned}$$

.

Donde h es la distancia que hay en ambos casos. Ahora bien recordemos que el potencial eléctrico para un punto p con varias fuentes puntuales es:

$$V_p = \sum_{n=1}^{N} V_n.$$

Donde V_n es el potencial de cada una de las fuentes puntuales. Ahora bien, con esto entonces calculemos V con:

$$V = \frac{kq}{r}.$$

con lo cual esto nos queda:

$$V = \frac{kq}{\sqrt{a^2 + r^2}} - \frac{kq}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Pero este es un resultado que es solo valido para cuando la distancia que mantiene es la misma. Sin embargo intentemos describirlo para cuando las distancias son distintas.

Podemos mostrar que es:

$$V_p = V_+ + V_- = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$
$$r_\pm = \sqrt{x^2 + \left(y \mp \frac{d}{2}\right)^2}.$$

Ya con esto describimos el potencial para cualquier punto. Sin embargo ahora desarrollemos el hecho de que $r \gg a$.

Podemos reescribir los radios en términos polares. Es decir, $x = r\sin(\theta)$ y $y = r\cos(\theta)$ con lo cual nos queda:

$$r_\pm = \sqrt{r^2\sin^2(\theta) + \left(r\cos(\theta) \mp \frac{a}{2}\right)^2}$$
$$r_\pm = r\sqrt{\sin^2(\theta) + \left(\cos(\theta) \mp \frac{a}{2r}\right)^2}$$
$$r_\pm = r\sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \mp \cos(\theta)\frac{a}{r} + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}$$
$$= r\sqrt{1 \mp \cos(\theta)\frac{a}{r} + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}$$
.

Ahora bien, dado que $r \gg a$ entonces el termino $\frac{a}{2r}$ es extremadamente pequeño y al hacer $\left(\frac{a}{2r}\right)^2$ es esencialmente 0. Con lo cual queda:

$$r_\pm = r\sqrt{1 \mp \cos(\theta)\frac{d}{r}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \alpha}} \approx 1 \pm \frac{\alpha}{2}$$
$$V_p = V_+ + V_- = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$
$$V_p = kq\left(\frac{1}{r\sqrt{1 + \cos(\theta)\frac{d}{r}}} - \frac{1}{r\sqrt{1 - \cos(\theta)\frac{d}{r}}}\right)$$
$$V_p = \frac{kq}{r}\left(\left(1 + \frac{d\cos(\theta)}{2r}\right) - \left(1 - \frac{d\cos(\theta)}{2r}\right)\right)$$
$$= k\frac{qd\cos(\theta)}{r^2}$$
.

3. Suponemos que

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{v_n} J_v \left[X_{v_n} \frac{\rho}{b} \right].$$

con

$$\begin{aligned}
A_{v_n} &= \frac{2}{b^2 \left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2} \int_0^b \rho \left(\rho^k\right) J_v \left(X_{v_n} \frac{\rho}{b} \right) d\rho \\
\frac{d\left[Y^n J_n\right]}{dy} &= Y^n J_{n-1} \\
A_{v_n} &= \frac{2}{b^2 \left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2} \int_0^b \left(\rho^{k+1}\right) J_v \left(X_{v_n} \frac{\rho}{b} \right) d\rho \\
Y &= X_{v_n} \frac{\rho}{b} \\
\frac{dY}{d\rho} &= \frac{X_{v_n}}{b} \leftrightarrow d\rho = \frac{b}{X_{v_n}} \\
\rho &= \frac{Yb}{X_{v_n}} \\
A_{v_n} &= \frac{2}{b^2 \left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2} \int_0^{X_{v_n}} \left(\frac{yb}{X_{v_n}} \right)^{k+1} J_v(y) \frac{b}{x_{v_n}} dY \\
&= \frac{2}{b^2 \left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2} \int_0^{X_{v_n}} \frac{y^{k+1} b^{k+2}}{X_{v_n}^{k+2}} J_v(Y)\, dY \\
&= \frac{2b^k}{\left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2 X_{v_n}^{(k+2)}} \int_0^{X_{v_n}} Y^{k+1} J_v(Y)\, dY
\end{aligned}$$

Si $v = k$

$$\begin{aligned}
\frac{d\left[Y^k J_k(v)\right]}{dY} &= Y^{k+1} J_k(V) \\
A_{k_n} &= \frac{2b^k}{\left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2 X_{v_n}^{(k+2)}} \int_0^{X_{v_n}} Y^{k+1} J_v(Y)\, dY \\
&= \frac{2b^k}{\left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2 X_{v_n}^{(k+2)}} \left[Y^k J_k(Y) \right]_0^{X_{k_n}} \\
&= \frac{2b^k}{\left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2 X_{v_n}^{(k+2)}} \left[X_{k_n}^k J_k(x_{k_n}) - 0 \right] \\
&= \frac{2b^k}{\left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2 X_{v_n}^{(k+2)}} \frac{J_k(X_{k_n})}{X_{k_n}^2} \\
f(\rho) = \rho^k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b^k}{\left[J_{v+1}(X_{v_n})\right]^2 X_{v_n}^{(k+2)}} \frac{J_k(X_{k_n})}{X_{k_n}^2} J_k \left[X_{k_n} \frac{\rho}{b} \right].
\end{aligned}$$

4. Para este caso

5. *a*) En este caso partimos de que