

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$$

Решение.

1) Доказательство формулы слева направо: $A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$.

1.	$A \vee (B \& C)$	гипотеза
2.	$\neg A \rightarrow (B \& C)$	определение дизъюнкции для гипотезы
3.	$(B \& C) \rightarrow B$	свойство конъюнкции K2
4.	$(B \& C) \rightarrow C$	свойство конъюнкции K2
5.	$\neg A \rightarrow B$	секвенция 1 для 2 и 3.
6.	$A \vee B$	определение дизъюнкции для 5
7.	$\neg A \rightarrow C$	секвенция 1 для 2 и 4.
8.	$A \vee C$	определение дизъюнкции для 7
9.	$(A \vee B) \& (A \vee C)$	свойство конъюнкции K1 для 6 и 8

Таким образом, доказано что $A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$.

2) Доказательство формулы справа налево: $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee (B \& C)$.

1.	$(A \vee B) \& (A \vee C)$	гипотеза
2.	$A \vee B$	свойство конъюнкции K2 из 1
3.	$\neg A \rightarrow B$	определение дизъюнкции для 2
4.	$A \vee C$	свойство конъюнкции K2 из 1
5.	$\neg A \rightarrow C$	определение дизъюнкции для 4
6.	$B \rightarrow (C \rightarrow (B \& C))$	свойство конъюнкции K1 для $X = B, Y = C$
7.	$\neg A \rightarrow (C \rightarrow (B \& C))$	секвенция 1 для 3 и 6 при $X = \neg A; Y = B; Z = C \rightarrow (B \& C)$
8.	$(\neg A \rightarrow (C \rightarrow (B \& C))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \& C)))$	аксиома 2 при $X = \neg A, Y = C, Z = (B \& C)$
9.	$(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \& C))$	Modus ponens для 8 и 7
10.	$\neg A \rightarrow (B \& C)$	Modus ponens для 9 и 5
11.	$A \vee (B \& C)$	определение дизъюнкции для 10

Таким образом, доказано что $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee (B \& C)$.

Т.к. формула доказана в обе стороны, то $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$.

При доказательстве использованы:

Определение дизъюнкции: $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \rightarrow \psi$

Свойства конъюнкции:

K1. $X, Y \vdash X \& Y$ или $\vdash X \rightarrow (Y \rightarrow (X \& Y))$

K2. $X \& Y \vdash X$ и $X \& Y \vdash Y$ или $\vdash (X \& Y) \rightarrow X$ и $\vdash (X \& Y) \rightarrow Y$.

Аксиома 2: $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$

Секвенция 1: $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \vdash X \rightarrow Z$

Правило вывода Modus ponens: $X \rightarrow Y, X \vdash Y$