Some Class
Random Examples

Your Name

Contents

Chapter 1

En este caso podemos dividir el problema en 3 subproblemas cada uno mas simple. Estos serian

- **Tramo Recto Vertical:** esto seria una linea que va de $y = R$ hasta $y = 2R$. Para un segmento recto se cumple que

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{|r|^2}\hat{r}$$

Sabemos que $dq = \lambda dy$, ademas, por la ubicación podemos saber que $|r|^2 = y^2$ y $\hat{r} = -\hat{y}$

En este caso, sabemos que este campo apunta para $-\hat{y}$. Ahora, para saber lo que vale tenemos:

$$\begin{aligned}
E_y^{(v)} &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{2R}\frac{dy}{y^2}(-\hat{y})\\
E_y^{(v)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{y}\right]_R^{2R}\hat{y}\\
E_y^{(v)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}\right]\hat{y}\\
E_y^{(v)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2-1}{2R}\right]\hat{y}\\
E_y^{(v)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R}\right]\hat{y}
\end{aligned}$$

- **Tramo Recto Horizontal:** Del mismo modo que en el punto anterior podemos ver que $dq = \lambda dx$, ademas, por la ubicación podemos saber que $|r|^2 = x^2$ y $\hat{r} = -\hat{x}$ con esto entonces nos queda en esencia la misma integral que antes pero con $\hat{x}$

$$\begin{aligned}
E_x^{(h)} &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{2R}\frac{dx}{x^2}(-\hat{x})\\
E_x^{(h)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{2R}\hat{x}\\
E_x^{(h)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}\right]\hat{x}\\
E_x^{(h)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2-1}{2R}\right]\hat{x}\\
E_x^{(h)} &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R}\right]\hat{x}
\end{aligned}$$

- **Tramo de Arco de Cuarto de Circulo:** De manera similar al punto anterior

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\ell}{R^2}\left(-\hat{r}\right)$$

donde $d\ell$ es el diferencia de longitud para el arco que depende del angulo θ. Por lo tanto esto seria

$$\begin{aligned}
dE &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rd\theta}{R^2}\hat{r} \\
E &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{R}\hat{r} \\
E &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\theta\hat{r} \\
E &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\int \cos\theta d\theta\hat{x} + \int \sin\theta d\theta\hat{y}\right) \\
E &= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} - \left(\hat{x} + \hat{y}\right) \\
E &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\hat{x} + \hat{y}\right)
\end{aligned}$$

Ahora si sumamos todo nos da:

$$\begin{aligned}
E(P) &= E^a + E^v + E^h \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\hat{x} + \hat{y}\right) - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R}\right]\hat{x} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R}\right]\hat{y} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\hat{x} + \hat{y}\right) - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2R}\right]\left(\hat{x} + \hat{y}\right) \\
&= \frac{2\lambda - \lambda}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 R}\left(\hat{x} + \hat{y}\right) \\
&= \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\hat{x} + \hat{y}\right)
\end{aligned}$$

Chapter 2

2.1

Para este punto vamos a usar la ley de Gauss

2.1.1 $r < a$

No se tiene carga encerrada por lo tanto $E = 0$

2.1.2 $a < r < b$

En este caso la carga encerrada es:

$$
\begin{aligned}
Q_{enc} &= \int \rho(r)dV \\
Q_{enc} &= \int \rho(r)rdrd\phi dz \\
Q_{enc} &= \int_a^r \frac{k}{r^3}rdr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \\
Q_{enc} &= \int_a^r \frac{k}{r^3}rdr2\pi L \\
Q_{enc} &= 2\pi Lk \int_a^r \frac{1}{r^2}dr \\
Q_{enc} &= 2\pi Lk \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora por Gauss tenemos:

$$
\begin{aligned}
E2\pi rL &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \\
E &= \frac{1}{\varepsilon_0 2\pi rL}2\pi Lk \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \\
E &= \frac{1}{\varepsilon_0 \cancel{2\pi} r\cancel{L}}\cancel{2\pi}\cancel{L}k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \\
E &= \frac{k}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \\
E &= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{ar} - \frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

2.1.3 $r > b$

Para este caso ahora tenemos siempre la misma carga encerrada. El calculo es esencialmente el mismo que en el punto anterior pero cambiando los limites de integración de r a b. Repitamos el proceso:

$$
\begin{aligned}
Q_{enc} &= \int \rho(r) dV \\
Q_{enc} &= \int \rho(r) r dr d\phi dz \\
Q_{enc} &= \int_a^b \frac{k}{r^3} r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \\
Q_{enc} &= \int_a^b \frac{k}{r^3} r dr 2\pi L \\
Q_{enc} &= 2\pi L k \int_a^b \frac{1}{r^2} dr \\
Q_{enc} &= 2\pi L k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora poniendolo en Gauss tenemos:

$$
\begin{aligned}
E 2\pi r L &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \\
E &= \frac{1}{\varepsilon_0 2\pi r L} 2\pi L k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\
E &= \frac{1}{\varepsilon_0 \cancel{2\pi} r \cancel{L}} \cancel{2\pi} \cancel{L} k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\
E &= \frac{k}{\varepsilon_0 r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)
\end{aligned}
$$

Con esto encontramos el campo para todo r y si lo escribimos completo seria

$$
E(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{k}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{ar} - \frac{1}{r^2}\right) & a < r < b \\ \frac{k}{\varepsilon_0 r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & r > b \end{cases}
$$

2.2

Para este caso partimos de:

$$
V(r_f) - V(r_i) = -\int_{r_i}^{r_f} E(r) dr
$$

Con esto entonces es importante notar que esta integral para nuestro caso debe ser dividida en tres secciones para que coincida con las partes planeadas:

$$
\begin{aligned}
V(2b) - V\left(\frac{a}{2}\right) &= -\int_{\frac{a}{2}}^{2b} E(r) dr \\
&= -\left(\int_{\frac{a}{2}}^{a} E(r) dr + \int_a^b E(r) dr + \int_b^{2b} E(r) dr\right)
\end{aligned}
$$

Para la primera integral se da que:

$$
\int_{\frac{a}{2}}^{a} E(r) dr = \int_{\frac{a}{2}}^{a} 0 dr = 0
$$

Para la segunda integral tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b E(r)dr &= \int_a^b \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{ar}-\frac{1}{r^2}\right)dr \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0}\int_a^b \left(\frac{1}{ar}-\frac{1}{r^2}\right)dr \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\int_a^b \frac{1}{ar}dr - \int_a^b \frac{1}{r^2}dr\right) \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(a^{-1}\int_a^b \frac{1}{r}dr - \int_a^b \frac{1}{r^2}dr\right) \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(a^{-1}\left[\ln(r)\right]_a^b - \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b\right) \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(a^{-1}\left[\ln(b)-\ln(a)\right] - \left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right]\right) \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)
\end{aligned}
$$

Para la tercera integral tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_b^{2b} E(r)dr &= \int_b^{2b} \frac{k}{\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)dr \\
\int_b^{2b} E(r)dr &= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\int_b^{2b}\frac{1}{r}dr \\
\int_b^{2b} E(r)dr &= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left[\ln(r)\right]_b^{2R} \\
\int_b^{2b} E(r)dr &= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left[\ln(2b)-\ln(b)\right] \\
\int_b^{2b} E(r)dr &= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left[\ln\left(\frac{2b}{b}\right)\right] \\
\int_b^{2b} E(r)dr &= \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\ln(2)
\end{aligned}
$$

Ahora reemplazando en el termino original tenemos:

$$
\begin{aligned}
V(2b)-V\left(\frac{a}{2}\right) &= -\left(\int_{\frac{a}{2}}^a E(r)dr + \int_a^b E(r)dr + \int_b^{2b} E(r)dr\right) \\
&= -\left(0 + \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\ln(2)\right) \\
&= -\frac{k}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\ln(2)\right)
\end{aligned}
$$

Chapter 3

3.1

Las condiciones de frontera son:

1. **Continuidad** en la superficie debe cumplirse que:
$$V_{r<R}(R,\theta) = V_{r>R}(R,\theta) = V_0(\theta) = kP_3(\cos\theta)$$
2. **Discontinuidad de la Derivada Radial:** debido a la carga superficial
$$-\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r>R}}{\partial r}\right|_{r=R} + \varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r<R}}{\partial r}\right|_{r=R} = \sigma(\theta)$$
3. $V_{r<R}$ debe ser finito en $r = 0$
4. $r \to \infty \implies V_{r>R} \to 0$

3.2

Para el caso de $r < R$ tenemos que

$$V_{r<R}(R) = V_0$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta) = kP_3(\cos\theta)$$
$$\int_{-1}^{1}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta)\right] P_m(\cos\theta) d\cos\theta = \int_{-1}^{1} kP_3(\cos\theta)P_m(\cos\theta) d\cos\theta$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell \int_{-1}^{1} P_\ell(\cos\theta)P_m(\cos\theta) d\cos\theta = k\int_{-1}^{1} P_3(\cos\theta)P_m(\cos\theta) d\cos\theta$$
$$\int_{-1}^{1} P_3(\cos\theta)P_m(\cos\theta) d\cos\theta = 0 \ \forall m \neq 3$$
$$A_\ell R^\ell \int_{-1}^{1} P_\ell(\cos\theta)P_m(\cos\theta) d\cos\theta = 0 \ \forall \ell \neq m$$

Con esto entonces podemos notar que el unico termino que sobrevive es $\ell = 3$ podriamos continuar por esta ruta pero la verdad es que esta integral ya nos aporto lo que debia y el termino $\frac{2}{2\ell+1}$ se cancelaria para ambos casos. Con esto entonces tenemos:

$$V_{r<R}(R) = V_0$$
$$A_3 R^3 P_3(\cos\theta) = kP_3(\cos\theta)$$
$$A_3 = \frac{k}{R^3}$$

Entonces en general esto seria:

$$V_{r<R}(R) = \frac{k}{R^3} r^3 P_3(\cos\theta)$$

3.3

Este funciona de manera muy similar a la sección anterior partimos de:

$$V_{r>R}(R) = V_0$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = k P_3(\cos\theta)$$
$$\int_{-1}^{1} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)\right] P_m(\cos\theta) d\cos\theta = \int_{-1}^{1} k P_3(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta$$
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} \int_{-1}^{1} P_\ell(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta = k \int_{-1}^{1} P_3(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta$$
$$\int_{-1}^{1} P_3(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta = 0 \ \forall m \neq 3$$
$$\frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} \int_{-1}^{1} P_\ell(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta = 0 \ \forall \ell \neq m$$

Como en el caso anterior volvemos a quedar en el caso $\ell = 3$ y volvemos a ignorar lo que sigue pues de nuevo simplemente se cancelaria.

$$V_{r>R}(R) = V_0$$
$$\frac{B_3}{R^{3+1}} P_3(\cos\theta) = k P_3(\cos\theta)$$
$$\frac{B_3}{R^4} = k$$
$$B_3 = k R^4$$

Lo que nos deja con el termino general:

$$V_{r>R} = k \frac{R^4}{r^4} P_3(\cos\theta)$$

3.4

tenemos

$$-\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r>R}}{\partial r}\right|_{r=R} + \varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r<R}}{\partial r}\right|_{r=R} = \sigma(\theta)$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r>R}}{\partial r}\right|_{r=R} + \varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r<R}}{\partial r}\right|_{r=R} \\
&= -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial k \frac{R^4}{r^4} P_3(\cos\theta)}{\partial r}\right|_{r=R} + \varepsilon_0 \left.\frac{\partial \frac{k}{R^3} r^3 P_3(\cos\theta)}{\partial r}\right|_{r=R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \left.\frac{\partial k \frac{R^4}{r^4} P_3(\cos\theta)}{\partial r}\right|_{r=R} &= -\left. 4k\frac{R^4}{r^5} P_3(\cos\theta)\right|_{r=R} \\
&= -4\frac{k}{R} P_3(\cos\theta) \\
\left.\frac{\partial \frac{k}{R^3} r^3 P_3(\cos\theta)}{\partial r}\right|_{r=R} &= \left. 3\frac{k}{R^3} r^2 P_3(\cos\theta)\right|_{r=R} \\
&= 3\frac{k}{R} P_3(\cos\theta) \\
\sigma(\theta) &= -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r>R}}{\partial r}\right|_{r=R} + \varepsilon_0 \left.\frac{\partial V_{r<R}}{\partial r}\right|_{r=R} \\
\sigma(\theta) &= \varepsilon_0 4\frac{k}{R} P_3(\cos\theta) + \varepsilon_0 3\frac{k}{R} P_3(\cos\theta) \\
\sigma(\theta) &= \varepsilon_0 7\frac{k}{R} P_3(\cos\theta)
\end{aligned}$$