Some Class
Random Examples

Your Name

Contents

Chapter 1

Parcial 1

1.1 Punto 1

1.1.1 Parte a

Tenemos la función

$$f = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}.$$

En este caso utilizaremos el criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemman

Definition 1.1.1: Criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemman

Un f acotado es Riemman-Integrable en $[a,b]$ si y solo si el conjunto de discontinuidades de f tiene una medida de Lebesgue igual a 0

Sea $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ .Tome, $(x_n)_n$ una su sucesión de números irracionales entre $[0,1]$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Por lo tanto $f(x_n) = 1$ lo que se hace distinto de 0 por lo que f no es continuo en x.

De manera similar, para $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ tome una sucesión con las mismas características pero esta vez de números racionales por lo que $f(x_n) = 0$ lo que significa que f no es continuo en x.

Con esto entonces sabemos que f es discontinuo en todo el conjunto $[0,1]$ por lo que el conjunto de discontinuidades tiene una medida de $1 - 0 = 1$ lo cual es mayor a 0 y en consecuencia no puede ser integrable.

1.1.2 Parte b

En este caso tenemos ya de por si definido el conjunto de discontinuidades. Es decir $D = \{x_n; x_n \in (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$. Este conjunto es claramente contable. Dado que es contable podemos definirlo como la suma de múltiples conjuntos singleton y por las propiedades de la medida de Lebesgue todos estos se suman y la suma contable de 0 es igual 0. Por lo tanto, este conjunto tiene una medida de 0 y esta función es integrable por el criterio de Lebesgue

1.2 Punto 2

Definition 1.2.1: Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función f centrada en a es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n.$$

Definition 1.2.2: Test de Ratio

Sea

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces

1. $L < 1$ la serie converge de manera absoluta
2. $L > 1$ la serie diverge de manera absoluta
3. $L = 1$ el test no da conclusiones interesantes

Con esto entonces iniciemos por aventurarnos en $f^{(n)}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) \\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x} \\
f^{(2)}(x) &= -1(1+x)^{-2} \\
f^{(3)}(x) &= 2(1+x)^{-3} \\
f^{(4)}(x) &= -2 \cdot 3(1+x)^{-4}.
\end{aligned}$$

Con esto entonces vemos el patrón que $(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)$. Ademas notemos que si $x = 0$ (como se nos pide por centrar la función en 0) entonces todos estos valores queda $(-1)^{n+1}(n-1)!$. Ahora si ponemos esto en la definición de serie de Taylor conseguimos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} x^n \\
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n
\end{aligned}$$

.

Ahora, para encontrar el radio de convergencia utilizaremos el test de ratio

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{(n+2)} x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^n x^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot x \right| \\
&= |x|
\end{aligned}$$

.

Como queremos que $L < 1$ entonces $|x| < 1$ y eso nos dice que el radio de convergencia es $(-1, 1)$

1.3 Punto 3

Como nos piden tomemos el polinomio de Taylor de grado 2. De nuevo recordemos entonces que lo que buscamos es

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_n(x) \\
e^{-0} &= 1 \\
f'(x) &= -e^{-x} \implies -e^{-0} = -1 \\
f''(x) &= e^{-x} \implies e^{-0} = 1 \\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + R_n(x) \\
\int_0^1 e^{-x} dx &= \int_0^1 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + R_n(x) \\
&= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 x dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 R_n(x)\, dx \\
&= [x]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \int_0^1 R_n(x) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \int_0^1 R_n(x) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \int_0^1 R_n(x) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \int_0^1 R_n(x) \\
&= \frac{6+2}{12} + \int_0^1 R_n(x) \\
&= \frac{8}{12} + \int_0^1 R_n(x)
\end{aligned}
$$

.

Ahora bien R_n es un termino genérico que llevamos escondiendo. En verdad es R_2 y su definición es

Definition 1.3.1: R_n

$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \frac{f^{(3)}(c)}{(3)!}(x-0)^3 \\
&= \frac{-e^{-c}}{6}x^3
\end{aligned}
$$

.

Con lo cual

$$\begin{aligned}\int_0^1 R_2(x) &= \int_0^1 \frac{-e^{-c}}{6}x^3\\ &= \frac{-e^{-c}}{6}\int_0^1 x^3\\ &= \frac{-e^{-c}}{6}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\\ &= \frac{-e^{-c}}{6}\cdot\frac{1}{4}\\ &= \frac{-e^{-c}}{24}\\ &= -\frac{1}{24\cdot e^c}\end{aligned}$$
.

Sabiendo que e^c es una serie creciente entonces el valor mas grande lo toma cuando e es mas grande (por que estamos en negativos) por lo tanto el error aproximado es:

$$-\frac{1}{24\cdot e}.$$

con lo cual llegamos a que el resultado debe diferenciarse por esto.

1.4 Punto 4

1.4.1 Parte a

Sea

$$R = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Sea R^* tal que $R < R^* < 1$. Por la propia definición de lim sup sabemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces:

$$\sup_{k\geq n}\left\{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right\} \leq R^*.$$

ahora por la definición de supremo sabemos que para todo $n \geq N$ se da que:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq R^* \implies |a_{n+1}| \leq R^*|a_n|.$$

y ahora con esto podemos desarrollar para R^{*n} de la misma forma y con esto tener

$$R^{*n}|a_N| \geq |a_N|.$$

pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} R^{*n}|a_N|.$$

converge como serie geométrica dado que $R^* < 1$ por lo tanto, por test de comparación la otra serie también converge.

1.4.2 Parte b

Mostremos que

$$\begin{aligned}\frac{n!}{n^n} &= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\\ &< 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Mostramos que esta serie siempre es menor a $\frac{1}{n}$ por lo que por test de comparación esta debe converger a 0