寡頭壟斷的古諾模型

Cournot’s model of oligopoly

1

智財權保護聲明

2

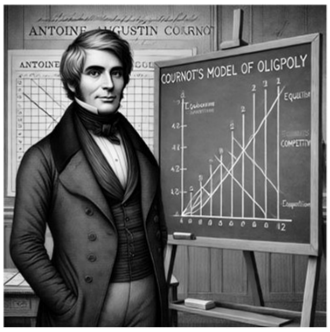
古諾模型
(Cournot’s model)

數量競爭

（ quantity competition）

3

Augustin Cournot with "Cournot's Model of Oligopoly



4

古諾模型的主要特點

- 數量競爭：企業透過決定生產數量而不是製定價格來競爭。每家公司在決定自己的生產水準時都會考慮另一家公司的產出水準。
- 納許均衡：在均衡狀態下，每個企業的產出決策在給定另一個企業的產出的情況下最大化自己的利潤，從而產生穩定的結果，而兩個企業都沒有動機單方面改變其產出。

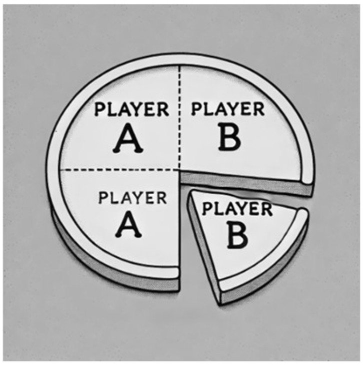
5

寡頭壟斷的古諾模型
(Cournot’s model of oligopoly)

- 寡頭壟斷是一種市場，由少數賣方主導
- **古諾模型 (Cournot’s model)**描述賣家之間的競爭，他們在同一時間，獨立決定他們的產品數量(output)。

6

古諾模型玩家 A 和玩家 B 劃分餅圖來代表他們的市場占有率



7

兩家公司競相瓜分餅（pie)

8

寡頭壟斷的古諾模型（競爭在產品數量）

- 市場有一個以上的公司
- 所有的公司產生均勻的產品;
- 所有的公司不合作;
- 公司擁有市場力量，即每個公司的產品數量決策;
- 公司的產品數量是固定的;
- 公司在產品數量競爭;
- 公司尋求利潤最大化。

9

寡頭壟斷的古諾模型

- 每個公司的偏好以利潤表示
  $\pi_i (q_1,\ldots,q_n) = q_i P(q_1+\ldots+q_n) - C_i(q_i)q_i$
- q_i 是公司 i 產品數量
- $C_i(q_i)$ 是公司 i 單位成本
- C_i 是一個遞增函數
- P為市場價格,一個反需求函數(inverse demanding function)。
- n:公司的數量

10

壟斷對整個市場的主導地位和控制

11

壟斷 Monopoly

12

雙頭壟斷 Duopoly

13

三頭壟斷 Triopoly

14

逆需求函數 inverse demand function

- 逆需求函數是需求函數的反函數。
- 需求數量 Q 是價格的函數 f(P)（需求函數）

15

逆需求函數 inverse demand function

- 逆需求函數：$P = f^{-1}(Q)$
- 如果需求函數為 $Q = 240-2P$ ，逆需求函數
- $P = 120 - 0.5Q$

16

雙寡頭 固定的單位成本

- q_1:公司 1 產品數量
- q_2:公司 2 產品數量
- Q: q_1+q_2 (總產量)
- $C_i(q_i) = cq_i$ for all q_i (unit cost c)
- $P(Q) = \alpha - Q$ if $Q \le \alpha$

  $= 0$ if $Q > \alpha$

17

公司 1 的報酬

- $\pi_1(q_1,q_2)$
- $= q_1(P(q_1+q_2) - c)$

  $= q_1(\alpha-(q_1+q_2) - c)$

18

公司 1 最佳的反應

- $d(\pi_1(q_1,q_2))/dq_1$
- $=d[q_1(\alpha-(q_1+q_2) - c)]/dq_1$
- $= \alpha-2q_1-q_2 - c =0$
- $q_1 = (\alpha-q_2 - c)/2$
- 公司 1最佳的反應
  $q_1 = b_1(q_2) = (\alpha-q_2 - c)/2$

19

公司 2 最佳的反應

- $q_2 = b_2(q_1) = (\alpha - c - q_1)/2$
- 納許均衡是 $q^*_1 = q^*_2 = (\alpha - c)/3$
- 市場價格 $P(Q) = \alpha - 2(\alpha - c)/3=(\alpha +2 c)/3$

20

納許均衡

- 納許均衡是 $q^*_1 = q^*_2 = (\alpha - c)/3$
- 總產量是 $2(\alpha - c)/3$
- $P(Q) = \alpha - 2(\alpha - c)/3=(\alpha +2 c)/3$
- 公司 1 的報酬是 $(\alpha - c)^2/9$
- 公司 2 的報酬是 $(\alpha - c)^2/9$

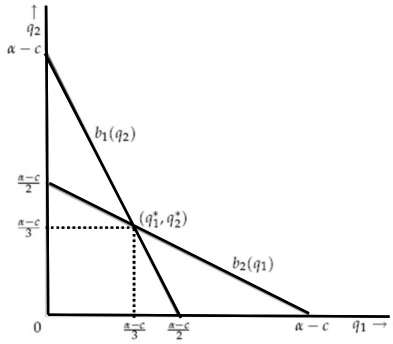
21

沒有共謀
Without Collusion

- α =100 and c=40
- $q^*_1 = q^*_2 = (\alpha - c)/3=20$
- 市場價格 $P(Q) = (\alpha +2 c)/3=60$
- 總產量是 $2(\alpha - c)/3 = 40$
- 公司 1 的報酬是 $(\alpha - c)^2/9 =400$
- 公司 2 的報酬是 $(\alpha - c)^2/9 =400$

22

唯一的納許均衡
(q_1*, q_2*)



23

共謀 collusion

- 在具有寡占、少數企業主導市場行業中，合謀確實更容易發生。
- 在寡占中，賣家很少，買家很多，這使得每個賣家都擁有巨大的市場力量

24

商業上的勾結:兩個商人坐在昏暗的房間裡的一張桌子旁，在金錢、文件和市場指標的包圍下竊竊私語

25

共謀和合作
collusion and cooperation

- 共謀為了個人利益而進行秘密且往往不道德的行為
- 合作則為了互惠互利而進行公開、道德的合作。

26

卡特爾(Cartel)

- 卡特爾是一種利潤協議，競爭對手成為市場主導地位的陰暗走廊中的合作者，利用權力決定價格並壓制競爭，而消費者則承擔其秘密交易的成本

27

卡特爾(Cartel)

28

卡特爾(Cartel)
(共謀, with Collusion)

- 玩家 1 和 玩家 2 合作，以提高他們的聯合利潤。

29

卡特爾(Cartel)

- 聯合利潤

$\pi_1(q_1,q_2) + \pi_2(q_1,q_2)$
$= q_1(\alpha-(q_1+q_2) - c) + q_2(\alpha-(q_1+q_2)-c)$

30

卡特爾(Cartel)

Let $q = q_1+q_2.$
$d[\pi_1(q_1,q_2) +\pi_2(q_1,q_2)]/d(q)$
$= d[(q_1+q_2)(\alpha-(q_1+q_2)- c)] /dq$
$= d[q\alpha-q^2 - cq] /dq \quad =0$

31

卡特爾(Cartel)

- $\alpha-2q- c =0$
- $q^* =(\alpha-c)/2$
- $q^*_1 = q^*_2 =(\alpha-c)/4$

32

卡特爾(Cartel)

- $q^*_1 = q^*_2 = (\alpha - c)/4$
- 卡特爾聯的合利潤是 $(\alpha-c)^2/4$
- 每個玩家的利潤是 $(\alpha-c)^2/8$

33

沒有共謀與共謀

- 對於合作的賽局 $q^*_1 = q^*_2 =(\alpha - c)/4.$
- 對於非合作賽局 $q^*_1 = q^*_2 = (\alpha - c)/3$

34

沒有共謀 Without Collusion

- $\alpha =100, c=40$
- $q^*_1 = q^*_2 =(\alpha - c)/3=20$
- 市場價格 $P(Q) = 100 - q^*_1 - q^*_2 =60$
- 總產量是 40, 每個玩家的利潤是 $(\alpha - c)^2/9 \quad =400$

35

共謀 (Cartel) With Collusion

- $\alpha =100, c=40$
- $q^*_1 = q^*_2 =(\alpha - c)/4=15$
- 市場價格 $P(Q) = 100 - q^*_1 = q^*_2 =70$
- 總產量是 30
- 共謀聯的合利潤是 $(\alpha - c)^2/4 = 900$
- 每個玩家的利潤是 $(\alpha - c)^2/8 \quad =450$

36

共謀, 玩家1背叛
With Collusion (Player 1 defect)

- α =100, c=40
- q^*_2 =15
- q_1 = (100-15 – 40)/2 =22.5
- 市場價格 P(Q) = 100 - 22.5-15= 62.5
- 公司 1的利潤是 62.5*22.5 = 40*22.5=506.5
- 公司 2 的利潤是62.5 *15-40*15=337.5

37

沒有共謀與共謀
Collusion vs. Without Collusion

	Collusion 共謀 (15)	*Without Collusion* 不共謀(20)
Collusion 共謀 (15)	450,450	337.5, 506.5*
Without Collusion 不共謀(20)	506.5*,337.5	400*,400*

38

無限囚徒困局
Indefinite Prisoner's Dilemma

- 下一個賽局繼續進行的概率為 p。
- 賽局結束的概率為（1-p）。

39

嚴酷的觸發策略
Grim Trigger

- 採取嚴酷觸發策略（Grim Trigger ）維持合作
- 如果合作失敗，威脅要訴諸永久背叛
- 合作是“可靠的”，如果（p ≥ 0.53)

40

玩家 1 進行共謀 或 背叛

- 玩家 2 進行合作（共謀），玩家 1 進行合作（共謀）的收益 $450+450p+450p^2+\cdots+450p^n$
- 玩家 2 進行合作, （共謀）玩家 1 玩背叛，則玩家 1 收益為 506.5+ $[400p+400p^2+\cdots+400p^n]$ = $(506.5+400p+400p^2+\cdots+400p^n)$

41

玩家 1 進行共謀

- 玩家 1 進行共謀，如果 $450+450p+450p^2+\cdots+450p^n - 506.5+[400p+400p^2+\cdots+400p^n] \geq 0$
- $-56.5+(50p+50p^2+\cdots+50p^n) \leq 0$
- $56.5 \leq 50p+50p^2+\cdots+50p^n = 50p/(1-p)$

$56.5-56.5p \leq 50p$, $p \geq 56.5/106.5 = 0.53$

- 玩家 1 合作（共謀），如果 if p ≥ 0.53

42

玩家 1 進行共謀

- 玩家 1 今天從不共謀(背叛)獲得的收益是(506.5-450)
- 玩家 1 今天以後因背叛而蒙受的損失 $50p + 50p^2 + \cdots + 50p^n$
- 玩家 1 合作（共謀)，如果今天從背叛獲得的收益≤今天以後因背叛而蒙受的損失
- $56.5 \le 50p + 50p^2 + \cdots + 50p^n = 50p/(1-p)$

43

玩家 1 進行共謀

- $56.5 - 56.5p \le 50p$

  $p \ge 56.5/106.5 = 0.53$
- 玩家 1 合作 (共謀), 如果 if $p \ge 0.53$

44

n 家公司的賽局

- $C_i(q_i) = c_i q_i$, i=1,2,3, ..,n
- $P(Q) = \alpha - Q$ if $Q \le \alpha$

  $= 0$ if $Q > \alpha$
- 公司 *i* 的報酬是
- $q_i P(Q) = q_i P(q_1 + q_2 + .. + q_n)$

  $= f_i(q_1 + q_2 + .. + q_n)$

45

三家公司的賽局

- $q_1 = b_1(q_2, q_3) = (\alpha - q_2 - q_3 - c)/2$
- $q_2 = b_2(q_1, q_3) = (\alpha - q_1 - q_3 - c)/2$
- $q_3 = b_3(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - q_2 - c)/2$
- $q^*_1 = q^*_2 = q^*_3 = (\alpha - c)/4$
- $P(Q) = \alpha - 3(\alpha - c)/4 = (\alpha + 3c)/4$

46

三家公司的賽局

- $\alpha = 100$, $c = 40$
- $q^*_1 = q^*_2 = q^*_3 = (\alpha - c)/4 = 15$
- $P(Q) = \alpha - 3(\alpha - c)/4 = (\alpha + 3c)/4 = 55$

47

3家公司的賽局

- $C_i(q_i) = c q_i$, i=1,2,3
- $P(Q) = \alpha - 2Q$ if $Q \le \alpha$

  $= 0$ if $Q > \alpha$

  $\alpha = 100$, $c = 20$

  $q_1^* = q_2^* = q_3^* = 10$

  $P = 100 - 2*30 = 40$

48

n 家公司的賽局

- $q_1 = b_1(q_2, q_3) = (\alpha - q_2 - q_3 \ldots - q_n - c)/2$
- $q_2 = b_2(q_1, q_3) = (\alpha - q_1 - q_3 \ldots - q_n - c)/2$
- $q_3 = b_3(q_1, q_2) = (\alpha - q_1 - q_2 \ldots - q_n - c)/2$

- $q^*_1 = q^*_2 = \ldots = q^*_n = (\alpha - c)/(n+1)$

49

n 家公司的賽局

- $Q = n(\alpha - c)/(n+1) \rightarrow \alpha - c$
- $P(Q) = \alpha - n(\alpha - c)/(n+1)$
  $= (\alpha + nc)/(n+1) \rightarrow c$
- $P(Q) \approx c$ as $n \rightarrow \infty$

50

n 家公司的賽局

- $q^*_1 = q^*_2 = \ldots = q^*_n = (\alpha - c)/(n+1)$
- $P(Q) = (\alpha + nc)/(n+1)$
- 公司 的利潤是$(P(Q)-c)\, q_n$, $\rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. (Perfect Competition)

51

n 家公司的賽局

- n=1, $q^* = (\alpha - c)/2$ (monopoly)
- n=2, $q^* = (\alpha - c)/3$
- n=3, $q^* = (\alpha - c)/4$
- n=4, $q^* = (\alpha - c)/5$
- n=5, $q^* = (\alpha - c)/5$
- n=6, $q^* = (\alpha - c)/7$

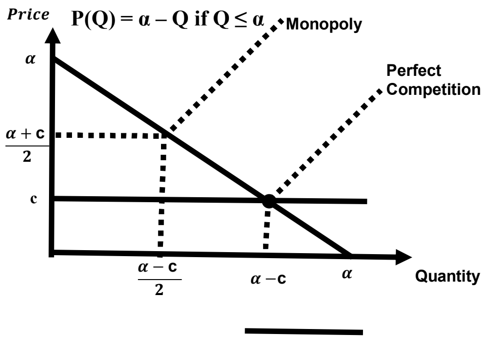
52

Monopoly and Perfect Competition

- n=1, $q^* = (\alpha - c)/2$ (monopoly)
- $Q = q^* = (\alpha - c)/2$
- $P(Q) = (\alpha + nc)/(n+1) = (\alpha + c)/2$
- $n \rightarrow \infty$. (Perfect Competition)
- $q^*_n = (\alpha - c)/(n+1)$
- $Q = n(\alpha - c)/(n+1) \rightarrow (\alpha - c)$
- $P(Q) = (\alpha + nc)/(n+1) = c$

53

Perfect Competition



54

Example

- Assume that α = 30
- P= 30 - Q, where Q = Q1 + Q2
- AC(average cost) = MC (marginal cost) =12, Fixed cost =0 c=12
- n=1, q* = (α- c)/2= 9 Q= 9, P(Q)=21
- n=2, q* = (α- c)/3= 6 Q=12, P(Q)=18
- n=3, q* = (α- c)/4 =4.5 Q=13.5, P(Q)=16.5

55

Example

- n=4, q* = (α- c)/5= 3.6
  Q = 4q* = 14.4, P(Q) =15.6
- n = 5, q* = (α- c)/6 =3
  Q=5 q* = 15, P(Q) = 15

56

Example

- Assume that α=30, c=12
- n → ∞, q*= (α- c)/(n+1) →0
- Q →nq* → α-c=18
- P(Q) →12

57

Cournot's Model

- Assume that *α=30,* P= 30-Q, where Q = $q_1 + q_2$ Further, AC(average cost) = MC (marginal cost) =12,
- Fixed cost =0
- 對於合作的賽局 $q^*_1 = q^*_2 = (\alpha - c)/4 = (30-12)/4 = 4.5.$
- 對於非合作賽局 $q^*_1 = q^*_2 = (\alpha - c)/3 = (30-12)/3 = 6$
- *If* $q_2 = 0$ *(monopoly)* $q_1 = (\alpha - 2q_2 - c)/2 = (30-0-12) = 9$

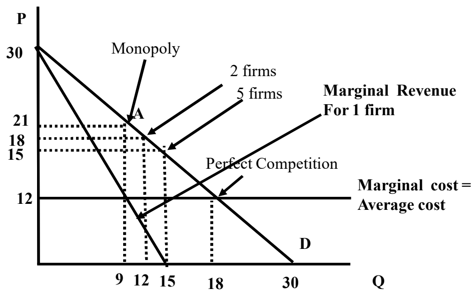
58

Analysis α = 30, c = 12

- Monopoly Q=9, P(Q)=21
- 2 firm Cournot Q=12 P(12)=18
- 3 firm Cournot Q=13.5 P(13.5)=16.5
- 4 firm cournot Q=14.4 P(14.4)=15.6
- 5 firm cournot Q=15 P(15)=15
- Perfect competition (n →∞)
  Q= 18 P(Q)=12=cost (no profit)
- 2 firm collusion Q = 9 P(Q)=21

59

n 家公司的市場價格



60

Application

- OPEC將石油產量限制在納許平衡水平以下
  - 卡特爾：串通生產，提高價格和利潤
  - 威脅：如果有人偏離價格，則會恢復納許平衡石油產量

61

OPEC:石油輸出國組織 的代表圍繞著圓桌會議

62

A Simple OPEC Example

- 世界石油需求量：P = 300-5Q
- 石油生產的邊際成本為20美元。

63

A Simple OPEC Example

- 假設有4個國家，所有國家都相似。$q_1=q_2 = q_3=q_4$
- $Q = q_{-i}+q_i = q_1+q_2 + q_3+q_4$
- 國家 i 的Payoff 是
- $u_i=(P-c)q_i = (300-5(q_{-i}+q_i)-20) q_i$

64

石油市場的四方壟斷

65

A Simple OPEC Example

- $u_i = (300-5(q_{-i}+q_i)-20) q_i$
- du_i/dq_i
- $= (300-5(q_{-i}+q_i)-20) -5 q_i = 0$
- $q_i = 28 - q_{-i}/2$

66

納許均衡

- 對國家 i 的最佳回應 $q_i = 28 - q_{-i}/2$
- 假設所有 4 個國家都相似.

$q_i = 28 - q_{-i}/2 = 28 - 3q_i/2$

$q^*_i = 56/5 = 11.2$ (百萬桶)

納許均衡

- 四個國家的邊際成本相同 20
- 每個國家每天抽取(pump) 11.2百萬桶石油。
- 油價為P = 300-5 * 4 * 11.2 = 76
- 每個國家的利潤是
- (76-20)11.2 = 627.2 百萬美元/天

4個國家的共謀(勾結)

- $u_i = (P-c)q_i = (300-5(q_{-i}+q_i)-20)\, q_i$
- $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$
  $= (300-5(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)-20)(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$
- $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$
- $u = (300-5q-20)q$

4個國家的共謀(勾結)

- $u = (300-5q-20)\, q$
- $du/dq = 280 - 10q = 0$
- $q = 28$
- $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 28/4 = 7$

4個國家的共謀(勾結)

- 共謀時，每個國家生產 7百萬桶/天 (million bbl/day)。
- 嚴峻的觸發策略：除非有國家背叛，每個國家將產生7百萬桶/天。如果有國家背叛，則每個國家永遠會生產11.2百萬桶/天
- bbl/day 每天桶數

嚴峻的觸發策略
Grim Trigger Strategy

- 只要其他玩家共謀 (collusion) ，選擇共謀
- 如果有其他玩家選擇背叛 (Defect)，則在隨後的每個回合中選擇背叛

囚徒困境的貼現因子 δ

Folk Theorem 民間定理

- 在博弈論中，民間定理指的是一組關於重複博弈的結果，這些結果表明，如果玩家有足夠的耐心，即如果他們的折扣因子足夠高，那麼各種各樣的結果如何可以維持為納許均衡。

貼現因子 δ

- 高貼現因子 δ （接近 1）意味著未來的獎勵幾乎與立即的獎勵一樣有價值，這會鼓勵玩家合作。
- 較低的貼現因子 δ （接近 0）意味著參與者非常偏好眼前的收益，這使得加強合作變得更加困難，因為參與者可能會選擇為了短期利益而背叛

囚徒困境的貼現因子 δ

- 在一場單局遊戲中，兩個玩家都可能為了更高的即時回報而背叛。
- 在具有高貼現因子 δ的重複博弈中，雙方都可以合作，因為他們知道如果自己背叛，對方會在未來的回合中報復，從而導致長期回報較低。

應用民間定理
Apply Folk Theorem

- 如果共謀，每個國家/天的產量為7百萬桶/天，則價格為 300-5(4*7)=160 (collusion)
- 每個國家的收益是(160-20)*7 = 980百萬美元/day
- 納許均衡 627.2百萬美元/day

Optimal Deviation For Country i

- 假設其他國家(共謀)生產7，國家 country I (背叛)生產 $q_i = 28 - q_{-I}/2 = 28-(7+7+7)/2 = 17.5$ (based on his best response)
- 石油價格是 (300 -5(7+7+7+17.5)) = 107.5
- 利潤是 (107.5-20)17.5 = 1531.25

耐心 Patience

- 願意延後眼前的獎勵以支持未來更大的獎勵。
- 耐心的玩家願意在長期策略上投入時間和資源，即使犧牲眼前的利益。
- 更有耐心的人有更高的貼現因子，因為相對於即時獎勵，他們更重視未來的獎勵。

79

貼現因子 δ 的含義

- 如果您的貼現因子δ很高， 接近1, 您表現出耐心並且不會輕視未來 (Far-sighted)
- 如果您的貼現因子δ很低， 接近零, 您表現出不耐煩並嚴重貶低未來 (Near-sighted)

80

貼現因子的含義

- 經濟學家認為，貼現因子可以用來解釋很多人類行為
- 如果您的貼現因子很低，則您更有可能花錢(Near-sighted)
- 如果您的貼現因子很高，則您更有可能省錢(Far-sighted)

81

貼現因子δ

- 背叛的收益: ，玩家1的收益是 $1531.25 + + 627.2\,\delta + + 627.2\,\delta^2 + \ldots = 1531.25 + 627.2\,\delta/(1-\delta)$
- 堅持納許均衡(共謀)的收益，玩家1的收益為: $980 + 980\,\delta + 980\,\delta^2 + \ldots = 980 + 980\,\delta/(1-\delta)$

82

貼現因子δ

- 背叛的收益: $1531.25 + 627.2\,\delta/(1-\delta)$
- 堅持納許均衡(共謀)的收益: $980 + 980\,\delta/(1-\delta)$
- $1531.25 + 627.2\,\delta/(1-\delta) \le 980 + 980\,\delta/(1-\delta)$
- $313\,\delta/(1-\delta) \le 551$, $\delta \ge 551/864 = 0.64$
- if $\delta \ge 0.64$ 共謀(Remain collusion)

83

保護主義是囚徒困境的結果
Protectionism as the outcome of prisoner's dilemma

	Protection 保護	Free Trade 自由貿易
Protection 保護	3*,3*	12*,1
Free Trade 自由貿易	1,12*	8,8

84

嚴酷的觸發策略

- 堅持自由貿易，玩家1的收益是$8 + 8\delta + 8\delta^2 + \ldots$
- 在第1階段背棄保護，玩家1的收益為$12 + 3\delta + 3\delta^2 + \ldots$
- 自由貿易是可持續的，如果$8 + 8\delta + 8\delta^2 + \ldots \geq 12 + 3\delta + 3\delta^2 + \ldots$
- $8 + 8\delta/(1-\delta) \geq 12 + 3\delta/(1-\delta)$
- $8\delta \geq (12-8)(1-\delta) + 3\delta$
- $9\delta \geq 4$
- $\delta \geq 4/9$

85

貝特朗模型
(Bertrand’s model)

價格競爭

（ price competition）

86

Joseph Bertrand

87

伯特蘭模型

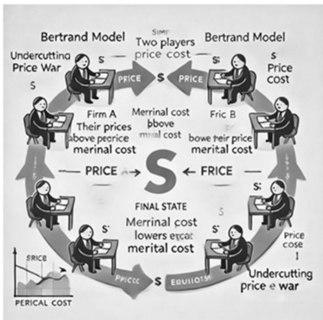
- 伯特蘭模型是企業之間競爭的經濟模型，它設定價格而不是數量

88

價格競爭的伯特蘭模型

89

伯特蘭模型中兩家公司透過定價競爭



90

伯特蘭(Bertrand)的寡頭壟斷模型

- 在古諾的賽局，每個公司都選擇產品數量;價格是由產品的總數量的需求決定。
- 在伯特蘭賽局，每家公司依所有公司選擇的價格，生產產品的數量。

91

在價格競爭

- 至少兩個公司生產同質化的產品;
- 公司之間不合作;
- 各公司有相同的邊際成本 (MC);
- 邊際成本是常數;
- 需求是線性;
- 公司間互相競爭，制定價格;
- 消費者選擇最低價格的公司購買產品。

92

兩家公司展開價格競爭，象徵它們對客戶的爭奪

93

伯特蘭的寡頭壟斷模型

- n 個公司都生產一個產品。
- 每個公司生產的貨物成本 $C_i(q_i)$.
- p ：價格
- 在價格 p 的需求量：D（p）。

94

兩家公司的競爭

- p_i: 公司 i 價格
- p_j: 公司 j 價格
- $D(p) = \alpha - p, \quad \text{if } p \le \alpha$

  $\quad = 0, \quad \text{if } p > \alpha$

95

公司 i的報酬函數

- if $p_i < p_j$ 公司 i 在價格 p_i 銷售 $\alpha - p_i$ units, 公司 i的報酬 $(p_i - c)*(\alpha - p_i)$
- if $p_i = p_j$ 公司i 在價格 p_1銷售 $(\alpha - p_i)/2$ units, 公司 i 的報酬 $(p_i - c)*(\alpha - p_i)/2$
- if $p_i > p_j$ 公司i不出售任何產品.

96

公司 i 的報酬函數

- $\pi_i(p_i , p_j) = (p_i - c)*(\alpha - p_i)$ if $p_i < p_j$
- $\pi_i(p_i , p_j) = ((p_i - c)*(\alpha - p_1))/2$ if $p_i = p_j$
  $\pi_i(p_i , p_j) = 0$ if $p_i > p_2$
- c: 任何公司的產品成本。
- p^m is the price that maximizes $(p_i - c) * (\alpha - p_i)$

97

$p_i < p_j$

- P^m is the price that maximize $\pi_i(p_i , p_j) = (p_i - c)*(\alpha - p_i)$ if $p_i < p_j$
- $d\pi_i(p_i , p_j) / d p_i = \alpha + c - 2 p_i = 0$
- $P^m = (\alpha + c)/2$
- P^m 是公司 i 具有壟斷性的市場價格

98

公司 *i* 最佳的反應 (**$p_j < c$ ，公司 *j* 的售價低於成本**)

- 如果 $p_i < p_j$，則公司 *i* 的利潤是負的 (有賣，有虧)
- If $p_i > p_j$, 公司 *i* 利潤為零 (沒賣，沒虧)
- 任何大於 p_j 的價格是公司 *i* 最佳反應
- $B_i(p_j) = \{ p_i : p_i > p_j \}$ (公司 *i* 沒賣，沒虧)

99

公司 *i* 的報酬函數 **($c < p_j \leq p^m$)**

- 公司 *i* 要選擇一個價格低於 p_j，但最好越接近 p_j，公司 *i* 的報酬越好。
- 對於任何價格低於 p_j，公司 *i* 有一個更高於 c 也低於 p_j 的價格，所以沒有最好的價格

100

公司 *i* 最佳的反應

- $B_i(p_j) = \{ p_i : p_i > p_j \}$ if $p_j < c$ (沒賣)
- $B_i(p_j) = \{ p_i : p_i \geq p_j \}$ if $p_j = c$
- $B_i(p_j) = \Phi$ for $c < p_j \leq p^m$ (沒有最好的價格)
- $B_i(p_j) = \{p^m\}$ If $p^m < p_j$ (公司 i 最好的價格 p^m)

101

Bertrand model of duopoly (homogeneous products)

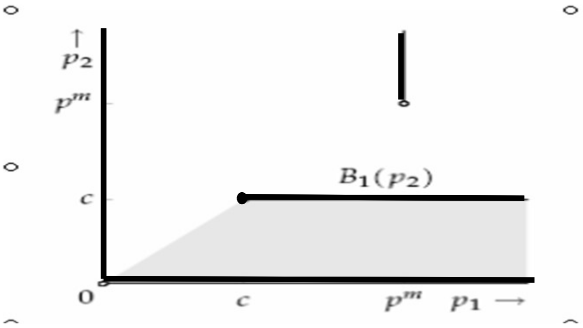
- Best response functions: $\boldsymbol{p^m = (a + c)/2}$

$$B_1(p_2) = \begin{cases} \{p_1 : p_1 > p_2\} & \text{if } p_2 < c \\ \{p_1 : p_1 \geq p_2\} & \text{if } p_2 = c \\ \varnothing & \text{if } c < p_2 \leq p^m \\ p^m & \text{if } p^m < p_2 \end{cases}$$

$$B_2(p_1) = \begin{cases} \{p_2 : p_2 > p_1\} & \text{if } p_1 < c \\ \{p_2 : p_2 \geq p_1\} & \text{if } p_1 = c \\ \varnothing & \text{if } c < p_1 \leq p^m \\ p^m & \text{if } p^m < p_1 \end{cases}$$

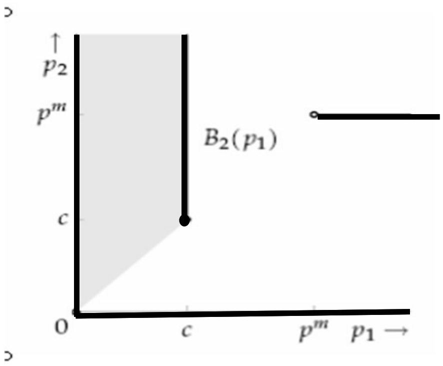
102

公司 *1(i)* 最佳的反應



103

公司 *2(j)* 最佳的反應



104

伯特蘭的寡頭壟斷納許均衡

- 公司 *i* 的最佳反應$B_i(p_j)$ 和公司 j 的最佳的反應 $B_j(p_i)$ 的交點 $(p^*_i, p^*_j) = (c, c)$
- 納許均衡 $(p^*_i, p^*_j) = (c, c)$
- 每間公司銷售的價格為成本 c
- $D(p) = \alpha - c$ if $p \leq \alpha$

105

the Stackelberg 雙頭壟斷模型

106

Heinrich Freiherr von Stackelberg

107

the Stackelberg 雙頭壟斷模型

108

Stackelberg 的雙寡頭模型

一家公司（領導者）首先採取行動，其他公司（追隨者）對領導者的決策做出反應

the Stackelberg 雙頭壟斷模型

- 領導者透過考慮追隨者的反應來設定其產出數量來最大化其利潤。
- 追隨者在給定領導者設定的數量的情況下最大化其利潤。

Stackelberg 的雙寡頭模型

- 公司 1 在賽局開始時先採取策略。
- 公司 1 的策略是一個產量。
- 公司 2 在公司 1 採取策略之後，選擇一個策略。
- 公司 2 的策略 是一個產量，其產量和公司 1 產量有關。

Stackelberg 的雙寡頭模型

- 對於公司 1 的產量 q_1，我們找出公司 2 的產量 $b_2(q_1)$ 以最大化其利潤。
- 在任何子賽局完美均衡，公司 2 的策略是產量為 $b_2(q_1)$。

Stackelberg 的雙寡頭模型

- 當公司1選擇的產量q_1，公司2選擇 $b_2(q_1)$ ，總輸出 $q_1 + b_2(q_1)$。
- 價格是 $P_d(q_1 + b_2(q_1))$.

Stackelberg 的雙寡頭模型

- 子賽局完美均衡的公司 1 產量 q_1，以最大化其利潤 $q_1P_d(q_1 + b_2(q_1)) - C_1(q_1)$
- 假設有這樣一個值 q_1 記為 q^*_1

Stackelberg 的雙寡頭模型

- 公司 1 的最好的反應策略q^*_1，公司 2 的最佳反應是$q^*_2 = b_2(q^*_1)$.
- 對於q^*_2，公司 1 選擇 $q^*_1 = b_1(q^*_2)$。
- 子賽局完美的賽局均衡 $(q^*_1\, q^*_2.)$

115

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- 公司 i 產量 q_i 的單位成本是 $C_i(q_i)=cq_i$,，i =1,2 (成本不變)
  $P_d(Q) = \alpha - Q$ if $Q \le \alpha$ (線性逆需求)
  $= 0$ if $Q > \alpha$
  $c > 0$, $c < \alpha$.

116

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- 公司2的利潤是:
  $u_2(q_1, q_2) = q_2(\alpha - (q_1 + q_2)) - cq_2$
  $= q_2\alpha - cq_2 - q_1 q_2 - q_2^{\,2}$
  $du_2(q_1, q_2)/dq_2 = 0$
- 對於每個輸出 q_1， 公司 2 最好的回應:
- $q^*_2 = b_2(q_1) = (\alpha - c - q_1)/2$ If $q_1 \le \alpha$-c
- $=0$ If $q_1 > \alpha$-c

117

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- $u_1(q_1, q^*_2)$
  $= q_1(\alpha - (q_1 + (\alpha - c - q_1)/2 - c)$
  $= q_1 - q^2_1 - q_1(\alpha - c - q_1)/2 - cq_1$
- $du_1(q_1, q^*_2)/dq_1$
  $= \alpha - 2q_1 - \alpha/2 + c/2 + q_1 - c = 0$
- $\alpha/2 - c/2 - q_1 = 0$
- $q^*_1 = (\alpha - c)/2$ 。

118

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- 公司 1 的產量 $q^*_1 = (\alpha - c)/2$
- 公司 2 的產量
  $q^*_2 = b_2(q^*_1)$
  $= b_2((\alpha - c)/2)$
  $= (\alpha - c - (\alpha - c)/2)/2$
  $= (\alpha - c)/4$

119

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- $q^*_1 = (\alpha - c)/2$
- $q^*_2 = (\alpha - c)/4$
- α=100, c=40
- q^*_1 =30
- q^*_2 = 15

120

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- 公司 1 的產量 $q_1 = 20$
- 公司 2 的產量

$$q^*_2 = b_2(20) = b_2(20) = (\alpha\text{-}c\text{-}20)/2 = 20$$

121

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- 公司 1 的產量 $q_1 = 15$
- 公司 2 的產量

$$q^*_2 = b_2(15) = b_2(15) = (\alpha\text{-}c\text{-}15)/2 = 22.5$$

122

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- 公司1的利潤 $q^*_1\,(P_d(q^*_1+q^*_2\text{-}c)) = (\alpha - c)^2/8$
- 公司2的利潤 $q^*_2\,(P_d(q^*_1+q^*_2\text{-}c)) = (\alpha - c)^2/16$
- 在古諾的賽局中唯一的納許均衡，每家公司生產的 $(\alpha - c)/3$ 個單位的產出，並獲得利潤 $(\alpha - c)^2/9$.

123

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- α =100, c=40
- 公司 1 的產量是 $q^*_1 = 30$
- 公司 2 的產量是 $q^*_2 = b_2(q^*_1) = b((\alpha - c)/2) = 15$
- 公司 1 的利潤 450=30x(100-30-15)-40x30
- 公司 2 的利潤 225= 15x45-40x15

124

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- α =100, c=40
- 公司 1 的產量是$q_1 = 30$
- 公司 2 的產量是$q_2 = 20$
- 公司 1 的利潤 300 =30x(100-30-20)-40x30
- 公司 2 的利潤 150 = 15x50-40x15

125

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- α =100, c=40
- 公司 1 的產量是 $q_1 = 20$
- 公司 2 的產量是 $q_2 = 20$
- 公司 1 的利潤 400=30x(100-20-20)-40x30
- 公司 2 的利潤 400

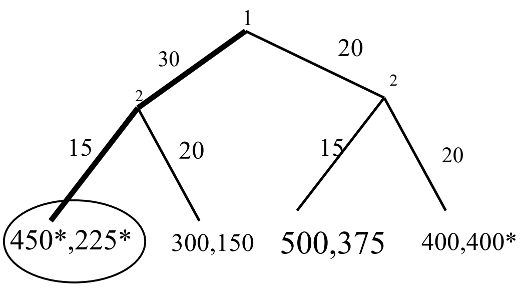
126

Stackelberg 的雙寡頭模型 成本不變和線性逆需求

- 公司 2 的產量是 q_2 = 15
- 公司 1 的利潤 500 = 20x(100-15-20)-40x20
- 公司 2 的利潤 15x55-15x40=15x25 =375

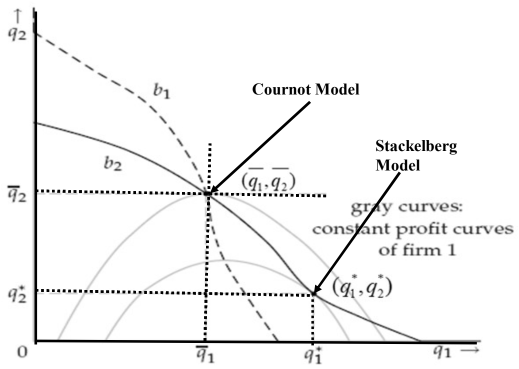
127

玩家 1 擁有領先力量



128

Stackelberg 子賽局完美均衡，古諾的賽局中納許均衡。



129

古諾模型 (Cournot's model)

Monopoly, Duopoly, n firms

130

Monopoly

- $P(Q) = a - bQ$ if $Q \le a$

  $= 0$ if $Q > a$

  $MC = c$
- $P(Q) = a - bQ=0$
- $Q = b/a$

131

Monopoly

- $R(Q) = Q(a-bQ) - cQ$
- Net Profit $U(q) =R(Q)-c(Q)$
- $U(q)/dQ =R(Q)/dQ - c(Q)/dQ=0$
- $MR = dR/dQ = a-2bQ = c$
- $Q = (a-c)/2b$
- $P(Q) = a - b(a-c)/2b= (a+c)/2$

132

Monopoly

- MR = MC
- a-2bQ = c
- Q = (a-c)/2b (monopoly)
- P(Q) = a - b (a-c)/2b = (a-c)/2
- a = 30, b=1, c=12
- Q = (a-c)/2b = 9 (monopoly)
- P(Q) = 30-Q = 21
- (9,21) is the point A.

133

Monopoly

- P(Q) = a – bQ if Q ≤ a
- = 0 if Q > a
- a = 30, b=1, c=12, MC=12
- P(Q)=30-Q, P(30)=0, P(0)=30
- The inverse demand curve P(Q) is line PD
- MR = dR/dQ = a-2bQ =30-2Q
- The MR curve is line (0,30) to (15,0)
- Q = (a-c)/2b = 9 (monopoly)
- P(Q) = 30 - Q = 21 (9,21) is the point A

134

Cournot Duopoly

- $u_1(\ q_1, q_2) = q_1\text{P(Q)} - q_1 c$
  $= q_1\big(\text{a} - \text{b}(q_1 + q_2)\big) - q_1 c$
  $= aq_1 - bq_1^2 - bq_1 q_2 - q_1 c$
- $u_2(\ q_1, q_2) = q_2\text{P(Q)} - q_2 c$
  $= q_2\big(\text{a} - \text{b}(q_1 + q_2)\big) - q_2 c$
  $= aq_2 - bq_2^2 - bq_1 q_2 - q_2 c$

135

Cournot Duopoly

- $\frac{u_1(\ q_1, q_2)}{dq_1} = (\text{a} - 2\text{b}q_1 - bq_2) - c = 0$
- $\frac{u_2(\ q_1, q_2)}{dq_2} = (\text{a} - 2\text{b}q_2 - bq_1) - c = 0$
- $q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\frac{a-c}{b})$
- Market output Q = $q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(\frac{a-c}{b})$
- P(Q)=a –b $\frac{2}{3}(\frac{a-c}{b}) = \frac{2}{3}$ a $+ \frac{c}{3}$

136

Cournot Duopoly

- a = 30, b=1, c=12
- Market output Q = $q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(\frac{a-c}{b})$=12
- P(Q)=a –b $\frac{2}{3}(\frac{a-c}{b}) = \frac{1}{3}$ a $+ \frac{2c}{3}$ =18
- (12,18) is the point E

137

n firms

- $u_1(\ q_1, \ldots, q_n) = q_1\text{P(Q)} - q_1 c$
  $= q_1\,(\text{a} - \text{b}\sum_{i=1}^{n} q_i) - q_1 c$
- $u_2(\ q_1, \ldots, q_n) = q_2\text{P(Q)} - q_2 c$
  $= q_2(\text{a} - \text{b}\sum_{i=1}^{n} q_i) - q_2 c$

138

n firms

- $\frac{u_1(\ q_1\ ,\ldots,q_n)}{dq_1}$ = (a − bq_1 − $b\sum_{i=1}^{n} q_i) - \ c\ \ =0$
- It is a symmetric $q_1^*\ = q_2^*$ =…=q_n^*
- (a − bq_1^* − $bnq_1^*) - \ c\ \ =0$

139

n firms

- $q_1^*\ = \frac{a-c}{(n+1)b}$
- Q =$\sum_{i=1}^{n} q_1^*\ = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}$

140

1 Firms (Monopoly)

- a = 30, b=1, c=12, n=1
- MR = dR/dQ = a-2bQ=30-2Q
- $q_1^*\ = \frac{a-c}{(n+1)b} =\ 9$
- Q =$\sum_{i=1}^{n} q_1^*\ = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}$ =9
- P(15) = a – bQ = 21
- (9,21) is the A point.

141

2 Firms (Duopoly)

- a = 30, b=1, c=12, n=2
- $q_1^*\ = \frac{a-c}{(n+1)b} =\ 6$
- Q =$\sum_{i=1}^{n} q_1^*\ = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}$ =12
- P(15) = a – bQ = 18
- (9,21) is the A point.

142

5 Firms

- a = 30, b=1, c=12, n=5
- $q_1^*\ = \frac{a-c}{(n+1)b} =\ 3$
- Q =$\sum_{i=1}^{n} q_1^*\ = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}$ =15
- P(15) = a – bQ = 15
- (15,15) is the G point.

143

Perfect Competition $n \to \infty$

- Perfect Competition $n \to \infty$ Q $=\frac{n(a-c)}{(n+1)b} \to \frac{(a-c)}{b}$
- P(Q) $\to a - b\frac{n(a-c)}{(n+1)b} \to$ c

144

Perfect Competition $n \to \infty$

- a=30, b=1, c=12
- Perfect Competition $n \to \infty$
- $Q \to \frac{(a-c)}{b} = 18$
- $P(Q) \to a - b\frac{n(a-c)}{(n+1)b} \to c = 12$
- (18,12) is the point B.

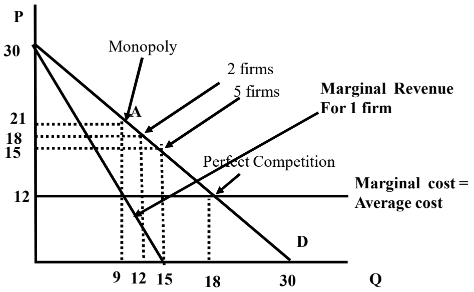
145

Market Output

	Market Output Q	Market Price P(Q)
Monopoly	*(a-c)/2b=9*	*(a+c)/2 =21*
Cournot Duopoly	$\frac{2}{3}(\frac{a-c}{b})$	$\frac{1}{3}a + \frac{2c}{3}$
Perfect Competition	$\frac{(a-c)}{b}$	c

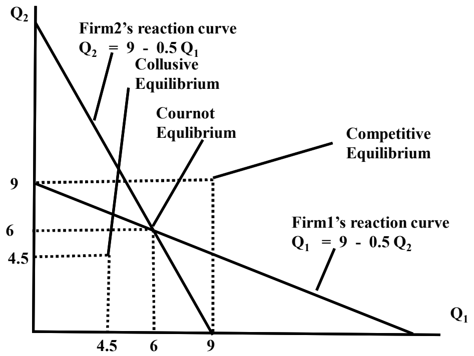
146

n 家公司的市場價格



147

Collusive Equilibrium vs Cournot Equilibrium



148

Cournot's model for Duopoly
with a quadratic unit costs

- $C_i(q_i) = q_i^2$, i=1,2(a quadratic unit costs)
- $P_d(Q) = \alpha - Q$ if $Q \le \alpha$

  $= 0$ if $Q > \alpha$

149

Cournot's model for Duopoly
with a quadratic unit costs

$u_1(q_1, q_2) = q_1(\alpha - (q_1 + q_2)) - q_1^2$
$= q_1\alpha - q_1^2 - q_1 q_2 - q_1^2$

- $du_1(q_1, q_2)/dq_1 = 0$
- $\alpha - 2q_1 - q_2 - 2q_1 = 0$
- $q_1 = ¼(\alpha - q_2)$

150

Cournot's model for Duopoly with a quadratic unit costs

$u_2(q_1, q_2) = q_2(\alpha - (q_1 + q_2)) - q_2^{\,2}$

$= q_2\alpha - q_2^{\,2} - q_1 q_2 - q_2^{\,2}$

- $du_2(q_1, q_2)/dq_2 = 0$
- $\alpha - 2q_2 - q_1 - 2q_2 = 0$
- $q_2 = ¼(\alpha - q_1)$

151

Cournot's model for Duopoly with a quadratic unit costs

- $q_1 = ¼(\alpha - q_2)$
- $q_2 = ¼(\alpha - q_1)$
- $q_1 = ¼(\alpha - ¼(\alpha - q_1)) = (¼)\alpha - (1/16)\alpha + (1/16) q_1$
- $(15/16)q_1 = (3/16)\alpha$
- $q^*_1 = \alpha/5$
- $q^*_2 = \alpha/5$

152

Stackelberg 的雙寡頭模型 with a quadratic unit costs

- $C_i(q_i) = q_i^{\,2}$, i=1,2(a quadratic unit costs)

- $P_d(Q) = \alpha - Q$ if $Q \le \alpha$
  $= 0$ if $Q > \alpha$

153

Stackelberg 的雙寡頭模型 with a quadratic unit costs

154

Stackelberg 的雙寡頭模型 with a quadratic unit costs

$u_2(q_1, q_2) = q_2(\alpha - (q_1 + q_2)) - q_2^{2}$

$= q_2\alpha - q_2^{\,2} - q_1 q_2 - q_2^{2}$

- $du_2(q_1, q_2)/dq_2 = 0$
- $\alpha - 2q_2 - q_1 - 2q_2 = 0$
- $q^*_2 = ¼(\alpha - q_1)$

155

Stackelberg 的雙寡頭模型 with a quadratic unit costs

- $b_2(q_1) = 1/4(\alpha - q_1)$ if $q_1 \le \alpha$
  $= 0$ if $q_1 > \alpha$.
- 公司1的子賽局完美均衡的策略是q_1以最大化利潤
- $u_1(q_1, q^*_2) = q_1(\alpha - q_1 - b_2(q_1)) - q_1^{2}$,
- $= q_1(\alpha - q_1 - 1/4(\alpha - q_1)) - q_1^{2}$
- $= 1/4 q_1(3\alpha - 7q_1)$.
- $du_1(q_1, q_2)/dq_1 = (3/4)\alpha - (7/2)q_1 = 0$
- $q^*_1 = 3\alpha/14$.

156

Stackelberg 的雙寡頭模型 with a quadratic unit costs

- 子賽局完美均衡:
- 公司 1 生產 $q^*_1 = 3\alpha/14$
- 公司 2 生產 $q^*_2 = b_2(3\alpha/14) = ¼(\alpha - 3\alpha/14) = 11\alpha/56$ units.

157

Stackelberg 的雙寡頭模型 with a quadratic unit costs

- 在古諾的賽局中唯一的納許均衡，每家公司生產 $\alpha/5$。
- 公司1 生產更多 $(3\alpha/14)$，公司2產生較少$(11\alpha/56)$。

158

References

- Game Theory and Oligopoly: Crash Course Economics #26
- https://www.youtube.com/watch?v=PCcVODWm-oY

159

References

- How to Solve a Cournot Oligopoly Problem
- https://www.youtube.com/watch?v=An_2r6Ae_28
- Oligopoly: Three-Firm Cournot Model
- https://www.youtube.com/watch?v=EjuhsUPNYJM
- Oligopoly: Bertrand Competition with Identical Goods
- https://www.youtube.com/watch?v=AKGllp9heEs

160

References

- Oligopoly: Bertrand Competition with Differentiated Goods
- https://www.youtube.com/watch?v=YrnqUPW96lY
- Game Theory Duopolies
- https://www.youtube.com/watch?v=xUDOl-whlyc
- How to Solve A Stackelberg Oligopoly Problem
- https://www.youtube.com/watch?v=LMCODkeeDtE

161

References

- Oligopoly Overview: Cournot, Bertrand, Quantity Leadership, Price Leadership
- https://www.youtube.com/watch?v=BqAvQWIilqk
- Cournot Oligopoly Problem
- https://www.youtube.com/watch?v=rQTf3oy0QUU
- Bertrand Oligopoly
- https://www.youtube.com/watch?v=alE7u-9FRsQ
- Price Leadership Duopoly
- https://www.youtube.com/watch?v=9mtNySa8qr4
- Quantity Leadership
- https://www.youtube.com/watch?v=57GmlmgKlZI
- How to Solve A Stackelberg Oligopoly Problem
- https://www.youtube.com/watch?v=LMCODkeeDtE
- cournot equilibrium
- www.youtube.com/watch?v=MMF5uwrqLdsrium

162

Further Reading

163

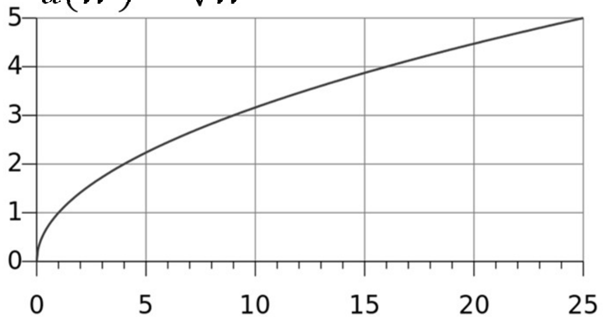
指數折現
Exponential discounting

- 假設您對 a = $100 和在一年後 b = $160感到沒差異(indifferent), 假設財富效用 $u(w) = w^{0.5}$
- 我們將貨幣金額轉換為效用
- a =100, $u(100) = 100^{0.5}$ =10
- b=160, $u(160) = 160^{0.5}$ =12.65
- $u^0(100) = u^1(160)$
- $10 = 12.65\delta$
- δ =10/12.65 =0.79
- 折現因子 δ=0.79 顯示您是相對耐心

164

Risk Averse (Concave Utility)

$u(W) = \sqrt{W}$



165

指數折現:感到漠不關心
Exponential discounting: Indifferent

- 假設您對 a = $100 和在一年後 b = $1000 感到沒差異(indifferent), 假設財富效用 $u(w) = w^{0.5}$
- a =100, $u(100) = 100^{0.5}$ =10
- b =1000, $u(1000) = 1000^{0.5}$ =31.62
- $u^0(100) = u^1(1000)$
- $10 = 31.62\delta$
- δ =10/31.62 =0.32
- 折現因子 δ = 0.32 顯示您是相對沒耐心

166

貼現因子
Discount Factor

- 貼現因子是討價還價博弈中的一個很重要的概念，
- Gibbons 將貼現因子定義為“貨幣的時間價值”，實際上就是貼現率δ = 1/(1+r)

167

貼現因子
Discount Factor

- 由公式 1/(1+r)定義的，可以看到，利率 (interest rate) r 越大，則貼現因子越小，則參與人的耐心程度越小；
- 反之，如果利率 r 越小，則貼現因子越大，參與人越有耐心。

168

貼現因子Discount factor δ

- 如果δ＝0，則玩家完全是近視的，它們完全不知道賽局是重複。
- δ 越高，未來收益附加的值就越高。
- 隨著δ的增加，玩家的前瞻性forward-looking 會逐漸提高。

169

賽局結束的概率 P vs玩家的前瞻性 δ

- 下一個賽局繼續進行的概率為p。
- 賽局結束的概率為（1-p）。
- 隨著δ的增加，玩家的前瞻性forward-looking 會逐漸提高。

170