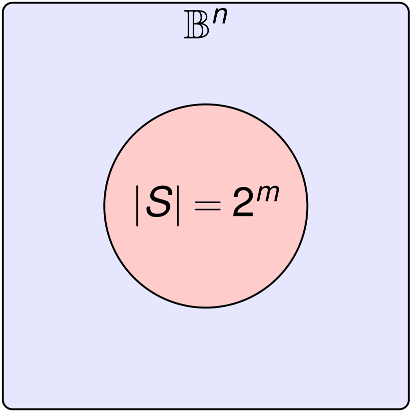
Quantum Error Correction Code

Sergio Montoya Ramirez

s.montoyar2@uniandes.edu.co

Universidad de los Andes
Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

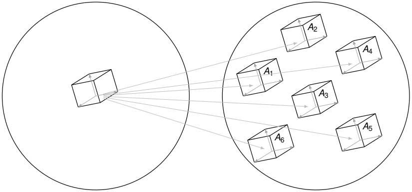
En un computador solo tenemos bits (o qbits). Todo lo demas son codigos



Un codigo (n, m) es simplemente un subconjunto de $\mathbb{B}^n$ con 2^m elementos. Estos elementos pueden representar otras cosas. Por ejemplo:

1. Numeros flotantes
2. Letras
3. instrucciones

Cuando un código es cuántico, es un subespacio completo



Un codigo cuantico es un subespacio con las mismas caracteristicas que antes. Sin embargo, para tener mejor control sobre el (y por que lo vamos a usar asi al corregir errores) tiene que cumplir las caracteristicas de:

1. Ortogonales
2. Distinguibles
3. No deformados

Un error es, esencialmente, una operación que tu no controlas

Un error es:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) |E\rangle \rightarrow\ & \alpha_0\beta_1 |0\rangle |E_1\rangle + \alpha_0\beta_2 |1\rangle |E_2\rangle \\
& + \alpha_1\beta_3 |0\rangle |E_3\rangle + \alpha_1\beta_4 |1\rangle |E_4\rangle
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dado que $\{I, X, Z, ZX\}$ es una base lo podemos resumir como

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(I|\psi\rangle (\beta_1 |E_1\rangle + \beta_3 |E_3\rangle) + Z|\psi\rangle (\beta_1 |E_1\rangle - \beta_3 |E_3\rangle) \\
& + X|\psi\rangle (\beta_2 |E_2\rangle + \beta_4 |E_4\rangle) + ZX|\psi\rangle (\beta_2 |E_2\rangle - \beta_3 |E_4\rangle))
\end{aligned} \tag{2}
$$

Un codigo corrige un error cuando existe un proceso de recuperación

Sea $\mathscr{E}$ un error. Se dice que un codigo C lo corrige si existe una operación, que preserva la traza, $\mathscr{R}$ tal que

$$\forall \rho \in C \implies (\mathscr{R} \circ \mathscr{E})\rho \propto \rho \tag{3}$$

Note que, existen errores que no preservan la traza y por tanto al corregirlos no da el mismo estado si no uno proporcional a este.

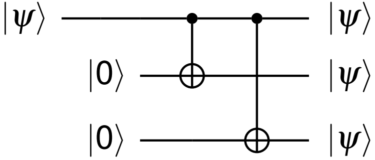
Demostrar que un codigo corrige un error no es trivial

Sea C un codigo cuantico con un proyector P y $\mathscr{E}$ un operador con elementos $\{E_i\}$. El codigo C corrige $\mathscr{E}$ si y solamente si

$$PE_i^{\dagger}E_jP = \alpha_{ij}P \tag{4}$$

Para alguna matriz hermitica α

Un ejemplo simple: El codigo de repetición permite corregir ante bitflips de un solo qbit



Para caracterizar este codigo podemos decir:

- **Error:** $|\psi\rangle|E\rangle \rightarrow \beta_1|\psi\rangle|E_1\rangle + \beta_2 X|\psi\rangle|E_2\rangle$
- **Proyector:** $P = |000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|$
- **Recuperación:** Se divide en dos etapas:
  1. Identificiación del error (Z_1Z_2 y Z_2Z_3)
  2. Corrección aplicando la operación inversa

Los codigos de corrección de errores, bien aplicados, permiten mejorar la fidelidad

Recapitulando:

- Los codigos son esenciales para la computación en general pues permite representar informacion.
- Un error es simplemente un operador lineal. Solamente que no te obedece.
- Un codigo corrige un error si existe un proceso de verificación
- Demostrar que un codigo corrige un error en general no es trivial

Referencias

- Kitaev, A. Yu., Shen, A., y Vyalyj, M. N. (2002). *Classical and Quantum Computation*. Graduate Studies in Mathematics (Vol. 47). American Mathematical Society.
- Nielsen, M. A., y Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Anniversary Edition). Cambridge University Press. (BnF ISBN)
- Kaye, P., Laflamme, R., y Mosca, M. (2007). *An Introduction to Quantum Computing*. Oxford University Press.
- Gottesman, D. (1997). *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction* (Tesis doctoral). California Institute of Technology. `doi:10.48550/arXiv.quant-ph/9705052`

Verificación de Errores como suma de otros pauli

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}((\alpha_0|0\rangle+\alpha_1|1\rangle)(\beta_1|E_1\rangle+\beta_3|E_3\rangle)\\
&+(\alpha_0|0\rangle-\alpha_1|1\rangle)(\beta_1|E_1\rangle-\beta_3|E_3\rangle)\\
&+(\alpha_0|1\rangle+\alpha_1|0\rangle)(\beta_2|E_2\rangle+\beta_4|E_4\rangle)\\
&+(\alpha_0|1\rangle-\alpha_1|0\rangle)(\beta_2|E_2\rangle-\beta_3|E_4\rangle))\\
=&\frac{1}{2}(I|\psi\rangle(\beta_1|E_1\rangle+\beta_3|E_3\rangle)\\
&+Z|\psi\rangle(\beta_1|E_1\rangle-\beta_3|E_3\rangle)\\
&+X|\psi\rangle(\beta_2|E_2\rangle+\beta_4|E_4\rangle)\\
&+ZX|\psi\rangle(\beta_2|E_2\rangle-\beta_3|E_4\rangle))
\end{aligned}
$$