Mecánica
Tarea 2

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1 — **Page 2**

1.1 Random Examples 2
1.2 Random 3
1.3 Algorithms 5

Chapter 2 — **Page 6**

Chapter 3 — **Page 9**

3.1 9

Chapter 4 — **Page 11**

4.1 12

Chapter 5 — **Page 15**

Chapter 1

1.1 Random Examples

Definition 1.1.1: Limit of Sequence in $\mathbb{R}$

Let $\{s_n\}$ be a sequence in $\mathbb{R}$. We say

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

where $s \in \mathbb{R}$ if $\forall$ real numbers $\epsilon > 0$ $\exists$ natural number N such that for $n > N$

$$s - \epsilon < s_n < s + \epsilon \text{ i.e. } |s - s_n| < \epsilon$$

Question 1

Is the set $x-$axis$\setminus\{\text{Origin}\}$ a closed set

Solution: We have to take its complement and check whether that set is a open set i.e. if it is a union of open balls

Note:-

We will do topology in Normed Linear Space (Mainly $\mathbb{R}^n$ and occasionally $\mathbb{C}^n$)using the language of Metric Space

Claim 1.1.1 Topology

Topology is cool

Example 1.1.1 (Open Set and Close Set)

Open Set:
- ϕ
- $\bigcup\limits_{x\in X} B_r(x)$ (Any $r > 0$ will do)
- $B_r(x)$ is open

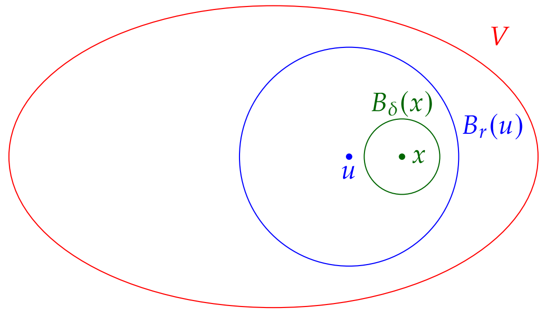
Closed Set:
- $X,\ \phi$
- $\overline{B_r(x)}$

$x-$axis $\cup$ $y-$axis

Theorem 1.1.1

If $x \in$ open set V then $\exists$ $\delta > 0$ such that $B_\delta(x) \subset V$

Proof: By openness of V, $x \in B_r(u) \subset V$



Given $x \in B_r(u) \subset V$, we want $\delta > 0$ such that $x \in B_\delta(x) \subset B_r(u) \subset V$. Let $d = d(u,x)$. Choose δ such that $d + \delta < r$ (e.g. $\delta < \frac{r-d}{2}$)

If $y \in B_\delta(x)$ we will be done by showing that $d(u,y) < r$ but

$$d(u,y) \leqslant d(u,x) + d(x,y) < d + \delta < r$$

😄

Corollary 1.1.1

By the result of the proof, we can then show...

Lenma 1.1.1

Suppose $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ is subspace of $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1.1

$1 + 1 = 2$.

1.2 Random

Definition 1.2.1: Normed Linear Space and Norm $\|\cdot\|$

Let V be a vector space over $\mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$). A norm on V is function $\|\cdot\|$ $V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ satisfying

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0 \; \forall \; x \in V$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \; \forall \; \lambda \in \mathbb{R}(\text{or } \mathbb{C}),\, x \in V$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \; \forall \; x, y \in V$ (Triangle Inequality/Subadditivity)

And V is called a normed linear space.
• Same definition works with V a vector space over $\mathbb{C}$ (again $\|\cdot\| \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$) where 2 becomes $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \; \lambda \in \mathbb{C}$, $x \in V$, where for $\lambda = a + ib$, $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Example 1.2.1 ($p-$Norm)

$V = \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Define for $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(In school $p = 2$)

Special Case $p = 1$: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$ is clearly a norm by usual triangle inequality.

Special Case $p \to \infty$ ($\mathbb{R}^m$ with $\|\cdot\|_\infty$): $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_m|\}$

For $m = 1$ these $p-$norms are nothing but $|x|$. Now exercise

Question 2

Prove that triangle inequality is true if $p \geqslant 1$ for $p-$norms. (What goes wrong for $p < 1$?)

Solution: **For Property (3) for norm-2**

When field is $\mathbb{R}$:

We have to show

$$\begin{aligned}
&\sum_i (x_i + y_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_i x_i^2} + \sqrt{\sum_i y_i^2}\right)^2 \\
\implies &\sum_i (x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) \leqslant \sum_i x_i^2 + 2\sqrt{\left[\sum_i x_i^2\right]\left[\sum_i y_i^2\right]} + \sum_i y_i^2 \\
\implies &\left[\sum_i x_iy_i\right]^2 \leqslant \left[\sum_i x_i^2\right]\left[\sum_i y_i^2\right]
\end{aligned}$$

So in other words prove $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ where

$$\langle x, y\rangle = \sum_i x_iy_i$$

Note:-

- $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is $\mathbb{R}-$linear in each slot i.e.

$$\langle rx + x', y\rangle = r\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle \text{ and similarly for second slot}$$

  Here in $\langle x, y\rangle$ x is in first slot and y is in second slot.

Now the statement is just the Cauchy-Schwartz Inequality. For proof

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

expand everything of $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle$ which is going to give a quadratic equation in variable λ

$$\begin{aligned}
\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle &= \langle x, x - \lambda y\rangle - \lambda\langle y, x - \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \lambda\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

Now unless $x = \lambda y$ we have $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle > 0$ Hence the quadratic equation has no root therefore the discriminant is greater than zero.

When field is $\mathbb{C}$:

Modify the definition by

$$\langle x, y\rangle = \sum_i \overline{x_i}y_i$$

Then we still have $\langle x, x\rangle \geqslant 0$

1.3 Algorithms

Algorithm 1: what

```
Input: This is some input
Output: This is some output
/* This is a comment */
some code here;
x ← 0;
y ← 0;
if x > 5 then
    x is greater than 5 ;                    // This is also a comment
else
    x is less than or equal to 5;
end
foreach y in 0..5 do
    y ← y + 1;
end
for y in 0..5 do
    y ← y − 1;
end
while x > 5 do
    x ← x − 1;
end
return Return something here;
```

Chapter 2

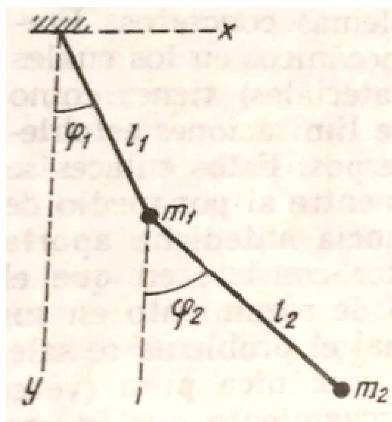


Figure 2.1: Péndulo Doble

En este caso, tenemos $3 \cdot N = 3 \cdot 2 = 6$ coordenadas cartesianas. Sin embargo, tenemos las siguientes ligaduras:

1. $z = 0$
2. $l_1 = cte$
3. $l_2 = cte$

Por lo cual tenemos $3N - n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Por lo tanto tenemos dos grados de libertad. Con esto entonces definamos las coordenadas generalizadas de la manera en la que nos propone la imagen 2.1. Con lo cual nos queda:

$$x_1 = l_1 \cdot \sin(\varphi_1) \implies \dot{x_1} = l_1 \dot{\varphi_1} \cos(\varphi_1)$$
$$y_1 = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) \implies \dot{y_1} = l_1 \dot{\varphi_1} \sin(\varphi_1).$$

Dado que este primer caso es esencialmente un triangulo en donde estamos calculando los dos catetos (Note que el valor de y es negativo)

Ahora bien, de manera similar, para la masa 2 esto seria como calcular estos mismos catetos. Sin embargo, debe iniciar desde los valores de m_1

$$x_2 = l_1 \cdot \sin(\varphi_1) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \implies \dot{x_2} = l_1 \dot{\varphi_1} \cos(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi_2} \cos(\varphi_2)$$
$$y_2 = -l_1 \cdot \cos(\varphi_1) - l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \implies \dot{y_2} = l_1 \dot{\varphi_1} \sin(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi_2} \sin(\varphi_2)$$
.

Con esto entonces, podemos calcular la energía cinética que es:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2\\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right)\\
&= \frac{1}{2}m_1\left(l_1^2\dot{\varphi_1}^2\cos^2(\varphi_1)+l_1^2\dot{\varphi_1}^2\sin^2(\varphi)\right)\\
&= \frac{1}{2}m_1\left(l_1^2\dot{\varphi_1}^2\right)\left(\cos^2(\varphi_1)+\sin^2(\varphi_1)\right)\\
&= \frac{1}{2}m_1\left(l_1^2\dot{\varphi_1}^2\right).
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m_2v_2^2\\
&= \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)\\
&= \frac{1}{2}m_2\left((l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1)+l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2))^2+(l_1\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1)+l_2\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2))^2\right)\\
(l_1\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1)+l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2))^2 &= l_1^2\dot{\varphi_1}^2\cos^2(\varphi_1)+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+l_2^2\dot{\varphi_2}^2\cos^2(\varphi_2)\\
(l_1\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1)+l_2\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_2))^2 &= l_1^2\dot{\varphi_1}^2\sin^2(\varphi_1)+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+l_2^2\dot{\varphi_2}^2\sin^2(\varphi_2)\\
l_1^2\dot{\varphi_1}^2\sin^2(\varphi_1)+l_1^2\dot{\varphi_1}^2\cos^2(\varphi_1)^2 &= l_1^2\dot{\varphi_1}^2\left(\sin^2(\varphi_1)+\cos^2(\varphi_1)\right)\\
&\implies l_1^2\dot{\varphi_1}^2\\
l_2^2\dot{\varphi_2}^2\sin^2(\varphi_2)+l_2^2\dot{\varphi_2}^2\cos^2(\varphi_2)^2 &= l_2^2\dot{\varphi_2}^2\left(\sin^2(\varphi_2)+\cos^2(\varphi_2)\right)\\
&\implies l_2^2\dot{\varphi_2}^2\\
2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) &= 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))\\
&\implies 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\\
&= \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\varphi_1}^2+l_2^2\dot{\varphi_2}^2+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, para el caso de la energía potencial tenemos

$$\begin{aligned}
V_1 &= m_1gy_1\\
&= -m_1gl_1\cos(\varphi_1)\\
V_2 &= m_2gy_2\\
&= -m_2g(l_1\cos(\varphi_1)+l_2\cos(\varphi_2)).
\end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
T &= T_1+T_2\\
&= \frac{1}{2}m_1\left(l_1^2\dot{\varphi}_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\varphi_1}^2+l_2^2\dot{\varphi_2}^2+2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)\\
&= \frac{1}{2}l_1^2\dot{\phi_1}^2(m_1+m_2)+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi_2}^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2).
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
V &= V_1+V_2\\
&= -m_1gl_1\cos(\varphi_1)-m_2gl_1\cos(\varphi_1)-m_2gl_2\cos(\varphi_2)\\
&= -gl_1\cos(\varphi_1)(m_1+m_2)-m_2gl_2\cos(\varphi_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto dado que $L = T - V$ nos queda:

$$
\begin{aligned}
&L = T - V \\
&L = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\phi_1}^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\phi_2}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (-g l_1 \cos(\varphi_1)(m_1 + m_2) - m_2 g l_2 \cos(\varphi_2)) \\
&\quad = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\phi_1}^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\phi_2}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + g l_1 \cos(\varphi_1)(m_1 + m_2) + m_2 g l_2 \cos(\varphi_2).
\end{aligned}
$$

Chapter 3

3.1

Para comenzar, definamos cuantas coordenadas generalizadas existen. Dado que tenemos dos partículas tenemos $3N$ en coordenadas cartesianas. Ahora bien, tenemos 5 ligaduras las cuales son:

1. $z_1 = 0$
2. $z_2 = 0$
3. $$\begin{aligned} \ell' &= \ell + \pi R \\ \ell &= \ell' - \pi R \\ \ell &= CTE \\ \ell &= y_1 + y_2 = CTE. \end{aligned}$$
4. $x_1 = -R$
5. $x_2 = R$

Con esto entonces sabemos que tenemos $3N - n = 3 \cdot 2 - 5 = 1$ grados de libertad. Por lo cual solo lo describiremos como ϕ. En particular, tendremos que

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi \\ y_2 &= \ell - \phi. \end{aligned}$$

Una vez definimos esto, podemos calcular el lagrangiano:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\phi}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\phi}\right)^2 \\ V &= m_1 g \phi + m_2 g \left(\ell - \phi\right) \\ \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\phi}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\phi}\right)^2 - \left(m_1 g \phi + m_2 g \left(\ell - \phi\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right)(m_1 + m_2) - g\left(m_1 \phi + m_2 \ell - m_2 \phi\right) \end{aligned}$$

.

Con lo cual podemos mirar las ecuaciones de movimiento:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right)(m_1 + m_2) - g\left(m_1\phi + m_2\ell - m_2\phi\right) \\
&= (m_1 + m_2)\,\dot{\phi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\right) &= \frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\,\dot{\phi}\right) \\
&= (m_1 + m_2)\,\ddot{\phi} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right)(m_1 + m_2) - g\left(m_1\phi + m_2\ell - m_2\phi\right)\right) \\
&= -g\,(m_1 - m_2) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= (m_1 + m_2)\,\ddot{\phi} - (-g\,(m_1 - m_2)) = 0 \\
(m_1 + m_2)\,\ddot{\phi} - (g\,(m_2 - m_1)) &= 0 \\
(m_1 + m_2)\,\ddot{\phi} &= g\,(m_2 - m_1) \\
\ddot{\phi} &= \frac{g\,(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}.
\end{aligned}
$$

Chapter 4

En este caso vamos a partir de que un cilindro rueda sobre otro. Para este caso tenemos dos cilindros, uno de radio a y uno de radio αa. Las medidas se pueden observar en la figura 4.1.

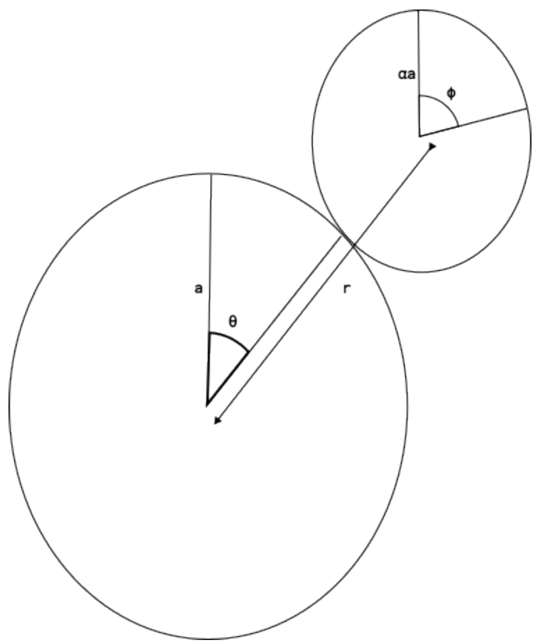


Figure 4.1: Dimensiones y descripción del problema

Con esto entonces nos hace falta ver las fuerzas que las puede encontrar en la figura 4.2

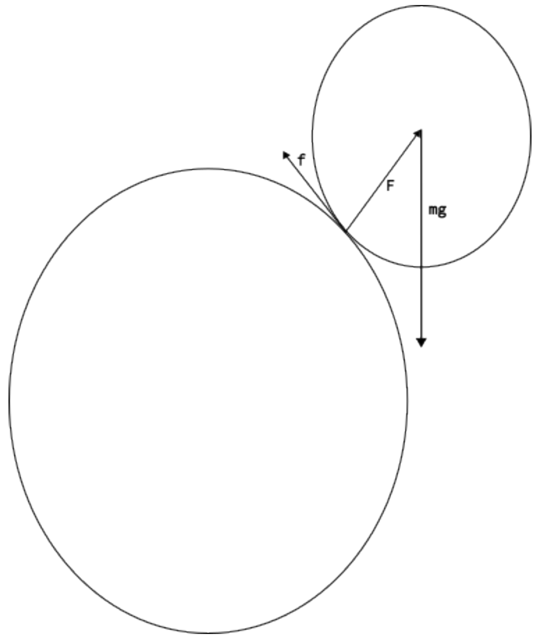


Figure 4.2: Fuerzas en el sistema

En este caso, dado que el cilindro αa ira teniendo cada vez una menor fuerza Z (dado que el angulo en el que se encuentra con respecto a su eje disminuye) entonces sabemos que eventualmente este cilindro se despegara del fijo a. Ademas, sabemos que estos dos perderán contacto en cuanto la fuerza normal F ya no tenga ingerencia. Es decir, cuando

$$F = 0.$$

Ademas, sabemos por el como funciona la fricción que

$$f \leq \mu F.$$

donde μ es el coeficiente de fricción. Lo que implica que este movimiento eventualmente empezara a deslizar sobre la superficie. Por lo tanto, podemos dividir este análisis en 3 momentos definidos por los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3. Para iniciar, desde 0 hasta θ_1 el cilindro rueda sin deslizar, lo que se describe en que la fricción seria

$$f = \mu F.$$

Ahora, entre θ_1 y θ_2 el cilindro se deslizaría pues la fricción es muy pequeña y en θ_2 el cilindro dejaría de estar en contacto con el otro y por lo tanto se sostendría $F = 0$ y de ahí en adelante caería libremente.

Ahora bien iniciemos caso a caso

4.1

Para empezar para un movimiento que no desliza entonces sabemos que:

$$\begin{aligned}
a\theta &= \alpha a\,(\varphi - \theta) \\
\theta &= \alpha\,(\varphi - \theta) \\
\theta &= \alpha\varphi - \alpha\theta \\
\theta + \alpha\theta &= \alpha\varphi \\
(1+\alpha)\,\theta &= \alpha\varphi.
\end{aligned}$$

Ahora bien, podemos definir una función desarrollando:

$$\begin{aligned}
(1+\alpha)\,\theta &= \alpha\varphi \\
\theta &= \frac{\alpha\varphi}{(1+\alpha)} \\
\gamma &= \theta - \frac{\alpha\varphi}{(1+\alpha)} \\
\frac{\alpha\varphi}{(1+\alpha)} &= \theta - \gamma \\
\alpha\varphi &= (\theta-\gamma)(1+\alpha) \\
\varphi &= \frac{(\theta-\gamma)(1+\alpha)}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Donde, como se puede notar cuando esto no desliza $\gamma = 0$. Ahora bien, por otro lado, tenemos que al estar estos dos cilindros en contacto la distancia entre los centros queda:

$$r = a + \alpha a = (1+\alpha)\,a.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\right)\left(\alpha^2 a^2\dot{\varphi}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\left(\alpha^2 a^2\left(\frac{(\theta-\gamma)(1+\alpha)}{\alpha}\right)^2\right) \\
\frac{1}{4}m\left(\alpha^2 a^2\left(\frac{(\theta-\gamma)(1+\alpha)}{\alpha}\right)^2\right) &= \frac{1}{4}m\left(\alpha^2 a^2\frac{(\theta-\gamma)^2(1+\alpha)^2}{\alpha^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}m\left(a^2(1+\alpha)^2\left(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2\right)\right) \\
T &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\left(a^2(1+\alpha)^2\left(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, podemos encontrar las fuerzas generalizadas con la ecuación

$$\begin{aligned}
\delta W_k &= Q_k\delta q_k \\
Q_k &= \frac{\delta W_k}{\delta q_k} \\
Q_k &= -\frac{\partial V}{\partial q_k}.
\end{aligned}$$

TODO V

Con lo cual, podríamos usar:

$$\begin{aligned}
V &= mgr\cos(\theta) + \gamma f a(1+\alpha) - F_r \\
Q_k &= -\frac{\partial V}{\partial k} \\
Q_\theta &= -\left(-mgr\sin(\theta) + 0 + 0\right) \\
&= mgr\sin(\theta) \\
Q_\gamma &= -\left(0 + f(1+\alpha) - 0\right) \\
&= -fa(1+\alpha) \\
Q_r &= -\left(mg\cos(\theta) - F\right) \\
&= F - mg\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$
\begin{aligned}
Q_\theta &= mgr\sin(\theta) \\
Q_\gamma &= -fa\,(1+\alpha) \\
Q_r &= F - mg\cos(\theta)\,.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, queda:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\left(a^2\,(1+\alpha)^2\left(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2\right)\right) \\
&- \left(mgr\cos(\theta) + \gamma fa\,(1+\alpha) - Fr\right).
\end{aligned}
$$

Con lo cual

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k.
$$

Ahora para esto:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\left(a^2\,(1+\alpha)^2\right)\left(\dot{\theta} - \dot{\gamma}\right)
$$

.

Chapter 5

Para iniciar podemos describir la energía cinética como:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}mv^2 \\
T &= \frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2\sin^2(\theta)\right) \\
T &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\theta) \\
V &= -mgy \\
V &= -mg\,(a\cos(\theta)) \\
\mathcal{L} &= T - V \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\theta) + mg\,(a\cos(\theta))\,.
\end{aligned}
$$

Ademas, podemos notar que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Con esto entonces, podemos utilizar la ecuación:

$$\sum_{k=1}^{f}\dot{q}_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} - \mathcal{L} = CTE.$$

Que dado que solo tenemos un grado de libertad esto se puede resumir a

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} &= \left(ma^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\theta) - mg\,(a\cos(\theta)) \\
&= \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\theta) - mg\,(a\cos(\theta)) \\
&= \mathcal{E}.
\end{aligned}
$$

Que esto lo podemos tomar como un lagrangiano con un eje fijo. Con lo cual

$$\mathcal{V}(\theta) = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\theta) - mga\cos(\theta)$$

.

Que para comprobar la velocidad angular limite tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(\theta) &= -\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\theta) - mga\cos(\theta) \\
&= -\frac{1}{2}ma^2\left(\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\sin^2(\theta) - mga\cos(\theta) \\
&= -\frac{1}{2}mag\sin^2(\theta) - mga\cos(\theta) \\
&= -\frac{1}{2}\sin^2(\theta) - \cos(\theta)
\end{aligned}
$$

.