Variable Compleja **Name:** *Sergio Montoya Ramírez*
Tarea 4.2
12/12/2022

---

1. Sea $F(z)$ una función analítica en un dominio anular que contiene a S^1, el circulo de radio 1 centrado en el origen. Sea $f(\theta)$ la función periodica obtenida al restringir F al circulo. i.e. $f(\theta) = F(ei\theta)$. Demostrar que para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

donde los coeficientes estan dados por

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}$$

Solución: Para cualquier función ya tenemos que se puede expresar como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{nt\pi}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]$$

Y si definimos $\omega = \frac{\pi}{L}$ nos queda

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Ademas, utilizando la definición de $\sin(x)$ y $\cos(x)$ nos queda

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) + b_n\frac{1}{2i}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})\right]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}e^{in\omega t} + \frac{a_n}{2}e^{-in\omega t} - \frac{ib_n}{2}e^{in\omega t} + \frac{b_n}{2}e^{-in\omega t}\right]$$

ahora podemos factorizar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2}\right)e^{in\omega t} + \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2}\right)e^{-in\omega t}\right]$$

y si definimos $c_0 = \frac{a_0}{2}$ y $c_n = \frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2}$. Note que $\bar{c_n} = \frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2}$ entonces nos queda

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n e^{in\omega t} + \bar{c_n}e^{-in\omega t}] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{c_n}e^{-in\omega t}$$

y usando las definiciones de a_0, a_n, b_n que son

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt
\end{aligned}$$

Entonces queda,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \\
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt - \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} if(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(n\omega t\right)dt - \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} if(t)\sin\left(n\omega t\right)dt \\
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{L}^{L} f(t)[\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)]dt \\
e^{-ix} &= \cos(x) - i\sin(x) \\
c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{in\omega t}dt
\end{aligned}$$

y para el conjugado se hace un procedimiento muy similar hasta este punto

$$\begin{aligned}
\bar{c_n} &= \frac{1}{2L}\int_{L}^{L} f(t)[\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)]dt \\
e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x) \\
\bar{c_n} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{in\omega t}dt = c_{-n}
\end{aligned}$$

por todo eso nos queda que

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t}$$

en consecuencia

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Segunda parte:

- Serie de Fourier de $f(x) = 1$
  tenemos que
  $$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$
  y
  $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1e^{inx}dx = -\frac{i(-1+e^{2i\pi n})}{4\pi n}$$
  por lo tanto nos queda
  $$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{i(-1+e^{2i\pi n})}{4\pi n}e^{in\omega x}$$

2. Sea m,n enteros con $0 \leq m < n$. Derivar la formula
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx = \frac{\pi}{2n}\csc\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)$$

Solución: El denominador tiene ceros en $\exp(\pi i\frac{2k+1}{2n})$ y lo mismo funciona para las ramas con una separación de $\frac{\pi}{n}$. El numerador difiere por un factor constante de $\exp(\pi i\frac{2m}{n})$ en dichas ramas.Obtenemos otro factor de $e^{\frac{\pi i}{n}}$ integrando por el diferencial dz. Por ende si integramos sobre el borde del sector $\{z : |z| < R, 0 < arg(z) < \frac{\pi}{n}\}$ nos queda.

$$2\pi i Res\left(\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}; e^{\frac{\pi i}{2n}}\right) = \left(1 - e^{\pi i\frac{2m+1}{n}}\right)\int_0^R \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx + \int_{C_R}\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}dz$$

Donde C_R es el arco que cierra el contorno. Dado que $m < n$ esta integral tiende a 0 cuando $R \to \infty$. Lo que nos deja con

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{\pi i\frac{2m+1}{n}}} Res\left(\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}; e^{\frac{\pi i}{2n}}\right) \tag{7.1}$$

Como el denominador tiene solo ceros simples entonces el residuo en 0 es

$$Res\left(\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}; \zeta\right) = \frac{\zeta^{2m}}{2n\zeta^{2n-1}} = \frac{\zeta^{1+2m-2n}}{2n}$$

y para $\zeta = e^{\frac{\pi i}{2n}}$ nos queda entonces

$$\frac{e^{\pi i\frac{1+2m-2n}{2n}}}{2n} = -\frac{1}{2n}e^{\pi i\frac{2m+1}{2n}}$$

Y si eso lo ponemos en (7.1) nos queda:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx = \frac{\pi}{2n\sin\left(\pi\frac{2m+1}{2n}\right)}$$

3. Justifique los pasos para demostrar la siguiente integral

$$\int_0^\infty cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Solución: Primero queremos remplazar $f(z) = e^{-x}$ por $\sin(x^2)$ y esto lo queremos integrar en un arco de angulo $\frac{\pi}{4}$ y de lado R y por tanto quedamos

$$\int_{cR} f(z)dz = \int_A f(z)dz + \int_B f(z)dz + \int_C f(z)dz$$

en donde A es una linea de 0 a R, B es el arco de R a $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ y C es la linea de $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ a 0 en ese orden y por tanto en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Ahora podemos dividir el trabajo en tres pasos.

(a) **Estudio de A** Para paremitrizar esto dado que es una linea recta podemos poner $\gamma(t) = t, 0 \leq t \leq R$ y por tanto la integral queda

$$\int_A f(z)dz = \int_0^R f(t)\gamma'(t)dt = \int_0^R e^{-it^2}dt$$

Y ahora hacemos tender $R \to \infty$ para que nos quede $\int_0^\infty e^{-it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(b) **Estudio de B** Primero parametrizamos con $\gamma(t) = Re^{i\frac{\pi}{4}t}, 0 \leq t \leq 1$ lo que nos deja con

$$|\int_B f(z)dz| = |\int_0^1 e^{-\gamma(t)}\gamma'(t)dt| = |\int_0^1 e^{-(Re^{i\frac{\pi}{4}t})}R(i\frac{\pi}{4})Re^{i\frac{\pi}{4}t}dt|$$

entonces

$$\leq \int_0^1 |e^{-R^2e^{i\frac{\pi}{2}t}}||Ri\frac{\pi}{4}||e^{i\frac{\pi}{4}t}|dt$$

Dado que algunos elementos son imaginarios nos queda

$$\leq \int_0^1 |e^{-R^2\cos(\frac{\pi}{2}t)}||e^{-iR^2\sin(\frac{\pi}{2}t)}|(\frac{\pi}{4}R)(1)dt$$

Y los otros son puramente reales y por tanto el resultado seria

$$\leq \int_0^1 e^{-R^2\cos(\frac{\pi}{2}t)}(\frac{\pi}{4})dt = \frac{\pi}{4}R\int_0^1 e^{-R^2cos(\frac{\pi}{2}t)}dt$$

Note que $(\cos(\frac{\pi}{2}t))'' = -\frac{\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi}{2}t) < 0, t \in [0,1]$ Lo que significa que esta función es concava hacia abajo. lo que significa que siempre esta estrictamente debajo de la linea tangente en $t = 1$ que si la calculamos es

$$y - \cos(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}sin(\frac{\pi}{2})$$

$$y = -\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}$$

y como consecuencia de lo anterior $\cos(\frac{\pi}{2}t) \leq -\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}$ con esta inecuacion retomemos

$$\leq \frac{\pi}{4}R\int_0^1 e^{-R^2(-\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2})}dt$$

y si definimos $u = -\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}$ y $du = -\frac{\pi}{2}dt$ nos queda

$$= \frac{\pi}{4}R\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R^2U}(-\frac{2}{\pi}dt)$$

$$= \frac{\pi}{4}R(\frac{2}{\pi})\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2U}dU$$

$$= \frac{1}{2}R\left[\frac{e^{-R^2U}}{-R^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2R}(e^{-R^2\frac{\pi}{2}} - 1)$$

y ahora si $R \to \infty$

$$= 0$$

(c) **Estudio de C** Primero parametrizamos C con $\gamma(t) = e^{i\frac{\pi}{4}}(R-t)$ Entonces esto nos deja con

$$= \int_0^R e^{-e^{i\frac{\pi}{2}(R-t)^2}}(-e^{i\frac{\pi}{4}})dt$$

y si definimos $t' = R - t$ y $dt' = -dt$ entonces la integral se vuelve

$$= -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_R^0 e^{-e^{i\frac{\pi}{2}t^2}}(-dt) = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^R e^{-it^2}dt$$

y si hacemos $R \to \infty$ nos queda

$$-e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-it^2}$$

Ahora bien con esto reanudemos la primera ecuación

$$\int_{cR} f(z)dz = \int_A f(z)dz + \int_B f(z)dz + \int_C f(z)dz$$

que ahora nos queda

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 + -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-it^2}$$

que ahora podemos despejar con

$$\int_0^\infty e^{-it^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

y sabiendo que $e^{-i\theta^2} = cos(\theta) - i\sin(\theta)$ nos queda

$$\int_0^\infty \cos(t^2)dt - i\int_0^\infty sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

lo que nos deja con

$$\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$\int_0^\infty \sin(t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

4. Muestre que:

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

primero tomamos la transformada de laplace a $\frac{\sin(t)}{t}$lo cual nos da

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}e^{-st}dt$$

y entonces nos queda

$$\int_0^\infty \mathbb{L}\{\sin(t)\}(y)dy$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{y^2+1^2}dy$$

ahora bien si hacemos que $s \to \infty$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{y^2+1^2} = \tan^{-1}(y)|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

5. Justifique los pasos para demostrar la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

$(0 < a < 1)$

Sea I el valor de la integral impropia y hagamos la sustitución $t = e^x$ lo que nos deja con

$$I = \int_0^\infty \frac{t^a}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$$

Entonces esta integral la podemos transformar a $\int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{z+1}dz$ donde C_R es el contorno cerrado con orientación encontra de las manecillas del reloj Consistente del arco cirucular Γ_R centrado en el origen con radio $R > 1$ en la mitad superior del plano, el eje real desde R hasta ϵ, el arco circular γ_ϵ centrado en el origen con radio $0 < \epsilon < R$ en la mitad superior del plano y teniendo una orientación a favor de las manecillas del reloj y el eje real en $[\epsilon, R]$.

Ahora descomponiendo en nuestro contorno nos queda

$$\int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{z+1}dz = -\int_{\epsilon}^{R} \frac{(xe^{2\pi i})^{a-1}}{x+1}dx + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{z^{a-1}}{z+1}dz + \int_{\epsilon}^{R} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^{a-1}}{z+1}dz$$

Si hacemos $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ entonces la integral sobre Γ_R tiende a 0 y γ_ϵ tiende a 0 tambien lo que nos deja con

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{z+1}dz = -\int_{0}^{\infty} \frac{(ze^{2\pi i})^{a-1}}{x+1}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx$$

resolviendo la integral nos queda

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{z+1}dz = (1-e^{2a\pi i}) \int_{0}^{8} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx$$

Ahora podemos computar con el teorema del residuo.

Las singularidades de esta integral ocurren en $z = -1$ y este es un polo simple. Por tanto el residuo equivale a

$$\lim_{z\to -1} (z+1) \cdot \frac{z^{a-1}}{z+1} = (-1)^{a-1} = e^{\pi i(a-1)} = -e^{a\pi i} = -e^{a\pi i}$$

por tanto el teorema del residuo nos da

$$\int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{z+1}dz = -2\pi i e^{a\pi i}$$

y dado que $R \to \infty$ no afecta este resultado sustituyendo en nuestro contorno de integral descompuesto arriba nos queda

$$-2\pi i e^{a\pi i} = (1-e^{2a\pi i}) \int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx$$

que resolviendo la integral deseada nos da

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx &= -\frac{2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} \\
&= \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{a\pi i}(e^{a\pi i} - e^{-a\pi i})} \\
&= \frac{\pi}{sin(a\pi)}
\end{aligned}$$

Que ahora concluyendo nos da

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx = \frac{\pi}{sin(a\pi)}$$

6. Punto 11

7. Usando residuos establecer la siguiente igualdad

$$\int_0^\pi sin^{2n}(\theta)d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$$

Sea C el circulo unitario orientado positivamente $|z| = 1$. En vista de la formula binomial

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n}(\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_C \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^{2n+1}(-1)^n i}\int_C \frac{(z - z^{-1})^{2n}}{z}dz$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1}(-1)^n i}\int_c \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} z^{2n-k}(-z^{-1})^k z^{-1}$$

$$= \frac{1}{2^{2n+1(-1)^n i}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} (-1)^k \int_c z^{2n-2k-1} z$$

Ahora, cada una de esas integrales tiene valor 0 excepto cuando $k = n$ por tanto

$$\int_c z^{-1}dz = 2\pi i$$

y en consecuencia

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2^{2n+1}(-1)^n} i \cdot \frac{(2n)!(-1)^n 2\pi i}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$$