Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»
ДИСЦИПЛИНА «Вычислительные алгоритмы»

Лабораторная работа № 6

Тема Построение и программная реализация алгоритмов численного дифферецирования

Студент Блохин Д.М.

Группа ИУ7-42Б

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2020 г.

1 Цель работы

Получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций.

2 Задание

Задана табличная (сеточная) функция. Имеется информация, что закономерность, представленная этой таблицей, может быть описана формулой:

$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$

Параметры функции неизвестны и определять их не нужно.

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571					
2	0.889					
3	1.091					
4	1.231					
5	1.333					
6	1.412					

Вычислить первые разностные производные от функции и занести их в столбцы (1)-(4) таблицы: 1 - Односторонняя разностная производная 2 - Центральная разностная производная 3- 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной 4 - Введены выравнивающие переменные В столбец 5 занести вторую разностную производную

3 Результаты

Заполненная таблица с краткими комментариями по поводу использованных формул и их точности

4 Теоретическая часть

4.1 Односторонняя разностная производная

Односторонняя разностная производная выводится из функции разложенной в ряд Тейлора, приняв за центр разложения точку,в которой нужно найти значение первой производной. Рассмотрим разложения некоторой функции в ряд Тейлора, приняв за центр точку xn:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y^{IV}_n + \ldots$$
$$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n - \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y^{IV}_n - \ldots$$

Отсюда и выводятся:

Правая разностная производная:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h)$$

Левая разностная производная:

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)$$

Очевидно, что для краевого узла x0 применяется правосторонняя разностная производная, а для краевого узла xN применяться левостороняя разностная производная. Точность: O(h)

4.2 Центральная разностная производная

Центральная разностная производная опять же выводится из разложения функции в ряд Тейлора. Необходимо избавиться от второй производной в разложениях посредством вычитания одного разложения из другого. Таким образом Центральная разностная производная имеет следующий вид:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2)$$

Точность: O(h^2)

4.3 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной

Общий вид 2-ой формулы Рунге:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

Известно, что с помощью второй формулы Рунге и расчёта на двух сетках с отличающимися шагами можно получить решение с более высокой точностью, чем заявленная теоретическая точность используемой формулы. Получим решение для односторонней разностной производной с более высокой точностью. Имеем:

p=1 m = 2

Таким образом получаем:

$$\Omega = 2\Phi(h) - \Phi(2h) + O(h^2)$$

Случай для правосторонней разностной производной

$$\Phi(h) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$
$$\Phi(2h) = \frac{y_{n+2} - y_n}{2h}$$
$$\Omega = 2\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{y_{n+2} - y_n}{2h} + O(h^2)$$
$$\Omega = \frac{-3y_n + 4y_{n+1} - y_{n+2}}{2h} + O(h^2)$$

Случай для левосторонней разностной производной

$$\Phi(h) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$
$$\Phi(2h) = \frac{y_n - y_{n-2}}{2h}$$
$$\Omega = 2\frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \frac{y_n - y_{n-2}}{2h} + O(h^2)$$
$$\Omega = \frac{3y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}}{2h} + O(h^2)$$

Точность: O(h^2)

4.4 Выравнивающие переменные

При удачном введении выравнивающих переменных исходная кривая может быть преобразована в прямую линию, производная от которой вычисляется точно по самым простым формулам. Из условий ЛР известно, что функция имеет вид:

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$$
$$\frac{1}{y} = \frac{a_1 + a_2 x}{a_0 x}$$
$$\frac{1}{y} = \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{x}$$
$$\eta = \frac{1}{y}$$
$$y'_x = \frac{\eta'_\varepsilon \varepsilon'_x}{\eta_y}$$
$$\varepsilon'_x = -\frac{1}{x^2}$$
$$\eta'_y = -\frac{1}{y^2}$$

η' ε - по сути своей может быть вычислена по вышеописанным методам (одностороннее / центральная разн. производная, 2-я ф-ла Рунге) Таким образом, например, для правосторонней разностной производной, имеем:

$$y'_x = \frac{y^2}{x^2} * \left(\frac{\frac{1}{y_{i+1}} - \frac{1}{y_i}}{\frac{1}{x_{i+1}} - \frac{1}{x_i}}\right)$$

Точность: O(h^2)

4.5 Вторая разностная производная

Вторая разностная производная опять же вычисляется с помощью разложения функции в ряд Тейлора:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + ...$$
$$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n - \frac{h^3}{3!}y'''_n + ...$$

Сложим y_{n+1} и y_{n-1}:

$$y_{n+1} + y_{n-1} = 2 * y_n + 2\frac{h^2}{2!}y''_n$$

Выразим y''_n

$$y''_n = \frac{y_{n-1} - 2 * y_n + y_{n+1}}{h^2}$$

В случае, когда нужно найти вторую производную для крайних узлов необходимо разложить в ряд Тейлора две примыкающие к этому узлу точки.

Для y_0

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + ...$$
$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!}y'_0 + \frac{(2h)^2}{2!}y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!}y'''_0 + ...$$
$$y_2 - 8y_1$$
$$y_2 - 8y_1 = -7y_0 - 6hy'_0 - 2h^2y''_0$$
$$2h^2 * y''_0 = -y_2 + 8y_1 - 7y_0 - 6hy'_0$$
$$y''_0 = \frac{-7y_0 + 8y_1 - y_2 - 6hy'_0}{2h^2}$$

Для y_N

$$y_{N-1} = y_N - \frac{h}{1!}y'_N + \frac{h^2}{2!}y''_N - \frac{h^3}{3!}y'''_N + ...$$
$$y_{N-2} = y_N - \frac{2h}{1!}y'_N + \frac{(2h)^2}{2!}y''_N - \frac{(2h)^3}{3!}y'''_N + ...$$
$$y_{N-2} - 8y_{N-1}$$
$$y_{N-2} - 8y_{N-1} = -7y_N + 6hy'_N - 2h^2y''_0$$
$$2h^2 * y''_N = -7y_N + 8y_{N-1} - y_{N-2} + 6hy'_N$$
$$y''_N = \frac{-7y_N + 8y_{N-1} - y_{N-2} + 6hy'_N}{2h^2}$$

5 Код программы

```cpp
double h = 1;
int n = 6;

std::vector<double> OneSideDiff = {(y[1] - y[0]) / h};
for (int i = 1; i < n; i++)
    OneSideDiff.push_back((y[i] - y[i - 1]) / h);

std::vector<double> CentralDiff = {(-3 * y[0] + 4 * y[1] - y[2]) / (2 * h)};
for (int i = 1; i < n - 1; i++)
    CentralDiff.push_back((y[i + 1] - y[i - 1]) / (2 * h));

CentralDiff.push_back((y[n - 3] - 4 * y[n - 2] + 3 * y[n - 1]) / (2 * h));
std::vector<double> RungeOneSide;
for (int i = 0; i < n / 2; i++)
    RungeOneSide.push_back((-3 * y[i] + 4 * y[i + 1] - y[i + 2]) / (2 * h));

for (int i = n / 2; i < n; i++)
    RungeOneSide.push_back((3 * y[i] - 4 * y[i - 1] + y[i - 2]) / (2 * h));

std::vector <double> Etta;
std::vector <double> Ksi;
for(int i = 0; i < n; i++) {
    Etta.push_back(1 / y[i]);
    Ksi.push_back(1 / x[i]);
    }

std::vector <double> AlignmentVars = {(y[0] * y[0]) / (x[0] * x[0]) * ((Etta[1] - Etta[0]) / (Ksi[1] - Ksi[0]))};
for(int i = 1; i < n; i++)
    AlignmentVars.push_back((y[i] * y[i]) / (x[i] * x[i]) * ((Etta[i] - Etta[i - 1]) / (Ksi[i] - Ksi[i - 1])));

std::vector <double> SecondDiff;
SecondDiff.push_back({(-7 * y[0] + 8 * y[1] - y[2] - 6 * AlignmentVars[0]) / (2 * h * h)});
for(int i = 1; i < n - 1; i++)
    SecondDiff.push_back((-2 * y[i] + y[i - 1] + y[i + 1]) / (h * h));

SecondDiff.push_back( (-7 * y[n - 1] + 8 * y[n - 2] - y[n - 3] + 6 * AlignmentVars[n - 1]) / (2 * h * h))
```

6 Пример работы

Посчитать

	X	Y	1	2	3	4	5
1	1	0.570	0.318	0.376	0.376	0.408	-0.213
2	2	0.889	0.318	0.260	0.233	0.247	-0.116
3	3	1.090	0.202	0.170	0.159	0.165	-0.062
4	4	1.230	0.140	0.121	0.109	0.118	-0.038
5	5	1.332	0.102	0.090	0.083	0.088	-0.023
6	6	1.412	0.079	0.067	0.067	0.069	-0.016

7 Контрольные вопросы

7.1 Получить формулу порядка точности O(h2) для первойразностнойпроизводной y0N в крайнемправом узле xN

Разложим в ряд Тейлора относительно точки xn:

$$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n$$
$$y_{n-2} = y_n - \frac{2h}{1!}y'_n + \frac{(2h)^2}{2!}y''_n$$
$$y_{n-2} - 4y_{n-1}$$
$$y_{n-2} - 4y_{n-1} = -3y_n + 2hy'_n + O(h^2)$$
$$2hy'_n = 3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2} + O(h^2)$$
$$y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} + O(h^2)$$

7.2 Получить формулу порядка точности O(h2) для второй разностной $y''0$ производной в крайнем левом узле x0

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \ldots$$
$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!}y'_0 + \frac{(2h)^2}{2!}y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!}y'''_0 + \ldots$$
$$y_2 - 8y_1$$
$$y_2 - 8y_1 = -7y_0 - 6hy'_0 - 2h^2y''_0 + O(h^2)$$
$$2h^2 * y''_0 = -y_2 + 8y_1 - 7y_0 - 6hy'_0 + O(h^2)$$
$$y''_0 = \frac{-7y_0 + 8y_1 - y_2 - 6hy'_0}{2h^2} + O(h^2)$$

7.3 Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения (9) из Лекции №7 для первой производной $y'0$ в левом крайнем узле

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$$

По формуле Рунге

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

p=1 и m=2 (так как первый порядок точности)
получим

$$\Omega = 2\Phi(h) - \Phi(2h) + O(h^2)$$
$$\Omega = 2\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2)$$
$$\Omega = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$$

7.4 Любым способом из Лекций №7, 8 получить формулу порядка точности O(h3) для первой разностной производной $y'0$ в крайнем левом узле x0

Будем использовать вторую формулу Рунге:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h)-\Phi(mh)}{m^p-1} + O(h^{p+1})$$

p = 2, т.к. исходная формула имеет второй порядок точности

m = 2, возьмём для удобства

Таким образом получаем:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h)-\Phi(2h)}{3} + O(h^3)$$
$$\Omega = \frac{4\Phi(h)-\Phi(2h)}{3} + O(h^3)$$

$$\Phi(h):$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + ...$$
$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!}y_0' + \frac{(2h)^2}{2!}y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!}y_0''' + ...$$
$$y_2 - 4y_1$$
$$y_2 - 4y_1 = -3y_0 - 2hy_0' + O(h^2)$$
$$2hy_0' = -3y_0 + 4y_1 - y_2 + O(h^2)$$
$$y_0' = \frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h} + O(h^2)$$

$$\Phi(2h):$$
$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!}y_0' + \frac{(2h)^2}{2!}y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!}y_0''' + ...$$
$$y_4 = y_0 + \frac{4h}{1!}y_0' + \frac{(4h)^2}{2!}y_0'' + \frac{(4h)^3}{3!}y_0''' + ...$$
$$y_4 - 4y_2$$
$$y_4 - 4y_2 = -3y_0 - 4hy_0' + O(h^2)$$
$$4hy_0' = -y_4 + 4y_2 - 3y_0 + O(h^2)$$
$$y_0' = \frac{-3y_0+4y_2-y_4}{4h} + O(h^2)$$

$$\Omega = \frac{4\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h} - \frac{-3y_0+4y_2-y_4}{4h}}{3} + O(h^3)$$
$$\Omega = \frac{\frac{-24y_0+32y_1-8y_2}{4h} - \frac{-3y_0+4y_2-y_4}{4h}}{3} + O(h^3)$$
$$\Omega = \frac{\frac{-21y_0+32y_1-12y_2+y_4}{4h}}{3} + O(h^3)$$
$$\Omega = \frac{-21y_0+32y_1-12y_2+y_4}{12h} + O(h^3)$$