Métodos Matemáticos
Tarea 2

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Preguntа 1: 11.7.1

Question 1: Pregunta 11.7.1

Determine la naturaleza de las singularidades para cada una de las siguientes funciones y evalué el residuo $(a > 0)$

1. $\frac{1}{z^2+a^2}$.
2. $\frac{1}{(z^2+a^2)^2}$.
3. $\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$.
4. $\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2+a^2}$.
5. $\frac{ze^{+iz}}{z^2+a^2}$.
6. $\frac{ze^{+iz}}{z^2-a^2}$.
7. $\frac{e^{+iz}}{z^2-a^2}$.
8. $\frac{z^{-k}}{z+1}$. $0 < k < 1$.

1. $\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)}$. Por lo tanto, tiene dos polos simples $\{ia, -ia\}$. Ademas, los residuos serian $\left\{\frac{1}{2ia}, -\frac{1}{2ia}\right\}$
2. $\frac{1}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{(z-ia)^2(z+ia)^2}$. De manera parecida al anterior, estos son dos polos pero esta vez de segundo orden. Por lo tanto, sus residuos serian $\left\{\frac{1}{(4a^3i)}, -\frac{1}{4a^3i}\right\}$
3. $\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$.
   Ahora con este note que:
   $$\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z^2}{(z-ia)^2(z+ia)^2}.$$
   por lo tanto sus polos son los mismo $\{ia, -ia\}$. Sin embargo ahora sus residuos tienen encima un z^2 por lo que el resultado seria $\left\{-\frac{1}{4ai}, \frac{1}{4ai}\right\}$
4. $\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2+a^2}$.
   En este caso tenemos un resultado muy similar al del inicio donde tenemos dos polos simples en $\{ia, -ia\}$. En este caso al evaluar nos queda:
   $$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\frac{1}{ai}\right)}{2ai} &= -\frac{\sin\left(-\frac{i}{a}\right)i}{2a} \\ &= -\frac{\sinh\left(\frac{1}{a}\right)}{2a}\end{aligned}$$
   .
5. $\frac{ze^{+iz}}{z^2+a^2}$.
   Tenemos
   $$\frac{ze^{+iz}}{z^2+a^2} = \frac{ze^{+iz}}{(z+ia)(z-ia)}.$$

por lo tanto son polos simples. Ahora bien al evaluar los residuos nos queda:

$$\frac{iae^{i(ia)}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2}$$
$$\frac{-iae^{i(-ia)}}{-2ia} = \frac{e^{a}}{2}.$$

6. $\frac{ze^{+iz}}{z^2-a^2}$.
   Tenemos
$$\frac{ze^{+iz}}{z^2-a^2} = \frac{ze^{+iz}}{(z-a)(z+a)}.$$
   por lo tanto tiene dos polos simples, en a y $-a$. Los residuos son:
$$\frac{ae^{ia}}{2a} = \frac{e^{ia}}{2}$$
$$\frac{-ae^{-ia}}{-2a} = \frac{e^{-ia}}{2}$$
$$.$$

7. $\frac{e^{+iz}}{z^2-a^2}$.
   Tenemos:
$$\frac{e^{+iz}}{z^2-a^2} = \frac{e^{+iz}}{(z-a)(z+a)}.$$
   por lo tanto, tenemos dos polos simples, en a y $-a$. Los residuos son:
$$\frac{e^{ia}}{2a}$$
$$-\frac{e^{-ia}}{2a}.$$

8. $\frac{z^{-k}}{z+1}$. $0 < k < 1$. Tenemos un polo simple en $z = -1$. El residuo seria:
$$e^{-i\pi k}.$$
   dado que $-1 = e^{i\pi}$

Chapter 2

Pregunta 2: 11.8.3

Question 2: Pregunta 11.8.3

Muestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2} = \frac{2\pi}{1 - t^2}, \text{ para } |t| < 1.$$

Que pasa si $|t| > 1$. Que pasa si $|t| = 1$

Para iniciar tomamos $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ con lo que podemos hacer el cambio de variable $z = e^{i\theta}$. Tomando en cuenta:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ dz &= ie^{i\theta}d\theta \\ \frac{dz}{iz} &= d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta integral queda como:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t\cos(\theta) + t^2} &= \oint_C \frac{dz}{1 - t\left(z + z^{-1}\right) + t^2} \frac{1}{iz} \\ &= -i \oint_C \frac{dz}{z - t\left(z^2 + 1\right) + t^2 z} \\ &= \oint_C \frac{dz}{(z - t)\left(z - \frac{1}{t}\right) t} \end{aligned}$$

.

En este caso, es donde importa que $|t| < 1$ pues esto implica que $\frac{1}{t}$ esta fuera del contorno y por lo tanto no tenemos que considerar ese residuo. En caso de que esto no fuera así tendríamos o que considerar el residuo o si es exactamente igual a 1 no estaría bien definido y nos tocaría atacarlo como una integral principal.

$$\begin{aligned} Res_{z=t} f &= \left. \frac{(z - t)\, i}{(z - t)\left(z - \frac{1}{t}\right) t} \right|_{z=t} \\ &= \frac{i}{t^2 - 1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral total es:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t\cos(\theta) + t^2} &= -i \oint_C \frac{dz}{(z-t)\left(z - \frac{1}{t}\right)t} \\ &= \left(-\frac{2\pi}{t^2 - 1}\right) \\ &= \frac{2\pi}{1 - t^2}.\end{aligned}$$

Chapter 3

Preguntа 3: 11.8.8

Question 3: Pregunta 11.8.8

Evalué

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x^2} dx, \; a > b > 0..$$

NAS. $\pi(a-b)$

En este caso empezamos por ver que se puede aplicar la ley de $L'Hopital$ para calcular el limite en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-b\sin(bx) + a\sin(ax)}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-b^2\cos(bx) + a^2\cos(ax)}{2} \\
&= \frac{a^2 - b^2}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función no tiene una singularidad en $x = 0$. Ahora bien, con esto en mente podemos desarrollar esta integral simplemente haciendo integración por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2}.$$

Dado que son iguales haremos el desarrollo equivalente para un valor imaginario c

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(cx)}{x^2} &= -\frac{\cos(cx)}{x} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\sin(cx)}{x} dx \\
&= -\frac{\cos(cx)}{x} - c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx)}{x} dx \\
u &= cx \\
du &= cdx \\
&= -\frac{\cos(cx)}{x} - 2c\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.
\end{aligned}$$

Donde esta ultima es una integral trigonométrica con valor $\int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$
Por lo tanto esta integral queda como:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x^2} dx &= -\frac{\cos(bx)}{x} - b\pi - \left(-\frac{\cos(ax)}{x} - a\pi\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \pi(a-b).
\end{aligned}$$

Chapter 4

Pregunta 4: 11.8.12

Question 4: Pregunta 11.8.12

Muestre que $(a > 0)$:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$ ¿Como se modifica el lado derecho si $\cos(x)$ se reemplaza por $\cos(kx)$?
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}$ ¿Como se modifica el lado derecho si $\sin(x)$ se reemplaza por $\sin(kx)$?

1. Note que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x-ia)(x+ia)} dx = \frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} - \oint_{-C} \frac{e^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)}\right].$$

Con C un semicirculo infinito.

Con lo cual:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} &= 2\pi i \ Res_{z=ia} \\ &= 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia} \\ &= \frac{\pi}{a} e^{-a}.\end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned}\oint_{-C} \frac{e^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)} &= 2\pi i \ Res_{z=-ia} \\ &= 2\pi i \frac{e^{-a}}{-2ia} \\ &= -\frac{\pi}{a} e^{-a}.\end{aligned}$$

Volviendo al enunciado original:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} - \oint_{-C} \frac{e^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)}\right].$$

Por lo tanto queda

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}dx &= \frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} - \oint_{-C} \frac{e^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{a}e^{-a} - \left(-\frac{\pi}{a}e^{-a}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{a}e^{-a}\right] \\
&= \frac{\pi}{a}e^{-a}.
\end{aligned}$$

2. Note que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{(x-ia)(x+ia)}dx = \frac{1}{2i}\left[\oint_C \frac{ze^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} + \oint_{-C} \frac{ze^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)}\right].$$

Con C un semicirculo infinito. Con lo cual

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{ze^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} &= 2\pi i \ Res_{z=ia} \frac{ze^{izz}}{(z+ia)(z-ia)} \\
&= 2\pi i \frac{iae^{-a}}{2ia} \\
&= \pi e^{-a} i.
\end{aligned}$$

Y ademas

$$\begin{aligned}
\oint_{-C} \frac{e^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)} &= 2\pi i \ Res_{z=-ia} \frac{ze^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)} \\
&= 2\pi i \frac{-iae^{-a}}{-2ia} \\
&= i\pi e^{-a}.
\end{aligned}$$

Volviendo al enunciado original tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}dx &= \frac{1}{2i}\left[\oint_C \frac{ze^{iz}}{(z+ia)(z-ia)} + \oint_{-C} \frac{ze^{-iz}}{(z+ia)(z-ia)}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[i\pi e^{-a} + i\pi e^{-a}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[2i\pi e^{-a}\right] \\
&= \pi e^{-a}
\end{aligned}$$

Chapter 5

Preguntа 5: 11.8.17

Question 5: Pregunta 11.8.17

Evalué

$$I = \int_0^\infty \frac{x^p \ln(x)}{x^2+1} dx, \; 0 < p < 1.$$

Para iniciar vamos a utilizar el contorno de la imagen 5.1

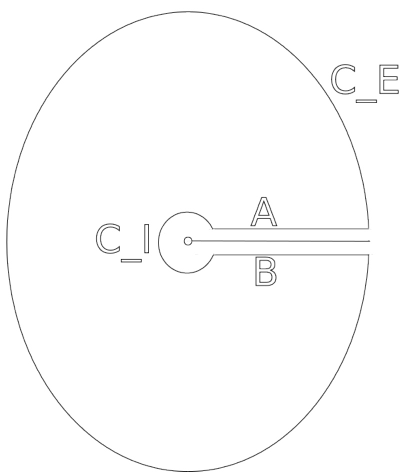

Figure 5.1: Contorno en el que haremos la integral de este punto

Como se puede ver este contorno esta compuesto de cuatro trazos. A es la integral que nos interesa, B es la integral que nos intereza pero recorrida en el sentido opuesto. Por ultimo C_I y C_E son contornos que no van a aportarnos nada pues $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ y $\lim_{z\to 0} z^p \ln(z) = 0$.

Ahora bien, para el contorno B podemos tomar que $z^p = x^p e^{2\pi i p}$ y $\ln(z) = \ln(x) + 2\pi i$ por lo tanto esto queda:

$$\begin{aligned}
\int_\infty^0 \frac{z^p \ln(z)}{z^2+1} dz &= -\int_0^\infty \frac{x^p e^{2\pi i p}\left[\ln(z) + 2\pi i\right]}{x^2+1} dx \\
&= -\left[\int_0^\infty \frac{x^p e^{2\pi i p} \ln(x)}{x^2+1} dx + \int_0^\infty \frac{x^p e^{2\pi i p} 2\pi i}{x^2+1} dx\right] \\
&= -\left[e^{2\pi i p} \int_0^\infty \frac{x^p \ln(x)}{x^2+1} dx + 2\pi i e^{2\pi i p} \int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+1}\right] \\
&= -e^{2\pi i p} I - 2\pi i e^{2\pi i p} \int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+1} dx.
\end{aligned}$$

Esta ultima integral se hizo en el capitulo del libro. En particular, se hizo en el ejemplo 1.8.8 y se hace de una manera muy similar a lo que estamos haciendo en este momento. Por lo tanto, no se hará en esta tarea y tendremos como uso el resultado de

$$I = \frac{\pi \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\sin\left(p\pi\right)} = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}.$$

Ahora, si juntamos todo tenemos:

$$\oint_C \frac{z^p \ln(z)}{z^2+1} dz = I - e^{2\pi i p} I - 2\pi i e^{2\pi i p} \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} = I\left(1 - e^{2\pi i p}\right) - \frac{\pi^2 i e^{2\pi i p}}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}.$$

Ahora bien, note que:

$$\oint_C \frac{z^p \ln(z)}{z^2+1} = \oint_C \frac{z^p \ln(z)}{(z+i)(z-i)}.$$

Por lo tanto, solo nos interesan los residuos en estos dos polos y sus residuos serian:

$$\begin{aligned}
Res_{z=i} \frac{z^p \ln(z)}{(z-i)(z+1)} &= \frac{e^{\pi i \frac{p}{2}} \left(\frac{\pi i}{2}\right)}{2i} \\
Res_{z=i} \frac{z^p \ln(z)}{(z-i)(z+1)} &= \frac{e^{3\pi i \frac{p}{2}} \left(\frac{3\pi i}{2}\right)}{-2i} \\
\oint_C \frac{z^p \ln(z)}{z^2+1} &= 2\pi i \sum Res \frac{z^p \ln(z)}{(z-i)(z+1)} \\
&= 2\pi i \left[\frac{e^{\pi i \frac{p}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 3\frac{e^{3\pi i \frac{p}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \right] \\
&= \pi^2 i \left[\frac{e^{\pi i \frac{p}{2}} - 3e^{3\pi i \frac{p}{2}}}{2} \right] \\
&= \frac{\pi^2 i}{2} \left[e^{\pi i \frac{p}{2}} - 3e^{3\pi i \frac{p}{2}} \right].
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{\pi^2 i}{2} \left[e^{\pi i \frac{p}{2}} - 3e^{3\pi i \frac{p}{2}} \right] = I\left(1 - e^{2\pi i p}\right) - \frac{\pi^2 i e^{2\pi i p}}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}.$$

Ahora desarrollamos con esto:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2 i}{2} \left[e^{\pi i \frac{p}{2}} - 3e^{3\pi i \frac{p}{2}} \right] &= I\left(1 - e^{2\pi i p}\right) - \frac{\pi^2 i e^{2\pi i p}}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \\
I\left(1 - e^{2\pi i p}\right) &= \frac{\pi^2 i}{2} \left[e^{\pi i \frac{p}{2}} - 3e^{3\pi i \frac{p}{2}} \right] + \frac{\pi^2 i e^{2\pi i p}}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi^2 i}{2} \left[e^{\pi i \frac{p}{2}} - 3e^{3\pi i \frac{p}{2}} + \frac{2e^{2\pi i p}}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \right] \\
\text{Multiplicamos por } &- e^{-\pi i p} \\
I\left(-e^{-\pi i p} + e^{i\pi p}\right) &= \frac{\pi^2 i}{2} \left[-e^{-\pi i \frac{p}{2}} + 3e^{\pi i \frac{p}{2}} - \frac{2e^{\pi i p}}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \right] \\
I \sin\left(p\pi\right) &= \frac{\pi i}{2} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \right] \\
I\left(2\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right) &= \frac{\pi i}{2} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \right].
\end{aligned}$$

Con lo cual llegamos al resultado deseado:

$$I = \frac{\pi^2 \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{4\cos^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)}.$$

Chapter 6

Preguntas 6: 11.8.22

Question 6: Pregunta 11.8.22

Muestre que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Pista: Pruebe el contorno 6.1, con $\theta = \frac{2\pi}{n}$

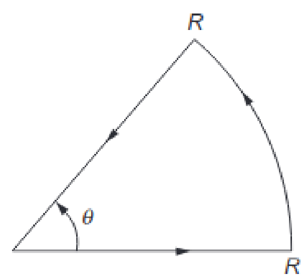

FIGURE 11.30 Sector contour.

Figure 6.1: Figura ayuda para el problema

Para este caso tomando el contorno que nos dicen con $\theta = \frac{2\pi}{n}$ nos queda dividido en 3 contornos donde el semicirculo no aporta pues $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{1+z^n} = 0$. Ahora bien, tome en cuenta que podemos definir el valor que cambia si consideramos que esto queda básicamente como:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{dz}{1+z^n} &= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} + \int_\infty^0 e^{\frac{2\pi i}{n}} \frac{dx}{1+x^n} \\
&= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} - e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} \\
&= \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}
\end{aligned}$$

.

Ahora bien, tenemos que la integral compleja encierra un polo simple en $z = e^{\frac{\pi i}{n}}$ por lo tanto podemos calcular su residuo con un limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{n}}} \frac{z-e^{\frac{\pi i}{n}}}{1+z^n} &= \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{n}}} \frac{1}{nz^{n-1}} \\
&= \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{n}}} \frac{z^{1-n}}{n} \\
&= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}(1-n)}}{n} \\
&= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}e^{\pi i}}{n} \\
&= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}.
\end{aligned}$$

Con esto entonces:

$$\begin{aligned}
2\pi i\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n} &= \left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} \\
\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} &= \frac{\pi}{n}\frac{2ie^{\frac{\pi i}{n}}}{\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)} \\
&= \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Chapter 7

Preguntа 7: 11.8.27

Question 7: Pregunta 11.8.27

Muestre que

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Pista: Pruebe el contorno de la figura 7.1

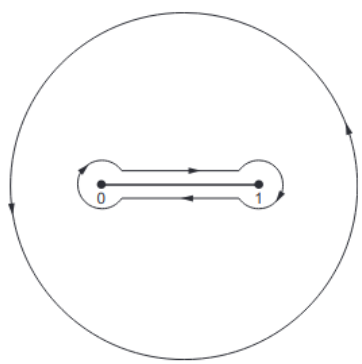

Figure 7.1: Figura pregunta 11.8.27

Para iniciar, note que podemos tomar:

$$\oint_C \frac{dz}{z^{\frac{2}{3}} (1-z)^{\frac{1}{3}}}.$$

1. Linea arriba, de 0 a 1. Esta es básicamente la integral que queremos así que simplemente lo llamaremos I.

2. Linea Abajo, de 1 a 0. Esto es en esencia el inverso de la integral que buscamos. Por lo tanto tomamos que $z^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$ y $(1-z)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{-2\pi i}{3}} (1-x)^{\frac{1}{3}}$. Por lo tanto, esto queda como: $-e^{\frac{2\pi i}{3}} I$

3. Los dos círculos alrededor de 0 y 1 no aportan pues en ambos casos el limite se va a 0 y por tanto no aportan a la integral.

4. En el circulo que rodea todo. En este caso el termino se vuelve $\frac{1}{(-1)^{\frac{1}{3}} z}$ y debemos escoger una rama. Para hacerlo, note que en números grandes $z^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$, pero $(1-z)^{\frac{1}{3}} = |1-x|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{-\pi i}{3}}$ por lo tanto, la integral se vuelve $\frac{1}{e^{\frac{-\pi i}{3}} z}$ con lo que se podría simplemente tomar como $e^{\frac{\pi i}{3}} \oint_{C_E} \frac{dz}{z}$ por lo que dado que que C_E es una circunferencia el valor total seria $e^{\frac{\pi i}{3}} 2\pi i$

Ahora, ademas note que en este contorno no hay ningún polo dentro. Por lo tanto el resultado de la integral compleja es 0 y eso nos deja con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
I - e^{\frac{2\pi i}{3}} I + 2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}} &= 0 \\
I\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= -2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}} \\
I &= \frac{-2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}}}{\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)} \\
&= -\frac{2i}{e^{-\frac{\pi i}{3}}\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)}\pi \\
&= -\frac{2i}{e^{\frac{-\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{3}}}\pi \\
&= \frac{2i}{e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{\frac{-\pi i}{3}}} \\
&= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right)} \\
&= \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$