

Mecánica

Tarea 4

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Page 3

1.1	Enunciado	3
1.2	Solución	3

Chapter 2

Page 4

2.1	Enunciado	4
2.2	Solución	4

Chapter 3

Page 6

3.1	Enunciado	6
3.2	Solución	6

Chapter 4

Page 8

4.1	Enunciado	8
4.2	Solución	8

Chapter 5

Page 9

5.1	Enunciado	9
5.2	Solución	9

Chapter 6

Page 11

6.1	Enunciado	11
6.2	Solución	11
Parte A — 11 • Parte B — 11		

Chapter 7

Page 12

7.1	Enunciado	12
7.2	Solución	12

Chapter 8

Page 13

8.1	Enunciado	13
8.2	Solución	13
Parte A — 13 • Parte B — 13		

Chapter 9

Page 14

9.1	Enunciado	14
9.2	Solución	14

Chapter 10

Page 16

Chapter 1

1.1 Enunciado

Demuestre que $\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2}$

1.2 Solución

En este caso, tenemos que saber que $\varphi = 0$ y que la ecuación es $\frac{1}{r} = \frac{1+\epsilon \cos(\varphi)}{P}$. Sin embargo tenemos que desarrollar primero la energía con

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2r} \left(\frac{L^2}{mr} - 2k \right). \end{aligned}$$

Ahora con esto queda:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1+\epsilon}{2P} \left(\frac{L^2(1+\epsilon)}{mp} - 2k \right) \\ &= \frac{(1+\epsilon)mk}{2L^2} (k(1+\epsilon) - 2k) \\ &= \frac{mk}{2L^2} (k((1+\epsilon)^2 - 2(1+\epsilon))) \\ &= \frac{mk^2}{2L^2} (1 + 2\epsilon + \epsilon^2 - 2 - 2\epsilon) \\ &= \frac{mk^2}{2L^2} (\epsilon^2 - 1) \\ \frac{2L^2E}{mk^2} &= \epsilon^2 - 1 \\ \epsilon^2 &= 1 + \frac{2L^2E}{mk^2}. \end{aligned}$$

Chapter 2

2.1 Enunciado

Demostrar que la tercera ley de kepler se puede escribir como:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

2.2 Solución

En este caso se tiene para las condiciones de una orbita cerrada que:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c \varepsilon \sin(\varphi)}{(1 + \varepsilon \cos(\varphi))^2} = 0.$$

y dado que $r(\varphi)$ es periodico entonces la solución de este problema es $\varphi = 0, \pi$ para r_{min} y r_{max} y que corresponden a

$$r_{min} = \frac{c}{1 + \varepsilon}$$
$$r_{max} = \frac{c}{1 - \varepsilon}$$

Ahora como sabemos que esto es una elipse pasamos $r(\varphi)$ a la forma cartesiana para encontrar la longitud a del semieje mayor, la distancia d del centro a los focos y la excentricidad ε

$$r = \frac{c}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} \implies r + r \varepsilon \cos(\varphi) = c \implies r + \varepsilon x = c \implies r = c - \varepsilon x$$

$$x^2 + y^2 + 2C\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 = c^2$$
$$\frac{c^2}{1 - \varepsilon^2} = x^2 + \frac{2C\varepsilon x}{1 - \varepsilon^2} + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Ahora bien, si definimos:

1. $d := \frac{c\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$

$$\frac{C^2}{1 - \varepsilon^2} = x^2 + 2xd + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} \implies \frac{c^2}{1 - \varepsilon^2} + d^2 = x^2 + 2xd + d^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2}$$
$$\frac{c^2}{1 - \varepsilon^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right) = (x + d)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2}$$
$$\frac{c^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} = (x + d)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

2. $a := \frac{c}{1 - \varepsilon^2}$

$$a^2 = (x + d)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} \implies 1 = \frac{(x + d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)}.$$

3. $b := a(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{(x+d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ahora por la primera ley de Kepler queda:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}.$$

donde μ es la masa reducida y L su momentum angular.

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dA}{dt} dt &= \int_0^T \frac{L}{2\mu} dt \\ A &= \frac{TL}{2\mu} \\ T &= \frac{2\pi ab\mu}{L} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 (a^2 (1 - \varepsilon^2)) \mu^2}{L^2} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 a^3 c \mu^2}{L^2} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 a^3 \mu}{k} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 \mu}{G(m_1 + m_2)} a^3. \end{aligned}$$

Ahora entonces las constantes son:

- (a) Sol - Jupiter : 0.9990459112
- (b) Sol - Saturno : 0.9999485027
- (c) Sol - Urano : 0.9999563019
- (d) Sol - Tierra : 0.999997
- (e) Sol - Venus : 0.999997552
- (f) Sol - Marte : 0.9999996775
- (g) Sol - Mercurio : 0.999999834
- (h) Sol - Luna : 0.9999999631
- (i) Jupiter - Io : 1047.071179
- (j) Jupiter - Europa : 1047.093962
- (k) Jupiter - Ganimedez : 1047.038739
- (l) Jupiter - Calisto : 1047.061104

Chapter 3

3.1 Enunciado

Un satélite en órbita geoestacionaria tiene una órbita tal que el satélite permanece siempre sobre un mismo punto del ecuador terrestre. Determine cual es la velocidad angular orbital del satélite. Encuentre el semieje de la órbita. Determine el intervalo de latitud geográfica de las zonas que no son visibles desde un satélite geoestacionario. ¿Cual fracción del área de la superficie terrestre no es detectable por estos satélites? Puede responder dando una cota.

3.2 Solución

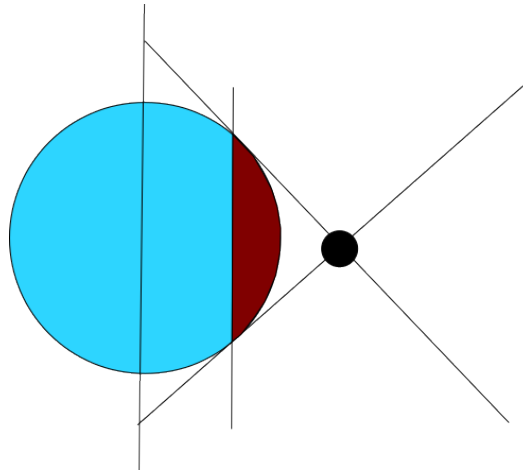


Figure 3.1: Figura que explica el desarrollo necesario, donde desde la vista del satélite la parte roja es visible mientras la azul es tapada por el planeta.

En este caso el satélite está geoestacionario y por tanto su velocidad angular es la misma que la de la Tierra (puesto que da una vuelta completa en el mismo tiempo que lo da el punto sobre el que está). El semieje de su órbita es el mismo que el del planeta. Por último, para determinar el área que puede ver el satélite dependemos de la distancia que tenga frente al suelo. En particular en nuestro modelo, el satélite podrá observar todo aquello que no sea tapado por la propia Tierra. Es decir que lo que nos interesa es encontrar la distancia que hay entre un punto cuya recta tangente pase por el punto en el que se encuentra el satélite y el medio de la circunferencia (para una explicación gráfica vea la figura 3.1). Esto tiene como consecuencia que tenemos la condición:

$$m_{s-p} = \frac{dC}{dx} \implies -\frac{y}{h-x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Esto sale de despejar y como:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Con lo que podemos desarrollar:

$$\begin{aligned} -\frac{y}{h-x} &= -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \\ \frac{y}{h-x} &= \frac{x}{y} \\ y^2 &= x(h-x) \\ r^2-x^2 &= xh-x^2 \\ r^2 &= xh \\ x &= \frac{r^2}{h}. \end{aligned}$$

Por lo tanto esta distancia depende del radio del círculo y de la altura del satélite. Con esto podemos definir entonces el casco que va a ser observable desde el satélite con $y = R$ y $r - x = H$ y el área de este tipo de objetos es:

$$\pi(R^2 + H^2) = \pi(y^2 + H^2) = \pi(r^2 - x^2 + r^2 - 2xr + x^2).$$

y esto equivale a:

$$\begin{aligned} \pi(2r^2 - 2xr) &= 2\pi r(r - x) \\ &= 2\pi r\left(r - \frac{r^2}{h}\right) \\ &= 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{h}\right). \end{aligned}$$

y entonces el porcentaje de lo que se puede ver es:

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{h}\right)}{4\pi r^2} \\ &= \frac{1 - \frac{r}{h}}{2}. \end{aligned}$$

Chapter 4

4.1 Enunciado

A partir del diámetro angular del Sol y la duración del periodo de orbital de la tierra (un año), determine la densidad media del Sol.

4.2 Solución

$$\begin{aligned}r &= a \tan(\beta) \\ \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM} \\ \frac{T^2}{\frac{r^3}{u^3}} &= \frac{4\pi^2}{GM} \\ \frac{T^2}{4r^3} &= \frac{\pi^2}{4^3 GM} \\ \frac{T^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} &= \frac{3\pi}{u^3 GM} \\ \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} &= \frac{3\pi}{u^3 GT^2} \\ \rho &= 1434 \frac{kg}{m^3}.\end{aligned}$$

Chapter 5

5.1 Enunciado

En un Universo hipotético solo existen dos rocas de 5 kg de masa cada una. Cada una orbita a la otra a una distancia de 1 metro. ¿Cual es el periodo orbital de este sistema binario de rocas?

5.2 Solución

En este caso utilizaremos un desarrollo muy similar al usado en el libro *Mecánica Clásica* que esta en bloqueneon. Suponga que llamaremos a estas dos rocas cuerpo 1 y cuerpo 2. En este universo unicamente existirian 2 fuerzas F_{12} y F_{21} que son la fuerza que hace un cuerpo sobre el otro y al revés. Note que por 3 ley de Newton sabemos que $F_{12} = -F_{21}$. Además, tenemos que

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{25}{10} = 2.5.$$

donde $M = m_1 + m_2$ y con esto reducimos (como en el capitulo previamente citado) el movimiento de estos dos cuerpos al movimiento de un cuerpo de masa μ que orbita otro de masa infinita. Con esto entonces queda

$$F = \mu a.$$

ahora bien, F en este caso es la fuerza que hace el cuerpo dos sobre el cuerpo 1 que como sabemos en este caso esa interacción se da por gravedad y en consecuencia consiste en

$$\begin{aligned} F &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \\ &= G \frac{25 \text{ kg}^2}{1 \text{ m}^2} \\ &= G * 25. \end{aligned}$$

Por tanto a es $a = \frac{F}{\mu}$ lo cual entonces significa que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{25G}{2.5} \\ &= \frac{25G}{\frac{25}{10}} \\ &= 10G. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos una aceleración constante. Sabemos además que ambas aceleraciones son iguales pues las fuerzas son iguales y las masas tambien por lo tanto solo debemos resolver para una de las aceleraciones que es:

$$a_1 = \frac{5}{10} 10G = 5G.$$

Dado que G es una constante sabemos que la integral de esta aceleración para el movimiento seria la velocidad y dado que solo nos interesa la magnitud (y sabemos que es una aceleración centripeta) podemos usar:

$$a_1 = \frac{v^2}{r}.$$

en donde en este caso r es $0.5m$ dado que es el centro de masa (que esta en el centro por que trabajamos con masas iguales. Esto entonces queda:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{a_1 r} \\ &= \sqrt{5G * \frac{5}{10}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{10}G}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que tenemos esta velocidad (que es tangencial) podemos encontrar una velocidad angular simplemente dividiendo por r

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\sqrt{\frac{25}{10}G}}{0.5} \\ &= \frac{5\sqrt{\frac{G}{10}}}{\frac{5}{10}} \\ &= \sqrt{10G}. \end{aligned}$$

Por lo tanto lo unico que necesitamos es encontrar lo que se demora en dar una vuelta completa lo cual es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{10G}}.$$

Chapter 6

6.1 Enunciado

Resolver el problema 99 del texto de *Física General de Halliday & Resnik*

6.2 Solución

6.2.1 Parte A

$$\begin{aligned}U(x) &= -Gm \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} dM \\&= -\frac{GmM}{\sqrt{x^2 + R^2}} \\&\Rightarrow ||F|| = -\frac{dU}{dx} = +\frac{GmMx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

6.2.2 Parte B

$$\begin{aligned}\Delta U &= U(0) - U(x) \\&= -GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \\\Delta E &\Rightarrow \Delta K = -\Delta U \\-\Delta U &= \frac{1}{2}mv^2 \\v &= \sqrt{\frac{-2\Delta U}{m}} \\v &= \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)}.\end{aligned}$$

Chapter 7

7.1 Enunciado

Resolver el problema 11 del texto de *Física General de Halliday & Resnik*

7.2 Solución

Para poder solucionar este punto haremos uso de la ecuación

$$g = g_0 + \Omega^2 R \sin \theta.$$

Esta ecuación puede ser encontrada en el Taylor Capitulo 9. Ahora bien, dado que todos los planetas son iguales en tamaño y en masa entonces g_0 es el mismo para todos los planetas. Por lo tanto, la única diferencia es θ . Tomando en cuenta esto, note que los puntos b, d, f estan en los polos y por lo tanto $\theta = 0$ para todos estos casos y por lo tanto $\sin(\theta) = 0$ y dado que todos los otros puntos están en el ecuador entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$ lo cual nos deja con $\sin(\theta) = 1$ y por lo tanto solo se organizan en función de su velocidad angular lo que nos deja con:

$$a > c > e > b \geq d \geq f.$$

Chapter 8

8.1 Enunciado

Resolver el problema 6 del texto de *Física General de Halliday & Resnik*

8.2 Solución

8.2.1 Parte A

Note que $a_g = \frac{GM}{r^2}$
Por lo tanto

$$\frac{M_1}{R_4^2} = \frac{M_2}{R_4^2} > \frac{M_3}{R_4^2} = \frac{M_4}{R_4^2}$$
$$M_1 = M_2 > M_3 = M_4.$$

8.2.2 Parte B

Note que $R_1 < R_2$ y $R_3 < R_4$, entonces $\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$ y $\frac{1}{R_3} > \frac{1}{R_4}$ Además note que $R_2 = R_3$ y dado que $M_2 > M_3$ entonces $\rho_2 > \rho_3$ por lo que:

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \rho_4.$$

Chapter 9

9.1 Enunciado

Calcular la dependencia del ángulo alpha con la latitud. Graficar alpha versus la latitud geográfica (-90, 90). Interprete físicamente sus resultados. Presente su discusión comentando lo que ocurre en cinco ciudades ubicadas en latitudes que ayuden a la interpretación de sus resultados.

9.2 Solución

Quizás lo mas prudente para iniciar este punto es deducir la ecuación para α_{max}

$$F = F_G + F_C$$

$$m\ddot{r} = -\frac{GM_{tierra}m}{R^2}\hat{r} + m\Omega^2 R \sin \theta \hat{p}$$

$$\ddot{r} = -\frac{GM_{Tierra}}{R^2}\hat{r} + \Omega^2 R \sin \theta \hat{p}.$$

Ahora con un dibujo expliquemos lo que pasa:

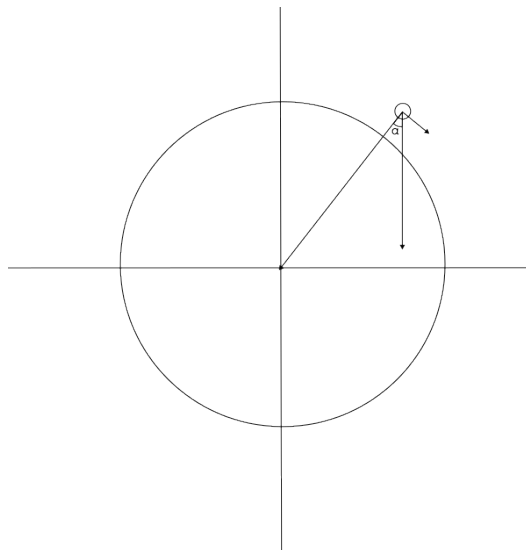


Figure 9.1: Grafica en la que se muestra las distintas gravedades.

Con esta figura, podemos ver que α esta definido entre estas dos fuerzas. Con lo cual podemos deducir que

$\tan(\alpha) = \frac{|g_{tan}|}{|g_{rad}|}$. Además, para α pequeño tenemos que $\tan(\alpha) = \alpha$ entonces de aquí podemos deducir que:

$$\alpha = \frac{\Omega^2 R \sin(\theta) \cos(\theta)}{g_0 - \Omega^2 R \sin^2(\theta)}.$$

Con esto solucionado podemos simplemente programar las pruebas y la solución de la siguiente manera:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def alpha(omega=7.3e-5, radio=6371000, g_0=9.8, theta=0):
    g_rad=g_0+(omega**2)*radio*(np.sin(theta)**2)
    g_tan=omega**2*radio*(np.sin(theta)*np.cos(theta))
    return g_tan/g_rad

def latitud_colatitud(latitud):
    return np.deg2rad(90 - latitud)

pi = np.pi
espacio = np.linspace(-90, 90, 500)

plt.plot(espacio, alpha(theta=latitud_colatitud(espacio)))
plt.title("Relacion entre Alpha y la latitud")
plt.xlabel("Latitud")
plt.ylabel("Alpha")
plt.savefig("alpha_tierra.png")
```

Lo cual nos da el siguiente resultado:

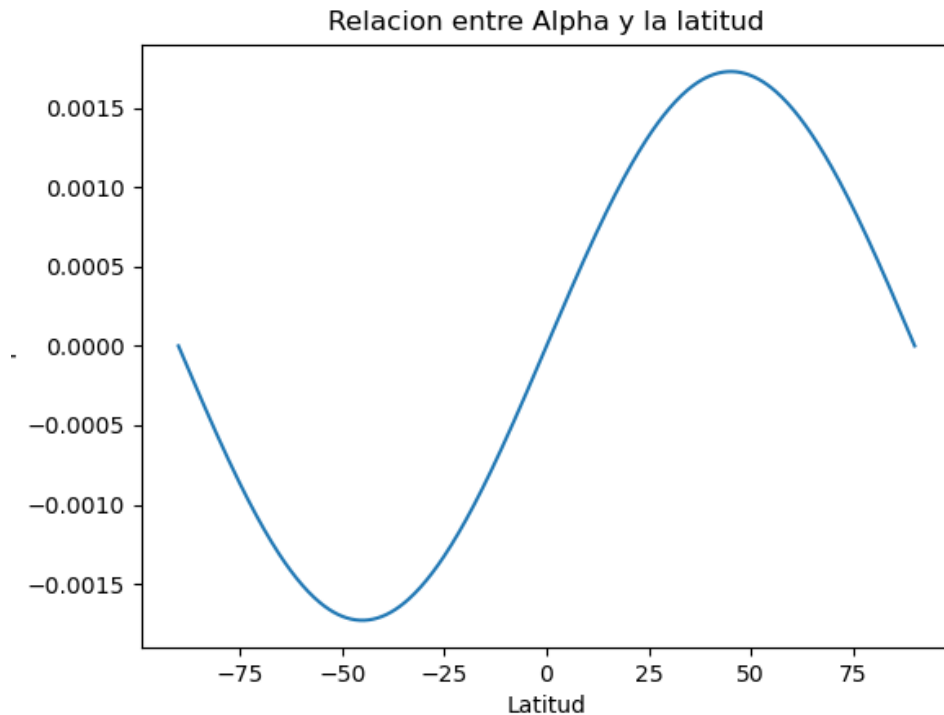


Figure 9.2: Imagen del α maximo segun el angulo

Chapter 10

En este caso, lo mas simple es trabajarlo por medio de un codigo. A continuación se encuentra ese codigo

```
import math
import pandas as pd

# Definicion de los datos
data = {
    "Cuerpo-Celeste": ["Sol", "Jupiter", "Tierra", "Marte", "Luna", "Estrella-de-neutrones"],
    "R-(m)": [6.96e8, 6.99e7, 6.37e6, 3.39e6, 1.74e6, 1.0e4],
    "T-(s)": [2.14e6, 3.58e4, 8.64e4, 8.87e4, 2.36e6, 1.0e-3],
    "g-(m/s**2)": [274.0, 24.79, 9.81, 3.72, 1.62, 1.0e12]
}

df = pd.DataFrame(data)

# Calcular velocidad angular w y a_max
df["w-(rad/s)"] = 2 * math.pi / df["T-(s)"]
df["a_max-(rad)"] = [math.atan((omega**2 * r) / g)
                     for omega, r, g in zip(df["w-(rad/s)"], df["R-(m)"], df["g-(m/s**2)"])]

# Mostrar resultados
print(df.to_latex())
```

Table 10.1: Tabla con los resultados

	Cuerpo Celeste	$R(m)$	$T(s)$	$g(\frac{m}{s^2})$	$\omega(\frac{rad}{s})$	$\alpha_{max}(rad)$
0	Sol	696000000.000000	2140000.000000	274.000000	0.000003	0.000022
1	Júpiter	69900000.000000	35800.000000	24.790000	0.000176	0.086637
2	Tierra	6370000.000000	86400.000000	9.810000	0.000073	0.003434
3	Marte	3390000.000000	88700.000000	3.720000	0.000071	0.004573
4	Luna	1740000.000000	2360000.000000	1.620000	0.000003	0.000008
5	Estrella de neutrones	10000.000000	0.001000	1000000000000.000000	6283.185307	0.376002