Вариант 3

Задача 1.

Для булевой функции f, заданной в таблице 1:

а) найти сокращённую ДНФ;   б) найти ядро функции;

в) получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются минимальными;

г) на картах Карно указать ядро и покрытия, соответствующие минимальным ДНФ.

$x_1x_2x_3x_4$	f
0000	0
0001	0
0010	1
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	1
1001	1
1010	1
1011	0
1100	1
1101	1
1110	0
1111	0

Решение.

а) Для построения сокращённой ДНФ заполняем карту Карно функции f всеми возможными покрытиями, кроме тех, которые полностью содержатся в более крупном покрытии.

Карта Карно функции f:

x_1, x_2 \ x_3, x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	1
0 1		1	1	
1 1	1	1		
1 0	1	1		1

$K_1 = 1x0x = x_1\bar{x}_3$;

$K_2 = x010 = \bar{x}_2x_3\bar{x}_4$;

$K_3 = 001x = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

$K_4 = 0x11 = \bar{x}_1x_3x_4$;

$K_5 = 01x1 = \bar{x}_1x_2x_4$;

$K_6 = x101 = x_2\bar{x}_3x_4$;

$K_7 = 10x0 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$.

Получили 7 импликант: одна импликанта покрывает 4 клетки и 6 импликант покрывают по 2 клетки. Максимальным покрытием, которое покрывает 4 клетки, является импликанта K_1=1x0x.

Сокращённная ДНФ:

$K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$.

б) Т.к. на карте Карно элементарные конъюнкции $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4$ и $x_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ покрыты только одной импликантой K_1, то $K_1 = x_1\bar{x}_3$ – ядро.

в) Получение тупиковых и минимальных ДНФ.

Пять клеток, содержащих единицу, на карте Карно остаются непокрытыми ядром.

Для них составляем функцию Патрика и раскрываем скобки. В процессе преобразований используется тождество поглощения $K_i \vee K_i K_j = K_i$:

$(K_2 \vee K_7)(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6) =$

$=(K_2 \vee K_2K_3 \vee K_2K_7 \vee K_3K_7)(K_3K_4 \vee K_3K_5 \vee K_4 \vee K_4K_5)(K_5 \vee K_6) =$

$=(K_2 \vee K_3K_7)(K_4 \vee K_3K_5)(K_5 \vee K_6) =$

$=(K_2K_4 \vee K_2K_3K_5 \vee K_3K_4K_7 \vee K_3K_5K_7)(K_5 \vee K_6) =$

$=K_2K_4K_5 \vee K_2K_3K_5 \vee K_3K_4K_5K_7 \vee K_3K_5K_7 \vee K_2K_4K_6 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_3K_4K_6K_7 \vee K_3K_5K_6K_7 =$

$=K_2K_4K_5 \vee (K_2K_3K_5 \vee K_2K_3K_5K_6) \vee (K_3K_5K_7 \vee K_3K_4K_5K_7 \vee K_3K_5K_6K_7) \vee K_2K_4K_6 \vee K_3K_4K_6K_7 =$

$=K_2K_4K_5 \vee K_2K_3K_5 \vee K_3K_5K_7 \vee K_2K_4K_6 \vee K_3K_4K_6K_7$

Присоединяем ядро K_1 к каждому полученному члену и получаем 5 тупиковых ДНФ:

1) $K_1K_2K_4K_5$: $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$;

2) $K_1K_2K_3K_5$: $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4$;

3) $K_1K_3K_5K_7$: $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$;

4) $K_1K_2K_4K_6$: $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2\bar{x}_3 x_4$;

5) $K_1K_3K_4K_6K_7$: $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$.

Кратчайшими будут первые четыре ДНФ, т.к. они состоят из четырёх элементарных конъюнкций, а последняя – из пяти.

Все кратчайшие ДНФ состоят из одинакового числа литералов. Следовательно, все они являются минимальными.

г) Карта Карно для минимальной ДНФ $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4$

x_3, x_4 / x_1, x_2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	1
0 1		1	1	
1 1	1	1		
1 0	1	1		1

Карта Карно для минимальной ДНФ $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4$

x_3, x_4 / x_1, x_2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	1
0 1		1	1	
1 1	1	1		
1 0	1	1		1

Карта Карно для минимальной ДНФ $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$

x_3, x_4 / x_1, x_2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	1
0 1		1	1	
1 1	1	1		
1 0	1	1		1

Карта Карно для минимальной ДНФ $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$

x_3, x_4 / x_1, x_2	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0			1	1
0 1		1	1	
1 1	1	1		
1 0	1	1		1

Задача 2.

Даны функции f (таблица 2) и w (таблица 3).

а) Вычислить таблицу значений функции f.

б) Найти минимальные ДНФ функций f и w.

в) Выяснить полноту системы $\{f, w\}$. Если система не полна, дополнить систему функцией g до полной системы.

Указание. Запрещается дополнять систему константами, отрицанием и базовыми функциями двух переменных ($\oplus$, $\vee$, $\wedge$, $|$, $\downarrow$ и т.д.). Не допускается дополнение функцией, образующей с f или w полную подсистему, кроме случаев, когда иное невозможно.

г) Из функциональных элементов, реализующих функции полной системы $\{f, w\}$ или $\{f, w, g\}$, построить функциональные элементы, реализующие базовые функции ($\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, 0, 1).

3	$(((x_3 \Rightarrow (x_1 \sim x_2)) \oplus (\overline{x}_3 \Rightarrow \overline{x}_1)) \Rightarrow (\overline{x}_2 \mid \overline{x}_3)$

3	$(0,1,1,0,0,1,0,1)$

Решение.

а) Таблица значений функции $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_3 \Rightarrow (x_1 \sim x_2)) \oplus (\overline{x}_3 \Rightarrow \overline{x}_1)) \Rightarrow (\overline{x}_2 \mid \overline{x}_3)$:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$f_1 = (x_1 \sim x_2)$	$f_2 = (x_3 \Rightarrow f_1)$	$f_3 = (\overline{x}_3 \Rightarrow \overline{x}_1)$	$f_4 = f_2 \oplus f_3$	$f_5 = (\overline{x}_2 \mid \overline{x}_3)$	$f = (f_4 \Rightarrow f_5)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1

б) Карта Карно функции f:

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1	1	1	1

Минимальная ДНФ: $f = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$

Карта Карно для функции w = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1).

$x_1x_2x_3$	w
000	0
001	1
010	1
011	0
100	0
101	1
110	0
111	1

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0		1		
1	1		1	1

Минимальная ДНФ: $w = x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$.

в) Проверка на полноту системы $\{f, w\}$.

$x_1x_2x_3$	f	w
000	1	0
001	1	1
010	1	1
011	1	0
100	0	0
101	1	1
110	1	0
111	1	1

1. Сохранение 0.

$f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$;

$w(0,0,0) = 0 \Rightarrow w \in T_0$.

2. Сохранение 1.

$f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f \in T_1$;

$w(1,1,1) = 1 \Rightarrow w \in T_1$.

3. Самодвойственность.

$f(0,0,0) = f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f \notin S$;

$w(0,1,0) = w(1,0,1) = 1 \Rightarrow w \notin S$.

4. Монотонность.

Т.к. $(0,0,0) < (1,0,0)$, но $f(0,0,0) > f(1,0,0) \Rightarrow f \notin M$.

Т.к. $(0,0,1) < (0,1,1)$, но $w(0,0,1) > w(0,1,1) \Rightarrow w \notin M$.

5. Линейность функций.

Общий вид полинома Жегалкина для функции трёх переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0.$$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	1	$a_2 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_2 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$
0	1	1	1	$a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{23} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	0	$a_1 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$
1	0	1	1	$a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{13} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{12} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	1	$a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{23} \oplus a_{13} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{123} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_{123} = 1$

Полином Жегалкина функции f: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1$.

Так как полином функции f содержит конъюнкции, то $f \notin L$.

$$w(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

x_1	x_2	x_3	w	
0	0	0	0	$a_0 = 0$
0	0	1	1	$a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow 0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 1$
0	1	0	1	$a_2 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_2 \oplus 0 = 1 \Rightarrow a_2 = 1$
0	1	1	0	$a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_{23} \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	0	$a_1 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_1 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	1	$a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{13} \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \Rightarrow a_{13} = 0$
1	1	0	0	$a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_{12} \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	1	$a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{23} \oplus a_{13} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{123} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \Rightarrow a_{123} = 0$

$$w(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_3$$

Функция w не является линейной, т.е. $w \notin L$.

Критериальная таблица

	T_0	T_1	S	M	L
f	–	+	–	–	–
w	+	+	–	–	–

г) Система $\{f, w\}$ не является функционально полным классом, т.к. обе функции сохраняют константу 1. Дополним систему функцией, которая не сохраняет 1, например, функцией $g(x_1, x_2, x_3) = (1,1,0,1,0,1,0,0)$. Функция g не сохраняет 0, не сохраняет 1, не является монотонной, но является самодвойственной.

$$g(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

x_1	x_2	x_3	g	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	0	$a_2 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_2 \oplus 1 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$
0	1	1	1	$a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{23} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_{23} = 1$
1	0	0	0	$a_1 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$
1	0	1	1	$a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_{13} \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \Rightarrow a_{13} = 1$
1	1	0	0	$a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_{12} \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	0	$a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{23} \oplus a_{13} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{123} \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \Rightarrow a_{123} = 0$

$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1.$

Функция g не является линейной, т.е. $g \notin L$.

Критериальная таблица:

	T_0	T_1	S	M	L
f	–	+	–	–	–
w	+	+	–	–	–
g	–	–	+	–	–

г) Система $\{f, w, g\}$ является функционально полным классом.

$x_1x_2x_3$	f	w	g
000	1	0	1
001	1	1	1
010	1	1	0
011	1	0	1
100	0	0	0
101	1	1	1
110	1	0	0
111	1	1	0

1.Отрицание.

$g \notin T_0$ и $g \notin T_1 \Rightarrow$ отрицание строим из функции g, т.к. g (0, 0, 0) =1 и g (1, 1, 1) = 0.

$g(x,x,x)=\overline{x}$.

2. Константа 1.

$f \notin T_0$ и $f \in T_1 \Rightarrow$ константу 1 строим из функции f.

f (0,0,0) = f (1,1,1) =1. Следовательно, $f(x,x,x) \equiv 1$.

3. Константа 0.

Для построения константы 0 возьмём отрицание от функции $f(x,x,x)$.

$\overline{f(x,x,x)} = g(f(x,x,x), f(x,x,x), f(x,x,x)) \equiv 0$.

Проверка:

$g(f(0,0,0), f(0,0,0), f(0,0,0)) = g(1,1,1) = 0;$
$g(f(1,1,1), f(1,1,1), f(1,1,1)) = g(1,1,1) = 0.$

4. Для построения дизъюнкции из функции $f=\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$ зафиксируем переменную x_1 = 1, и обозначим $x_2 \rightarrow x$, $x_3 \rightarrow y$.

Тогда $f(1,x,y) = \overline{1} \vee x \vee y = 0 \vee x \vee y = x \vee y$.

Выражение для дизъюнкции: $d(x,y) = f(1,x,y) = f(f(x,x,x),x,y) = x \vee y$

Проверка:

$d(0,0) = f(f(0,0,0),0,0) = f(1,0,0) = 0;$
$d(0,1) = f(f(0,0,0),0,1) = f(1,0,1) = 1;$
$d(1,0) = f(f(1,1,1),1,0) = f(1,1,0) = 1;$
$d(1,1) = f(f(1,1,1),1,1) = f(1,1,1) = 1.$

5. Для построения конъюнкции из функции $w = x_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$ зафиксируем переменную x_3 = 0, и обозначим $\overline{x}_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$.

Тогда $w(x_1,x_2,0) = x_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 = x_1 \cdot 0 \vee \overline{x}_2 \cdot 0 \vee \overline{x}_1x_2 \cdot 1 = \overline{x}_1x_2 = xy$.

Выражение для конъюнкции:

$k(x,y) = w(\overline{x},y,0) = w(g(x,x,x), y, g(f(x,x,x), f(x,x,x), f(x,x,x))) = xy$.

Проверка:

$k(0,0)=w(g(0,0,0),0,g(f(0,0,0),f(0,0,0),f(0,0,0)))=w(1,0,g(1,1,1))=w(1,0,0)=0;$

$k(0,1)=w(g(0,0,0),1,g(f(0,0,0),f(0,0,0),f(0,0,0)))=w(1,1,g(1,1,1))=w(1,1,0)=0;$

$k(1,0)=w(g(1,1,1),0,g(f(1,1,1),f(1,1,1),f(1,1,1)))=w(0,0,g(1,1,1))=w(0,0,0)=0;$

$k(1,1)=w(g(1,1,1),1,g(f(1,1,1),f(1,1,1),f(1,1,1)))=w(0,1,g(1,1,1))=w(0,1,0)=1.$