完美資訊的擴展賽局
Extensive games with perfect information

1

智財權保護聲明

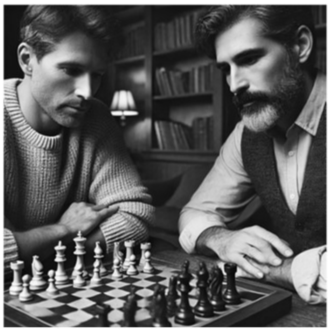
2

生命的動態賽局
the dynamic game of life

- “在生命的動態賽局，成功不屬於那些僅僅做出反應的人，而是屬於那些**預測、適應和創新的人**。”
- "In the dynamic game of life, success belongs not to those who merely react, but to those who anticipate, adapt, and innovate."

3

two men playing chess



4

two players engaged in a traditional Go game

5

生活是一場動態的博弈
Life is a dynamic game

- 生活是一場動態的博弈，我們所做的每一個決定和我們的每一次互動都涉及戰略思考。 **了解博弈論可以幫助我們駕馭這個複雜的局面，做出優化我們結果的選擇，同時預測他人的行動。**
- Life is a dynamic game where every decision we make and every interaction we have involves strategic thinking. Understanding game theory helps us navigate this complex landscape, making choices that optimize our outcomes while anticipating the actions of others.

6

完美資訊的動態賽局

- 動態賽局 (Dynamic Game)：玩家選擇一系列策略的賽局。
- 完整資訊(Complete information)：賽局策略空間和玩家收益是共同知識
- 完美資訊(perfect information)：玩家在賽局中選擇每一策略時，都知道賽局的歷史。

7

完美資訊的動態博弈
A dynamic game with perfect information

- 具有完美資訊的動態博弈就像一個棋盤，每一步棋都是展開策略的一部分，揭示了決策的藝術性。
- A dynamic game with perfect information is like a chessboard where every move is a piece of the unfolding strategy, revealing the artistry of decision-making .

8

完美資訊的擴展賽局

- 擴展賽局是動態賽局 (Dynamic Game)
- 擴展賽局(extensive game)明確描述玩家決策(decision) 的順序結構(sequential structure)。

9

完美資訊的 擴展賽局

- 每個玩家在選擇策略時，都知道先前選擇的所有策略
- 每個玩家總是單獨選擇策略（而不是與其他玩家同時選擇策略）

10

完美資訊的 擴展賽局

- 象棋和圍棋等客廳遊戲
- 利益集團競爭立法者的支持
- 開發新技術的競賽
- 導演之間競爭拍電影

11

進入博弈 Entry Game

- 在位者 面臨挑戰者進入的可能性。
- 挑戰者可能會進入也可能不會進入。
- 如果挑戰者進入，現任者可默許還是戰鬥。

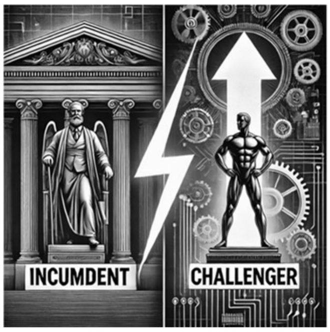
12

現任者(Incumbent)

- The first mover
  - 主導市場（商業競爭）
  - 領先者（美洲盃比賽）
- 在位者 （總統選舉）
  - 衛冕者（拳擊比賽）

13

the competition between the incumbent and the challenger



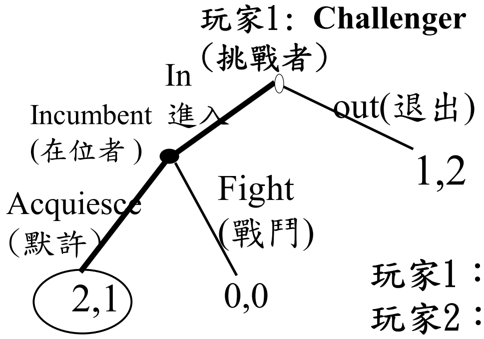
14

挑戰者(Challenger)

- The second Mover
  - 考慮進入壟斷者佔領的行業
  - 爭奪政黨的領導
  - 競爭與異性交配的權利

15

商業競爭的進入賽局



玩家1：挑戰者
玩家2：在位者

16

終端歷史 terminal history

- 空歷史 (The empty history)（Ø）：賽局開始
- 終端歷史 (terminal history)：一系列從賽局開始到賽局結束的策略。

17

終端歷史 terminal history

- 有限策略序列 $(a^1, a^2,...,a^k)$的子歷史（h）表示為 $(a^1, a^2,...,a^m)$的序列，其中$1 \leq m \leq k$或空歷史。
- 適當的子歷史 (A proper subhistory) 是不等於整個序列的子歷史（即 $m < k$）。

18

進入賽局(entry game)

- 終端歷史:(in, acquiesce), (in, fight)，和 (out)。
- 序列 (in, acquiesce) 的子歷史：∅， (in, acquiesce) 和 in。

19

有限賽局(finite games)

- 如果擴展賽局(Extensive games)最長的終端歷史是有限，這賽局是有限區間。
- 有限區間可有無限的終端的歷史，因為玩家有無限的策略 (infinite number of strategies)。
- 如果一個擴展賽局是有限區間和有限終端的歷史(finite terminal history)，它是有限賽局

20

有限賽局(Finite Game)

- 有限的區間
- 有限的策略
- 有限終端的歷史

21

完美信息的博弈納許均衡

- s*表示策略組合 strategy profile ，O(s*)表示由s*生成的終端歷史。

22

完美信息的博弈納許均衡

- 策略組合 s* 是納許均衡
- $u_i(\mathrm{O}(s*)) \geq u_i(\mathrm{O}(r_i, , s^*_{-i})), \forall\, r_i.$

23

完美信息的博弈納許均衡

- 如果對於每個玩家 i 和策略 r_i,，每個玩家 i 的 O(s*) 至少和 終端歷史 O(r_i, , s^*_{-i})一樣好，那麼策略組合 s* 是納許均衡。

24

逆向歸納法 Backward Induction

- 每當玩家選擇策略時，她會針對自己的每個可能策略推導出每位玩家（包括她自己）隨後將理性選擇的策略，並選擇自己喜歡的終端(terminal)歷史。

25

Backward Induction

- 從每個終端節點(terminal node)開始，每個玩家都在賽局樹(game tree)的每個子賽局**subgame**使用最佳策略。

26

逆向歸納法

- $s^*_j(1)$ **:長度1 的子賽局 j 最佳策略集合,** $j=1,2,..$。
- $s_l^*(2)$: 長度2 的子賽局 l 最佳策略集合, $l=1,2..$。
- $s_p^*(k\text{-}1)$:長度k-1的子賽局 p 最佳策略集合, $p=1,2,..$。

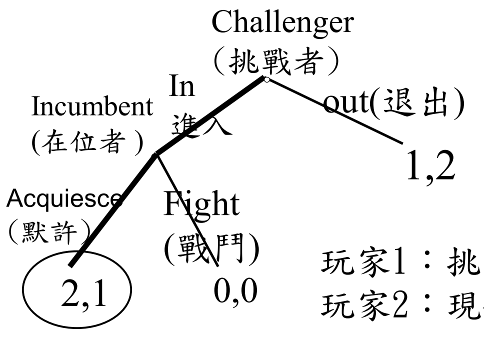
27

子賽局完美均衡的存在性

- 每一個有限完美資訊的擴展賽局具有一個子賽局完美均衡

28

商業競爭的進入賽局



玩家1：挑戰者
玩家2：現任者

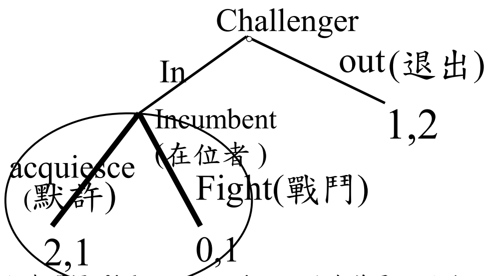
29

逆向歸納法的弱點

- 不能適用於無限歷史(infinite history）的賽局

30

進入賽局變型



現任者選擇 fight or acquiesce 沒有差異。 它留下挑戰者選擇策略的的問題。

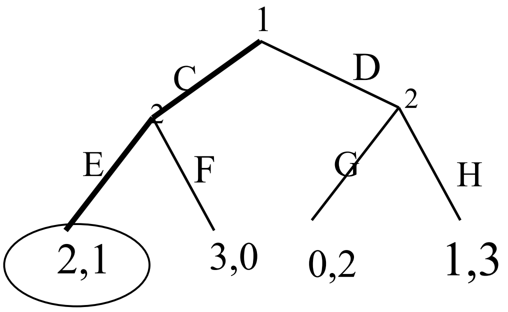
31

如何獲得擴展賽局的納許均衡？

- 將擴展賽局的策略轉換為策略形式的策略並將收益歸到由擴展賽局的策略配置(strategy profile)所產生的終端歷史收益，從而將擴展博弈轉換為策略形式博弈。

32

玩家 1的 2種策略 C, D
玩家 2 的四種策略 EG, EH, FG, and FH.



33

完美資訊的 擴展賽局 和四種策略

	指定行動給歷史C	指定行動給歷史D
策略1	E	G
策略2	E	H
策略3	F	G
策略4	F	H

34

擴展賽局的納許均衡

- 完美資訊擴展賽局的納許均衡在是其策略形式賽局(strategic form game)的納許均衡的集合之中

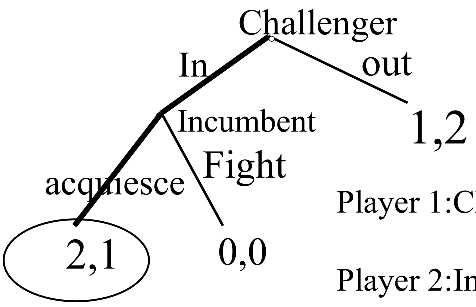
35

如何在動態的完整信息博弈中找到納什均衡 How to find the Nash equilibria in a dynamic game of complete information

- 構建完整信息動態博弈的正則形式 (Normal Form), 找出正則形式的納許均衡
- 刪除不合理的納許均衡或不可信的威脅可得子博弈完美納許均衡（逆向歸納法）

36

挑戰者將進入與現任者默許



Player 1:Challenger

Player 2:Incumbent

37

商業競爭的進入賽局的策略形式賽局

		在位者 (Incumbent)	
		Acquiesce (默許)	Fight (戰鬥)
Challenger (挑戰者)	In (進入)	(2*, 1*)	(0,0)
	Out (退出)	(1,2*)	(1*,2*)

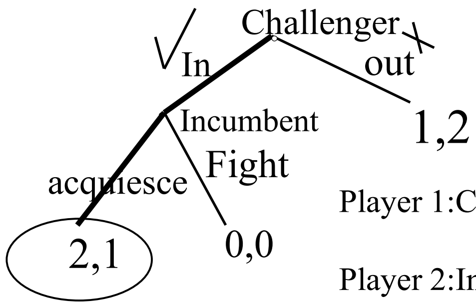
38

進入賽局的納許均衡

- (In, acquiesce) 和 (out, fight) 是策略形式賽局的納許均衡。
- 只有 (In, acquiesce)是擴展賽局的納許均衡。

39

(Out, Fight) 不可信



Player 1:Challenger

Player 2:Incumbent

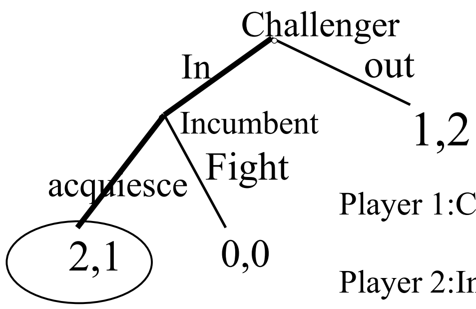
40

(Out, Fight) 不可信

- 從賽局樹最底層來看, 在位者 (Incumbent) 選擇 Fight 而不是 In ， 是不合理性
- (Out, Fight)不是順序理性

41

(In, acquiesce)是的納許均衡。



Player 1:Challenger

Player 2:Incumbent

42

（In , acquiesce ）是順序理性

- 挑戰者（Challenger)選擇 In ，在位者 (the incumbent) 最好選擇 acquiesce
- （In , acquiesce ）是滿足順序理性 (Sequential Rationality)的納許均衡

43

完美資訊擴展賽局的子賽局完美均衡

- 如果玩家 i 和一個歷史 h 之後的採取策略 s*

  $u_i(O_h(s^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s^*_{-i}))$ ，

  對於玩家 i 的採取策略 r_i。
- u_i是玩家 i 的報酬函數。
- $O_h(s)$是歷史 h 後採取策略 s 所產生終端歷史。

44

順序理性
Sequential Rationality

- 玩家 i 是順序理性，如果玩家 i在賽局中,選擇策略的任何節點，玩家 i 選擇最佳策略

45

子賽局完美均衡和納許均衡

- 每個子賽局完美均衡是一個納許均衡。
- 一個子賽局完美均衡是一種策略組合(strategy profile)的納許均衡。

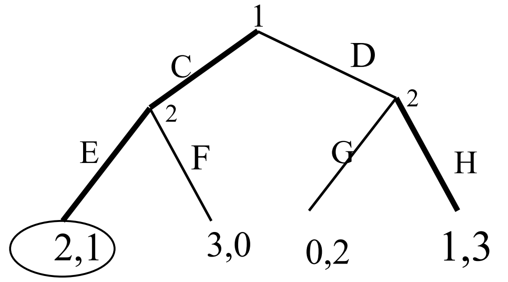
46

進入賽局的納許均衡

- (In, acquiesce) 和 (out, fight) 策略性形式(strategic form)的納許均衡。
- 然而 (out, fight) 不是一個完美子賽局均衡。

47

逆向歸納的程序



逆向歸納法產生的策略組合
（C，EH）

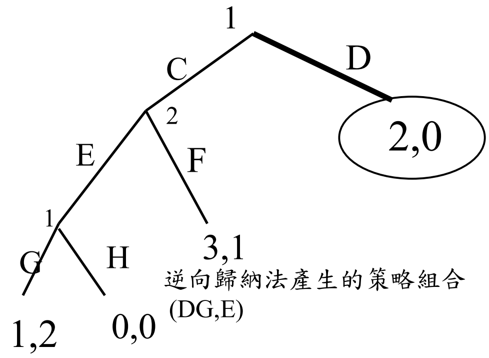
48

逆向歸納法產生的策略組合
s* = （C，EH）

- 玩家 1選擇 C 和玩家 2 選擇EH ， s* = (C,EH)是納許均衡
- O((C, EH)) =(C,E)(子賽局完美均衡)

49

一個擴展賽局
（玩家1在玩家 2之前行動和之後行動）



50

逆向歸納法產生的策略組合
（DG, E）

- 玩家1選擇DG,玩家2選擇E。
- O((DG,E))=D.(子賽局完美均衡)

51

完美資訊的 擴展賽局

玩家2 / 玩家1	E	F
CG	1, 2*	3*, 1
CH	0, 0	3*, 1*
DG	2*, 0*	2, 0*
DH	2*, 0*	2, 0*

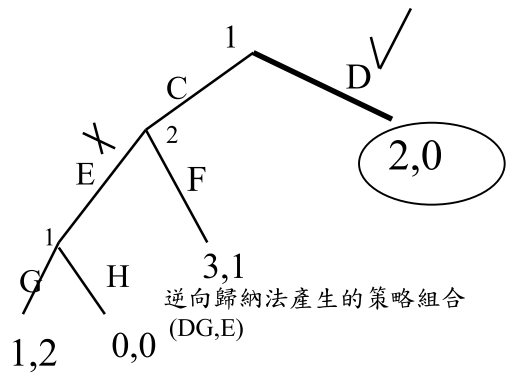
52

子博弈完美納許均衡（SPNE）

- (DH, E) 和 (DG, E), (CH, F) 是NE (納許均衡)
- O((DG,E))=D.(子賽局完美均衡)

53

O(DG,E)=D.(子賽局完美均衡)



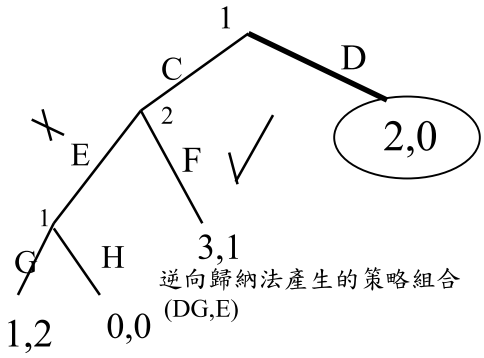
54

O(DG,E)=D.(子賽局完美均衡)

- O(DG, E) 玩家 1 選擇 D、G，玩家 2 選擇 E。
- 從賽局樹最底層來看，它是順序理性
- (DG,E) 是子博弈完美均衡 O(DG,E)=D.

55

(DH,E)不是子博弈完美均衡



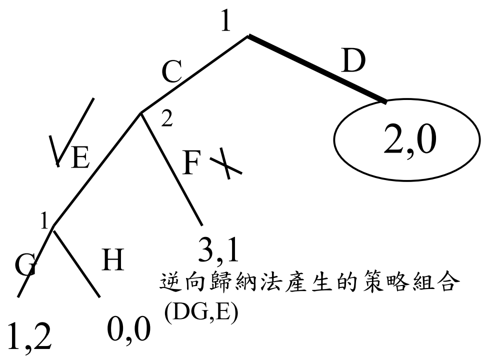
56

(DH,E)不是子博弈完美均衡

- 玩家 1 選擇 D、H，玩家 2 選擇 E。
- 從賽局樹最底層來看，(DH,E) 不是子博弈完美均衡
- 它不是順序理性的。

57

(CH,F) 不是子博弈完美均衡



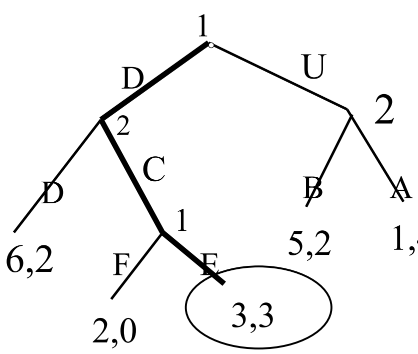
58

(CH,F) 不是子博弈完美均衡

- 玩家 1 選擇 C、H，玩家 2 選擇 F。它不是順序理性的。
- (CH, F) 不是子博弈完美均衡

59

逆向歸納法



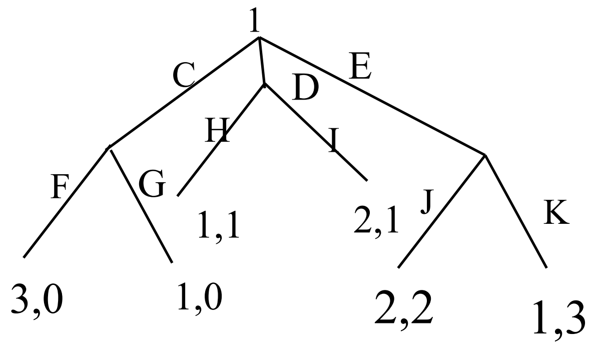
60

逆向歸納法

- 使用逆向歸納法，我們確定了單一的順序的理性策略 (sequential rational strategy)（DE，AC）。
- 策略DE是一個玩家 1 最好的回應對於玩家2的策略AC.
- 對於玩家2 ， AC是一個最好的回應DE（玩家1） 。
- (DE, AC)是一個納許均衡的(sequential rational strategy)
- O((DE, AC))=(D,C,E)是子賽局完美均衡一個(終端的歷史)

61

An Example



62

逆向歸納法

- 本賽局中有三個子賽局的長度為一。
- 在子賽局的歷史 C 和 D，玩家2的兩個策略是(H, I)及 (F,G)都是一樣的報酬 (payoff)。
- 在子賽局的歷史E ，玩家2唯一的最優策略是K。
- 因此，長度為1的子賽局，玩家2有四種最佳策略：FHK，FIK，GHK和GIK

63

逆向歸納法

- 在FHK，FIK，GHK和GIK 中，
- 第一部分是玩家2在歷史Ç後的策略，
- 第二部分是玩家2在歷史*D*後的策略，
- 第三部分是玩家2在歷史*E*後的策略

64

逆向歸納法

- 對於FHK和FIK，玩家 1的最佳策略是C。
- 對於GHK ，玩家1的最佳策略為C，D 和E (**都是一樣的報酬 (payoff)**)
- 對於 *GIK* ，玩家1的最佳策略為D
- 6個子賽局完美均衡策略為(*C*, *FHK*), (*C*, *FIK*), (*C*, *GHK*), (*D*, *GHK*), (*E*, *GHK*), and (*D*, *GIK*).

65

5個子賽局完美均衡

- **(C, FKH)** **O((C, FKH)) = (C,F)**
- **(C,FIK)** **O((C,FIK)) = (C,F)**
- (C, GHK) O((C, GHK)) = (C,G)
- (C, GHK) O((C, GHK)) = (D,H)
- (E, GHK) O((E, GHK)) = (E,K)
- (D,GIK) O((D,GIK)) = (D,I)

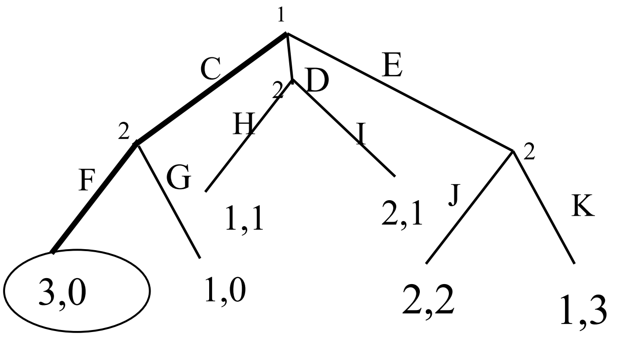
66

子賽局完美均衡集合

- 賽局開始時，對於FHK和FIK，玩家1的策略C是最佳的。
- 對於GHK，策略C，D和E是最佳的(都是一樣的報酬(payoff));
- 對於GIK策略D是最佳。

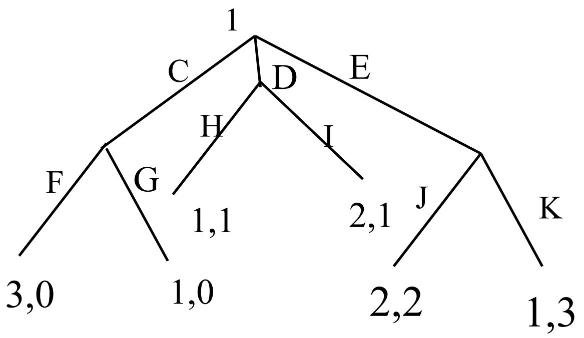
67

O(C, FKH)=CF



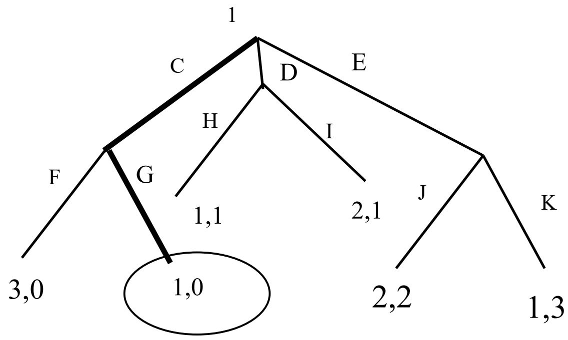
68

O(C,FIK)=CF



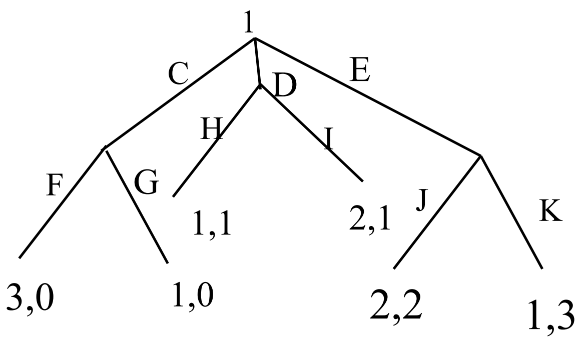
69

O(C, GHK)=CG



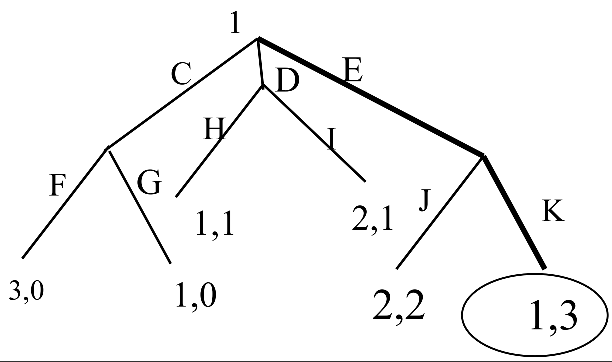
70

O(D, GHK)=DH



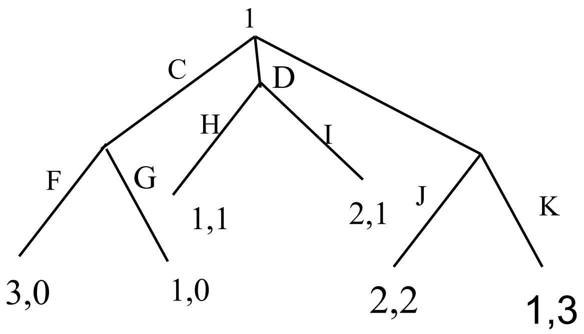
71

O(E, GHK)=EK



72

O(D,GIK)=DI



73

- GTO-4-01: Perfect Information Extensive Form: Taste
- https://www.youtube.com/watch?v=a2DyYhP0HSw&list=PLeY-lFPWgBTgm0rcTkX_SC_7PVe_fnJfu
- GTO-4-02: Formalizing Perfect Information Extensive Form Games
- https://www.youtube.com/watch?v=fOxAHwU_sII&list=PLeY-lFPWgBTgm0rcTkX_SC_7PVe_fnJfu&index=2
- GTO-4-03: Perfect Information Extensive Form: Strategies, Best Response, Nash Equilibrium
- https://www.youtube.com/watch?v=J-Zq80muaXk&list=PLeY-lFPWgBTgm0rcTkX_SC_7PVe_fnJfu&index=3
- GTO-4-04: Subgame Perfection
- https://www.youtube.com/watch?v=wW6edw1jBr4&list=PLeY-lFPWgBTgm0rcTkX_SC_7PVe_fnJfu&index=4
- GTO-4-05: Backward Induction
- https://www.youtube.com/watch?v=0VzDlHnKZXg&list=PLeY-lFPWgBTgm0rcTkX_SC_7PVe_fnJfu&index=5

74