Metodos Matematicos
Taller 2

Sergio Montoya Ramirez

Contents

Chapter 1

Álgebra Básica de Números Complejos

1.1 Los complejos como un grupo

1. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones:

   - Los Complejos $\mathbb{C}$ son un grupo bajo la suma $+$
     - *Cerradura:* $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) \\ x &= (x_1 + x_2) \\ y &= (y_1 + y_2) \\ z_1 + z_2 &= x + iy \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

     - *Asociatividad:* $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (x_1 + iy_1) + [(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)] \\ &= (x_1 + iy_1) + [(x_2 + x_3) + i\,(y_2 + y_3)] \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + i\,(y_1 + y_2 + y_3) \\ (z_1 + z_2) + z_3 &= [(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)] + (x_3 + iy_3) \\ &= [(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)] + (x_3 + iy_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + i\,(y_1 + y_2 + y_3)\,. \end{aligned}$$

     - *Identidad:* $\exists e \in \mathbb{C} | \forall z \in \mathbb{C}\ e + z = z + e = z$
       Asumamos $e = 0 + i0$

$$\begin{aligned} (x + iy) + (0 + i0) &= (x + 0) + i\,(y + 0) \\ &= x + iy \\ (0 + i0) + (x + iy) &= (0 + x) + i\,(0 + y) \\ &= x + iy \end{aligned}$$
.

     - *Invertibilidad:* $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists z^{-1} \in \mathbb{C} | z + z^{-1} = e$
       Sea $z = x + iy$ y asumamos $z^{-1} = -x - iy$

$$\begin{aligned} z + z^{-1} &= (x + iy) + (-x - iy) \\ &= (x - x) + i\,(y - y) \\ &= 0 + i0. \end{aligned}$$

   - Los Complejos $\mathbb{C}$ no son un grupo bajo la multiplicación $*$

– *Cerradura:* $z_1 * z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

– *Asociatividad:* $z_1 * (z_2 * z_3) = (z_1 * z_2) * z_3$

$$\begin{aligned} z_1 * (z_2 * z_3) &= (x_1 + iy_1) * [(x_2 + iy_2) * (x_3 + iy_3)] \\ &= (x_1 + iy_1) * [(x_2x_3 - y_2y_3) + i\,(x_2y_3 + x_3y_2)] \\ &= [x_1\,(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1\,(x_2y_3 + x_3y_2)] + i\,[x_1\,(x_2y_3 + x_3y_2) + y_1\,(x_2x_3 - y_2y_3)] \\ &= [x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2] + i\,[x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3] \\ (z_1 * z_2) * z_3 &= [(x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2)] * (x_3 + iy_3) \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)] * (x_3 + iy_3) \\ &= [x_3\,(x_1x_2 - y_1y_2) - y_3\,(x_1y_2 + x_2y_1)] + i\,[x_3\,(x_1y_2 + x_2y_1) + y_3\,(x_1x_2 - y_1y_2)] \\ &= (x_1x_2x_3 - x_3y_1y_2 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3) + i\,[x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 + x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3] \\ z_1 * (z_2 * z_3) &= (z_1 * z_2) * z_3. \end{aligned}$$

– *Identidad:* $\exists e \in \mathbb{C} | \forall z \in \mathbb{C}\ e * z = z * e = z$
Asumamos $e = 1 + i0$

$$\begin{aligned} z * e &= (x + iy) * (1 + i0) \\ &= (x \cdot 1 - y \cdot 0) + i\,(x \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &= x + iy \\ e * z &= (1 + i0) * (x + iy) \\ &= (1 \cdot x - 0 \cdot y) + i\,(0 \cdot x + 1 \cdot y) \\ &= x + iy. \end{aligned}$$

– *Invertibilidad:* $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists z^{-1} \in \mathbb{C} | z * z^{-1} = e$
Sea $z = x + iy$ y asumamos $z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$. Ademas mostremos que para todo $x^2 + y^2 \neq 0$ este resultado es correcto

$$\begin{aligned} z * z^{-1} &= (x + iy) * \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) + i\left(\frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) \\ &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right) + i\left(\frac{0}{x^2 + y^2}\right) \\ &= 1 + i0. \end{aligned}$$

Sin embargo, notemos que z^{-1} no esta definido para $x^2 + y^2 = 0$. Sin embargo dado que $x, y \in \mathbb{R}$ entonces lo unico que cumple esto es $x, y = 0$

- ¿Tiene sentido hablar de $\mathbb{C}$ como un grupo bajo la operación de conjugación compleja?
  No tiene sentido, dado que para un grupo se requiere que la operación sea del tipo $(GxG) \to G$ cosa que no se cumple con el conjugado complejo puesto que es de la forma $G \to G$ y en consecuencias todas las caracteristicas de un grupo no tienen sentido.

2. Muestre el Isomorfismo en cada caso

- $\psi(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ con $\psi : (\mathbb{C}, +) \to \left(\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, +\right)$
  Para esto entonces necesitamos mostrar dos cosas:

- $\psi(z_1 + z_2) = \psi(z_1) + \psi(z_2)$

$$\begin{aligned}
\psi(z_1 + z_2) &= \psi((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) \\
&= \psi((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\
\psi(z_1) + \psi(z_2) &= \psi(x_1 + iy_1) + \psi(x_2 + iy_2) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- $\psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\right) = \psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\right) + \psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\right) &= \psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
\psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\right) + \psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\right) &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\
&= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).
\end{aligned}$$

- $\psi(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ con $\psi : (\mathbb{C}, \cdot) \to \left(\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \cdot\right)$

  Para esto entonces necesitamos mostrar dos cosas:

  - $\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) \cdot \psi(z_2)$

$$\begin{aligned}
\psi(z_1 \cdot z_2) &= \psi((x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)) \\
&= \psi((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)) \\
&= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} \\
\psi(z_1) \cdot \psi(z_2) &= \psi(x_1 + iy_1) \cdot \psi(x_2 + iy_2) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

  - $\psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\right) = \psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\right) \cdot \psi^{-1}\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\right) &= \psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\right) \cdot \psi^{-1}\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).
\end{aligned}$$

3. Demuestre el Homeomorfismo entre $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ y $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ con la suma y la división

   Dado que solo nos piden el homeomorfismo entonces solo debemos hacer la dirección $\psi : (\mathbb{C}, + \vee \cdot) \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y debemos hacerlo para cada operación. Esto se hace como sigue:

- $(\mathbb{C},+)$

$$\psi\left(z_1+z_2\right)=\psi\left(\left(r_1\cos\theta_1+ir_1\sin\theta_1\right)+\left(r_2\cos\theta_2+ir_2\sin\theta_2\right)\right)$$

.

1.2 Sumas Geometricas

1. Muestre que
$$\sum_{n=0}^{N-1}\sin(nx)=\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{(N-1)x}{2}\right).$$
Para esto, es vital darnos cuenta que
$$\sum_{n=0}^{N-1}\sin(nx)=\mathbb{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{ixn}\right).$$
Con esto, desarrollamos
$$\begin{aligned}\mathbb{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{ixn}\right)&=\mathbb{Im}\left(\frac{1-e^{ixN}}{1-e^{ix}}\right)\\&=\mathbb{Im}\left(\frac{-e^{\frac{ixN}{2}}\left(e^{\frac{ixN}{2}}-e^{-\frac{ixN}{2}}\right)}{-e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)}\right)\\&=\mathbb{Im}\left(e^{\frac{ix(N-1)}{2}}\frac{2i\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\&=\mathbb{Im}\left(\left(\cos\left(\frac{x(N-1)}{2}\right)+i\sin\left(\frac{x(N-1)}{2}\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\&=\sin\left(\frac{x(N-1)}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

2. Muestre que
$$\sum_{n=0}^{\infty}p^n\cos(nx)=\frac{1-p\cos x}{1-2p\cos x+p^2};|p|<1.$$
Para esto, es relevante darnos cuenta de tres cosas
   - $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r};|r|<1$
   - $\sum_{n=0}^{\infty}p^n\cos(nx)=\mathbb{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(pe^{ix}\right)^n\right)$
   - $pe^{ix}<1$

Ya con esto, podemos solucionar este ejercicio como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos(nx) &= \mathbb{R}\mathfrak{e}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(pe^{ix}\right)^n\right)\\
&= \mathbb{R}\mathfrak{e}\left(\frac{1}{1-pe^{ix}}\right)\\
&= \mathbb{R}\mathfrak{e}\left(\frac{1}{1-p\cos(x)-ip\sin(x)}\right)\\
&= \mathbb{R}\mathfrak{e}\left(\frac{1-p\cos(x)+ip\sin(x)}{(1-p\cos(x))^2+(p\sin(x))^2}\right)\\
&= \mathbb{R}\mathfrak{e}\left(\frac{1-p\cos(x)+ip\sin(x)}{1-2p\cos(x)+p^2\cos^2(x)+p^2\sin^2(x)}\right)\\
&= \mathbb{R}\mathfrak{e}\left(\frac{1-p\cos(x)+ip\sin(x)}{1-2p\cos(x)+p^2\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)}\right)\\
&= \mathbb{R}\mathfrak{e}\left(\frac{1-p\cos(x)+ip\sin(x)}{1-2p\cos(x)+p^2}\right)\\
&= \frac{1-p\cos(x)}{1-2p\cos(x)+p^2}.
\end{aligned}$$

Chapter 2

Integrales de Cauchy

En este caso, es prudente iniciar mostrando la definición de integrales de cauchy para un polo de orden n la cual es

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} f}{dz^{n-1}}\bigg|_{z=z_0}.$$

por lo tanto, podemos hacer que x sea un polo en una función compleja que en este caso seria la función que esta siendo derivada en los polinomios de Laguerre que recordemos son:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x}\right).$$

Con esto podemos notar sus similitudes estructurales. En particular podemos notar que ambos tienen derivadas n-esimas de una función. Por lo tanto ya sabemos que esa $f(z)$ debe estar en la integral

$$\oint_{c^+} \frac{(z^n e^{-z})dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n(z^n e^{-z})}{dz^n}\bigg|_{z=x}.$$

Sin embargo, podemos notar que esta integral difiere de los polinomios de laguerre pues en ves de $2\pi i$ necesitamos e^x. Sin embargo, dado que ambos son independientes de z podemos multiplicarlos por la integral sin cambiar su resultado pues se considerarian una constante.

$$\frac{e^x}{2\pi i} \oint_{c^+} \frac{(z^n e^{-z})\,dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{e^x}{2\pi i} \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n(z^n e^{-z})}{dz^n}\bigg|_{z=x} = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n(z^n e^{-z})}{dz^n}\bigg|_{z=x}.$$

ahora bien, para todo esto asumimos una C^+ y jamas hablamos de ella. Es importante notar que esta integral debe cumplir un par de condiciones:

1. Debe ser un camino cerrado. Es decir, debe iniciar y terminar en el mismo punto
2. Debe tener el polo dentro del contorno.

En teoria cualquier contorno que cumpla esto es suficiente pero quizas lo mas facil es imaginarnos una esfera de radio mayor que x y por tanto seria $|z| > x$

2.1 Transformación

En el enunciado se nos pide que hagamos la transformación $z - x = \frac{xz'}{1-z'}$ por lo tanto debemos hacer dos cosas antes. primero despejar z y ademas derivar con lo que queda:

$$\begin{aligned} z &= \frac{xz'}{1-z'} + x \\ dz &= xdz'(1-z') + xz'dz' = xdz'(1-z'+z') = xdz' \end{aligned}$$

.

ahora si reemplazamos y nos queda:

$$\frac{e^x}{2\pi i}\oint_{c^+}\frac{\left(z^n e^{-z}\right)dz}{(z-x)^{n+1}}$$

$$\frac{e^x}{2\pi i}\oint_{c^+}\frac{\left(\left(\frac{xz'}{1-z'}+x\right)^n e^{-\frac{xz'}{1-z'}+x}\right)xdz'}{\left(\frac{xz'}{1-z'}\right)^{n+1}}$$

.

Chapter 3

En este caso utilizaremos la definición de sin con lo cual quedaria

$$\begin{aligned} \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ z = e^{i\phi} \\ dz = ie^{i\phi} = izd\phi \\ . \end{aligned}$$

con esto ya podemos encontrar una equivalencia con la que trabajar

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\left(1 - \epsilon\sin\phi\right)} = \oint \frac{1}{iz} \frac{dz}{\left(1 - \frac{\epsilon}{2i}\left(z - z^{-1}\right)\right)^2}.$$

Ahora con esto notamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{zi} \frac{1}{\left(i - \frac{\epsilon}{2i}\left(z - z^{-1}\right)\right)^2} &= \frac{iz}{\left(iz\left(1 - \frac{\epsilon}{2i}\left(z - z^{-1}\right)\right)\right)^2} \\ &= \frac{iz}{\left(iz - \frac{\epsilon}{2}\left(z^2 - 1\right)\right)^2} \\ &= \frac{iz}{\left(-\frac{\epsilon}{2}z^2 + iz + \frac{\epsilon}{z}\right)^2} \\ &= \frac{iz}{\left(-\frac{\epsilon}{2}\left(z^2 - \frac{2i}{\epsilon}z - 1\right)\right)^2} \\ &= \frac{4}{\epsilon^2} \frac{iz}{\left(z^2 - \frac{2i}{\epsilon}z - 1\right)^2}. \end{aligned}$$

con lo cual podemos buscar los polos igualando a 0 el denominador

$$
\begin{aligned}
z^2 - \frac{2i}{\epsilon} z - 1 = 0 \\
z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{\frac{2i}{\epsilon} \pm \sqrt{\frac{-4}{\epsilon^2} - 4(-1)}}{2} \\
&= \frac{i}{\epsilon} \pm \sqrt{-\frac{1}{\epsilon^2} + 1} \\
&= \frac{i}{\epsilon} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2}} \\
&= \frac{i}{\epsilon} \pm \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon^2 - 1} \\
&= \frac{i}{\epsilon} \pm \frac{1}{\epsilon}\sqrt{-(1 - \epsilon^2)} \\
&= \frac{i}{\epsilon} \pm \frac{i}{\epsilon}\sqrt{1 - \epsilon^2} \\
&= \frac{i}{\epsilon}\left(1 \pm \sqrt{1 - \epsilon^2}\right)
\end{aligned}
$$

.

Ahora bien, necesitamos determinar cual de estos dos polos esta dentro del circulo unitario.

$$
\begin{aligned}
\epsilon^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \epsilon^2 \Rightarrow \sqrt{1 - \epsilon^2} > 0 \\
\Rightarrow 1 + \sqrt{1 - \epsilon^2} > 1 \\
\Rightarrow 1 > 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}.
\end{aligned}
$$

por lo tanto el contorno encierra al polo negativo.

Por lo tanto, podemos volver a la función que habiamos encontrado y calcular su residuo. Antes debemos aclarar que llamaremos $z_0 = \frac{i}{\epsilon}\left(1+\sqrt{1-\epsilon^2}\right)$ y $z_1 = \frac{i}{\epsilon}\left(1-\sqrt{1-\epsilon^2}\right)$

$$\begin{aligned}
a_{-1}^{z_1} &= \frac{d}{dz}\ \frac{4}{\epsilon^2}\frac{zi}{(z-z_0)^2}\bigg|_{z_1} \\
&= \frac{4i}{\epsilon^2}\frac{(z-z_0)^2-2(z-z_0)z}{(z-z_0)^4}\bigg|_{z_1} \\
&= \frac{4i}{\epsilon^2}\frac{z-z_0-2z}{(z-z_0)^3}\bigg|_{z_1} \\
&= -\frac{4i}{\epsilon^2}\frac{z+z_0}{(z-z_0)^3}\bigg|_{z_1} \\
&= -\frac{4i}{\epsilon^2}\frac{z_1+z_0}{(z_1-z_0)^3}\bigg|_{z_1} \\
z_1-z_0 &= \frac{i}{\epsilon}\left(1-\sqrt{1-\epsilon^2}-1-\sqrt{1-\epsilon^2}\right) \\
z_1-z_0 &= \frac{-2i}{\epsilon}\sqrt{1-\epsilon^2} \\
&= -\frac{4i}{\epsilon^2}\frac{\frac{2i}{\epsilon}}{\left(-\frac{2i}{\epsilon}\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^3} \\
&= \frac{4i}{\epsilon^2}\frac{1}{\frac{4i^2}{\epsilon^2}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^3} \\
&= \frac{1}{i\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^3}.
\end{aligned}$$

Ahora con esto y con cauchy sabemos que esta integral queda

$$2\pi i\left(\frac{1}{i\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^3}\right).$$

Chapter 4

1.

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
I(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{(x^2 - \sigma^2)} \\
I(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}{x^2 - \sigma^2} \\
I(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 - \sigma^2) 2i} - \frac{x e^{-ix}}{(x^2 - \sigma^2) 2i} \\
I(\sigma) &= \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - \sigma^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ix}}{x^2 - \sigma^2} \right).
\end{aligned}$$

2. En este caso, el denominador se puede factorizar como $\left(x^2 - \sigma^2\right) = (x + \sigma)(x - \sigma)$

   Ahora bien, vamos a desarrollar para cada una de estas integrales:

   (a) En este caso para que por lema de Jordan una parte de la integral se cancele debemos usar el contorno que esta en la imagen 4.1

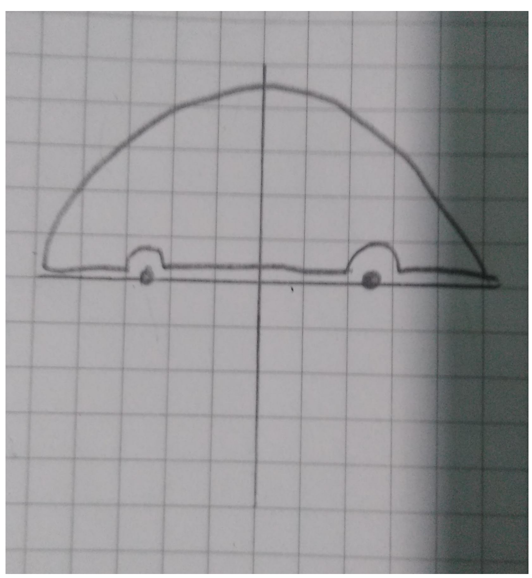

Figure 4.1: Contorno en el que se incluyen los dos polos por arriba

Ahora entonces con los polos encerrados esta integral queda:

$$\int_c = 2\pi i \left(a_{(-1)}^{(\sigma)} + a_{(-1)}^{(-\sigma)} \right)$$
.

Ahora si no los encerramos

$$\int_c = \int_{-\infty}^{\infty} -\pi i \left(a_{-1}^{\sigma} + a_{-1}^{-\sigma} \right) = 0$$
.

Ahora con esto podemos notar que es lo mismo con:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \pi i \left(a_{-1}^{\sigma} + a_{-1}^{-\sigma} \right).$$

(b) En este caso por lema de Jordan una parte de la integral se cancele debemos usar el contorno en la imagen 4.2

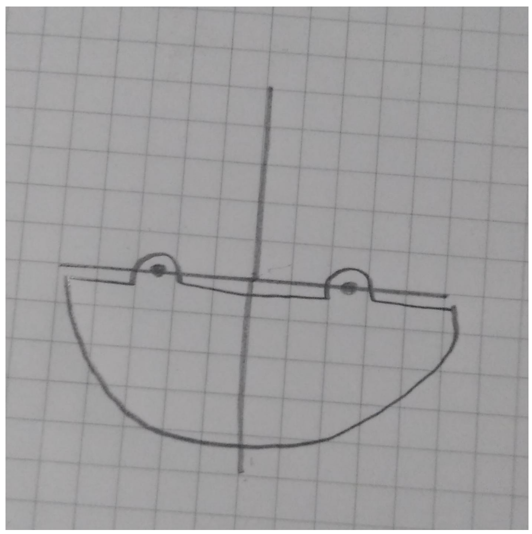

Figure 4.2: Contorno con el que se incluyen los polos por abajo

ahora bien, la integral de los polos nos queda:

$$\int_{\sigma} + \int_{-\sigma} = \pi i \left(a_{-1}^{\sigma} + a_{-1}^{\sigma} \right)$$
.

y con esto

$$\int_{-\infty}^{\infty} = -\pi i \left(a_{-1}^{\sigma} + a_{-1}^{-\sigma} \right).$$

3. Ahora vamos a evaluar cada integral

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-\sigma)(x+\sigma)} dx &= \pi i \left(a_1^{\sigma} + a_1^{-\sigma} \right) \\ &= \pi i \left(\left(\frac{1}{0!} \left(\frac{ze^{iz}}{(z-\sigma)(z+\sigma)} \right) \right) + \left(\frac{1}{0!} \left(\frac{ze^{iz}}{(z-\sigma)(z+\sigma)} \right) \right) \right) \\ &= \pi i \left(\frac{\sigma e^{i\sigma}}{2\sigma} + \frac{-\sigma e^{-i\sigma}}{-2\sigma} \right) = \pi i \left(\frac{e^{i\sigma} - e^{[i\sigma}}{2} \right) = \pi i \cos(\sigma).\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x-\sigma)(x+\sigma)}dx = \pi i \left(a_{-1}^{sigma} + a_{-1}^{-\sigma}\right)$$
$$= -\pi i \cos(\sigma)$$

.

$$\begin{aligned} I(\sigma) = \frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-\sigma)(x+\sigma)}dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x-\sigma)(x+\sigma)}dx\right) &= \frac{1}{2i}\left(\pi i \cos(\sigma) - (-\pi i \cos(\sigma))\right) \\ &= \frac{2\pi i \cos(\sigma)}{2i} \\ &= \pi \cos(\sigma). \end{aligned}$$

4. Ahora debemos hacer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2 - (\sigma + i\epsilon)^2}dx = \frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-(\sigma+i\epsilon))}dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x-(\sigma+i\epsilon))(x-(-\sigma-i\epsilon))}dx\right)$$

.

y con esto trabajamos en cada integral $\sigma_+ = \sigma + i\epsilon$ y $\sigma_- = \sigma - i\epsilon$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-\sigma_+)(x-\sigma_-)}dx &= 2\pi i \left(a_{-1}^{\sigma_+} + a_{-1}^{\sigma_-}\right) \\ &= 2\pi i \left(\left(\frac{\sigma_+ e^{i\sigma_+}}{\sigma_+ - \sigma_-}\right) + \left(\frac{\sigma_- e^{i\sigma_-}}{\sigma_- - \sigma_+}\right)\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\sigma_+ e^{i\sigma_+} - \sigma_- e^{i\sigma_-}}{\sigma_+ - \sigma_-}\right) \\ &= 2\pi i \frac{\sigma_+\left(e^{i\sigma_+} + e^{i\sigma_-}\right)}{2\sigma_+} \\ &= 2\pi i \cos(\sigma_+). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x-\sigma_+)(x-\sigma_-)}dx &= -2\pi i \left(a_{-1}^{\sigma_+} + a_{-1}^{\sigma_-}\right) \\ &= -2\pi i \cos(\sigma_+). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-\sigma_+)(x-\sigma_-)}dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x-\sigma_+)(x-\sigma_-)}\right) &= \frac{1}{2i}\left(2\pi i \cos(\sigma_+) - (-2\pi i \cos(\sigma_+))\right) \\ &= \frac{1}{2i} 4\pi i \cos(\sigma_+) \\ &= 2\pi \cos(\sigma_+) \\ &= 2\pi \cos(\sigma + i\epsilon). \end{aligned}$$

Chapter 5

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+x+2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2(x^2+x+2)}.$$

para lo cual

$$\begin{aligned} x^2+x+2 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(2)}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{7}\right) \\ z_+ &= \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{7}\right) \\ z_- &= \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{7}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{2(x^2+x+2)} dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{(x-z_+)(x-z_-)} dx \\ &= \frac{1}{2}\left(2\pi i a_{-1}^{z_+}\right) = (\pi i)\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)\left(\frac{z-z_+}{1}\cdot\frac{e^{imz}}{(z-z_+)(z-z_-)}\right) \\ &= \pi i \frac{e^{imz_+}}{(z_+-z_-)} \\ &= \frac{\pi i e^{imz_+}}{i\sqrt{7}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{7}} \frac{1}{e^{\frac{im}{2}} e^{\frac{\sqrt{7}m}{2}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-imx}}{2(x^2+x+2)} dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-imx}}{(x-z_+)(x-z_-)} \\ &= -\pi i\left(\frac{e^{-imz}}{(z-z_+)(z-z_-)}\right) \\ &= -\pi i \frac{e^{im\frac{1}{2}+i^2 m\frac{\sqrt{7}}{2}}}{-zi\sqrt{\frac{7}{4}}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{7}} \frac{e^{im\frac{1}{2}}}{e^{m\frac{\sqrt{7}}{2}}}. \end{aligned}$$

Ahora sumamos ambas integrales:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{2\left(x^2+x+2\right)}dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-imx}}{2\left(x^2+x+2\right)}dx \\ = \frac{\pi}{\sqrt{7}}\frac{1}{e^{\frac{im}{2}}e^{\frac{\sqrt{7}m}{2}}} + \frac{\pi}{\sqrt{7}}\frac{e^{im\frac{1}{2}}}{e^{\frac{\sqrt{7}m}{2}}} \\ = \frac{\pi}{\sqrt{7}e^{\frac{\sqrt{7}m}{2}}}\left(e^{-\frac{im}{2}} + e^{\frac{im}{2}}\right) \\ = \frac{\pi}{\sqrt{7}e^{\sqrt{7}\frac{m}{2}}} 2\cos\left(\frac{m}{2}\right).\end{aligned}$$