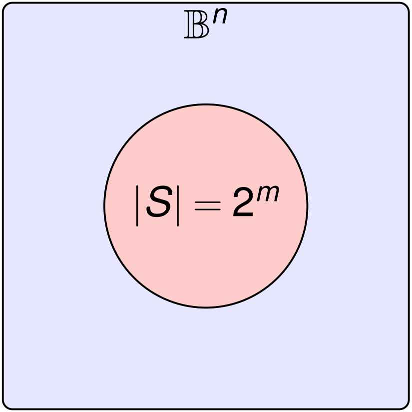
Quantum Error Correction Code

Sergio Montoya Ramírez

s.montoyar2@uniandes.edu.co

Universidad de los Andes
Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

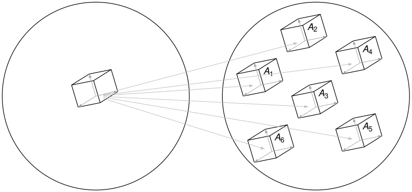
En un computador solo tenemos bits (o qbits). Todo lo demás son códigos



Un código (n, m) es simplemente un subconjunto de $\mathbb{B}^n$ con 2^m elementos. Estos elementos pueden representar otras cosas. Por ejemplo:

1. Números flotantes.
2. Letras.
3. Instrucciones.

Cuando un código es cuántico, es un subespacio completo



Un código cuántico es un subespacio con las mismas características que antes. Sin embargo, para tener mejor control sobre él (y porque lo vamos a usar así al corregir errores) tiene que cumplir las características de:

1. Ser ortogonales.
2. Ser distinguibles.
3. No estar deformados.

Un error es, esencialmente, una operación que no controlan

Un error es:

$$\begin{aligned}(\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) |E\rangle \ \to \alpha_0\beta_1 |0\rangle |E_1\rangle + \alpha_0\beta_2 |1\rangle |E_2\rangle \\ + \alpha_1\beta_3 |0\rangle |E_3\rangle + \alpha_1\beta_4 |1\rangle |E_4\rangle\end{aligned} \tag{1}$$

Dado que $\{I, X, Z, ZX\}$ es una base, lo podemos resumir como:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(I|\psi\rangle (\beta_1 |E_1\rangle + \beta_3 |E_3\rangle) + Z |\psi\rangle (\beta_1 |E_1\rangle - \beta_3 |E_3\rangle) \\ &+ X |\psi\rangle (\beta_2 |E_2\rangle + \beta_4 |E_4\rangle) + ZX |\psi\rangle (\beta_2 |E_2\rangle - \beta_3 |E_4\rangle))\end{aligned} \tag{2}$$

Un código corrige un error cuando existe un proceso de recuperación

Sea $\mathscr{E}$ un error. Se dice que un código C lo corrige si existe una operación que preserva la traza, $\mathscr{R}$, tal que:

$$\forall \rho \in C \implies (\mathscr{R} \circ \mathscr{E})\rho \propto \rho \tag{3}$$

Note que existen errores que no preservan la traza y, por tanto, al corregirlos no se obtiene el mismo estado, sino uno proporcional a este.

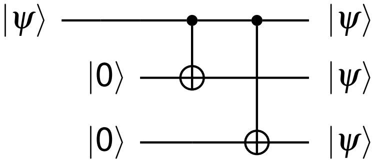
Demostrar que un código corrige un error no es trivial

Sea C un código cuántico con un proyector P y $\mathscr{E}$ un operador con elementos $\{E_i\}$. El código C corrige $\mathscr{E}$ si y solamente si:

$$PE_i^\dagger E_j P = \alpha_{ij} P \tag{4}$$

Para alguna matriz hermítica α.

Un ejemplo simple: El código de repetición permite corregir ante bitflips de un solo qbit



Para caracterizar este código podemos decir:

- **Error:** $|\psi\rangle |E\rangle \rightarrow \beta_1 |\psi\rangle |E_1\rangle + \beta_2 X |\psi\rangle |E_2\rangle$
- **Proyector:** $P = |000\rangle \langle 000| + |111\rangle \langle 111|$
- **Recuperación:** Se divide en dos etapas:
  1. Identificación del error ($Z_1 Z_2$ y $Z_2 Z_3$).
  2. Corrección aplicando la operación inversa.

Los códigos de corrección de errores, bien aplicados, permiten mejorar la fidelidad

Recapitulando:

- Los códigos son esenciales para la computación en general, pues permiten representar información.
- Un error es simplemente un operador lineal, solo que no te obedece.
- Un código corrige un error si existe un proceso de verificación.
- Demostrar que un código corrige un error, en general, no es trivial.

Referencias

- Kitaev, A. Yu., Shen, A., y Vyalyj, M. N. (2002). *Classical and Quantum Computation*. Graduate Studies in Mathematics (Vol. 47). American Mathematical Society.
- Nielsen, M. A., y Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Anniversary Edition). Cambridge University Press. (BnF ISBN)
- Kaye, P., Laflamme, R., y Mosca, M. (2007). *An Introduction to Quantum Computing*. Oxford University Press.
- Gottesman, D. (1997). *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction* (Tesis doctoral). California Institute of Technology. `doi:10.48550/arXiv.quant-ph/9705052`

Verificación de errores como suma de otros Pauli

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\left(\alpha_0\left|0\right\rangle+\alpha_1\left|1\right\rangle\right)\left(\beta_1\left|E_1\right\rangle+\beta_3\left|E_3\right\rangle\right)\right.\\
&+\left(\alpha_0\left|0\right\rangle-\alpha_1\left|1\right\rangle\right)\left(\beta_1\left|E_1\right\rangle-\beta_3\left|E_3\right\rangle\right)\\
&+\left(\alpha_0\left|1\right\rangle+\alpha_1\left|0\right\rangle\right)\left(\beta_2\left|E_2\right\rangle+\beta_4\left|E_4\right\rangle\right)\\
&\left.+\left(\alpha_0\left|1\right\rangle-\alpha_1\left|0\right\rangle\right)\left(\beta_2\left|E_2\right\rangle-\beta_3\left|E_4\right\rangle\right)\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(I\left|\psi\right\rangle\left(\beta_1\left|E_1\right\rangle+\beta_3\left|E_3\right\rangle\right)\right.\\
&+Z\left|\psi\right\rangle\left(\beta_1\left|E_1\right\rangle-\beta_3\left|E_3\right\rangle\right)\\
&+X\left|\psi\right\rangle\left(\beta_2\left|E_2\right\rangle+\beta_4\left|E_4\right\rangle\right)\\
&\left.+ZX\left|\psi\right\rangle\left(\beta_2\left|E_2\right\rangle-\beta_3\left|E_4\right\rangle\right)\right)
\end{aligned}
$$