歷史不會重覆，可是；它有相似之處-馬克 吐溫

“History doesn't repeat itself, but it does rhyme” - Mark Twain
History May Not Repeat, But It Looks Alike.

1

狡兔死，走狗烹

2

飛鳥盡，良弓藏

3

敵國破，謀臣亡

4

韓信
（約公元前231年－前196年）

- 韓信為西漢的開國立下汗馬功勞，惟功高震主引起猜忌。
- 劉邦戰勝項羽後，開始消滅異姓王，藉故貶韓信為淮陰侯；
- 最後為呂后及蕭何騙入宮內，以謀反之名處死於長樂宮。

5

呂后及蕭何處死韓信

6

《資治通鑑 卷第十一》
（1019年－1086年）

- 信曰：「果有人言：『狡兔死，走狗烹；飛鳥盡，良弓藏；敵國破，謀臣亡。』天下已定，我固當烹！」。

7

狡兔死，走狗烹

- Julius Caesar
- Macbeth by William Shakespeare
- Genghis Khan
- The French Revolution
- The Tudor Dynasty
- The Godfather
- The Lion King

8

華容道放曹操

- 赤壁之戰曹操大敗之後，孫吳想要殺了曹操，以絕後患，但在諸葛亮心中有幾個擔憂：
- 殺了曹操，必定引發報復，戰事必然再起
- 殺了曹操，蜀與吳勢必走上對立

9

華容道放曹操

- 如果把曹操放走，他勢必在短期之內要休養生息，正好給予蜀發展的機會，而且有曹操的存在，吳勢必也不敢大加的擴張，再加上關羽之前深受曹操的恩德，利用這一次的機會讓關羽還了曹操的人情，也間接穩定了關羽的忠誠

10

華容道放曹操

11

司馬懿

（179年－251年9月7日）

- 司馬懿是三國最大贏家，最重要不是智謀，也不是權勢，而是堅「忍

12

忍

13

司馬懿和空城計

14

司馬懿和空城計

- 因為被曹家猜疑，司馬懿日日感到不安，司馬懿作出了一個決定，在他還不夠壯大的時候，必須將諸葛亮留著，避免曹家過河拆橋、卸磨殺驢。

15

日本戰國三英傑

- 織田信長是個戰爭奇才，戰無不克；
- 豐臣秀吉則是經商奇才，非常靈巧；
- 德川家康則是隱忍不發，等待時機。

16

織田信長和杜鵑鳥

17

織田信長

- 杜鵑不叫的話，殺無赦
- 鳴かずんば殺してしまえホトトギス；

18

豐臣秀吉與杜鵑鳥

19

豐臣秀吉

- 杜鵑不叫的話，想辦法讓它叫
- 鳴かんずば鳴かせてみようホトトギス；

20

德川家康和杜鵑鳥

21

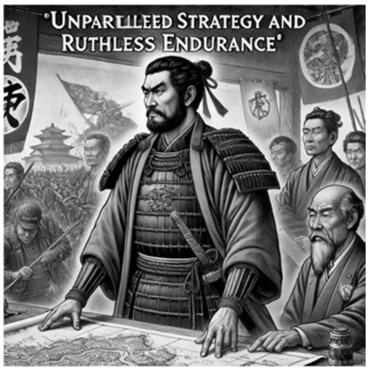
德川家康

（1543年1月31日－1616年6月1日）

- 杜鵑不叫的話，等它叫
- 鳴かずんば鳴くまで待とうホトトギス 。
- 無比的謀略・無情的忍耐

22

無比的謀略・無情的忍耐



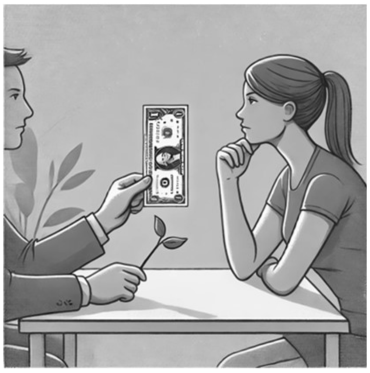
23

最後通牒博弈模型(x 為實 數)
只有一回合

- 兩個玩家想分＄1。
- 玩家1提供玩家2的金額 $x, 0 \leq x \leq 1$。
- 如果玩家2接受這個提議，然後玩家1接收 $\$(1-x)$。
- 如果玩家2拒絕，那麼沒有玩家收到任何收益。

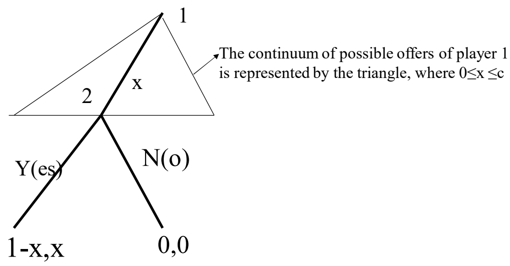
24

一美元的最後通牒遊戲



25

最後通牒賽局（X為實數）只有一回合



26

最後通牒博弈模型(x 為實數)

- 如果玩家2 接受所有出價，那麼玩家1 的最優出價為 0。
- 如果玩家2 接受除 0 之外的所有報價，則玩家1 的出價都不是最優的。
- 博弈的唯一子博弈完美均衡是玩家1出價為 0 和玩家 2 接受所有出價
- 這個均衡中，玩家1 的收益為 $1，玩家2 的收益為零。

27

The Ultimatum Game 最後通牒賽局

- 第一個玩家(Proposer) 向第二個玩家(Responder)提議一種分配資源的方案
  - 如果第二個玩家同意這一方案，則按照這種方案進行分配資源；
  - 如果不同意，則兩人都會什麼都得不到。

28

The Ultimatum Game 最後通牒賽局

- 按照理性假設，只要第一個玩家將少量資源分配給第二個玩家，第二個玩家就應該同意。因為這要比什麼都得不到好。

29

《黑闇騎士》中狡兔死，走狗烹

- 《黑闇騎士》中小丑的性格被描繪成不可預測且冷酷無情的。
- 在策劃了一次銀行搶劫或其他犯罪活動後，他可能認為有必要消滅他的同夥或同謀，以收拾殘局並保持對局勢的控制。
- 這反映了這樣的想法：即使在犯罪組織內，忠誠度也可能轉瞬即逝，如果個人被視為對領導者議程的責任或威脅，他們可能會被解僱。

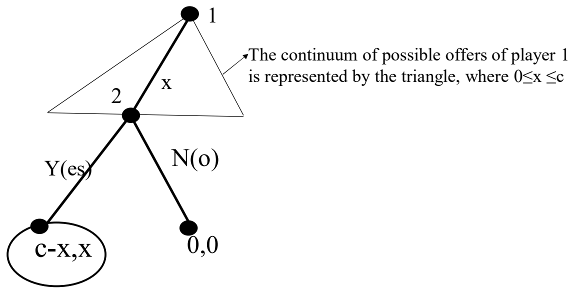
30

The Ultimatum Game (x 為實 數)

- 兩個玩家想分 $C。
- 玩家1提議給玩家 2 的金額 x, 0 ≤ x≤ C。
  - 如果玩家 2 接受這個提議，玩家1接收其餘的 $ (C-x)。
  - 如果玩家 2 拒絕，那麼沒有人收到任何金額。

31

The Ultimatum Game (x 為實 數)



32

The Ultimatum Game的子賽局完美均衡 (x 為實 數)

- 唯一的子賽局完美均衡的策略為玩家 1 提議 0 和玩家 2 接受。
- 在這個均衡中，玩家 1 的報酬為 $ 1 ，玩家 2 的報酬是零。

33

最後通牒博弈 The Ultimatum Game

- 第一個玩家（提議者, Proposer）收到一筆錢，提議如何和其他玩家之間分配這筆錢
- 第二個玩家（回應者, Responder）選擇接受或拒絕。如果第二位玩家接受，則按照提議平分錢。
- 如果第二個玩家拒絕，則兩個玩家都不會收到任何錢。
- 只有一回合

34

最後通牒博弈模型(x 為實 數) 只有一回合

- 兩個玩家想分 $ 1。
- 玩家1提供玩家2的金額 x, 0 ≤ x≤ 1。
- 如果玩家2接受這個提議，然後玩家1接收 $(1-x)。
- 如果玩家2拒絕，那麼沒有玩家收到任何收益。

35

最後通牒賽局(x為整數) (Discrete Case)

- 兩個玩家想分配 $ 10。
- 玩家1提供玩家2的金額 x, 0 ≤ x≤ 10。
- 如果玩家2接受這個提議，然後玩家1收益其餘的$ (10-x)。
- 如果玩家2拒絕，那麼沒有人收到任何收益。

36

The Ultimatum Game
(x為整數)

- 兩個玩家想分 $ 10。
- 玩家1提供玩家 2 的金額 x, $0 \leq x \leq 10$。
- 如果玩家 2 接受這個提議，然後玩家1接收$ (10-x)。
- 如果玩家 2 拒絕，那麼沒有人收到任何報酬。

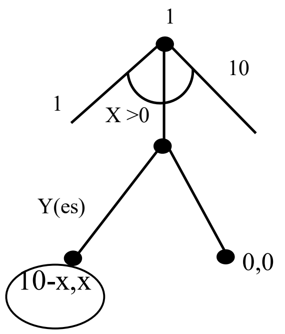
37

最後通牒賽局(x為整數)

- 第二玩家接受玩家1所有提供 x =1，然後玩家 1 接收 $ 9。
- x = 1 為最小單位。

38

The Ultimatum Game (c≥x>0)
x為整數



39

最後通牒賽局(x為整數)

- x=10，玩家1 的收益為 0（玩家 2 接受）
- x=9，玩家 1 的收益為 1（玩家 2 接受）
- x=8，玩家 1 的收益為 2（玩家 2 接受）
- x=7，玩家 1 的收益為 3（玩家 2 接受）
- x=6，玩家 1 的收益為 4（玩家 2 接受）
- x = 5，玩家1的收益為 5（玩家2接受）

40

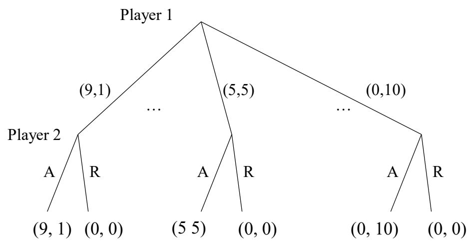
最後通牒賽局(x為整數)

- x=4，玩家 1 的收益為 6（玩家 2 接受）
- x=3，玩家 1 的收益為 7（玩家 2 接受）
- x=2，玩家 1 的收益為 8（玩家 2 接受）
- x=1，玩家 1 的收益為 9（玩家 2 接受）
- 納許均衡為 x=1，參與者 1 的收益為 9，參與者 2 的收益為 1

41

The Ultimatum Game (discrete Case)

- 玩家 1 建議（整數）分割一個固定的金額，比如 10美元。
- 玩家 2 接受 (Accept)（提議被執行）或拒絕 (Reject)（都收到 0）
- 子博弈有唯一解 (9,1)



42

最後通牒賽局(x為整數)

- x =1 為最小單位。
- 子博弈完美均衡是玩家1提供 x =1 ，玩家2接受
- 玩家1接收其餘的＄9。

43

實驗結果

- 在許多文化中，人們提供“公平”（例如50:50）的拆分，而出價低於20%的出價通常會被拒絕。

44

《黑闇騎士》中的博弈論：開場場景（銀行搶劫）

45

海盜賽局

- 海盜賽局是一個簡單的數學賽局。
- 這是最後通牒賽局(ultimatum game)的多人版本。

46

五個不同海盜的海盜遊戲場景

47

海盜賽局

- 有五個理性的海盜 A ，B，C，D 和 E
- 他們挖到了100個硬幣。
- 海盜們有嚴格的等級制度：A 比 B 職位高，B 比C 高，C 比 D 高，D 比 E 高。

48

海盜賽局

- 他們希望按照以下規則分配硬幣：
  - 每個海盜都提出一個分配計劃來分配硬幣
  - 每個海盜都對提議的計劃投贊成票或反對票。

49

海盜賽局(Pirate Game)

- 如果“是”的投票大於或等於“否”，則提議的計劃通過，提議者分發硬幣。
- 如果“否”的票數大於“是”的票數，則提議的計劃無法通過，提議人將被扔出船外，然後由下一個最高職位的海盜提出新的分配方案。。
- 計劃建議的順序為A，B，C，D和E

50

海盜賽局

- 每個海盜都希望在生存的同時獲得盡可能多的黃金。
- 作為海盜，而且是嗜血的海盜，他們彼此都不信任，因此他們無法合作。

51

海盜賽局

- 每個海盜在邏輯推理上都很出色，並且知道其他人也是。
- A 應該提出什麼分配來確保他的生存？

52

Backward Induction

- 向前想，向後推理
- think ahead and reason backwards

53

如果剩下兩個人 D和E

- 通過逆向歸納法(Backward Induction)，E 認為D將不會給E任何硬幣，而D將獲得所有硬幣。 E反對D 。
- 因此如果剩下兩個人 ，結果是D：100，E：0。

54

如果剩下三個人 C,D,E

- C知道 E 不喜歡 D。C 給 E一個硬幣以確保E 的投票，C得到 99 個硬幣。

55

如果剩下三個人 C,D,E

- D 知道 C 不會給 D 任何硬幣。 D 反對 C。
- 因此如果剩下三個人，結果是C：99，D：0，E：1。

56

如果剩下四個人, B,C,D,E

- B 給予 D 硬幣以確保 D 的投票，B 得到 99枚硬幣。 C 和 E 反對 B。
- 因此， B會提議 B：99，C：0， D：1，E：0。

57

如果剩下五個人

- A 給 C 和 E 各一個硬幣以確保他們的選票，而 A 得到 98 個硬幣。
- A，B，C，D 和 E中分配為 (98,0,1,0,1)

58

海盜賽局的教訓

- 玩家應該先“往前思考在往後推理”(think ahead and reason backwards)
- 領導者可以利用弱小的成員之間的衝突來獲勝
- 有些玩家可以被收買(be bought off)

59

海盜賽局的教訓

- 海盜賽局說明，則戰利品 (the spoils) 可能給最強的海盜或首先採取行動的海盜
- 如果其餘成員有利益衝突，領導者有能力收買弱小的成員。

60

在陰暗城市巡邏的黑闇騎士

61

小丑帶領一群搶匪演繹充滿活力和緊張的銀行搶劫場景

62

銀行搶劫的海盜博弈

- 在這個場景中，小丑組織了一次銀行搶劫案。
- 他告訴每個強盜殺死另一個強盜，以增加他們的報酬。
- 強盜有兩種策略：殺死還是不殺死。

63

銀行搶劫的海盜博弈

- 強盜的優勢策略是殺死另一個強盜，以增加報酬。
- 最終所有強盜都互相殘殺，而小丑是遊戲中唯一的贏家

64

換位置就換了腦袋

- 組織內的不同職位有不同層級的權力、責任和影響力。
- 當某人更換職位時，無論是透過晉升、橫向調動或其他方式，通常意味著要進入具有不同決策權力和責任的角色。
- 這種立場的改變確實會導致在這種情況下誰擁有主要決策權的轉變。

65

海盜1是皇帝

- 海盜1是皇帝的場景反映了古代中國、羅馬帝國和其他專制政權的情況。
- 在這種情況下，皇帝（如海盜1）通常會透過消除競爭對手或異議者來鞏固權力。

66

海盜1是皇帝

- 古代中國和羅馬的皇帝經常消滅政治對手以確保絕對權力。
- 中國：皇帝，特別是秦漢時期的皇帝，經常清洗構成威脅的大臣、將軍，甚至家庭成員。

67

海盜1是皇帝

- 羅馬：像尼祿和卡里古拉 Nero and Caligula這樣的皇帝為了維持控製而消滅了元老、政治對手，有時甚至是自己的家庭成員。
- 皇帝（海盜1）成為唯一的權威，囤積權力和財富。

68

海盜1是皇帝

- 中國：「天子」被視為最終的統治者，擁有神聖的統治權。
- 羅馬：皇帝行使帝國（最高權力），結合軍事、司法和立法權。

69

羅馬皇帝尼祿和卡里古拉，展示了他們為了維持控製而殘酷消滅政治對手、元老甚至家族成員

70

小丑與暴徒談判——《黑闇騎士》中的博弈論

71

分割冰淇淋派

- 兩個孩子 Alice 和 Bob之間的討價還價問題
- 他們爭論如何分割冰淇淋派，冰淇淋派會隨著時間的推移而溶化
- 假設遊戲中每次報價或還價時冰淇淋派的溶化量相同。

72

愛麗絲和鮑伯在陽光明媚、歡快的公園裡就融化的冰淇淋派進行談判

73

小丑暴民談判

- 在《黑闇騎士》，小丑與哥譚市的黑幫老大會面，提出消滅蝙蝠俠的計劃
- 暴民：你有什麼建議？
- 小丑：很簡單，我們，呃，殺死蝙蝠俠。
- 暴民：如果這麼簡單，為什麼不去做呢

74

小丑暴民談判

- 小丑：如果你擅長某件事，就永遠不要免費做它
- 暴民：你想要多少錢？
- 小丑：呃，一半。
- 小丑的建議瘋狂或不瘋狂 ？

75

小丑和一群強盜在戲劇性和懸疑的環境中就一堆錢進行談判

76

順序討價還價 Sequential bargaining

- 最初，第 1 個玩家向第 2 個玩家提出報價 (making offers)。如果第 2 個玩家接受報價，則達成一致並結束該過程。
- 如果第 2 個玩家拒絕報價，則玩家輪流切換 (switch turns) ，現在輪到第 2 個玩家提出報價（通常稱為還價*counter-offer* ）。
- 玩家們不斷輪流切換，直到達成一致，或者該過程因某個結束條件而以分歧結束。

77

順序討價還價 Sequential bargaining

- 幾種結束條件，例如：
- 談判圈數 (the number of turns)有預先指定的限制；經過這麼多輪之後，過程結束。
- 談判時間 (the negotiation time)有預先規定的限制；當時間用完時，過程結束。
- 可能的報價數量 (The number of possible offers) 是有限的

78

順序討價還價 Sequential bargaining

- 時間是順序討價還價 (Sequential bargaining)最重要的因素
- 時間的效用取決於貼現因子
- Gibbons 將貼現因子定義為“貨幣的時間價值 (time value of money)
- 貼現因子 δ = 1/(1+r) , r 是利率 (interest rate)

79

貼現因子

- Gibbons 將貼現因子定義為“貨幣的時間價值 (time value of money)”，實際上就是貼現因子δ = 1/(1+r) , r 是利率(interest rate)
- R 是利率,也是貼現率 (discount rate)

80

未來n期現金流量的現值 PV

- 現值 (Present Value) PV=CF×δ
- 未來現金流量 (Future Cash Flow) CF
- Discount Factor $\delta = \frac{1}{(1+r)^n}$
- δ 貼現因子
- r = 貼現率或利率
- n = 現金流發生之前的期間數`

81

貼現率(利率)與貼現因子

- 若貼現率為 10%，未來 1 年內的貼現因子為：
- 貼現因子Discount Factor = $\delta = \frac{1}{(1+0.1)^1}$ =0.9091
- 這意味著一年後收到的 1 美元今天價值 0.9091 美元。
- 您可以將未來現金流量乘以該貼現因子來找到其現值。

82

n = 1的貼現因子

- 貼現因子為 1 除以（1 +貼現率）
- 貼現率為 10%，貼現因子將為 1 /（1 + 0.10）= 0.9091
- 一年後1美元，現值為 0.9091 美元。
- 貼現因子為20%，則貼現因子 0.8333
- 一年後1美元，現值為 0.8333 美元

83

貼現因子 vs 效用

- δ=0.79, 一年後$100, 現值= PV=CF×δ = $79
- δ = 0.32 ,一年後$100現值 = $32
- 高貼現因子 ⇒高現值⇒高耐心
- 低貼現因子 ⇒低現值⇒低耐心

84

貼現因子

- 貼現因子視為冰淇淋派價值隨時間減少的速率
- 溶化率 the melting rate (discount rate)為 10%，貼現因子為 1 / (1 + 0.10) = 0.909
- 每過一段時間，冰淇淋派的價值就會減少約9.09%
- 溶化率為20%，則貼現因子 0.8333
- 每過一段時間，冰淇淋派的價值就會減少約16.67%
- 低融化率⇒高貼現因子 ⇒高耐心
- 高度耐心意味著不急於達成談判

85

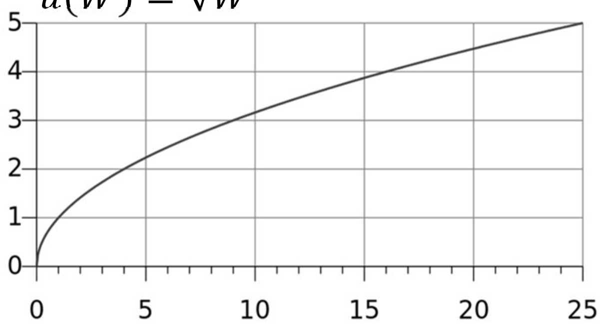
指數折現 Exponential discounting

- 假設您對 a = \$100 和在一年後 b = \$160感到沒差異(indifferent), 假設財富效用 $u(w) = w^{0.5}$
- 我們將貨幣金額轉換為效用
- a =100, $u(100) = 100^{0.5}$ =10
- b=160, $u(160) = 160^{0.5}$ =12.65
- At time 0, $u^0(100) = u^1(160) = \delta u^0(160)$
- $10 = 12.65\delta$
- δ =10/12.65 =0.79
- 折現因子δ=0.79 顯示您是相對耐心

86

Risk Averse (Concave Utility)

$u(W) = \sqrt{W}$



87

指數折現 Exponential discounting:

- 假設您對 a = \$100 和在一年後 b = \$1000 感到沒差異(indifferent), 假設財富效用 $u(w) = w^{0.5}$
- a =100, $u(100) = 100^{0.5}$ =10
- b =1000, $u(1000) = 1000^{0.5}$ =31.62
- At time 0, $u^0(100) = u^1(1000)$
- $10 = (31.62)\delta$, δ =10/31.62 =0.32
- 折現因子 δ = 0.32 顯示您是相對沒耐心

88

貼現因子 vs 效用

- δ=0.79, 在一年後\$100 =7.9
- δ = 0.32 , \$100 在一年後 財富效用 $\delta 100^{0.5}$ =3.2
- 高貼現因子 ⇒高效用⇒高耐心
- 低貼現因子 ⇒低效用⇒低耐心
- 高度耐心不急於達成討價還價

89

貼現因子 (Discount Factor)

- 由公式 $\delta = 1/(1+r)$ ，可以看到，利率(interest rate) r 越大，則貼現因子 δ 越小，則玩家的耐心越小；
- 反之，如果利率 r 越小，則貼現因子 δ 越大，玩家越有耐心。

90

貼現因子(Discount factor) δ

- δ = 0，則玩家完全是近視的，它們完全不知道賽局是重複。
- δ 越高，未來收益附加的值就越高
- 隨著 δ 的增加，玩家的前瞻性(forward-looking)會逐漸提高。

91

資本的成本 (cost of capital)

- 創業資金 (Startups seeking money)：50 - 100%
- 早期創業(Early Startups)40 - 60%
- 後期創業 (Late Startups) 30 - 50%
- 成熟的公司(Mature Companies)：10 - 25%

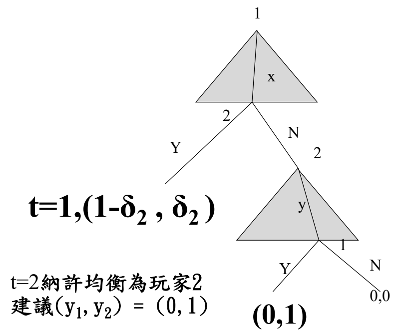
92

順序討價還價的應用

- 兩個玩家決定如何分配分配 1 美元。
- 如果他們不達成協議 (reach an agreement)，他們將一無所獲。
- 雙方的貼現因子都是已知的。

93

最後通牒博弈的延伸 只有兩回合



94

兩回合談判的賽局 每個玩家使用貼現因子δ_i

- t=2 ,玩家2建議 y_1=0 給玩家 1 ，玩家 1無力談判，接受建議。納許均衡為$(y_1,y_2) = (0,1)$ 。
- t=1, 來看納許均衡，玩家 2的報酬為 δ_2 。玩家 1給玩家 2的報酬為 δ_2，玩家 1給玩家 1的報酬為 $1-\delta_2$
- 納許均衡為$(y_1,y_2) = (1-\delta_2 , \delta_2)$ 。

95

兩回合談判的賽局 每個玩家使用貼現因子δ_i輪流出價

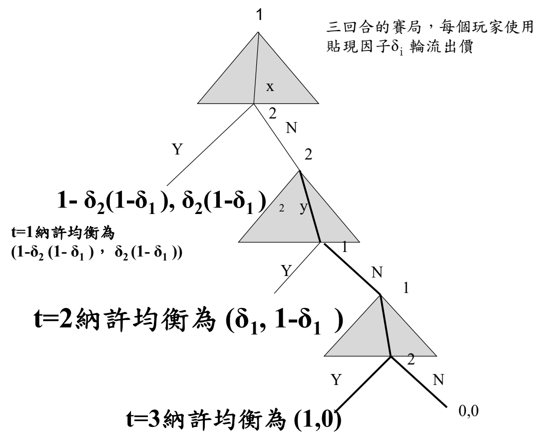
	Player 1 Subgame Perfect Share	Player 2 Subgame Perfect Share
1	$1-\delta_2$	
2		δ_2

96

兩回合談判的賽局
每個玩家使用貼現因子δ_i

- **納許均衡為$(y_1,y_2) = (1-\delta_2 \text{ ， } \delta_2)$** 。
- 玩家 1 在賽局開始時向玩家 2出價 δ_2 。
- 玩家 2 接受此出價 (offer) 。

97



98

三回合的賽局
逆向歸納 Backward Induction

- t=3 ,玩家1提議(1,0) 給玩家 1 ，玩家 2 無力談判，接受建議。納許均衡為 (1,0) 。
- t=2,玩家 1的報酬為δ_1，玩家 2的報酬為 $1-\delta_1$
- t=1,玩家 2的報酬為$\delta_2(1-\delta_1)$ ，玩家 1的報酬為 $1-\delta_2(1-\delta_1)$ 。
- 納許均衡為 $(1-\delta_2(1-\delta_1), \delta_2(1-\delta_1))$。

99

三個回合談判的賽局，每個玩家使用貼現因子δ_i輪流出價

	Player 1 Subgame Perfect Share	Player 2 Subgame perfect Share
1	$1-\delta_2(1-\delta_1)$	
2		$\delta_2(1-\delta_1)$
3	δ_1	

100

四回合的賽局
逆向歸納 Backward Induction

- t=4 ,玩家2提議(0,1) 給玩家 1 ，玩家 1無力談判，接受建議。納許均衡為 (0,1) 。
- t=3,玩家 2的報酬為δ_2，玩家 1的報酬為 $1-\delta_2$
- t=2,玩家 1的報酬為$\delta_1(1-\delta_2)$ ，玩家 2的報酬為 $1-\delta_1(1-\delta_2)$ 。
- t=1,玩家 2的報酬為$\delta_2(1-\delta_1(1-\delta_2))$ ，玩家 1的報酬為 $1-\delta_2(1-\delta_1(1-\delta_2))$ 。

101

四個回合談判的賽局
Four Times of Bargaining

No. of Offer	Player 1''s Subgame Perfect Share	Player 2's Subgame Perfect Share
1	$1-\delta_2(1-\delta_1(1-\delta_2))$	
2		$\delta_2(1-\delta_1(1-\delta_2))$
3	$\delta_1(1-\delta_2)$	
4		δ_2

102

如何求有限幾何級數的和

- $\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{n-1}=(\delta-\delta^n)/(1-\delta)$
- $1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{n-1}=(1-\delta^n)/(1-\delta)$
- $1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^{n-1}=1/(1-\delta)$ as $n\to\infty$

103

玩家 1的報酬

- $\delta_1=\delta_2=\delta$
  - 一回合: 1
  - 兩回合: $1-\delta$
  - 三回合: $1-\delta+\delta^2$
  - 四回合: $1-\delta+\delta^2-\delta^3$

104

無限回合玩家 1的報酬

- $1-\delta+\delta^2-\delta^3+\ldots+(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}$
- $=1-(\delta+\delta^3+\ldots)+(\delta^2+\delta^4+\ldots)$
- $=1-\delta(1+\delta^2+\ldots)+\delta^2(1+\delta^2+\ldots)$
- $=1-\delta/(1-\delta^2)+\delta^2/(1-\delta^2)$
- $=1-\frac{\delta}{1-\delta^2}+\frac{\delta^2}{1-\delta^2}=\frac{1}{1+\delta}$

105

無限回合討價還價的賽局

- $\delta_1=\delta_2=\delta$
- 玩家1 的報酬 $\frac{1}{1-\delta}$
- 玩家2 的報酬 $\frac{\delta}{1-\delta}$

106

解決方案 Solution

- $\delta_1=\delta_2=\delta=0.95$
- 玩家 1: Albert 得到 $\frac{1}{1+\delta}=0.49$
- 玩家 2: Barbara 得到 $\frac{\delta}{1+\delta}=0.51$
- 電影黑闇騎士，小丑與暴徒談判怎麼分配利潤
- 小丑提出要拿走一半的利潤

107

魯賓斯坦討價還價模型 Rubinstein Bargaining Model

- 在無限時間範圍內交替出價。
- 最初的證明於 Ariel Rubinstein 在 1982 年的一篇論文中。
- 很長一段時間，這類討價還價的解決方案都是一個謎；
- 魯賓斯坦的解決方案是博弈論中最具影響力的發現之一。

108

魯賓斯坦討價還價模型
Rubinstein Bargaining Model

- 奇數回合：玩家 1 (Albert) 出價，玩家 2 (Barbara) 接受或拒絕。
- 偶數回合：玩家 2出價，玩家 1 接受或拒絕。
- 若有玩家接受出價，結束
- 無固定回合，無固定回合結束

109

標準的魯賓斯坦討價還價模型
A standard Rubinstein bargaining model

- 兩個玩家的貼現因子一樣
- V_B:在偶數回合，玩家 2 接受出價 V_B
- 在奇數回合，玩家 1必須至少給玩家 2 δV_B（δV_B 和下一輪的 V_B 一樣好）。玩家 1保留 $(1-\delta V_B)$
- 在偶數回合，玩家 2必須至少給玩家1 $\delta(1-\delta V_B)$
- 玩家 2 保留 $1-\delta(1-\delta V_B) = V_B$

110

Solve for V_B

- $V_B = 1-\delta(1-\delta V_B)$
- $= 1-\delta + \delta^2 V_B$
- $(1-\delta^2)V_B = 1-\delta$
- $V_B = \frac{1}{1+\delta}$

111

解決方案
Solution

- 在每個回合，玩家 1(提議者)出價 $\delta V_B = \frac{\delta}{1+\delta}$ ，玩家 2接受。

112

解決方案
Solution

- 玩家 1: Albert 得到 $\frac{1}{1+\delta}$
- 玩家 2: Barbara 得到 $\frac{\delta}{1+\delta}$

113

標準的魯賓斯坦討價還價模型具有以下要素A standard Rubinstein bargaining model has the following elements:

- 玩家 1: Albert
- 玩家 2: Barbara
- 兩個玩家的貼現因子不一樣
- V_B:在偶數回合，玩家 2 接受出價 V_B
- 在奇數回合，玩家 1必須至少給玩家 2 $\delta_B V_B$（$\delta_B V_B$ 和下一輪的 V_B 一樣好）。玩家 1保留 $(1-\delta_B V_B)$
- 在偶數回合，玩家 2必須至少給玩家1 $\delta_A(1-\delta V_B)$
- 玩家 2 保留 $1-\delta_A(1-\delta V_B) = V_B$

114

求解V_B
Solve for V_B

- $V_B = 1-\delta_A (1-\delta_B V_B)$
- $V_B = 1-\delta_A+\delta_A\delta_B V_B$
- $V_B = \dfrac{(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)}$

115

結果
Outcome

- 玩家 1 offer 玩家 2

$\delta_B V_B = \dfrac{\delta_B(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)}$, 玩家 2 接受

- Player 1 earns
- $1 - \dfrac{\delta_B(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)} == \dfrac{1-\delta_B}{(1-\delta_A\delta_B)}$

116

結果
Outcome

- Player 1 earns $1 - \dfrac{\delta_B(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)}$
- Player 2 earns $\dfrac{\delta_B(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)}$

117

結果
Outcome

- $\delta_A = \delta_B = \delta$
- Player 1 earns $1 - \dfrac{\delta(1-\delta)}{(1-\delta^2)} = \dfrac{1}{(1+\delta)}$
- Player 2 earns $\dfrac{\delta(1-\delta)}{(1-\delta^2)} = \dfrac{\delta}{(1+\delta)}$

118

結果
Outcome

- $\delta A = \delta B = \delta = 0.9$
- Player 1 earns $1 - \dfrac{\delta(1-\delta)}{(1-\delta^2)} = \dfrac{1}{(1+\delta)} = 0.5263$
- Player 2 earns $\dfrac{\delta(1-\delta)}{(1-\delta^2)} = \dfrac{\delta}{(1+\delta)} = 0.4737$

119

解決方案
Solution

- $\delta_A = 0.95, \delta_B = 0.1$
  - 玩家 1: Albert 得到
  - $\dfrac{1-\delta_B}{(1-\delta_A\delta_B)} = 0.995$
  - 玩家 2: Barbara 得到

$\dfrac{\delta_B(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)} = 0.005$

120

解決方案
Solution

- $\delta_A = 0.9, \delta_B = 0.9$
  - 玩家 1: Albert 得到
  - $\frac{1-\delta_B}{(1-\delta_A\delta_B)} = \frac{0.1}{0.19} = 0.5263$
  - 玩家 2: Barbara 得到 $\frac{\delta_B(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)} = 0.4737$

121

解決方案
Solution

- $\delta_A = \frac{2}{3}, \delta_B = \frac{1}{3}$
  - 玩家 1: Albert 得到
  - $\frac{1-\delta_B}{(1-\delta_A\delta_B)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{6}{7}$
  - 玩家 2: Barbara 得到 $\frac{\delta_B(1-\delta_A)}{(1-\delta_A\delta_B)} = \frac{1}{7}$

122

只有兩回合
兩個玩家的耐心不同

- x 和 y 是兩個玩家的金額。
- 如果 B 的耐心是 A 的兩倍，那麼 B 得到的也是 A 的兩倍
- 因此，A 得到他的股份 $\frac{6}{7}$，B 得到他的股份 $\frac{1}{7}$。

123

富人越富
The Richer Gets Richer

- 經濟上享有特權的玩家應該有更大的貼現因子
- 更大的貼現因子授予更好的分配（Better divisions）。

124

黑闇騎士博弈論（第 3 部分）：船場景（囚徒困境）

125

兩艘渡船的甲板上可見定時炸彈，營造齣戲劇性而激烈的氣氛

126

渡輪場面

- 在《黑闇騎士》的渡輪場景中，囚徒的困境以赤裸裸的道德清晰展現出來，兩艘船各自代表社會的一個縮影，努力應對一個不可能的選擇。
- 這是對人類在極端壓力、挑戰下的處境的扣人心弦的寫照。

127

渡輪場面

- 小丑認為人們都是自私的。
- 博弈論在他的計劃中運作得很好，因為自私(self-interest) 是博弈論的基本假設。
- "渡輪場面" (The "Ferry Scene") 是博弈論未能使小丑獲得成功的一種情況，因為玩家並非嚴格地自私自利 (strictly self-interested) 。

128

渡輪場面

- 第一個渡輪上擠滿了正常的守法公民，
- 而第二個渡輪上擠滿了哥譚市監獄的人。
- 小丑在船上安裝了強大的炸藥。
- 小丑不允許任何人逃脫。每艘船都有一個雷管供另一艘渡輪引爆。雷管的引爆拯救了這艘船，同時殺死了對方船上的每個人。

129

渡輪場面

- 因此，如果 A 船的任何成員引爆雷管，那麼 B 船將被摧毀，A 船的所有成員都將被存活
- 此外，如果任何一艘船未能引爆雷管摧毀其對手，那麼兩艘船都將被小丑摧毀。

130

渡輪場面

- 兩艘渡輪裝有炸彈。
- 每個渡輪都有引爆另一個渡輪的鑰匙。
- 如果兩個渡輪都未在午夜之前按下紅色大按鈕，則兩者都會爆炸。
- 若一個渡輪按下按鈕引爆另一個渡輪，剩下的渡輪就安全。

131

渡輪場面

- 此處的優勢策略(the dominant strategy)是按下按鈕，因此小丑認為輪渡會互相殲滅。
- 但是，他並不指望兩艘的渡輪具有道德力量 (the ethical strength) 以採取被動策略 (the passive strategy) 。

132

第一個解釋

- （引爆，引爆）成為主導策略
- 經濟人有一個非常明確的戰略，必定會引爆摧毀他們的對手，雙方的船隻都會被摧毀。

133

第一個解釋
小丑策劃遊戲結構迫使渡輪成為經濟人

		Ship B	
		不引爆 Cooperate	引爆 Detonate
Ship A	不引爆 Cooperate	(0, 0)	(0*,1*)
	引爆 Detonate	(1*,0*)	(0*,0*)

134

第二個解釋
morality ＞survival

		Ship B	
		不引爆 Cooperate	引爆 Detonate
Ship A	不引爆 Cooperate	(2*, 2*)	(2*,1)
	引爆 Detonate	(1,2*)	(0,0)

135

第二個解釋
道德勝過生存

- 假設道德勝過生存：
- 純策略的納許均衡是永遠不要引爆，因為合作總是比摧毀另一艘船更有利。
- 納許均衡是(合作，合作)

136

References

- 最後通牒賽局- 維基百科，自由的百科全書 - Wikipedia
- 海盜博弈
- 劉炯朗：博奕理論的運用｜天下雜誌

137

References

- Was the Joker an Economist? A Game Theoretic Approach to Christopher Nolan's The Dark Knight
- ttps://medium.com/@mau.zachrisson/was-the-joker-an-economist-a-game-theoretic-apprhoach-to-christopher-nolans-the-dark-knight-17f8b6e94c4d

138

References

- Dark Knight Game Theory: The Robbery Scene And The Pirate Game
- https://www.youtube.com/watch?v=ZKvEFZbmp7M&t=186s
- Dark Knight Game Theory (Part 2): Joker Mob Negotiation
- https://www.youtube.com/watch?v=JYSI4BXG00c

References

- Game Theory in The Dark Knight: the opening scene (spoilers)
- https://mindyourdecisions.com/blog/2008/08/19/game-theory-in-the-dark-knight-a-critical-review-of-the-opening-scene-spoilers/#.UmgLyfmsio8

References

- Negotiating with the mob – Game theory in the Dark Knight part 2
- https://mindyourdecisions.com/blog/2011/03/25/negotiating-with-the-mob-game-theory-in-the-dark-knight-part-2/#.U0dY5_ldV8E

References

- Dark Knight Game Theory (Part 3): Boat Scene Prisoner's Dilemma
- https://www.youtube.com/watch?v=O268iyVaSCA&t=35s
- The Dark Knight and Game Theory
- http://quantitativepeace.com/blog/2008/07/the-dark-knight.html

References

- Allen, M. A. (2008, July 19). *The Dark Knight and Game Theory*. Retrieved Feb 2009, from The Quantitative Peace: http://www.quantitativepeace.com/blog/2008/07/the-dark-knight.html
- DeHaut, T. (2008, August 02). *Game Theory and The Dark Knight*. Retrieved Feb 2009, from Aereopagitica: http://corbettandhubbard.wordpress.com/2008/08/02/game-theory-and-the-dark-knight/

References

- The Dark Knight: Oligopolies and Game Theory
- https://www.youtube.com/watch?v=JMq059SAQXM

References

- THE DARK KNIGHT: MORALITY PLAY
- http://siskoid.blogspot.com/2008/07/dark-knight-morality-play.html

145

- GTO-4-06: Subgame Perfect Application: Ultimatum Bargaining
- https://www.youtube.com/watch?v=83GaPQRm_xo&list=PLeY-lFPWgBTgm0rcTkX_SC_7PVe_fnJfu&index=6
- The Ultimatum Game | Bargaining and War
- https://www.youtube.com/watch?v=lI3l76wguyU
- The Ultimatum Game | The Science of Empathy
- https://www.youtube.com/watch?v=S_q7CqElaSk
- Civil Wars MOOC (#11): The Ultimatum Game
- https://www.youtube.com/watch?v=prrwneQB8JQ

146

The Science of Sin: Why We Do the Things We Know We Shouldn't?

- 自私是本性？科學揭密：人類需要額外費心思才能做出貪婪的選擇
- https://health.udn.com/health/story/5965/5682940
- 墮落的人腦：從神經科學解讀傲慢、貪吃、好色、懶惰、貪心、嫉妒與暴怒，探究我們難免使壞，犯下小奸小惡背後的科學

147

Further Reading

148

融化的冰淇淋派遊戲

- 考慮兩個孩子（愛麗絲和鮑勃）之間的提議 (offer) 或反提議(counter offer)問題。
- 他們正在爭論如何分割冰淇淋派，隨著時間的流逝，冰淇淋派會融化。
- 假定遊戲中每次提議或反提議時，冰淇淋派的融化量均等。
- 讓我們看看冰淇淋派分割在不同時間間隔內的變化

149

一個時段：只有愛麗絲才能提出 offer

- 假設只有一個 offer 。愛麗絲 Alice 可以向鮑勃 Bob 提議 (offer) 。
- 如果鮑勃同意提議，那麼雙方都將獲得分割的冰淇淋派。
- 如果鮑勃不同意提議，那麼冰淇淋派就會融化，那麼雙方最終都一無所有
- 這是一個極端的情況

150

一個時段：只有愛麗絲才能提出 offer

- 愛麗絲的談判地位很強。
- 如果鮑勃拒絕她的提議 ，那麼他們倆最終將一無所有。
- 因此，愛麗絲知道她可以給鮑勃一點點的東西，他將不得不接受。

151

一個時段：只有愛麗絲才能提出 offer

- **愛麗絲的提議幾乎沒有給鮑勃任何東西，鮑勃接受了提議。**
- 這個一階段的討價還價問題(one-stage bargaining problem)：稱為最後通牒博弈。

152

兩個時段：愛麗絲提出 offer ，然後鮑勃提出 counteroffer

- 當鮑勃有機會提出 counteroffer 時，遊戲將完全改變。
- 鮑勃不必接受愛麗絲的提議。他可以等到輪到他再提出 counteroffer 。唯一的障礙就是要等待。

153

兩個時段：愛麗絲提出 offer ，然後鮑勃提出 counteroffer

- 在兩個時段的情況下，冰淇淋派在一個時段會融化一半。 如果鮑勃拒絕愛麗絲的提議，那麼剩下的冰淇淋派只有一半。
- 如果鮑勃對愛麗絲的 counteroffer 被拒絕，那麼剩下的一半也將融化。

154

兩個時段：愛麗絲提出 offer ，然後鮑勃提出 counteroffer

- 愛麗絲提出了第一個offer ，但她必須 think ahead 。
- 如果她給鮑勃的offer太少，那麼他可以拒絕並等待輪到他提出counteroffer 。 一半的冰淇淋派將在此過程中融化，但鮑勃將提出counteroffer ，因此他將具有談判能力。

155

兩個時段：愛麗絲提出 offer ，然後鮑勃提出 counteroffer

- 如果比賽進行到第二輪，鮑勃可以不給愛麗絲任何東西，只給自己一半的派。
- 愛麗絲看到她的能力有限。 如果她沒有給鮑勃一個合理的offer ，他將拒絕，而她在第二輪中將一無所獲。
- **因此，愛麗絲在第一輪中向鮑勃提出一半的offer ，這足以讓鮑勃接受。雙方最終都獲得了50/50的份額。**

156

三個時段
Alice, then Bob, then Alice

- **冰淇淋派會在三個時段內融化，每個時段會損失其大小的三分之一。**
- 這個遊戲將如何進行？我們可以向前看，向後推理。
- 如果遊戲一直持續到最後一個時段，那麼剩下的冰淇淋派只有三分之一，而愛麗絲則獲得全部。鮑勃則一無所獲。

157

三個時段
Alice, then Bob, then Alice

- 在中間時段，三分之二的冰淇淋派仍然存在。鮑勃必須提供三分之一的股份（剩下的一半），這樣愛麗絲才能接受。
- 這意味著鮑勃最多只能獲得原始冰淇淋派的三分之一。

158

三個時段
Alice, then Bob, then Alice

- 知道了這一點，愛麗絲可以在第一階段向鮑勃提供三分之一，而鮑勃將不得不接受。
- 愛麗絲最終獲得了三分之二的冰淇淋派。但這是有道理的，因為她有兩個可能的提議，而鮑勃只有一個。
- 實際上，每當遊戲週期為奇數時，愛麗絲便具有先發優勢。

159

n 個時段
Alice and Bob alternate

- 如果 n 為偶數：則除法為50/50。
- 如果 n 為奇數，愛麗絲最終得到 $\frac{(n+1)}{(2n)}$ 的份額，而鮑勃只得到 $\frac{(n-1)}{(2n)}$
- 如果遊戲有11個時間段，那麼愛麗絲的分額為12/22 = 54.5%，鮑勃的分額為10/22 = 45.5%。

160

回到小丑的提議

- 小丑提出的一半的提議並非完全沒有道理。
- 如果每天不採取行動，隨著城市被清理乾淨，暴徒的份額就會消失。
- 暴徒無奈之下接受小丑的提議

161

回到小丑的提議

- 儘管小丑擁有高超的談判技巧，但最終還是證明了他和暴徒所懷疑的一樣瘋狂。
- 當他收回這筆錢時，他把錢堆成一大堆，澆上汽油，然後點燃。
- 事實證明，無論哪種方式，暴徒都沒有辦法與小丑談判。

162

Infinite Horizon Bargaining

- 有兩個玩家就一個大小為 1 的餡餅進行討價還價。
- 玩家 1 在 t = 1, 3, ... 提議，玩家 2 在 t = 2, 4, ...他們用貼現因子$\delta \in (0,1)$.
- 定理:
- 有一個獨特的 SPNE：在任何時期，提議者向對方提供 $\delta/(1+\delta)$ 並保留 $1/(1+\delta)$ 自己；響應者接受報價，如果它至少是 $\delta/(1+\delta)$

163

四個時段

	Offerer	Receiver
1-period	1	0
2-period	$1-\delta$	δ
3-period	$1-\delta+\delta^2$	$\delta-\delta^2$
4-period	$1-\delta+\delta^2-\delta^3$	$\delta-\delta^2+\delta^3$

164

Rubinstein Bargaining

- $t = 2n,\ P_2$ proposes (0,1)
- $t = 2n-1,\ P_1$ proposes $(1-\delta, \delta)$
- $t = 2n-2,\ P_2$ proposes

$\big((1-\delta)\delta, 1-(1-\delta)\delta\big) = (\delta-\delta^2, 1-\delta-\delta^2)$

165

Rubinstein Bargaining

- $t = 2n-3,\ P_1$ proposes $(1-\delta(1-\delta-\delta^2), (1-\delta-\delta^2))$

$= (1-\delta+\delta^2-\delta^3, \delta-\delta^2+\delta^3)$

166

Rubinstein Bargaining

Inductively, we find t=1

$(\sum_{k=0}^{2n-1}(-\delta)^k\ , 1-\sum_{k=0}^{2n-1}(-\delta)^k)$

$= (\frac{1-\delta^{2n}}{1+\delta}, \frac{\delta+\delta^{2n}}{1+\delta})$

If n→ ∞ $(\frac{1-\delta^{2n}}{1+\delta}, \frac{\delta+\delta^{2n}}{1+\delta}) \to (\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta})$

167

Discount Rate vs Discount Factor

168

The discount rate

- The discount rate is the interest rate used to determine the present value of future cash flows.
- It reflects the opportunity cost of money—how much return you could earn if you invested your money elsewhere.
- In finance, the discount rate represents the rate of return required to make an investment worthwhile.

169

Present Value Formula

1.PV = $\frac{FV}{(1+r)^n}$

1.PV: Present value

2.FV: Future value

3.r: Discount rate (interest rate)

4.n: Number of periods

170

Example

- For example, the present value of $100 received one year from now at a discount rate of 5% is:
- PV=$\frac{100}{(1+0.05)}$=95.24
- So $100 in a year is worth $95.24 today.

171

Discount Factor

- The **discount factor** is a number that represents the present value of $1 to be received in the future.
- The discount factor is always less than 1 (unless the discount rate is zero, in which case the factor is 1).
- $\delta = \frac{1}{(1+r)^n}$

172

Discount Rate vs Discount Factor

- If the discount rate is 5%, the discount factor for 1 year into the future is:
- Discount Factor = $\delta = \frac{1}{(1+0.05)^1}$ =0.9524
- This means that $1 received one year from now is worth $0.9524 today.
- You multiply future cash flows by this discount factor to find their present value.

173

Year 1

- Discount Factor=$\delta = \frac{1}{(1+0.05)^1}$ =0.9524
- This means that $1 to be received one year from now is worth approximately $0.9524 today.

174

Year 2

- Discount Factor = δ = $\frac{1}{(1+0.05)^2}$ = $\frac{1}{1.1025}$ =0.9070
- This means that \$1 to be received two years from now is worth approximately \$0.9070 today.

175

Year 3

- Discount Factor = δ = $\frac{1}{(1+0.05)^3}$ = $\frac{1}{1.1576}$ = 0.8638
- This means that \$1 to be received three years from now is worth approximately \$0.8638 today.

176

Year 4

- Discount Factor =δ = $\frac{1}{(1+0.05)^4}$ = $\frac{1}{1.2155}$ =0.8227
- This means that \$1 to be received four years from now is worth approximately \$0.8227 today.

177

Year 5

- Discount Factor = δ = $\frac{1}{(1+0.05)^5}$ = $\frac{1}{1.2155}$ =0.7835
- This means that \$1 to be received five years from now is worth approximately \$0.7835 today.

178

Here's a step-by-step analysis to calculate the present value of a company's earnings for the next 5 years, given an interest (discount) rate of 5%.

- Annual Earnings: The company earns \$100 every year.
- Interest Rate: The interest rate is 5%, or 0.050.
- This is the rate we use to discount future earnings to their present value.
- Formula for Present Value of Cash Flows: The present value of earnings in each year is calculated using the formula:
- PV = $\frac{1}{(1+\text{Interest Rate})^{\text{Time Period}}}$

179

Calculate the Present Value for Each Year

- We will now calculate the present value for each of the next 5 years.
- PV1=$\frac{100}{(1+0.05)^1}$=95.24
- PV2=$\frac{100}{(1+0.05)^2}$=90.70
- PV3=$\frac{100}{(1+0.05)^3}$=86.38
- PV4=$\frac{100}{(1+0.05)^4}$=82.27
- PV5=$\frac{100}{(1+0.05)^5}$=78.35
- PV_{Total} =95.24+90.70+86.38+82.27+78.35=432.95

180

Here's a step-by-step analysis to calculate the present value of a company's earnings for the next 5 years, given an interest (discount) rate of 10%.

- Annual Earnings: The company earns $100 every year.
- Interest Rate: The interest rate is 10%, or 0.1.
- This is the rate we use to discount future earnings to their present value.
- Formula for Present Value of Cash Flows: The present value of earnings in each year is calculated using the formula:
- PV = $\frac{1}{(1+\text{Interest Rate})^{\text{Time Period}}}$

181

Calculate the Present Value for Each Year

- We will now calculate the present value for each of the next 5 years.
- PV1=$\frac{100}{(1+0.05)^1}$=91
- PV2=$\frac{100}{(1+0.05)^2}$=83
- PV3=$\frac{100}{(1+0.05)^3}$=75
- PV4=$\frac{100}{(1+0.05)^4}$=68
- PV5=$\frac{100}{(1+0.05)^5}$=62
- PV_{Total}=90.91+82.64+75.13+68.30+62.09=379.08

182

a snowball rolling down a snowy hill, representing the concept of growth and accumulation

183

The Problem

- Assume that the discounting factor is 0.9.
- What will be earned for the current value if next 5 years earns 10, 20,30, 40 and 50 ?

184

Identify the earnings for each year and the discount factor

- Year 1 earnings = 10
- Year 2 earnings = 20
- Year 3 earnings = 30
- Year 4 earnings = 40
- Year 5 earnings = 50
- Discount factor = 0.9

185

Calculate the present value for each year's earnings

- For each year, the present value PV of the earnings is calculated as: PV=Earnings×(Discount Fa ctor)$^{\text{Year}}$

186

Calculate the present value of each year's earnings

- **Year 1**: $PV_1=10\times(0.9)^1=10\times0.9=9$
- **Year 2**: $PV_2=20\times(0.9)^2=20\times0.81=16.2$
- **Year 3**: $PV_3=30\times(0.9)^3=30\times0.729=21.87$
- **Year 4**: $PV_4=40\times(0.9)^4=40\times0.6561=26.244$
- **Year 5**: $PV_5=50\times(0.9)^5=50\times0.59049=29.955$

187

Sum up the present values to find the total current value

- Total $PV=PV_1+PV_2+PV_3+PV_4+PV_5$
- Total $PV=9+16.2+21.87+26.244+29.955=114.27$

188

The Problem

- Assume the interest rate is 5%. What will be the value after 20 years if you deposit 10000 dollars in the bank ?

189

Set Up the Formula

- $FV=10{,}000\times(1+0.05)^{20}$
- Simplify Inside the Parentheses:
- $FV=10{,}000\times(1.05)^{20}$

190

$(1.05)^{20}\approx2.6533$

- Multiply by the Initial Deposit:
- $FV=10{,}000\times2.6533\approx26{,}533$
- After 20 years, a \$10,000 deposit at a 5% interest rate will grow to approximately **\$26,533**.

191