Métodos Matemáticos
Tarea 5

Sergio Montoya

Contents

Chapter 1

Arfken:20.2.1

1. Dado que nos piden que sea condición suficiente y necesaria necesitamos mostrar las dos direcciones.

   $\rightarrow$ Sea f real entonces $f(x) = f^*(x)$ lo que quiere decir:

$$\begin{aligned} g^*(\omega) &= \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x} dx\right]^* \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx = g(-\omega)\,. \end{aligned}$$

   $\leftarrow$ Sin asumir de $f(x)$ tenemos por el enunciado:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

.

   Esto se debe cumplir para todo ω cosa que solo puede ser cierta si $f(x) = f^*(x)$.

2. Para probar esto la muestra es esencialmente igual que la anterior. Lo que sucede es que el $-$ lo toma f

Chapter 2

Arfken:20.2.4

Para encontrar la transformada de Fourier de este pulso tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx \\
&= \int_{-\frac{1}{a}}^{0} h\,(1 + a\,|x|)\, e^{-i\omega x} dx + \int_{0}^{\frac{1}{a}} h\,(1 - a\,|x|)\, e^{-i\omega x} dx \\
&= h \int_{0}^{\frac{1}{a}} e^{i\omega x} dx - a\,|x|\, e^{-i\omega x} + \int_{0}^{\frac{1}{a}} e^{-i\omega x} dx - a\,|x|\, e^{-i\omega x} \\
&= h \int_{0}^{\frac{1}{a}} \left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right) - a\,|x| \left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right) dx \\
&= \frac{ha}{\omega^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{a}\right)\right).
\end{aligned}$$

Chapter 3

Arfken:20.2.8

$$
\begin{aligned}
a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0 e^{\frac{-\omega_0 t}{(2Q)}} e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t A} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0 - i\omega\right)t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega_0}{2Q} + (\omega_0 - \omega)i\right)t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_0 \cdot \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q} + i(\omega_0 - \omega)} \\
a^*(\omega)\, a(\omega) &= \frac{A_0^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)}.
\end{aligned}
$$

Chapter 4

Arfken:20.3.6

Haciendo $g(t)$ la transformada de fourier tenemos entonces

$$\left[\phi(x)''\right]^T = -t^2 g(t).$$

entonces nos queda

$$Dt^2 g(t) + K^2 D g(t) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}}.$$

Con esto podemos solucionar g de manera algebraica como:

$$g(t) = \frac{Q}{D\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t^2 + K^2}.$$

Y ahora necesitamos la transformada inversa con lo que queda:

$$\phi(x) = \frac{Q}{2KD} e^{-|Kx|}.$$

Chapter 5

Arfken:20.4.3

1. En este caso

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{itx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{it} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \frac{2\sin(at)}{t} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(at)}{t}.
\end{aligned}
$$

2. Tenemos por la relación de Parseval:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt &= \int_{-1}^{1} \left[f(x)\right]^2 dx \\
\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt &= 2 \\
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt &= 2\frac{\pi}{2} \\
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt &= \pi.
\end{aligned}
$$

Chapter 6

Tellez:4.6.3

1. Tenemos que dado que la intensidad debe cumplir $J(k) = J(-k)$ con lo que tendríamos que expandir para que los valores en $-k$ también lleguen al mismo resultado que k con lo que queda:

$$J(k) = C\left(\delta(k - k_1) + \delta(k - k_2) + \delta(k + k_1) + \delta(k + k_2) +\right).$$

2.

$$\begin{aligned}
I(x) &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} J(k)\, e^{ikx} dk \\
I(X) &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} C\left(\delta(k - k_1) + \delta(k - k_2) + \delta(k + k_1) + \delta(k + k_2) +\right) e^{ikx} dk \\
I(X) &= I_0 + C \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(k - k_1) + \delta(k - k_2) + \delta(k + k_1) + \delta(k + k_2) +\right) e^{ikx} dk \\
I(X) &= I_0 + C\left(e^{ik_1x} + e^{ik_2x} + e^{-ik_1x} + e^{-ik_2x}\right) \\
I(X) &= I_0 + C2\left(\cos(k_1x) + \cos(k_2x)\right).
\end{aligned}$$

3.

$$I(X) = I_0 + C4\left(\cos\left(\frac{k_1x + k_2x}{2}\right)\cos\left(\frac{k_1x - k_2x}{2}\right)\right).$$

4.

5. Esencialmente lo que hace esta convolución es esencialmente representar la superposición de estas dos funciones por lo que nos expresa la intensidad como la muestra de un elemento solo y primordial junto con el choque de las impurezas naturales de la física.

6. Tenemos

$$\begin{aligned}
I &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} W^* J(k)\, e^{ikx} \\
\hat{I} &= 4C \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W} e^{ikx} dx \\
I &= 4CW.
\end{aligned}$$