Sergio Montoya Ramirez
202112171

Universidad de Los Andes
Tarea 2
Diseño y Análisis de Algoritmos

Bogotá D.C., Colombia
17 de agosto de 2024

Primera Pregunta

Enunciado

$$
\begin{aligned}
&F(n) = 12 \cdot F(n-1) - 35 \cdot F(n-2) \\
&F(0) = 3 \\
&F(1) = 19.
\end{aligned}
$$

Solución

Poner en forma estándar

$$F(n) - 12 \cdot F(n-1) + 35 \cdot F(n-2) = 0.$$

Calcular Raíces del Polinomio Característico

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 - 12\lambda + 35 = 0 \\
\lambda &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} \\
&= \frac{12 \pm 2}{2} \\
&= 6 \pm 1 \\
&= \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Solución Homogénea

$$H(n) = c_1 \cdot 5^n + c_2 \cdot 7^n$$

Solución Particular

1. a

$$\begin{aligned} F(n) - 12F(n-1) - 35F(n-2) &= 0 \\ a - 12 \cdot a - 35 \cdot a &= 0 \\ a(-46) &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

2. $a \cdot n$

$$\begin{aligned} F(n) - 12F(n-1) - 35F(n-2) &= 0 \\ a \cdot n - 12 \cdot a(n-1) - 35 \cdot a(n-2) &= 0 \\ an(-49) &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Solución Total

$$\begin{aligned} F(n) &= H(n) + P(n) \\ F(n) &= c_1 \cdot 5^n + c_2 7^n. \end{aligned}$$

Calculo Constantes

$$\begin{aligned} F(0) &= 3 \\ c_1 + c_2 &= 3 \\ F(1) &= 19 \\ c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot 7 &= 19 \\ c_1 &= 3 - c_2 \\ (3 - c_2) \cdot 5 + c_2 \cdot 7 &= 19 \\ 15 - 5c_2 + 7c_2 &= 19 \\ 2c_2 &= 4 \\ c_2 &= 2 \\ c_1 &= 3 - c_2 \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= 2. \end{aligned}$$

1. Respuesta

$F(n) = 1 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n$

Segunda Pregunta

Enunciado

$$F(n) = 7 \cdot F(n-1) + 7^n$$
$$F(0) = 14.$$

Solución

Poner en forma Estándar

$F(n) - 7 \cdot F(n-1) = 7^n$

Raíces del Polinomio Característico

$$\begin{aligned} F(n) - 7 \cdot F(n-1) &= 0 \\ \lambda - 7 &= 0 \\ \lambda &= 7. \end{aligned}$$

Solución Homogénea

$H(n) = a(7^n)$

Solución Particular

1. $n \cdot b \cdot 7^n$ (Probamos directamente desde aquí por que sabemos que no puede ser igual a la solución Homogénea)

$$\begin{aligned} F(n) - 7 \cdot F(n-1) &= 7^n \\ n \cdot b \cdot 7^n - 7 \cdot (n-1)\, b \cdot 7^{n-1} &= 7^n \\ n \cdot b \cdot 7^n - (n-1) \cdot b \cdot 7^n &= 7^n \\ n \cdot b \cdot 7^n - b \cdot n \cdot 7^n + b \cdot 7^n &= 7^n \\ b \cdot 7^n &= 7^n \\ b &= 1. \end{aligned}$$

Solución Total

$$
\begin{aligned}
F(n) &= H(n) + P(n) \\
F(n) &= a\left(7^n\right) + n \cdot 7^n.
\end{aligned}
$$

Calculo de constantes

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 14 \\
a\left(7^0\right) + 0 \cdot 7^0 &= 14 \\
a &= 14.
\end{aligned}
$$

2. Respuesta

$$
F(n) = 14\left(7^n\right) + n \cdot 7^n.
$$

Tercera Pregunta

Enunciado

$$
\begin{aligned}
&F(n) = 5 * F\left(\frac{n}{5}\right) + 4 \cdot \log_5(n) \\
&F(1) = \frac{7}{4}.
\end{aligned}
$$

Solución

Transformación

Sea $n = 5^m$ entonces esto queda:

$$
\begin{aligned}
F(n) &= 5 \cdot F\left(\frac{n}{5}\right) + 4 \cdot \log_5(n) \\
F\left(5^m\right) &= 5 \cdot F\left(\frac{5^m}{5}\right) + 4 \cdot \log_5\left(5^m\right) \\
F\left(5^m\right) &= 5 \cdot F\left(5^{m-1}\right) + 4 \cdot m \\
G(m) &= 5 \cdot G(m-1) + 4 \cdot m.
\end{aligned}
$$

A partir de este punto trabajaremos con esta transformación y pasaremos de nuevo a F al final del desarrollo.

Forma Estándar

$G(m) - 5 \cdot G(m-1) = 4 \cdot m$

Raíces del Polinomio Característico

$$\begin{aligned} G(m) - 5 \cdot G(m-1) &= 0 \\ \lambda - 5 &= 0 \\ \lambda &= 5. \end{aligned}$$

Solución Homogénea

$H(m) = a \cdot 5^n$

Solución Particular

1. $b \cdot m$

$$\begin{aligned} G(m) - 5 \cdot G(m-1) &= 4 \cdot m \\ b \cdot m - 5 \cdot b \cdot m &= 4 \cdot m \\ -4 \cdot b \cdot m &= 4 \cdot m \\ b &= -1 \\ . \end{aligned}$$

Solución Total

$$\begin{aligned} G(m) &= H(m) + P(n) \\ G(m) &= a \cdot 5^m - m \\ . \end{aligned}$$

Valor Original

$$\begin{aligned} m &= \log_5(n) \\ G(m) &= a \cdot 5^m - m \\ G(\log_5(n)) &= a \cdot 5^{\log_5(n)} - \log_5(n) \\ F(n) &= a \cdot n - \log_5(n). \end{aligned}$$

Calculo de Constantes

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{7}{4} \\ a \cdot 1 - \log_5(1) &= \frac{7}{4} \\ a &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

3. Respuesta

$F(n) = \frac{7}{4} \cdot n - \log_5(n)$