Título del experimento

Nicolás Berrío-Herrera*
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 31 de mayo de 2023)

I. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Dado que nos interesa debelar la relación entre la estadística de Bose-Einstein y la termodinámica quizás uno de los mejores inicios es $< E >$. Esto debido a que tenemos una manera de describirlo.

En consecuencia si iniciamos de la definición para $< E >$ en física estadística tenemos

$$< E >= \int_0^\infty g(E) f_{BE}(E) E dE. \tag{1}$$

Ahora bien, para este caso, reemplacemos entonces con los valores que tenemos. En particular centrémonos en el caso de un solido para el cual

$$\begin{aligned} g(E) &= \frac{1}{\hbar\omega} \\ f_{BE}(E) &= \frac{1}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1} \end{aligned}$$
.

Lo que nos deja entonces con

$$< E >= \int_0^\infty \frac{E}{\hbar\omega\left(e^{\frac{E}{k_B T}} - 1\right)} dE. \tag{2}$$

Esta integral requiere un cambio de variable para ser solucionado de mejor manera. En particular tomaremos

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{K_B T} \\ dU &= \frac{dE}{K_B T}. \end{aligned}$$

Ahora bien, reemplazando en nuestra integral nos queda

$$< E >= \frac{(k_B T)^2}{\hbar\omega} \int_0^\infty \frac{U}{e^u - 1} dU. \tag{3}$$

En este caso, la integral resultante al hacer el cambio de variable resulta ser $\frac{\pi^2}{6}$ lo que nos deja con

$$< E >= \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\hbar\omega 6}. \tag{4}$$

Ahora teniendo esto, podemos considerar la expresion de $< E >$ para termodinamica con lo que conseguimos

$$< E >= TS + PV.$$

Ahora bien, una vez tenemos esto podemos ver que tenemos varias relaciones que nos pueden interesar. Para comenzar podemos hallar la entropia del sistema

$$\left(\frac{d < E >}{dT}\right)_{P,V} = S.$$

Ahora que tenemos $< E >$ podemos encontrar esta derivada lo que nos deja con

$$\left(\frac{d < E >}{dT}\right)_{P,V} = S = \frac{2\pi^2 k_B^2 T}{\hbar\omega 6}.$$

Ahora bien, dado que estamos en termodinámica podemos saber que

$$C = T\left(\frac{dS}{dT}\right)_{P,V} = \frac{2\pi^2 k_B^2 T}{\hbar\omega 6}.$$

Cosa que coincide con lo esperado pues $C = \frac{dU}{dT}$.
Por otro lado, ya con esto, podemos encontrar múltiples relaciones entre la termodinámica y la física estadística. Por ejemplo, si quisiéramos encontrar la energía libre de Helmholtz solo deberíamos encontrar

$$\begin{aligned} F &=< E > -TS \\ &= \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\hbar\omega 6} - \frac{2\pi^2 k_B^2 T^2}{\hbar\omega 6} \end{aligned}$$
.

II. CONCLUSIONES

* Correo institucional: n.barbosa648@uniandes.edu.co