Análisis
Tarea 3

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Problema 1

1.1 Enunciado

Demuestre el siguiente teorema:

Theorem 1.1.1

Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $a_n > 0$ y $b_n > 0$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0.$$

entonce $\sum_n a_n$ converge si y solo si $\sum_n b_n$ converge

1.2 Solución

Definition 1.2.1: Test de Comparación

Suponga que existe un entero N tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

En este caso vamos a tomar la sucesión $\frac{a_n}{b_n}$ como una sucesión que converge a L. Ademas, dado que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ sabemos que $L > 0$. Ahora bien, dado que esta serie converge a L sabemos que existe un N tal que para todo $n \geq N$ se cumple:

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L.$$

y con esto sabiendo que $b_n > 0$ entonces podemos encontrar rápidamente

$$\frac{1}{2}Lb_n \leq \frac{a_n}{b_n}b_n \leq 2Lb_n$$
$$\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n \leq 2Lb_n.$$

Ahora con esto, podemos dividir la demostración para cada caso.

$\Longrightarrow$ Sea $\{a_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ y dado que $\frac{1}{2}L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que b_n converge.

$\Longleftarrow$ Sea $\{b_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $a_n \leq 2Lb_n$ y dado que $2L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que a_n converge.

Chapter 2

Problema 2

2.1 Enunciado

Sea

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n};\ x_0 = 2.$$

a. Demuestre que $x_n^2 \geq 2$. *Ayuda:* considere la ecuación:

$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 2 = 0.$$

donde la incógnita es x_n. ¿Que puede decir del discriminante de dicha ecuación.

b. Demuestre que $x_{n+1} \leq x_n$, el punto anterior puede ser de ayuda.

c. Demuestre que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente y que su limite es $\sqrt{2}$

2.2 Solución

a.

b.

c.

Chapter 3

Problema 3

3.1 Enunciado

Cada racional x puede ser escrito en la forma $x = \frac{m}{n}$, donde $n > 0$, con m y n enteros sin divisores en común. Cuando $x = 0$, tomamos $n = 1$. Considere la función f definida en R^1 por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}' \\ \frac{1}{n} & \left(x = \frac{m}{n}\right) \end{cases}.$$

Pruebe que f es continuo en cada punto irracional, y que f tiene una discontinuidad simple en cada punto racional.

3.2 Solución

Chapter 4

Problema 4

4.1 Enunciado

Definition 4.1.1: Propiedad del valor Intermedio

Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b

Sea f una función real con dominio en R^1 que tiene la propiedad del valor intermedio. Suponga también, para cada racional r, que el conjunto de todos los x con $f(x) = r$ es cerrado. Pruebe que f es continuo.

4.1.1 Ayuda

Si $x_n \longrightarrow x_0$ pero $f(x_n) > r > f(x_0)$ para algún r y todo n, entonces $f(t_n) = r$ para algún t_n entre x_0 y x_n ; por lo tanto $t_n \longrightarrow x_0$. Encuentre una contradicción.

4.2 Solución

Chapter 5

Problema 5

5.1 Enunciado

Asuma que f es una función real continua definida en (a, b) tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

para todo $x, y \in (a, b)$. Pruebe que f es convexo.

5.2 Solución

Chapter 6

Problema 6

6.1 Enunciado

Sea

$$X = \left\{ f : [0, 2\pi] \to R : f \text{ continua} \right\}.$$

Naturalmente X tiene una estructura de espacio vectorial.

a. Defina

$$\left\langle f, g \right\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Muestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno sobre X.

b. A partir del producto interno definido en el punto anterior, se puede definir una norma como sigue:

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

y a partir de dicha norma una métrica:

$$d(u, v) = ||u - v||.$$

Calcule para $m \neq n$

$$||\sin(mx) - \sin(nx)||.$$

c. Concluya que ninguna bola cerrada centrada en el origen de X es compacta. ¿Tiene X dimensión finita?