**Mecánica** **Nombre:** *Sergio Montoya*
**Bono Parcial 1**
**September 21, 2024**

Tenemos un oscillador armonico armotiguado. En este caso imaginemoslo como una masa pegada a un resorte y tiene la amortiguación del Aire. Con esto entonces, sabemos que tanto $y$ como $z$ son 0. Por lo tanto, solo hay una coordenada generalizada. Llamemos a esta coordenada $q$. Ademas, por mostremos que esta coordenada funcionaria de la manera $x(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} q(t)$ lo que nos deja:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\frac{\lambda}{2}t} q(t) \\
\dot{x}(t) &= -\frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}t} q(t) + e^{-\frac{\lambda}{2}t} \dot{q}(t) \\
\ddot{x}(t) &= \frac{\lambda^2}{4} e^{-\frac{\lambda}{2}t} q(t) - \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}t} \dot{q}(t) - \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}t} \dot{q}(t) + e^{-\frac{\lambda}{2}t} \ddot{q}(t) \\
&= e^{-\frac{\lambda}{2}t} \left( \ddot{q}(t) - \lambda \dot{q}(t) + \frac{\lambda^2}{4} q(t) \right).
\end{aligned}$$

Ahora con esto, podemos mirar en la ecuación original que podemos conseguir con:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -kx - b\dot{x} \\
\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x &= 0.
\end{aligned}$$

Y reemplazando queda:

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\lambda}{2}t} \left( \ddot{q}(t) - \lambda \dot{q}(t) + \frac{\lambda^2}{4} q(t) \right) + \lambda \left( -\frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}t} q(t) + e^{-\frac{\lambda}{2}t} \dot{q}(t) \right) + \omega^2 e^{-\frac{\lambda}{2}t} q(t) &= 0 \\
\ddot{q}(t) - \lambda \dot{q}(t) + \frac{\lambda^2}{4} q(t) - \frac{\lambda^2}{2} q(t) + \lambda \dot{q}(t) + \omega^2 q(t) &= 0 \\
\ddot{q}(t) + \left( \omega^2 - \frac{\lambda^2}{4} \right) q(t) &= 0 \\
&.
\end{aligned}$$

Esta ultima ecuación es esencialmente la de un oscilador armónico simple con una frecuencia de $\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}}$. Por lo tanto, esta transformación simplemente nos permitió pasar de un oscilador amortiguado a uno simple. Con esto en mente podemos tomar el lagrangiano normalmente haciendo los reemplazos necesarios:

$$
\begin{aligned}
&\dot{q}^2 = \left(e^{\frac{\lambda}{2}t}\left(\dot{x}(t) + \frac{\lambda}{2}x(t)\right)\right)^2 = e^{\lambda t}\left(\dot{x}^2 + \lambda \dot{x} x + \frac{\lambda^2}{4}x^2\right)\\
&q^2 = e^{\lambda t}x^2\\
&\mathcal{L} = \frac{1}{2}me^{\lambda t}\left(\dot{x}^2 + \lambda \dot{x} x + \frac{\lambda^2}{4}x^2\right) - \frac{1}{2}me^{\lambda t}\left(\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}\right)x^2\\
&\mathcal{L} = \frac{1}{2}e^{\lambda t}me^{\lambda t}\dot{x}^2 - \frac{\lambda}{2}me^{\lambda t}x\dot{x} - \frac{1}{2}me^{\lambda t}\omega^2 x^2\\
&\mathcal{L} = \frac{1}{2}me^{\lambda t}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}me^{\lambda t}\omega^2 x^2\\
&\mathcal{L} = \frac{1}{2}e^{\lambda t}\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)
\end{aligned}
$$