**Metodos Matematicos**
**Tarea 1**
**15 de febrero de 2024**

**Nombre:** *Sergio Montoya*

# Pregunta 1

## Parte A

$$
\begin{aligned}
z &= 3 + 4i \\
z &= 5e^{\alpha} \\
\alpha &= \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53^{\circ} \\
k &= 0, 1 \\
n &= 2 \\
(3 + 4i)^2 &= 5e^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= -5e^{\frac{\alpha}{2}} \\
.
\end{aligned}
$$

## Parte B

En este caso tenemos $f(z) = z^3$ por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
z \cdot z \cdot z &= \left(\left(x^2 - y^2\right) + i\,(2xy)\right) \cdot (x + iy) \\
&= x\left(x^2 - y^2\right) - 2xy^2 + i2x^2y + iy\left(x^2 - y^2\right) \\
&= x^3 - xy^2 - 2xy^2 + i2x^2y + ix^2y - iy^3 \\
&= \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3xy^2 - y^3\right).
\end{aligned}
$$

## Parte C

# Pregunta 2

## Parte A

En este caso dado que debemos utilizar las ecuaciones de Cauchy Rieman solo debemos comprobar que:

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{dv}{dy} \\
\frac{du}{dy} &= -\frac{dv}{dx}.
\end{aligned}
$$

Para esto primero debemos ver que $2z^2 - 1 = 2\left(x + iy\right)^2 - 1 = 2\left(x^2 - y^2 - 1\right) + i\left(4xy\right)$ por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= 4x \\
\frac{du}{dy} &= -4y \\
\frac{dv}{dx} &= 4y \\
\frac{dv}{dy} &= 4x.
\end{aligned}
$$

Lo cual muestra que las ecuaciones de Cauchy-Riemmann se cumplen.

### Parte B

En este caso pasemos de una vez a saber que $|z|^2 = x^2 - y^2$ por lo tanto, $v = 0$ esto quiere decir que en el único punto en donde las ecuaciones de Cauchy-Riemmann se cumplen es en 0 pero para ser analíticas debe ser en una vecindad. Por lo tanto, dado que no es una función analítica no puede ser una función holomorfa.

## Pregunta 3

### Parte A

Esto se da pues lo que se describe ahí es literalmente una función analítica. Por lo tanto, como se mostró en clase por ser analítica es holomorfa.

## Parte B

$$
\begin{aligned}
z &= re^{i\theta} \\
&= r\left(\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right) \\
u &= r\cos\left(\theta\right) \\
v &= r\sin\left(\theta\right) \\
A\frac{du}{dr} &= \cos\left(\theta\right) \\
\frac{du}{d\theta} &= -r\sin\left(\theta\right) \\
\frac{dv}{dr} &= \sin\left(\theta\right) \\
\frac{dv}{d\theta} &= r\cos\left(\theta\right) \\
\frac{du}{dr} &= \frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta} \\
\cos\left(\theta\right) &= \cos\left(\theta\right) \\
\frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta} \\
\sin\left(\theta\right) &= \sin\left(\theta\right).
\end{aligned}
$$

## Parte C

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\cos\left(\theta\right)}{r} \\
\frac{du}{dr} &= -\frac{\cos\left(\theta\right)}{r^2} \\
\frac{du}{d\theta} &= -\frac{\sin\left(\theta\right)}{r} \\
v &= -\frac{\sin\left(\theta\right)}{r} \\
\frac{dv}{dr} &= \frac{\sin\left(\theta\right)}{r^2} \\
\frac{dv}{d\theta} &= -\frac{\cos\left(\theta\right)}{r} \\
.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple en todos los puntos. A excepción de en el $0$ pues en ese caso $r = 0$ y se hace indeterminado.

# Pregunta 4

## Parte A

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^2 \\
z^2 &= \left(x^2 - y^2\right) + i2xy \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= 2y \\
f'(z) &= 2x + i_2 y
\end{aligned}
$$

.

## Parte B

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3\right) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= 3xy \\
f'(z) &= 3x^2 - 3y^2 + i3xy
\end{aligned}
$$

.

## Parte C

Como ya mostramos en los pasos anteriores $f'(z) = nz^{n-1}$ asumiremos el paso base como ya mostrado y pasaremos al paso inductivo. En el cual partiremos suponiendo que esto se cumple para $n$ deberemos conseguir $n+1$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^{n+1} \\
&= z^n \cdot z \\
f'(z) &= nz^{n-1}z + z^n \\
&= nz^n + z^n \\
&= (n+1)\, z^n
\end{aligned}
$$

.

## Parte D

Siendo esta una sumatoria (y habiendo mostrado en el punto anterior que $(z^n)' = nz^{n-1}$ esta derivada queda:

$$f'(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot i \cdot z^{i-1}$$

.

## Parte E

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ u &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ f'(z) &= \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

# Pregunta 5

## Parte A

Lo primero es verificar que sea armónica. Para esto nos interesa saber si cumple con la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2y + 3y^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2x + 6xy - 6y^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 6x - 12y \end{aligned}$$

.

Por lo tanto, esta función no es armónica.

### Parte B

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x\left(x\cos\left(y\right) - y\sin\left(y\right)\right) + e^x\cos\left(y\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x\left(x\cos\left(y\right) - y\sin\left(y\right)\right) + 2e^x\cos\left(y\right) \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x x\sin\left(y\right) - e^x\left(\sin\left(y\right) + y\cos\left(y\right)\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x x\cos\left(y\right) - e^x\left(2\cos\left(y\right) - y\sin\left(y\right)\right) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\
&.
\end{aligned}
$$

Dado que ahora sabemos que es armónica encontremos su armónica conjugada

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x x\cos\left(y\right) - e^x y\sin\left(y\right) + e^x\cos\left(y\right) \\
\int \frac{\partial v}{\partial x} dy &= e^x x\sin\left(y\right) - e^x\left(-y\cos\left(y\right) + \sin\left(y\right)\right) + g\left(x\right) + e^x\sin\left(y\right) \\
&= e^x x\sin\left(y\right) + e^x y\cos\left(y\right) + g\left(x\right) \\
-\frac{\partial u}{\partial y} &= +e^x x\sin\left(y\right) + e^x\sin\left(y\right) + e^x y\cos\left(y\right) \\
g(x) &= C \\
f(u,v) &= e^x x\cos\left(y\right) - y\sin\left(y\right) + i\left(e^x\sin\left(y\right) + e^x y\cos\left(y\right) + C\right) \\
&.
\end{aligned}
$$

## Pregunta 6

Dado que $f$ es holomorfa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \\
&= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= 0.
\end{aligned}
$$

Ahora suponga $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Luego $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

# Pregunta 7

## Parte A

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{-ie^{iz} + ie^{-iz}}{2} \\ &= -i\sinh(iz)\end{aligned}$$

.

## Parte B

esto se da literalmente por definición:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz)$$

.

## Parte C

$$-i\sin(iz) = -i\left(\frac{e^{i(iz) - e^{-i(iz)}}}{2i}\right) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sinh(z)$$

.

## Parte D

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh(z)$$

.

# Pregunta 8

## Parte A

Note que $\frac{2z+1}{z^2+z}$ tiene polos en $z = 0$ y $z = -1$, pero $-1 \notin |z| = \frac{1}{2}$.

$$\oint_c \frac{2z+1}{z^2+z} dz = \oint \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} dz$$
$$2z+1 = A(z+1) + Bz$$
$$A = 1$$
$$B = -1$$
$$\oint \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

.

## Parte B

Nótese que $C$ es un circulo centrado en $3i$ y de radio 1. Ademas, como dijimos en el punto anterior la función tiene polos en $0$ y en $-1$ y dado que no están en ese circulo esta integral es $0$

# Pregunta 9

Vamos a utilizar la formula de Integral de Cauchy.

$$f(z) = e^{iz}$$

.

Esta función sabemos que es holomorfa. Para notarlo solo necesitamos de las ecuaciones de Cauchy-Riemmann pero dado que ya se ha hecho previamente se asume como evidente.

$$\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)} 2i\pi}{n!}$$
$$z_0 = 0$$
$$f^{(2)}(z) = -e^{iz}$$
$$\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{-e^{i \cdot 0} 2i\pi}{2}$$
$$= -i\pi$$

.

# Pregunta 10

## Parte A

En este caso, partimos de que tenemos la integral de una multiplicación. Por lo tanto, podemos aplicar integración por partes. De modo que nos queda:

$$\begin{aligned}
\oint udv &= uv - \oint vdu \\
u &= \ln(z) \\
du &= \frac{1}{z}dz \\
dv &= f'(z)dz \\
v &= f(z) \\
\oint (\ln(z))\, f'(z)dz &= \ln(z)f(z) - \oint \frac{f(z)}{z}dz \\
&= \ln(z)f(z) - 2\pi i f(0) \\
&= 2\pi i f(z_0) - 2\pi i f(0) \\
&= 2\pi i(f(z_0) - f(0))
\end{aligned}$$

En este caso, el logaritmo natural equivale a $2\pi i$ pues al poner todo el circulo en la integral (que es C) este seria el resultado. Por otro lado la integral tiene un $f(0)$ por la formula de cauchy para integrales.

## Parte B

Sea $b$ cualquier punto distinto a $a$ en el vecindario definido. Sea $p$ la distancia entre $a$ y $b$. Si $C_p$ denota el circulo orientado positivamente $|b - a| = p$, centrado en $a$ y que pasa por $b$ la formula integral de Cauchy nos dice que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{f(z)dz}{z - a}$$

y la representación parametrica nos permitiria expresar esto como:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + pe^{i\theta})d\theta$$

Ahora, notamos de esta ultima expresión

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + pe^{i\theta})|d\theta$$

Ahora, dado que

$$|f(a + pe^{i\theta})| \leq |f(a)|$$

encontramos que

$$\int_0^{2\pi} |f(a + pe^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(a)| d\theta = 2\pi |f(a)|$$

por lo tanto

$$|f(a)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + pe^{i\theta})| d\theta$$

ademas, por estas dos inecuaciónes queda

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + pe^{i\theta})| d\theta$$

lo cual nos lleva a concluir que

$$|f(a + pe^{i\theta})| = |f(a)|$$

por lo tanto todos los puntos del circulo $|a - b| = p$ tiene el mismo valor. Ademas dado que $b$ puede ser cualquier punto entonces todos los puntos de este contorno valen exactamente lo mismo $f(a)$. Esta demostración fue adaptada del libro *Complex Variables and Applications* de *Churchill*.