Métodos Matemáticos
Taller Examen 3

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Problema Sturm-Liouville

1.1 a

En este caso iniciamos:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}f|g\rangle &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right) - q(x)f(x)\right]^* g(x)dx \\
&= \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df^*}{dx}\right) g dx - \int_a^b q(x) f^* g dx \\
u = g; du &= \frac{dg}{dx}dx \\
dv = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right)dx; v &= \left(p(x)\frac{df}{dx}\right) \\
\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df^*}{dx}\right) g dx &= \left[p(x)\frac{df^*}{dx}g\right]_a^b - \int_a^b p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx}dx \\
\left[p(x)\frac{df^*}{dx}g\right]_a^b &= 0 \\
&= -\int_a^b p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx}dx - \int_a^b q(x) f^* g dx
\end{aligned}$$

Ahora el lado contrario es muy similar

$$\begin{aligned}
\langle f|\mathcal{L}g\rangle &= \int_a^b f^* \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dg}{dx}\right) - q(x)g(x)\right] dx \\
&= \int_a^b f^* \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dg}{dx}\right) - q(x) f^* g(x) dx \\
u = f^*; du &= \frac{df^*}{dx}dx \\
dv = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dg}{dx}\right)dx; v &= \left(p(x)\frac{dg}{dx}\right) \\
\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dg}{dx}\right) f^* dx &= \left[p(x)\frac{df^*}{dx}g\right]_a^b - \int_a^b p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx}dx \\
\left[p(x)\frac{df^*}{dx}g\right]_a^b &= 0 \\
&= -\int_a^b p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx}dx - \int_a^b q(x) f^* g dx
\end{aligned}$$

Con lo que confirmamos que coinciden.

1.2 b

Primero iniciemos con que los valores propios son reales.

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}u_n &= \lambda_n \rho(x) u_n \\
\rho(x) u_n^*(x) \left(-\mathcal{L}u_n\right) &= \rho(x) \left| u_n(x) \right|^2 \\
\int_a^b \rho(x) u_n^*(x) \left(-\mathcal{L}u_n\right) dx &= \lambda_n \int_a^b \rho(x) \left| u_n(x) \right|^2 dx \\
\int_a^b \rho(x) u_n^*(x) \left(-\mathcal{L}u_n\right) dx &= \int_a^b \rho(x) u_n(x) \left(-\mathcal{L}u_n\right)^* dx \\
\int_a^b \rho(x) u_n(x) \left(-\mathcal{L}u_n\right)^* dx &= \lambda_n^* \int_a^b \rho(x) \left| u_n(x) \right|^2 dx \\
\lambda_n \int_a^b \rho(x) \left| u_n(x) \right|^2 dx &= \lambda_n^* \int_a^b \rho(x) \left| u_n(x) \right|^2 dx \\
\lambda_n &= \lambda_n^*.
\end{aligned}
$$

Ahora, para mostrar que las funciones propias son orgonales. Para esto imagine dos funciones propias con valores propios distintos. Por lo tanto, las ecuaciones quedarian como:

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}u_n &= \lambda_n \rho(x) u_n \\
-\mathcal{L}u_{n'} &= \lambda_{n'} \rho(x) u_{n'}
\end{aligned}
$$

Con lo que podemos desarrollar:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x) u_{n'}^* (-\mathcal{L}u_n) dx &= \lambda_n \int_a^b \rho(x) u_{n'}^* u_n dx \\
\int_a^b \rho(x) u_n^* (-\mathcal{L}u_{n'}) dx &= \lambda_n \int_a^b \rho(x) u_n^* u_{n'} dx \\
\int_a^b \rho(x) u_{n'}^* (-\mathcal{L}u_n) dx - \int_a^b \rho(x) u_n^* (-\mathcal{L}u_{n'}) dx &= (\lambda_n - \lambda_{n'}) \int_a^b \rho(x) u_n^* u_{n'} dx \\
\int_a^b \rho(x) u_{n'}^* (-\mathcal{L}u_n) dx - \int_a^b \rho(x) u_n^* (-\mathcal{L}u_{n'}) dx &= 0 \\
(\lambda_n - \lambda_{n'}) \int_a^b \rho(x) u_n^* u_{n'} dx &= 0 \\
\int_a^b \rho(x) u_n^* u_{n'} dx &= 0
\end{aligned}
$$

1.3 c

Para iniciar, solucionemos la ecuación diferencial

$$
\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda_n u = 0
$$

Lo cual tiene como solución

$$
u(x) = A \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right)
$$

Sin embargo, podemos encontrar las constantes como

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0 \\
u(0) &= A\sin(0) + B\cos(0) = B = 0 \\
u(L) &= 0 \\
u(L) &= A\sin(\sqrt{\lambda_n}L) = L \\
A &\neq 0 \\
\sin(\sqrt{\lambda_n}L) &= 0 \\
\sqrt{\lambda_n}L &= n\pi \\
\lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{L^2} \\
u_n(x) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Ahora teniendo

$$\begin{aligned}
\langle u_n, u_{n'}\rangle &= \int_0^L u_n(x)u_{n'}(x)dx \\
n &\neq n' \\
&= \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n'\pi x}{L}\right)dx = 0 \\
n &= n' \\
&= \int_n^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L 1dx - \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx \\
\frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx &= 0 \\
&= \frac{L}{2} - 0 \\
A_n^2\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx &= A_n^2\frac{L}{2} = 1 \\
A_n &= \sqrt{\frac{2}{L}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones propias normalizadas es

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ahora para comprobar el teorema de Tellez simplemente tenemos que notar que en el intervalo $(0, L)$ hay 0 en

$$x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \frac{3L}{n}, \ldots, \frac{(n-1)L}{n}$$

Que son $(n-1)$ lo que confirma lo que esperabamos.

1.4 d

Si expandimos estas funciones en series nos quedan:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n u_n(x)$$

Ahora bien, tenemos

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}f &= \rho g \\
\int_a^b f u_n dx &= \int_a^b \rho g u_n dx \\
-(Lu_n|f)\rho &= (u_n|\rho g)\rho \\
-\mathcal{L}u_n &= \lambda_n \rho u_n \\
\lambda_n f_n &= g_n
\end{aligned}$$

Chapter 2

Aplicación 1

2.1 a

Tenemos la ecuación:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
.

Con lo que podemos encontrar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right\} &= s^2\mathcal{L}\left\{f\right\} - sf\left(x,0\right) - \frac{\partial f}{\partial t}\left(x,0\right) \\
0 &= \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}\left\{f\right\} - \frac{sf\left(x,0\right) - \frac{\partial f}{\partial t}\left(x,0\right)}{c^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}\left\{f\right\}}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}\left\{f\right\}}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}\left\{f\right\} &= \frac{-sf\left(x,0\right) - \frac{\partial f}{\partial t}\left(x,0\right)}{c^2}.
\end{aligned}$$

Esto es una ecuación diferencial de segundo orden que podemos poner como:

$$\begin{aligned}
L_s\mathcal{L}\left\{f\right\} &= \tilde{g} \\
\tilde{g} &= \frac{-sf\left(x,0\right) - \frac{\partial f}{\partial t}\left(x,0\right)}{c^2}.
\end{aligned}$$

2.2 b

En este caso recordemos

$$\begin{aligned}
u_n\left(0\right) &= u_n\left(L\right) = 0 \\
u_n\left(x\right) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
\lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\
\tilde{f}\left(x,s\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{f}_n\left(s\right)u_n\left(x\right) \\
\tilde{g}\left(x,s\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\left(s\right)u_n\left(x\right).
\end{aligned}$$

Ahora, si lo metemos en $-L_s\tilde{f} = \tilde{g}$

$$
\begin{aligned}
-L_s u_n &= \left(\frac{s^2}{c^2} + \lambda_n\right) u_n \\
\left(\lambda_n - \frac{s^2}{c^2}\right) \tilde{f}_n(s) &= \tilde{g}_n(s) \\
\tilde{f}_n(s) &= \frac{\tilde{g}_n(s)}{\lambda_n - \frac{s^2}{c^2}} \\
\tilde{g}_n(s) &= \int_0^L \tilde{g}(x,s)\, u_n(x)\, dx \\
\tilde{g} &= \frac{-sf(x,0) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)}{c^2} \\
\tilde{g}_n(s) &= -\frac{1}{c^2}\int_0^L \left[sf(x,0) + f_t(x,0)\right] u_n(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

Ahora, para finalizar

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tilde{f}_n(s)\right\} \\
\tilde{f}_n(s) &= \frac{-\frac{sF_n + F_{t,n}}{c^2}}{\lambda_n - \frac{s^2}{c^2}} \\
F_n &= \int_0^L f(x,0)\, u_n(x)\, dx \\
F_{t,n} &= \int_0^L f_t(x,0)\, u_n(x)\, dx \\
f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, u_n(x).
\end{aligned}
$$

2.3 c

Para iniciar, tenemos

$$
\begin{aligned}
-L_s \tilde{f}(x,s) &= \tilde{g}(x,s) \\
\tilde{f}(x,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(s)\, u_n(x) \\
\tilde{g}(x,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(s)\, u_n(x) \\
\tilde{f}(x,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n(s)}{\lambda_n(s)} u_n(x)
\end{aligned}
$$

.

Lo que nos deja con una base para G :

$$\tilde{g}_n(s) = \int_0^L \tilde{g}(x', s)\, u_n(x')\, dx'$$
$$\tilde{f}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(s)} u_n(x) \int_0^L \tilde{g}(x', s)\, u_n(x')\, dx'$$
$$\tilde{f}(x, s) = \int_0^L \tilde{g}(x', s) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)\, u_n(x')}{\lambda_n(s)} \right) dx'$$
$$G_s(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)\, u_n(x')}{\lambda_n(s)}$$
$$\tilde{f}(x, s) = \int_0^L G_s(x, x')\, \tilde{g}(x', s)\, dx'.$$

Ahora bien, para encontrar el valor concreto de G podemos encontrar

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$\lambda_n(s) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{s^2}{c^2}$$
$$G_s(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{s^2}{c^2}}$$
$$G_s(x, x') = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{L}|x - x'|\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x + x')\right)}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \frac{s^2}{c^2}}.$$

2.4 d

Teniendo

$$G_s(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{s^2}{c^2}}$$
$$u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$
$$\frac{\partial^2 u_n(x)}{\partial x^2} = -\lambda_n u_n(x)$$
$$-L_s u_n(x) = \left(\lambda_n - \frac{s^2}{c^2}\right) u_n(x)$$
$$-L_s G_s(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda_n - \frac{s^2}{c^2}\right) u_n(x)\, u_n(x')}{\lambda_n - \frac{s^2}{c^2}}$$
$$-L_s G_s(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, u_n(x')$$
$$-L_s G_n(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)$$
$$-L_s G_n(x, x') = \frac{L}{2} \delta(x - x').$$

2.5 e

Para esto iniciemos por ver la ecuación no homogénea

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h\left(x,t\right).$$

Para iniciar, sabemos que tanto f como h pueden expandirse y quedar como:

$$\begin{aligned} f\left(x,t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(t\right) u_n\left(x\right) \\ h\left(x,t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n\left(t\right) u_n\left(x\right). \end{aligned}$$

Si sustituimos esto queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{f}_n\left(t\right) u_n\left(x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(t\right)\frac{\partial^2 u_n\left(x\right)}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n\left(t\right) u_n\left(x\right) \\ \frac{\partial^2 u_n\left(x\right)}{\partial x^2} &= -\lambda_n u_n\left(\right) \\ \implies \frac{1}{c^2}\ddot{f}_n\left(t\right) + \lambda_n f_n\left(t\right) = h_n\left(t\right). \end{aligned}$$

Donde esta ultima es la ecuación diferencial para cada termino. Esta ecuación se soluciona con la convolución de la solución homogénea y otra función de la forma:

$$f_n\left(t\right) = \gamma_n\left(t\right) * h_n\left(t\right).$$

Ahora, para determinar γ_n podemos solucionar la ecuación homogenea asociada

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_n\left(t\right) + c^2\lambda_n\gamma_n\left(t\right) = 0 \\ \gamma_n\left(t\right) &= A_n\cos\left(\omega_n t\right) + B_n\sin\left(\omega_n t\right) \\ \gamma_n\left(0\right) &= A_n\cos\left(0\right) + B_n\sin\left(0\right) \\ A &= 0 \\ \dot{\gamma}_n\left(t\right) &= B_n\omega_n\cos\left(\omega_n t\right) \\ \dot{\gamma}_n\left(0\right) &= B_n\omega_n = 1 \\ B_n &= \frac{1}{\omega_n} \\ B_n &= \frac{L}{n\pi c} \\ \gamma_n\left(t\right) &= \frac{\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)}{c\frac{n\pi}{L}}. \end{aligned}$$

Ahora para volver a plantear f nos queda como:

$$\begin{aligned} f_n\left(t\right) &= \int_0^t \gamma_n\left(t-t'\right) h_n\left(t'\right) dt' \\ f\left(x,t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(t\right) u_n\left(x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \gamma_n\left(t-t'\right) h_n\left(t'\right) dt'\right) u_n\left(x\right) \\ G\left(x,x',t-t'\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma\left(t-t'\right) u_n\left(x\right) u_n\left(x'\right) \\ \implies f\left(x,t\right) &= \int_0^L dx' \int_0^t dt' G\left(x,x',t-t'\right) h\left(x',t'\right). \end{aligned}$$

Chapter 3

Aplicación 2

3.1 a

En este caso, partimos de

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi + V\left(r\right)\psi = E\psi.$$

Donde el laplaciano es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]..$$

Lo que nos permite proponer la solución

$$\psi(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}.$$

De tal modo que al sustituir y dividir por psi separamos las variable en tres ecuaciones independientes

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} = \frac{1}{P}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] = \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right).$$

1. $e^{im\phi}$

$$\frac{d^2Y}{d\phi^2} + m^2Y = 0. \implies Y(\phi) = e^{im\phi},$$

Table 3.1: caption

Nombre	Valor
Operador	$L = \frac{d^2}{d\phi^2}$
Función peso	$\rho(\phi) = 1$
Valores propios	$\lambda = -m^2$

2. $P_l^m(\cos\theta)$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0.$$

Que es una ecuación de de polinomios de Legendre asociados

$$P_l^m(\cos\theta).$$

Table 3.2: caption

Nombre	Valor
Operador	$L = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}$
Función peso	$\rho(\theta) = \sin\theta$
Valores propios	$\lambda = l(l+1)$

3. $R_{nl}(r)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0.$$
$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{2mr^2}{\hbar^2}(E-V(r))-l(l+1)\right]R=0.$$

Table 3.3: caption

Nombre	Valor
Operador	$L=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}$
Función peso	$\rho(r)=r^2$
Valores propios	$\lambda=E_{n,l}$

La energía es

$$E_{n,l}=\frac{\hbar^2}{2m}k_{n,l}^2+V_0,$$

Donde $k_{n,l}$ son los valores propios del problema radial y V_0 es el valor promedio del potencial. Ahora, para la constante de normalización necesitamos:

$$\int|\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi)|^2dV=1$$
$$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Por separación de Variables

$$|A_{n,l,m}|^2\int_a^b|R_{nl}(r)|^2r^2dr\int_0^\pi|P_l^m(\cos\theta)|^2\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}|e^{im\phi}|^2d\phi=1$$
$$\int_0^{2\pi}|e^{im\phi}|^2d\phi=2\pi$$
$$\int_0^\pi|P_l^m(\cos\theta)|^2\sin\theta d\theta=1$$
$$\int_a^b|R_{nl}(r)|^2r^2dr=N_r$$
$$|A_{n,l,m}|^22\pi N_r=1$$
$$|A_{n,l,m}|^2=\frac{1}{2\pi N_r}.$$

3.2 b

Partimos de la función de onda:

$$\psi_{n_\rho,n_z,m}(\rho,\phi,z)=A_{n_\rho,n_z,m}R_{n_\rho,m}(\rho)\sin\left(\frac{(n_z+1)\pi z}{c}\right)e^{im\phi},$$

Con lo que podemos desarrollar para cada variable:

1. $e^{im\phi}$

$$\frac{d^2Y}{d\phi^2}+m^2Y=0.\implies Y(\phi)=e^{im\phi},$$

Table 3.4: caption

Nombre	Valor
Operador	$L = \frac{d^2}{d\phi^2}$
Función peso	$\rho(\phi) = 1$
Valores propios	$\lambda = -m^2$

2. $\sin\left(\frac{(n_z+1)\pi z}{c}\right)$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2 Z = 0 \implies Z(z) = \sin\left(\frac{(n_z+1)\pi z}{c}\right), \quad n_z \in \mathbb{N}.$$

Table 3.5: caption

Nombre	Valor
Operador	$L = \frac{d^2}{dz^2}$
Función peso	$\rho(z) = 1$
Valores propios	$\lambda_{n_z} = \left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2$

3. $R_{n_\rho,m}(\rho)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(\rho)\right) - \frac{m^2}{\rho^2}\right] R = 0.$$
$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left[\frac{2m\rho}{\hbar^2}\left(E - V(\rho)\right) - \frac{m^2}{\rho^2}\right] R = 0..$$

Table 3.6: caption

Nombre	Valor
Operador	$L = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2}$
Función peso	$\rho(\rho) = \rho$
Valores propios	

Ahora bien, para relacionar estos valores con la energia tenemos

$$E_{n_\rho,n_z,m} = E_\rho + E_z + E_\phi$$
$$E_z = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2$$
$$E_\phi = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2}{\rho^2}.$$

Para el caso de la contribución radial, dado que no encontré sus valores propios lo planteare como:

$$E_{n_\rho,n_z,m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\lambda_{n_\rho,m} + \left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2\right].$$

Lo que nos deja a la energía como:

$$E_{n_\rho,n_z,m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\lambda_{n_\rho,m} + \left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2\right]$$
$$E_{n_\rho,n_z,m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2 + \frac{m^2}{\rho^2} + \left[\lambda_{n_\rho,m} + \left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2\right]\right)$$
$$.$$

Para finalizar, en el caso de la constante de normalización tenemos:

$$\int |\psi_{n_\rho,n_z,m}(\rho,\phi,z)|^2 dV = 1$$
$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$
$$|A_{n_\rho,n_z,m}|^2 \int_a^b |R_{n_\rho,m}(\rho)|^2 \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} |e^{im\phi}|^2 d\phi \int_0^c \sin^2\left(\frac{(n_z+1)\pi z}{c}\right) dz = 1$$
$$\int_0^{2\pi} |e^{im\phi}|^2 d\phi = 2\pi$$
$$\int_0^c \sin^2\left(\frac{(n_z+1)\pi z}{c}\right) dz = \frac{c}{2}$$
$$\int_a^b |R_{n_\rho,m}(\rho)|^2 \rho\, d\rho = N_\rho$$
$$|A_{n_\rho,n_z,m}|^2 2\pi \cdot \frac{c}{2} \cdot N_\rho = 1$$
$$|A_{n_\rho,n_z,m}|^2 \pi c N_\rho = 1$$
$$|A_{n_\rho,n_z,m}|^2 = \frac{1}{\pi c N_\rho}.$$

3.3 c

Vamos a hacer el cambio de variable:

$$x = \frac{\rho - a}{b - a} \quad \text{para cilíndricas}$$
$$x = \frac{r - a}{b - a} \quad \text{para esféricas.}$$

Con esto entonces podemos sustituir y queda

$$\frac{d}{d\rho} \to \frac{1}{b-a}\frac{d}{dx}, \quad \rho \approx a\frac{d}{dr} \to \frac{1}{b-a}\frac{d}{dx}, \quad r \approx a.$$

Con eso podemos simplificar los operadores diferenciales del componente radial al mismo operador para ambos casos como:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)$$
$$\frac{d}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$$
$$\implies L \approx \frac{d^2}{dx^2} + \kappa, .$$

Donde κ es una constante que depende de los valores iniciales
Esto nos permite simplificar la ecuación radial a un problema de Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + (\lambda - \kappa)\, R = 0$$
$$R(0) = R(1) = 0.$$

La solución a esta ecuación es conocida y tiene valores propios dados por:

$$\lambda_n = \pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la energía para este caso seria:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2} + \kappa\right)..$$

Con esta expresión podemos encontrar los valores de energía para cada uno de los casos

$$E_{n,l,m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2} + \frac{l(l+1)}{a^2}\right) \quad \text{Para coordenadas esféricas}$$
$$E_{n_\rho,n_z,m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2 n_\rho^2}{(b-a)^2} + \left(\frac{(n_z+1)\pi}{c}\right)^2 + \frac{m^2}{a^2}\right) \quad \text{Para coordenadas cilíndricas.}$$