Análisis
Tarea 3

Sergio Montoya Ramírez

Contents

Chapter 1

Problema 1

1.1 Enunciado

Demuestre el siguiente teorema:

Theorem 1.1.1

Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $a_n > 0$ y $b_n > 0$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0.$$

entonce $\sum_n a_n$ converge si y solo si $\sum_n b_n$ converge

1.2 Solución

Definition 1.2.1: Test de Comparación

Suponga que existe un entero N tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \geq N$. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

En este caso vamos a tomar la sucesión $\frac{a_n}{b_n}$ como una sucesión que converge a L. Ademas, dado que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ sabemos que $L > 0$. Ahora bien, dado que esta serie converge a L sabemos que existe un N tal que para todo $n \geq N$ se cumple:

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L.$$

y con esto sabiendo que $b_n > 0$ entonces podemos encontrar rápidamente

$$\frac{1}{2}Lb_n \leq \frac{a_n}{b_n}b_n \leq 2Lb_n$$

$$\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n \leq 2Lb_n.$$

Ahora con esto, podemos dividir la demostración para cada caso.

$\implies$ Sea $\{a_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ y dado que $\frac{1}{2}L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que b_n converge.

$\impliedby$ Sea $\{b_n\}$ una sucesión que converge. Ahora bien, sabemos que para un N se cumple que $a_n \leq 2Lb_n$ y dado que $2L$ es una constante entonces podemos saber por el test de comparación que a_n converge.

Chapter 2

Problema 2

2.1 Enunciado

Sea

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n};\ x_0 = 2.$$

a. Demuestre que $x_n^2 \geq 2$. *Ayuda:* considere la ecuación:

$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 2 = 0.$$

donde la incógnita es x_n. ¿Que puede decir del discriminante de dicha ecuación.

b. Demuestre que $x_{n+1} \leq x_n$, el punto anterior puede ser de ayuda.

c. Demuestre que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente y que su limite es $\sqrt{2}$

2.2 Solución

a. Para iniciar tomemos la ecuación

$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + 2 = 0.$$

ahora dada la definición de x_{n+1} podemos:

$$x_n^2 - 2\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}\right)x_n + 2 = 0.$$

Con esto entonces

$$x_n^2 - x_n^2 - 2 + 2 = 0.$$

Con lo que demostramos que esta ecuación se sostiene.

Ahora bien, dado que esta ecuación se cumple entonces podemos ahora si asegurar que el discriminante existe y es mayor o igual a 0. Por lo tanto nos queda

$$\begin{aligned}(2x_{n+1})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 &= 4x_{n+1}^2 - 8 \\ 4x_{n+1}^2 - 8 &\geq 0 \\ 4x_{n+1}^2 &\geq 8 \\ x_{n+1}^2 &\geq \frac{8}{4} \\ x_{n+1}^2 &\geq 2.\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que conocemos $x_0 = 2 \implies x_0^2 = 4 \geq 2$ entonces podemos aplicar por inducción este resultado y llegar a que $x_n^2 \geq 2$

b. Para iniciar tenemos

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}.$$

Por otro lado sabemos que $x_n^2 \geq 2$ por lo tanto es cierto decir que:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \leq \frac{x_n^2 + x_n^2}{2x_n}.$$

Que esto ultimo se puede reducir hasta que encontramos por tanto:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \leq \frac{x_n^2 + x_n^2}{2x_n} = x_n \implies x_{n+1} \leq x_n.$$

c. Por los puntos anteriores sabemos que $\{x_n\}$ es una sucesión descendiente. Por lo tanto solo nos falta mostrar que esta acotada por abajo para mostrar que converge a esa cota. Esto lo podemos hacer de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}L + \frac{1}{L} \\
L \cdot L &= \left(\frac{1}{2}L + \frac{1}{L}\right) L \\
L^2 &= \frac{L^2}{2} + 1 \\
L^2 - \frac{L^2}{2} &= \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2} + 1 \\
\frac{L^2}{2} &= 1 \\
\frac{L^2}{2} \cdot 2 &= 1 \cdot 2 \\
L^2 &= 2 \\
L &= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado el punto **a.** podemos saber que $x_n \geq \sqrt{2}$ por lo que escogemos la raíz positiva. Es decir que esta sucesión esta acotada por $\sqrt{2}$ y dado que ademas es decreciente entonces llegamos a que la sucesión $\{x_n\}$ converge a $\sqrt{2}$

Chapter 3

Problema 3

3.1 Enunciado

Cada racional x puede ser escrito en la forma $x = \frac{m}{n}$, donde $n > 0$, con m y n enteros sin divisores en común. Cuando $x = 0$, tomamos $n = 1$. Considere la función f definida en R^1 por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}' \\ \frac{1}{n} & \left(x = \frac{m}{n}\right) \end{cases}.$$

Pruebe que f es continuo en cada punto irracional, y que f tiene una discontinuidad simple en cada punto racional.

3.2 Solución

En este caso, lo que nos pide el enunciado es esencialmente lo mismo que mostrar que $\lim_{t \to x} f(t) = 0$ para todo x. Para esto sea $\varepsilon > 0$ y sea x cualquier numero real. Sea N el único entero positivo tal que $N < \frac{1}{\varepsilon} < N + 1$ y para cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ sea k_n un entero tal que

$$\frac{k_n}{n} \leq x \leq \frac{k_n + 1}{n}.$$

Entonces, por cada n sea $\delta_n = \frac{1}{n}$ si $x = \frac{k_n}{n}$, en cualquier otro caso sea $\delta_n = \min\left(x - \frac{k_n}{n}, \frac{k_n+1}{n} - x\right)$. Finalmente, sea $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_N)$. Ahora con todo esto definido, podemos decir que $\left|f(t)\right| < \varepsilon$ si $0 < |x - t| < \delta$. Esto es bastante claro para un numero irracional, sin embargo, si t es racional y $t = \frac{m}{n}$, tenemos necesariamente que $n > N$ por la manera en la que escogimos δ_n para $n \leq N$. Por lo tanto, si t es racional, entonces $f(t) \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon$. Con lo que completamos la prueba.

Una vez tenemos que $\lim_{t \to x} f(t) = 0$. Entonces nos siguen ambas cosas pues para cualquier irracional se cumple que $\lim_{t \to x} f(t) = f(t) = 0$ y lo contrario ocurre para cualquier racional.

Chapter 4

Problema 4

4.1 Enunciado

Definition 4.1.1: Propiedad del valor Intermedio

Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b

Sea f una función real con dominio en R^1 que tiene la propiedad del valor intermedio. Suponga también, para cada racional r, que el conjunto de todos los x con $f(x) = r$ es cerrado. Pruebe que f es continuo.

4.1.1 Ayuda

Si $x_n \to x_0$ pero $f(x_n) > r > f(x_0)$ para algún r y todo n, entonces $f(t_n) = r$ para algún t_n entre x_0 y x_n ; por lo tanto $t_n \to x_0$. Encuentre una contradicción.

4.2 Solución

Asuma la ayuda como cierta, por lo tanto existe x_n que converge a x_0 y existe $f(x_n) > r > f(x_0)$ para algún r y todo n. Por la propiedad del valor intermedio para algún t_n en el intervalo (x_0, x_n) se cumple que $f(t_n) = r$. Lo ultimo que tenemos en este caso de la misma ayuda es que t_n converge a x_0. Sin embargo esto hace que x_0 sea un punto limite del conjunto de todos los x tal que $f(x) = r$. Sabemos que este conjunto es cerrado lo que haría que contenga a sus puntos limites. Sin embargo, dado que $f(x_n) > r > f(x_0)$ hace que sea imposible que x_0 pertenezca a este conjunto pues $f(x_0) \neq r$. Encontrando así la contradicción.

Chapter 5

Problema 5

5.1 Enunciado

Asuma que f es una función real continua definida en (a, b) tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

para todo $x, y \in (a, b)$. Pruebe que f es convexo.

5.2 Solución

Debemos mostrar que

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Para todos los números de la forma $\lambda = \frac{k}{2^n}$, donde k es un entero no negativo menor o igual a 2^n. Esto lo haremos por inducción en n.

Caso $n = 0$ **:** Para esto por la definición de λ nos queda que los únicos valores que puede tomar son 0 y 1.

$\lambda = 0$ En este caso:

$$\begin{aligned} f\left(0 \cdot x + (1-0)y\right) &\leq 0f(x) + (1-0) f(y) \\ f(y) &\leq (1) f(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la desigualdad.

$\lambda = 1$ En este caso:

$$\begin{aligned} f\left(1x + (1-1)y\right) &\leq 1f(x) + (1-1) f(y) \\ f(x) &\leq f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto también se cumple la desigualdad.

Suposición : Suponga que el resultado se cumple para todo $n \leq r$, y considere $\lambda = \frac{k}{2^{r+1}}$.

Demostración : Si k es par, digamos $k = 2l$, entonces $\frac{k}{2^{r+1}} = \frac{l}{2r}$ y podemos apelar a la hipótesis de inducción. Ahora suponga que k es impar. Entonces $1 \leq k \leq 2^{r+1} - 1$, y entonces podemos tener los números $l = \frac{k-1}{2}$ y $m = \frac{k+1}{2}$ son enteros con $0 \leq l \leq m \leq 2^r$. Con esto podemos entonces re escribir

$$\lambda = \frac{s+t}{2}.$$

donde $s = \frac{k-1}{2^{r+1}} = \frac{l}{2^r}$ y $t = \frac{k+1}{2^{r+1}} = \frac{m}{2^r}$. Tenemos entonces

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \frac{\left[sx + (1-s)y\right] + \left[tx + (1-t)y\right]}{2}.$$

Por lo tanto por hipótesis de inducción

$$
\begin{aligned}
f\left(\lambda x+(1-\lambda) y\right) &\leq \frac{f\left(s x+(1-s) y\right)+f\left(t x+(1-t) y\right)}{2} \\
&\leq \frac{s f(x)+(1-s) f\left(y\right)+t f(x)+(1-t) f\left(y\right)}{2} \\
&=\left(\frac{s+t}{2}\right) f(x)+\left(1-\frac{s+t}{2}\right) f\left(y\right) \\
&=\lambda f(x)+(1-\lambda) f\left(y\right).
\end{aligned}
$$

Esto completa la inducción. Ahora por cada x y y fijadas y cada lado de la inecuación:

$$
f\left(\lambda x+(1-\lambda) y\right) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda) f\left(y\right).
$$

son funciones continuas de λ. Por lo tanto, el conjunto en el cual la inecuación se sostiene (la imagen inversa cerrada del conjunto $[0, \infty)$ bajo el mapa $\lambda \rightarrow \lambda f(x)+(1-\lambda) f\left(y\right)-f\left(\lambda x+(1-\lambda) y\right)$) es un conjunto cerrado. Dado que contiene todos los puntos $\frac{k}{2^n},\ 0 \leq k \leq n,\ n=1,2,\ldots$ debe contener una cerradura de este conjunto de puntos. Por lo tanto f es convexo.

Chapter 6

Problema 6

6.1 Enunciado

Sea

$$X = \left\{ f : [0, 2\pi] \to R : f \text{ continua} \right\}.$$

Naturalmente X tiene una estructura de espacio vectorial.

a. Defina

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

Muestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno sobre X.

b. A partir del producto interno definido en el punto anterior, se puede definir una norma como sigue:

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

y a partir de dicha norma una métrica:

$$d(u, v) = ||u - v||.$$

Calcule para $m \neq n$

$$||\sin(mx) - \sin(nx)||.$$

c. Concluya que ninguna bola cerrada centrada en el origen de X es compacta. ¿Tiene X dimensión finita?

6.2 Solución

a. Para comenzar recordemos las definiciones de producto interno.

Definition 6.2.1: Producto Interno

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *Producto Interno sobre* V es una función $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple

(a) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v, w, z \in V$

- $\Phi(v + w, z) = \Phi(v, z) + \Phi(w, z)$
- $\Phi(\alpha \cdot v, z) = \alpha \cdot \Phi(v, z)$

(b) $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$

(c) $\Phi(v, v) > 0$ si $v \neq 0$

Ahora con esto ya definido podemos verificar todas las propiedades para saber que es efectivamente un producto interno.

(a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g, h \in X$ entonces

- $$\begin{aligned} \langle f+g, h\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(f(x)+g(x)\big)\, h(x)\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\, h(x) + g(x)\, h(x) \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\, h(x) + \int_0^{2\pi} g(x)\, h(x) \\ &= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle \end{aligned}$$
.

- $$\begin{aligned} \langle \alpha f, g\rangle &= \int_0^{2\pi} \alpha f(x)\, g(x)\, dx \\ &= \alpha \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \\ &= \alpha \langle f, g\rangle \end{aligned}$$
.

(b) Dado que $f(x)\, g(x) = g(x)\, f(x)$ entonces

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle .$$

(c) En este caso siempre y cuando $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx \neq 0$ entonces el doble de eso es diferente de 0.

b. Solo por facilidad definamos

$$\sin(mx) - \sin(nx) = f(x).$$

Con esto

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\langle f, f\rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} f(x)\, f(x)\, dx} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin(mx) - \sin(nx))(\sin(mx) - \sin(nx))\, dx} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(mx) - 2\sin(mx)\sin(nx) + \sin^2(nx)\, dx} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2(mx)\, dx - 2\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx + \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\, dx} \end{aligned}$$
.

Luego de esto, no se muy bien como continuar pues no se ha visto en clase nada de ese estilo. Se hacer integrales pero no se si deba hacer algo mas. Lo siento.