混合策略
Mixed strategy

1

2

混合策略

- 混合策略有效地迷惑對手，引入不可預測性，使他們預測你的策略變得複雜
- 這種策略可以透過利用博弈的結構或對手的偏好來獲得更大的預期回報。
- 透過仔細平衡不同策略的機率，玩家可以改善他們的長期結果。

3

Sun Tzu's mixed strategy

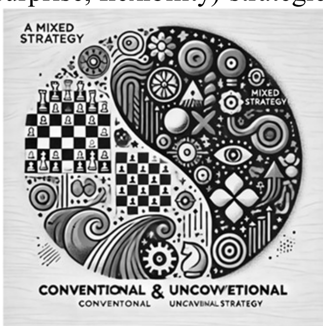
4

正奇 strategies

- "正奇 strategies" refer to conventional (正) and unconventional (奇) tactics, particularly in contexts like warfare, business, or competitive strategies

5

The mixed strategy, combining conventional (structured, planned) and unconventional (surprise, flexibility) strategies.



6

孫子兵法的混合策略

- 凡戰者，
- 以正合，
- 以奇勝。

7

凡戰者，以正合，以奇勝

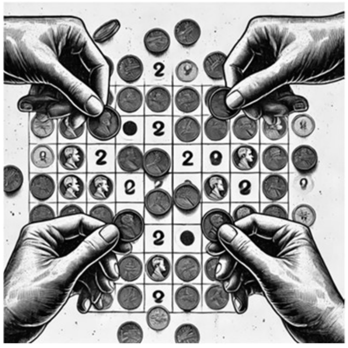
8

混合策略的隨機意義

- 每個玩家在賽局中，從對應一群人口 (a population of individuals) 中隨機抽取。
- 第一種類型: 總人口中概率為 p 的玩家 i 選擇的策略 a (進化博弈論)
- 第二種類型:每個玩家 i 選擇的策略 a 的概率為 p

9

匹配硬幣(Matching penny)



10

匹配硬幣(Matching pennies)

		Player 2	
		Head	Tail
Player 1	Head	(1, -1)	(-1,1)
	Tail	(-1,1)	(1,-1)

11

匹配硬幣(Matching pennies)

- 沒有納許均衡。
- 它有混合策略的納許均衡。
- 隨機的穩定狀態(stochastic steady state) ，每個玩家選擇每一策略的概率為1/2，反之亦然。

12

Lottery

- Lottery 是概率分佈 (probability distribution)

vNM (Von Neumann Preference)喜好

- Von Neumann and Morgenstern 用報酬函數的預期值表示 對 lotteries 的偏好，稱為 vNM Preference.

vNM (Von Neumann Preference) 喜好

- 設有 a，b 和 c 三種策略
- lottery P產生 a 的概率 為 p_a ，b 的概率 p_b 和 c 的概率 p_c
- lottery Q產生 a 的概率 為 q_a ，b 的概率 q_b 和 c 的概率 q_c
- 對於每一個玩家 i ，比較喜歡 lottery P 若且唯若 $p_a u_i(a)+p_b u_i(b)+p_c u_i(c) > q_a u_i(a)+q_b u_i(b)+q_c u_i(c)$

匹配硬幣(Matching pennies)

		Play 2 Head	Tail
Player 1	head	1,-1	-1, 1
	Tail	-1, 1	1,-1

混合策略 Mixed Strategy

- 玩家的混合策略是玩家策略的概率分佈。
- $\alpha_i(a_k)$ 是玩家 i 對她的策略 a_k 採取混合策略的概率分佈。

Matching Pennies混合策略

- 玩家 1 有兩個 純策略 (pure strategies)：H 和T
- (0.5,0.5) = (α_1 (H) = 0.5, α_1(T) = 0.5)是一個混合的策略。玩家1 採取策略 H 和 T 的概率分別是 0.5 和 0.5。
- (0.3, 0.7) = (α_1(H) =0.3, α_1(T) = 0.7)是另一個混合的策略。玩家1 採取策略 H 和 T 的概率分別是 0.3 和 0.7。

兩個玩家的混合策略的納許均衡

- 兩個玩家的混合策略納許均衡 α* 可表示為 $(\alpha_1 *, \alpha_2 *)$.
- 每個玩家有兩個策略 *a* 和 *b*的混合策略 $\alpha* = (\alpha_1 *, \alpha_2 *)$

$=((\alpha_1 *(a), (\alpha_1 *(b)), (\alpha_2 * (a), \alpha_2 * (b))$.

19

n 個玩家的混合策略的納許均衡

- α*為混合策略的納許均衡
- 每一個玩家 *i*,

$U_i(\alpha^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i} *)$

- α_i 是玩家 i 的混合策略 i
- $U_i(\alpha)$ 是玩家 *i* 的混合策略 *α* 的期望報酬。

20

具有vNM偏好的策略博弈的混合策略納什均衡 Mixed strategy Nash equilibrium of strategic game with vNM preferences

- 對於每個玩家 *i*,
- $U_i(\alpha^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i} *)$
- $U_i(\alpha)$ 是玩家 *i* 的混合策略 *α* 的期望收益.

21

最佳反應函數

- 對每玩家 *i* 而言，混合策略 *α** 是一個混合策略納許均衡

若且唯若 $\alpha_i *$ 在 $B_i(\alpha_{-i} *)$

22

匹配硬幣的混合策略

- 玩家1選擇 Head 和 Tail 的概率，分別為 *p* 和1-*p* 。
- 玩家 2 選擇 Head 和 Tail 的概率 q 和1-q

23

Matching Pennies

Player 2

		q Head	1−q Tail	Player 1's Expected payoffs
Player 1	Head *p*	**1 , -1**	**-1 , 1**	$EU_1(H) = \boldsymbol{2q-1}$
	Tail *1-p*	**-1 , 1**	**1 , -1**	$EU_1(T) = 1-\boldsymbol{2q}$

Player 2's Expected payoffs EU_2 $EU_2(H) = -p+(1-p)$ $EU_2(T) = p-(1-p)$

24

根據玩家 2 的混合策略
計算玩家 1 的預期報酬

- 如果玩家1選擇 Head 的預期報酬, $EU_1(H)$ = ***q-(1-q) = 2q-1***
- 如果玩家1選擇 Tail 的預期報酬, $EU_1(T)$ = ***-q+(1-q) = 1-2q***

25

玩家1的最佳反應
$B_1(q)$

- 如果 ***2q-1 > 1-2q (q>0.5)*** 玩家1選擇 Head **(p = 1).**
- 如果 ***2q-1 < 1-2q (q <0.5)*** 玩家1選擇**Tail *(p = 0).***
- *If* ***2q-1 = 1-2q*** 這是玩家**1**無所謂的選擇 Head **or Tail. Thus,** ***q=1/2.***

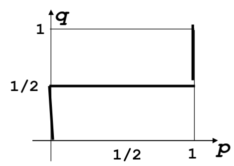
26

玩家1的最佳反應 **$B_1(q)$**

- 如果 $q > 0.5$,玩家1選擇 Head ($p=1$)
- 如果 $q < 0.5$,玩家1選擇Tail ($p=0$)
- 如果 $q = 0.5$,**玩家1無所謂的選擇** Head **or Tail.** ($0 \le p \le 1$).
- $B_1(q) = \{p = 0\}$ if $q < 0.5$
- $B_1(q) = \{p: 0 \le p \le 1\}$ if $q = 0.5$
- $B_1(q) = \{p = 1\}$ if $q > 0.5$

27

玩家1的最佳反應
$B_1(q)$



28

根據玩家 1 的混合策略
計算玩家 2 的預期報酬

- 玩家 2 選擇Head的預期報酬$EU_2(H)$ = ***-p+(1-p)=1-2p***
- 玩家2選擇 Tail的預期報酬 if $EU_2(T)$ = ***p-(1-p)=2p-1***

29

玩家2的最佳反應
$B_2(p)$

- 如果 ***1-2p > 2p-1 (p >0.5)***玩家 2 選擇***Head (q = 1)***
- 如果 ***1-2p < 2p-1 (p<0.5)***玩家 2 選擇***Tail(q = 0).***
- 如果 ***1-2p = 2p -1*** 玩家 **2** 無所謂的選擇Head **or Tail.** ***Thus, p=1/2.***

30

玩家2的最佳反應 $B_2(p)$

- 如果***p* < *0.5*,**玩家 2 選擇Head,
- 如果 p > 0.5玩家 2 選擇Tail.
- 如果 ***p* = *0.5*** 玩家**2**無所謂的選擇Head **or Tail.**

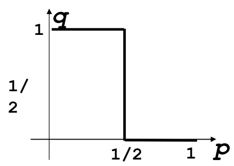
31

玩家2的最佳反應 $B_2(p)$:

- For $p < 0.5$,玩家2選擇Head
- For $p > 0.5$,玩家2選擇Tail
- For $p = 0.5$,**玩家2**無所謂選擇Head **or Tail..**
- **$B_2(p)= \{q = 1\}$ if $p < ½$.**
- **$B2(p)=\{q: 0<q <1\}$ if $p = 1/2$**
- **$B_2(p)= \{q = 0\}$ if $p > ½$.**

32

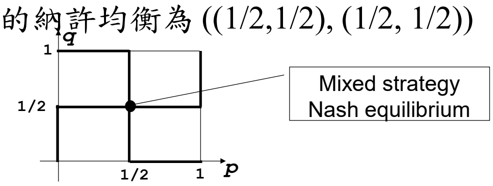
玩家2的最佳反應 $B_2(p)$:



33

納許均衡

- **$q = 0.5 \in B_1(0.5)$**
  $p = 0.5 \in B_2(0.5)$
- 賽局的納許均衡為 ((1/2,1/2), (1/2, 1/2))



34

Payoff matrix without saddlepoint

保險箱S1:10, 000 美元 保險箱S2:100, 000 美元		Guard警衛	
		保護 Protect S1 p	保護 Protect S2 1-p
Safecraker 保險箱竊賊	Rob S1 q	$0 Stolen	$10,000 stolen
	Rob S2 1-q	$100,000 stolen	0$ stolen

35

保護保險箱

36

警衛的混合策略

- 保險箱S1:10,000 美元
- 保險箱S2:100,000 美元
- 假設警衛以 p 的概率保護保險箱S1，以 1 – p 的概率保護保險箱S2。
- 如果保險箱竊賊偷 S1 ，他將獲得平均收益為 10,000 美元（1 – p），他將以 1 – p 的概率獲得 10,000 美元，以 p 的概率獲得 0 美元。
- 如果保險箱竊賊偷 S2，他將獲得 $100,000 的概率 p 和 $0 的概率 1 – p，平均收益為 $100,000p。

37

警衛的混合策略

- 如果兩種情況下被盜的平均金額相同，即 $10,000(1 – p) = $100,000p，則警衛對保險箱竊賊選擇哪個保險箱無動所謂。 p = 1/11。
- 如果警衛以 1/11 的概率保護 S1，以 10/11 的概率保護 S2，他平均損失不超過 9,091 美元。

38

竊賊的混合策略

- 竊賊偷 S1的概率為 q,偷 S2的概率為 1-q
- 100000(1-q)=q10000
- 10-10q =q
- q=1/11

39

竊賊的混合策略

- 如果竊賊以 1/11 的概率嘗試偷竊保險箱S1 和以 10/11 的概率偷竊保險箱S2 ，他將平均獲得至少 9,091 美元。

40

匹配硬幣(Matching pennies)

Eu_1(p|H) $= p \cdot 1 + (1-p)\cdot(-1) = 2p-1$

Play 2

Player 1		Head	Tail
	head (p)	$1,-\underline{1}$	$-\underline{1},1$
	Tail(1-p)	$-\underline{1},1$	$1,-\underline{1}$

Eu_1(p|T) $= p \cdot (-1) + (1-p)\cdot(1) = 1-2p$

41

安全策略 Security strategy

- Eu_1(p|H)以玩家 2 選擇 H 為條件。
- Eu_1(p|T) 以玩家 2 選擇 T 為條件。
- 找到Eu_1(p|H)和Eu_1(p|T)的最小值的最大值（ their "lower envelope “）

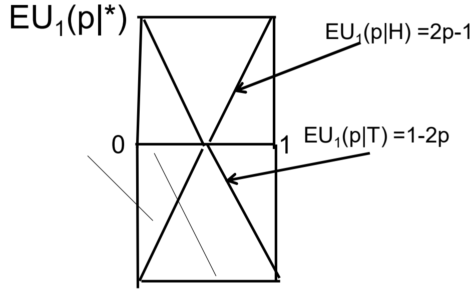
42

Security (Max-Min) Strategy - Matching Pennies Game

- 第一步：如果玩家 2 選擇 H，玩家 1 的 EU 變為 $Eu_1(\mathrm{p|H}) = p \cdot 1 + (1-p)\cdot(-1) = 2p-1$
- 如果玩家 2 選擇 T，則玩家 1 的 EU 變為 $Eu_1(\mathrm{p|T}) = p\cdot(-1) + (1-p)\cdot(1) = 1-2p$

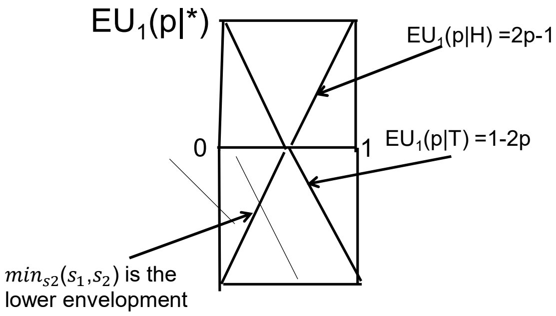
43

第二步： 用圖形來描繪 $Eu_1(\mathrm{p|H})$ ）和 $Eu_1(\mathrm{p|T})$



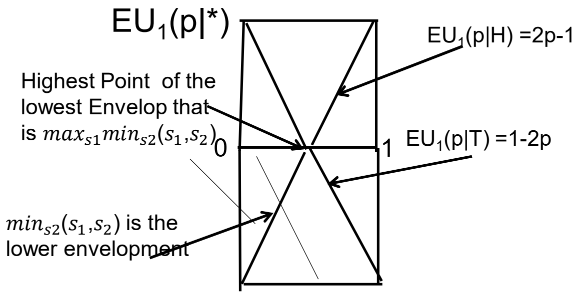
44

第三步：確認 the lower envelope, i.e.,$min_{s_2}\ u_1(s_1, s_2)$



45

第四步： 識別the lower envelope: 的最高峰 i.e., $max_{s_1}\ min_{s_2}\ u_1(s_1, s_2)$



46

Security (Max-Min) Strategy - Matching Pennies Game

- 玩家 1 的安全（最大-最小）策略是以概率 p = 1/2 選擇正面（Head）
- 遵循與玩家 1 相同的程序，我們發現玩家 2 也以 q = 1/2 的概率隨機化

47

- payoff tables + Risk Preference + Maximax, Maximin & Minimax Regret [Eng]
- https://www.youtube.com/watch?v=szy7nfiXYtY&t=87s

48

- Guide to Game Theory - minimax and backward induction
- https://www.youtube.com/watch?v=uzsnQ1a9fq0
- Finding Dominant Strategies & Maximin Strategies
- https://www.youtube.com/watch?v=JCIz_E-4zPc

49

- GTO-2-01: Mixed Strategies and Nash Equilibrium: A High-Level Taste
- https://www.youtube.com/watch?v=BsgnKTfOxTs&list=PLeY-lFPWgBThlAF5VFWlOWy5zqhkXcCqz

50

Further Reading

51

Security (Max-min) Strategy - Tennis Game

		Player 2	
		Right	Left
Player1	Right p	20,80	70,30
	Left 1-p	90,10	30,70

- $Eu_1(\text{p}|\text{R}) = p \cdot 20 + (1-p) \cdot (90) = 90 - 70p$
- $Eu_1(\text{p}|\text{L}) = p \cdot 70 + (1-p) \cdot (30) = 30 + 40p$

52

Security (Max-min) Strategy - Tennis Game

- 這不是零和遊戲
- 這是一個恆和博弈，因為對於所有可能的策略組合(all possible strategy profiles)，玩家的收益總和等於常數（100）

53

Security (Max-min) Strategy - Tennis Game

- 如果玩家 2 選擇右：
- $Eu_1(\text{p}|\text{R}) = p \cdot 20 + (1-p) \cdot (90) = 90 - 70p$
- 如果玩家 2 選擇左：
- $Eu_1(\text{p}|\text{L}) = p \cdot 70 + (1-p) \cdot (30) = 30 + 40p$

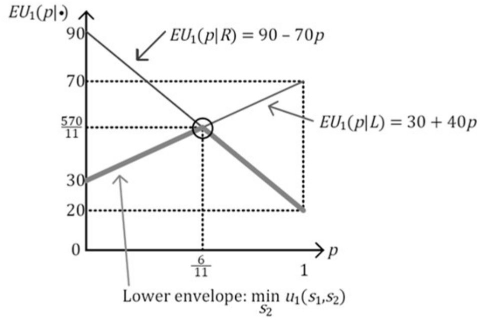
54

Security (Max-min) Strategy - Tennis Game

- $max_{s_1} \quad min_{s_2} \; u_1(s_1, s_2)$
- Eu_1(p|R) = Eu_1(p|L)
- 90- 70p = 30 + 40p ⇒ 60 = 110p ⇒ p =6/11
- Eu_1(p|R) = 90 -70 *6/11 = 570/11
- Eu_1(p|L) = 30 + 40*6/11 = 570/11

55

Security (Max-min) Strategy - Tennis Game



56

網球博弈
接球者成功回球率

		發球者瞄準 Player 2 Server's Aim	
		正手 Forehand (q)	反手 Backhand (1-q)
Player 1 接球者動作 Receiver's Move	正手 Forehand (p)	90%	20%
	反手 Backhand (1-p)	30%	60%

57

接球者成功回球率

- $Eu_1(p,q) = U_R$ (p,q)
- =p(0.90q +0.20 *(1-q)] + (1-p)[(0.30q+0.60(1-q)]

58

從發球者觀點 (player 2) 發球著最佳混合策略

- 接球者正手（p = 1），成功回球率： $Eu_1(p,q) = U_R$ (p,q) = (0.90q +0.20 *(1-q)] p =0 (藍線)
- 接球者反手（p = 0），成功回球率： $Eu_1(p,q) = U_R$ (p,q) = [(0.30q+0.60(1-q)] (紅線)

59

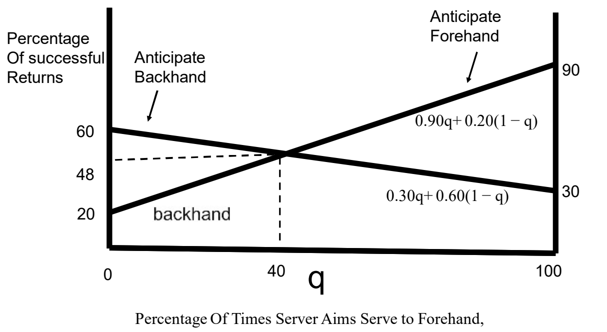
網球博弈

- 發球著必須無所謂(indifferent)發正手與發反手球
- 0.90q+ 0.20(1 − q) = 0.30q+ 0.60(1 − q)
- 1.00q = 0.40
- q= 0.4（發球著發正手的概率為0.4）

60

發球者發正手球的概率

Percentage Of Times Server Aims Serve to Forehand, q=40%



61

從發球者觀點
From the server's point view

- 發球者發正手球與反手球的比例為40:60，這是接球者(the receiver)無法藉此發揮其優勢的唯一方法。
- 在40%的時間將對準接球者(the receiver)正手球是發球者(the server) 的最佳選擇。

62

從接球者觀點

- U_R (p,q)
- = p(0.90q +0.20 *(1-q)] + (1-p)[(0.30q+0.60(1-q]
- q = 1 U_R (p,q) =0.90p +(1−p)0. 30（發球者瞄準正手）
- q = 0 U_R (p,q) =0.20p +(1-p)0.60 （發球者瞄準反手）

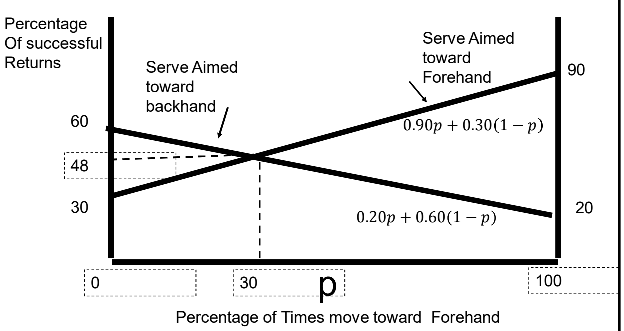
63

從接球者觀點(player 1)
接球者最佳混合策略

- 如果發球者瞄準正手（q ＝ 1） ，則接球者時成功回球率
- Eu_1(p, q=1) $= 0.90p + 0.30(1-p) = 0.30 + 0.60p$
- 如果發球者瞄準反手（q ＝ 0） ，則接球成功回球率
- Eu_1(p,q=0) $= 0.20p + 0.60(1-p) = 0.60 - 0.40$p

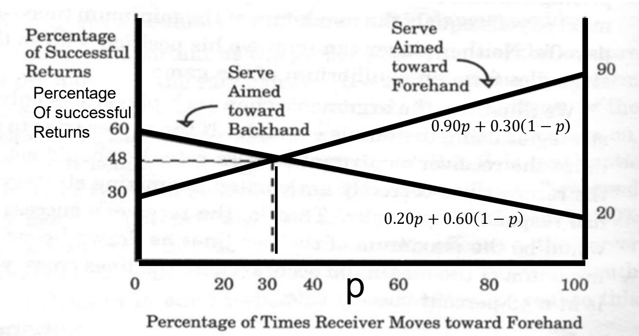
64

接球者移向正手的機率, p=0.3



65

接球者移向正手的機率, p=0.3



66

接球者成功回球率 $0 \leq p \leq 1$

- 接球者必須無所謂(indifferent)接正手球與接反手球
- Eu_1(p,q=1) = Eu_1(p,q=0)
- $0.30 + 0.60p = 0.60 - 0.40p$
- $p = 0.3$（接正手球的概率）
- 接球者成功回球率
- Eu_1(p=0.3,q=1) = Eu_1(p=0.3,q=0)=0.48

67

網球博弈 Tennis Game

- 發球者必須無所謂(indifferent)發正手與發反手
- 0.90p+ 0.30(1 − p) = 0.20p+ 0.60(1 − p)
- 1.00p = 0.30
- P = 0.3（接球者移向正手的概率為 0.3）

68

從接球者觀點

- 接球者最好的搭配為30%的時間，預期正手球， 70%的時間預期反手球。
- The best mix has 30 percent of the time, anticipate a forehand; the other 70 percent, anticipate the backhand.

69

網球博弈

- （p ＝ 0.3，q ＝ 0.4）是混合策略均衡
- 沒有純粹的策略均衡，這是唯一的納許均衡

70

接球者成功回球率

- $U_R(30\%,40\%) = 0.3*(0.36+0.12) +0.7*(0.12+0.36) = 0.48$

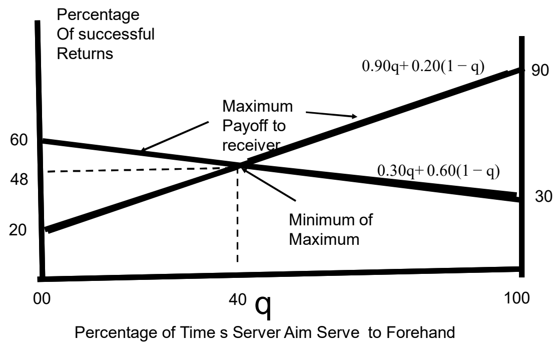
71

接球者成功回球率 接球者

- 當p ＝ 0.3（正手是接球者(Receiver)(移動的概率）並且q ＝ 0.4（正手是（Server)目標的概率）時，接收成功回球率為 48%。
- 這意味著接球者無法成功回球的可能性為 52%。
- When p = 0.3 (The probability of the receiver's move is forehand) and q = 0.4 (The probability of the Server aim is forehand) the receive successfully return is 48%.
- It means that the probability of the receiver fail to return is 52%.

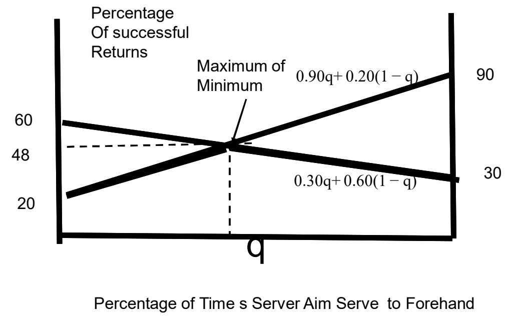
72

從發球者觀點
Mini-max



73

從接球觀點
Max-min



74

酒後駕車 Drunk Driving

- 警察局長擔心酒後駕車。
- 他可以設置酒精檢查站與否
- 檢查站總是能抓住酒後駕車的人，但要花 c 的成本

75

酒後駕車 Drunk Driving

- 您可以在開車前決定喝酒還是喝可樂
- 葡萄酒對勝過可樂的價值是 r。
- 而如果沒有被抓，酒後駕車的費用是 a
- 而如果沒有被抓，則城市的費用 f
- 如果被抓，您將支付費用 d

76

酒後駕車
Assume: $f > c > 0;\ d > r > a \geq 0$

		Police 警察	
		Check 檢查	No 不檢查
You	Wine 酒	r-d, -c	r-a,-f
	Cola 可樂	0, -c	0,0

$f = 2,\ c = 1,\ d = 4,\ r = 2,\ a = 1$

77

酒後駕車 Drunk Driving

		Police	
		Check	No
You	Wine	-2,-1*	1*,-2
	Cola	0*,-1	0,0*

78

The Police and Drunk Driver Game
(p = 1/2, q = 1/3) is a mixed strategy equilibrium

		Police	
		Check(q)	Not Check(1-q)
Driver	Wine (p)	(-2, -1*)	(1*,-2)
	Cola (1-p)	(0*,-1)	(0,0*)

f = 2, c = 1, d = 4, r = 2, a = 1

79

酒後駕車 Drunk Driving

- 您喝酒的概率 p
- 警察設置檢查站的概率 q
- 您的預期收益為:
- 喝酒是 q×（−2）+（1 − q）×1 = 1 − 3q
- 喝可樂是 0
- **無所謂** (Indifference)的條件 1-3q = 0
- q = 1/3

80

酒後駕車 Drunk Driving

- 警方的預期收益為
- 設置檢查站為-1
  - 不設置檢查站為p ×（−2）+（1 − p）× 0 = −2p
- Indifference **無所謂** (Indifference) 的條件 −1 = −2p ⇒ p = 1/2

81

酒後駕車 Drunk Driving

- 您喝酒的概率 p
- 警察設置檢查站的概率 q
- （p = 1/2，q = 1/3）是混合策略均衡

82

酒後駕車的博弈論

- 警察與喝酒司機
- 大學與作弊學生（考試，GPA，推薦信，家庭作業）
- 奧林匹克委員會與吃毒品運動員
- 警察與超速司機
- 政府與假新聞

83

踢球者和守門員遊戲
The Kicker and Goalie game
p = 0.42, q=0.39

		Goalie 守門員	
		Left (p) 左	Right(1-p) 右
Kicker 踢球者	Left (q) 左	(58, 42)	(95,5)
	Right (1-q) 右	(93,7)	(70,30)

84

The Kicker and Goalie game

Empirical scoring probabilities

- 踢球者必須漠不關心踢左踢右
- 58p + 95(1 − p) = 93p + 70(1 − p))
- p = 0.42 （守左）
- 守門員一定要漠不關心守左守右
- 42q + 7(1 − q) = 5q + 30(1 − q))
- q = 0.39 （踢左）

85

網球比賽
A Tennis Match

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Player 2</td></tr>
<tr><td>DL(q)</td><td>CC(1-q)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Player 1</td><td>DL(p)</td><td>(50,50)</td><td>(80,20)</td></tr>
<tr><td>CC(1-p)</td><td>(90,10)</td><td>(20,80)</td></tr>
</table>

86

Two Tennis Strategies

- DL: Down the line直線
- CC: Crosscourt 對角線

87

玩家1的收益期望值是

- 玩家1的收益期望值是
- u_1= p(50q+80(1-q)) + (1-p)(90q+(1-q)20)

 =50pq +80p(1-q) +90 (1-p)q+ 20(1-p)(1-q)

88

玩家1的最佳回應

玩家1的最佳回應是 du_1/dp=50q+80(1-q) -90q-20(1-q)=100q-60 =0

q=0.6

玩家1的收益期望值取決於 q

89

玩家1對各種 q 的最佳反應

- If q > 0.6, 100q- 60 >0.如果 p增加，則玩家1的收益期望值會增加。 玩家1 的最佳回應是p = 1。玩家 1 選擇 DL
- If q < 0.6, 100q- 60 <0.如果p降低，則玩家1的預期收益會增加。 玩家 1 的最好成績是p = 0。 玩家1選擇 CC。
- If q = 0.6 玩家1的最佳反應是 0 到 1 之間的任何p。

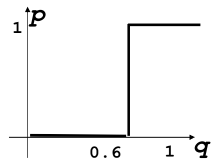
90

玩家1的最佳反應 $B_1(q)$

- For $q > 0.6$, Player 1 chooses DL ($p=1$)
- For $q < 0.6$, Player 1 chooses CC ($p=0$)
- For $q = 0.5$, Player 1 chooses indifferently ($0 \le p \le 1$).
- $B_1(q)=\{p = 0\}$ if $q < 0.6$
- $B_1(q)=\{p:0 \le p \le 1\}$ if $q = 0.6$
- $B_1(q)=\{p=1\}$ if $q > 0.6$

91

玩家1的最佳反應 $B_1(q)$



92

Player 2's expected payoff

- 玩家2的收益期望值是

$u_2= q(50p+10(1-p))+ (1-q)(20p+80(1-p)$

$= 50pq + 10q(1-p) + 20(1-q)p+80(1-q)(1-p)$

93

玩家2 的最佳反應

玩家 2 的最佳反應是

$du_2/dq= 50p +10(1-p)-20p-80(1-p)=-70+100p =0$

$p = 0.7$

玩家 1 的收益期望值取決於p

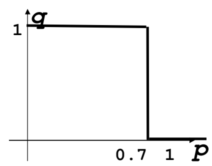
94

玩家2的最佳反應 $B_2(p)$

- For $p > 0.7$, Player 2 chooses DL ($q=1$)
- For $p< 0.7$, Player 1 chooses CC ($q=0$)
- For $p = 0.7$, Player 1 chooses indifferently ($0 \le q \le 1$).
- $B_2(p)=\{q = 0\}$ if $p < 0.7$
- $B_2(p)=\{q:0 \le p \le 1\}$ if $p = 0.7$
- $B_2(p)=\{q=1\}$ if $p > 0.7$

95

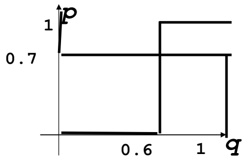
玩家2的最佳反應 B2(p)



96

玩家1的最佳反應

$B_1(q)$



97

混合策略納許均衡

- 混合策略納許均衡是 ((0.7,0.3) ,(0.6,0.4),)
- α^*_1 (DL) = 0.7 = p
- α^*_1 (CC) = 0.3 = 1-p
- α^*_2 (DL) = 0.6 = q
- α^*_2 (CC) = 0.4 = 1-q

98

玩家1對DL和CC的漠不關心

- Player 1's payoff for Playing DL is 50q + 80(1-q)
- Player 1's payoff for Playing CC is 90q + 20(1-q)
- Player 1's indifference of DL and CC
- 50q + 80(1-q) = 90q + 20(1-q)
- -30q+80=20+70q
- 100q=60 q=0.6

99

玩家2對 DL和 CC的漠不關心

- Player 2's payoff for Playing DL is 50p + 10(1-p)
- Player 2's payoff for Playing CC is 20p + 80(1-p)
- Player 2's indifference of DL and CC
- 50q + 10(1-p) = 20p + 80(1-p)
- 40p+10=80-60p
- 100 p =70 p=0.7

100

Hawk-Dove Game

Dove

	H (q)	D (1-q)
H (p) Hawk	-2,-2	6, 0
D (1-p)	0, 6	3, 3

101

Mixed Strategy NE is((3/5,2/5),(3/5,2/5))

- Hawk's payoff for choosing H is -2q+6(1-q).
- Hawk's payoff for choosing D is 3(1-q)
- Hawk's indifference of H and D
- -2p+6(1-q) = 3(1-q)
- 5q = 3, q = 3/5

102

Mixed Strategy NE is((3/5,2/5),(3/5,2/5))

- Dove's payoff for choosing H is
- -2p+6(1-p).
- Dove's payoff for choosing D is 3(1-p)
- Dove's indifference of H and D
- -2p+6(1-p)=3(1-p)
- 5p = 3, p = 3/5

Hawk-Dove Game

- Dove's expected payoff is
- u_d = -2pq +6(1-p)q+ 3 (1-p)(1-q)

Hawk-Dove Game

- 鷹鴿賽局的maximin的策略是
- ((3/5,2/5), (3/5,2/5)) and
- 鷹的收益期望值是
- -18/25+36/25+ 12/25 = 30/25

Hawk-Dove Game

- 鷹鴿賽局的maximin的策略是((3/5, 2/5), (3/5, 2/5)) and
- 鴿的收益期望值是
- -18/25+36/25+12/25=30/25

Soccer Game

		Goalie	
		Left p	Right (1 − p)
Kicker	Left q	(0.6, 0.4)	(0.8,0.2)
	Right (1 − q)	(0.9,0.1)	(0.7,0.3)

Soccer Game

- No Nash equilibrium

The Kicker and Goalie game
Empirical scoring probabilities

- Kicker must be indifferent
- $0.6p + 0.8(1 - p) = 0.9p + 0.7(1 - p)$
- $0.4p= 0.1$
- $p = ¼$ (Goalie's strategy is left)

109

The Kicker and Goalie game
Empirical scoring probabilities

- Goal keeper must be indifferent
- $0.4q + 0.1(1 - q) = 0.2q + 0.3(1 - q)$
- $0.4q = 0.2$
- $q=1/2$ (Kicker's strategy is left)
- The mixed Nash Equilibrium is ((1/2,1/2), (1/4,3/4)).

110

Kicker's Payoff

- $s_1(L)s_2(L)u_1(L,L) + s_1(L)s_2(R) u_1(L,R) + s_1(R)s_2(L)u_1(R,L) + s_1(R)s_2(R)u_1(R,R)$

111

踢球者的收益
Kicker' s Payoff

- $= 0.6s_1(L)s_2(L) + 0.8 s_1(L)s_2(R) +0.9s_1(R)s_2(L) + 0.7 s_1(R)s_2(R)$
- $= 0.6s_1(L)s_2(L) + 0.8 s_1(L)(1-s_2(L))+0.9(1-s_1(L))s_2(L) + 0.7(1 s_1(L))(1-s_2(L))$

112

Maximin and Minimax Strategy

- 踢球者採用 Maximin策略
- 守門員採用 Minimax 策略
- 納許均衡 ((1/2,1/2),(1/4,3/4))

113

Penalty Kick Example

Table of Probabilities Scoring, (Kicker's Payoff Function)		Goalie	
		Left (q)	Right (1-q)
Kicker	Goalie's Left (p)	0.3	0.9
	Goalie's Right (1-p)	0.9	0.5

114

Calculate player 1's expected utility from player 2's mixed strategy

- The Goalie's must be indifferent
- Eu_1(L)= 0.3p+ 0.9(1 − p)
- Eu_1(R)= 0.9p+ 0.5(1 − p)
- -0.6p+0.9 = 0.4p+0.5
- p = 0.4
- Kicker's payoff = 0.3*0.4 + 0.9(1 − 0.4) =0.12+0.54 =0.66

Calculate player 1's expected utility from player 2's mixed strategy

- The Goalie's must be indifferent
- Eu_1(L)=0.3q+ 0.9(1 − q)
- Eu_1(R)= 0.9q+ 0.5(1 − q)
- -0.6q+0.9 = 0.4q+0.5
- q = 0.4
- Kicker's payoff = 0.3*0.4 + 0.9(1 − 0.4) =0.12+0.54 =0.66

BOS協調賽局

		Player 2	
		Bach α_2 (B)=q	Strvainsky α_2 (S)=1-q
Player 1	Bach α_1 (B)=p	(2, 1)	(0,0)
	Strvainsky α_1 (S)=(1-p)	(0,0)	(1,2)

(α_1 , α_2) 是一個混合策略納許均衡

- 給定 α_2, 玩家 1 的策略必須產生相同的收益，因此我們必須擁有
- 2 α_2 (B) = α_2 (S)
- α_2 (B) + α_2 (S) =1.0
- 因此, α_2 (B) = 1/3

玩家1的最佳反應 α_1

- 如果 0≤ α_2 (B) < 1/3 玩家1的最佳反應 α_1 (B) =0
- 如果 1/3 <α_2 (B) ≤ 1 玩家1的最佳反應 α_1 (B) =1
- 如果 α_2 (B) = 1/3 玩家1所有的混合策略都是最佳反應.

玩家1的最佳反應 p= α_1 (B)

- $B_1(\alpha_2)$={p = 0} if 0 ≤ α_2(B)< 1/3
- $B_1(\alpha_2)$={p: 0≤ p ≤1} if α_2(B) =1/3
- $B_1(\alpha_2)$={p =1} if α_2(B)> 1/3

(α_1, α_2) 是一個混合策略納許均衡

- 給定 α_1，玩家 2 的 B or S 策略必須產生相同的收益，因此我們必須擁有
- $\alpha_1(B) = 2(1-\alpha_1(B))$
- $\alpha_1(B) = 2/3$

121

玩家 2 的最佳反應 $q=\alpha_2$

- 如果 $0 \le \alpha_1(B) < 2/3$ 玩家2的最佳反應 $\alpha_2(B) = 0$
- 如果 $2/3 < \alpha_1(B) \le$ 玩家2的最佳反應 $\alpha_2(B) = 1$
- 如果 $\alpha_1(B) = 2/3$ 她所有的混合策略都是最佳反應.

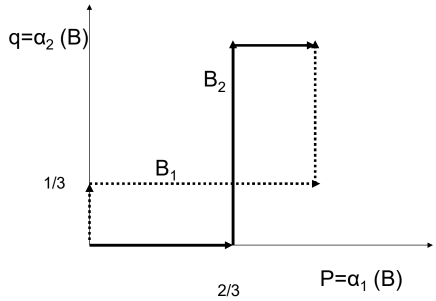
122

玩家 2 的最佳反應 $q=\alpha_2$ (B)

- $B_2(\alpha_1) = \{q=0\}$ if $0 \le \alpha_1(B) < 2/3$
- $B_2(\alpha_1) = \{q: 0 \le q \le 1\}$ if $\alpha_1(B) = 2/3$
- $B_2(\alpha_1) = \{q=1\}$ if $\alpha_1(B) > 2/3$

123

B1:玩家 1 的最佳反應函數
B2:玩家 2 的最佳反應函數



124

混合策略納許均衡

- 混合策略納許均衡是
- $\alpha^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*)) = ((2/3, 1/3), (1/3, 2/3))$
- It means
- $\alpha^*_1(B) = 2/3$
- $\alpha^*_1(S) = 1/3$
- $\alpha^*_2(B) = 1/3$
- $\alpha^*_2(S) = 2/3$

125