

1. Enunciado

Sean $\rho_1 : G \rightarrow G_\ell(V_1)$, $\rho_2 : G \rightarrow G_\ell(V_2)$ dos representaciones irreducibles y $T \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$. Entonces:

- $T \neq 0 \implies \rho_1 \sim \rho_2$
- $\rho_1 = \rho_2 \implies T = \lambda \text{id}_v (\lambda \in \mathbb{C})$

2. Demostración

2.1. $T \neq 0 \implies \rho_1 \sim \rho_2$

Para mostrar que $T \circ \rho_1 = \rho_1 \circ T$ es suficiente mostrar que T es un isomorfismo.

2.1.1. Inyectiva

Dado que $\ker T$ contiene como minimo 0 y ademas en caso de que se haga una combinación lineal de vectores dentro del kernel el resultado seguiria estando dentro del kernel entonces es un subespacio vectorial. Ademas, dado que debe contener al 0 y sabemos que $\forall v \in \ker T \implies Tv = 0$ por tanto es invariante respecto a T .

Dado que ρ_1 es irreducible y $\ker T$ es invariante entonces solo hay dos opciones

- $\ker T = \{0\}$ que implica que T es inyectivo
- $\ker T = V_1$ que implica que $T = 0$ pero asumimos lo contrario.

Por lo tanto T es inyectivo

2.1.2. Sobreyectiva

Dado que T es lineal (y por argumentos iguales a la primera parte del paso anterior) sabemos que $\text{im } T$ es un subespacio de V_2 . Esto implica que

$$\forall w \in \text{im } T \implies \exists v \in V_1 : T(v) = w$$

pero ademas si tomamos un $A \in G$ se debe cumplir (dado que T es un homeomorfismo)

$$A \cdot w = A \cdot T(v) = T(A \cdot v)$$

Por lo tanto $\text{im } T$ es invariante.

Dado que ρ_2 es irreducible y $\text{im } T$ es invariante entonces solo hay dos opciones

- $\text{im } T = \{0\}$ que implica $T = 0$ pero asumimos lo contrario.
- $\text{im } T = V_2$ que implica que T es sobreyectivo

Por lo tanto T es sobreyectivo

2.1.3.

Con esto es suficiente para mostrar que si $T \neq 0$ entonces es biyectivo y por tanto $\rho_1 \sim \rho_2$

2.2. $\rho_1 = \rho_2 \implies T = \lambda \text{id}_V (\lambda \in \mathbb{C})$

Sea $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ esto tambien implica que estamos trabajando en un solo espacio V . Por otro lado, dado que estamos trabajando en el campo complejo entonces tenemos al menos un eigenvalue $\lambda \in \mathbb{C}$ que debe tener al menos un eigenvector distinto a $\vec{0}$. Tomemos entonces $\ker(T - \lambda I)$ que ademas es un espacio invariante pues

$$\forall v \in \ker(T - \lambda I) \implies T(\rho(g)v) = \rho(g)T(v) = \rho(g)(\lambda v) = \lambda \rho(g)v$$

Dado que ρ es irreducible y $\ker(T - \lambda I)$ (ademas que sabemos que $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$) entonces se debe cumplir que

$$\ker(T - \lambda I) = V$$

por lo tanto todos los vectores de V son eigenvectors de T con eigenvalue λ por tanto

$$T = \lambda \text{id}$$

QED