

1. (a) En este caso nos interesa encontrar  $L_z$  para el cual tenemos

$$\begin{aligned} L_z |\ell, m_\ell\rangle &= m_\ell \hbar |\ell, m_\ell\rangle \\ L_z |\psi\rangle &= A [L_z |1, 0\rangle + 2L_z |1, -1\rangle] \\ &= A [0 \cdot \hbar |1, 0\rangle + 2(-1)\hbar |1, -1\rangle] \\ &= -2A\hbar |1, -1\rangle \\ \langle\psi| &= A [\langle 1, 0| + 2\langle 1, -1|] \\ L_z = \langle\psi| L_z |\psi\rangle &= -2A^2\hbar \langle 1, 0|1, -1\rangle + 4A^2\hbar \langle 1, -1|1, -1\rangle \\ &= 4A^2\hbar = \frac{4}{5}\hbar \end{aligned}$$

- (b) En este caso nos interesa  $L^2$  para lo cual tenemos

$$\begin{aligned} L^2 |\ell, m_\ell\rangle &= \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell, m_\ell\rangle \\ L^2 |\psi\rangle &= A [L^2 |1, 0\rangle + 2L^2 |1, -1\rangle] \\ &= A [\hbar^2(2) |1, 0\rangle + 4\hbar^2 |1, -1\rangle] \\ L^2 = \langle\psi| L^2 |\psi\rangle &= A^2 [2\hbar^2 \langle 1, 0|1, 0\rangle + 4\hbar^2 \langle 1, -1|1, 0\rangle + 4\hbar^2 \langle 1, 0|1, -1\rangle + 8\hbar^2 \langle 1, -1|1, -1\rangle] \\ &= A^2(2\hbar^2 + 0 + 0 + 8\hbar^2) = \frac{10\hbar^2}{5} = 2\hbar^2 \end{aligned}$$

- (c) En este caso nos interesa  $\langle L_x \rangle$  para lo cual tenemos

$$\begin{aligned} L_\pm |\ell, m_\ell\rangle &= \sqrt{\ell(\ell+1) - m_\ell(m_\ell \pm 1)} \hbar |\ell, m_\ell \pm 1\rangle \\ \langle L_x \rangle &= \frac{1}{2} (\langle L_+ \rangle + \langle L_- \rangle) \\ \langle L_\pm \rangle &= \langle\psi| L_\pm |\psi\rangle \end{aligned}$$

Ahora con esto podemos desarrollar cada lado por aparte

$$\begin{aligned} L_+ |\psi\rangle &= A [L_+ |1, 0\rangle + 2L_+ |1, -1\rangle] \\ &= A [\sqrt{2}\hbar |1, 1\rangle + 2\sqrt{2}\hbar |1, 0\rangle] \\ L_+ &= A^2 [\sqrt{2}\hbar \langle 1, 0|1, 1\rangle + 2\sqrt{2}\hbar \langle 1, 0|1, 0\rangle + 2\sqrt{2}\hbar \langle 1, -1|1, 1\rangle + 4\sqrt{2}\hbar \langle 1, -1|1, 0\rangle] \\ &= A^2 2\sqrt{2}\hbar = \frac{2\sqrt{2}}{5}\hbar \end{aligned}$$

Ahora necesitamos conseguir  $L_-$

$$\begin{aligned}
 L_-|\psi\rangle &= A[L_-|1, 0\rangle + 2L_-|1, -1\rangle] \\
 L_-|1, 0\rangle &= \sqrt{1(1+1)}\hbar|1, -1\rangle = \sqrt{2}\hbar|1, -1\rangle \\
 L_-|1, -1\rangle &= \sqrt{2-2}\hbar|1, -2\rangle = 0 \\
 L_-|\psi\rangle &= A\sqrt{2}\hbar|1, -1\rangle \\
 \langle\psi|L_-|\psi\rangle &= A^2[\sqrt{2}\hbar\langle 1, 0|1, -1\rangle + 2\sqrt{2}\hbar\langle 1, -1|1, -1\rangle] \\
 &= 2A^2\sqrt{2}\hbar = \frac{2\sqrt{2}}{5}\hbar
 \end{aligned}$$

Ya por ultimo solo debemos combinarlos para llegar al resultado que deseamos

$$\begin{aligned}
 L_x &= \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \\
 L_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)\hbar \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{5}\hbar
 \end{aligned}$$

(d) **Nota:** Es importante que para este trabajo utilizamos el valor de  $A$  sin embargo no hemos desarrollado cuanto es este valor. En este caso partimos de

$$|\psi\rangle = A[|1, 0\rangle + 2|1, -1\rangle].$$

Por otro lado, con esto podemos conseguir que

$$\langle\psi| = A[\langle 1, 0| + 2\langle 1, -1|].$$

Ahora con esto podríamos conseguir

$$\langle\psi|\psi\rangle = A^2[\langle 1, 0|1, 0\rangle + 2\langle 1, -1|1, 0\rangle + 2\langle 1, 0|1, -1\rangle + 4\langle 1, -1|1, -1\rangle].$$

Ahora con esto tenemos que ser conscientes de que

$$\begin{aligned}
 \langle\psi|\psi\rangle &= 1 \\
 \langle x|x\rangle &= 1 \\
 \langle x|y\rangle &= 0.
 \end{aligned}$$

Con lo que nos queda

$$1 = A^2[1 + 0 + 0 + 4].$$

y por tanto

$$A = \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

2. (a) Recordemos entonces que  $n$  es el nivel de energía,  $\ell$  es el orbital y  $m_\ell$  ahora bien, recordemos que los valores posibles de los últimos dos son

$$\ell = 0, 1, \dots, n$$

$$m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell$$

por lo tanto, los posibles valores de  $m_\ell$  se encuentran en el conjunto  $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge -3 < x < 3\}$

- (b) Para este caso partimos desde un átomo de hidrógeno que con lo que nos dice el enunciado podemos describir como

3. (a) Cuando un átomo es sometido a un campo magnético se observó experimentalmente que su espectro de emisión se dividía en líneas que parecían no estar presentes antes de eso. Existen dos casos de Efecto Zeeman, el normal y el anómalo. Esta división se dio puesto que Zeeman (Que fue el encargado de explicar este efecto teóricamente) no pudo explicar el caso anómalo puesto que contaba únicamente con física clásica para solucionarlo. La explicación que Zeeman dio de este fenómeno en su momento es una deducción con momentos angulares clásicos que realmente no nos interesa pues en verdad en este cumple un rol muy importante el spin. En particular lo que ocurre es que cuando un dipolo interactúa con un campo magnético este sufre un torque y se alinea (a favor o en contra) del campo magnético. Para esto requeriría una energía pero esta se bifurca.
- (b) Si, de hecho el efecto Zeeman ocurre cuando una partícula con Spin (todas lo tienen) interactúa con un campo magnético se presenta efecto Zeeman. Además, observando el espectro de emisión se pueden ver correcciones del efecto Zeeman
- (c) El átomo de hidrógeno es quizás el más simple de los átomos estables. Un protón con un electrón. Este de hecho define un grupo de átomos que cumplen características similares y que su estudio es esencialmente el mismo que el del hidrógeno (Los Hidrogenoides). El átomo de hidrógeno es entonces una buena mezcla entre simplificación y realidad. Además es el átomo más común del universo, no creo que esto aporte mucho pero es un detalle bastante interesante.