



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»

КАФЕДРА «ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ» (ИУ7)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ 09.03.04 ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

## ОТЧЕТ по лабораторной работе № 2

**Название:** : Программно-алгоритмическая реализация метода Рунге-Кутты  
4-го порядка точности при решении системы ОДУ в задаче Коши

**Дисциплина:** Математическое моделирование

Студент

ИУ7-62Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Д.М.Блохин  
(И.О.Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В.М.Градов  
(И.О.Фамилия)

Москва, 2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Исходные данные</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Результаты работы</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>8</b>
4.1	Схема Рунге-Кутта четвёртого порядка точности . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Листинг программы</b>	<b>9</b>
5.1	Листинг схемы Рунге-Кутта четвёртого порядка точности . . . . .	9
5.2	Листинг функций, вычисляющих $R_p(t)$ . . . . .	9
5.3	Листинг функции интерполяции . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Результаты программы</b>	<b>11</b>
6.1	Графики зависимости от времени импульса $t$ : $I(t), U(t), R_p(t)$ , произведения $I(t) * R_p(t), T_0(t)$ при заданных выше параметрах. Указать шаг сетки. . . . .	11
6.1.1	$I(t)$ . . . . .	11
6.1.2	$U(t)$ . . . . .	11
6.1.3	$R_p(t)$ . . . . .	12
6.1.4	$I(t) * R_p(t)$ . . . . .	12
6.1.5	$T_0(t)$ . . . . .	13
6.2	График зависимости $I(t)$ при $R_k + R_p = 0$ . Обратите внимание на то, что в этом случае колебания тока будут незатухающими . . . . .	13
6.3	График зависимости $I(t)$ при $R_k + R_p = const = 200 \text{ Ом}$ в интервале значений $t$ 0-20 мкс. 13	
6.4	Результаты исследования влияния параметров контура $C_k, L_k, R_k$ на длительность импульса $t_{\text{имп.}}$ апериодической формы. Длительность импульса определяется по кривой зависимости тока от времени на высоте $0.35I_{\text{max}}$ . .	14
6.4.1	Изначальные замеры . . . . .	14
6.4.2	Исследование зависимости параметра $C_k$ на длительность импульса .	14
6.4.3	Исследование зависимости параметра $L_k$ на длительность импульса .	15
6.4.4	Исследование зависимости параметра $R_k$ на длительность импульса .	15
<b>7</b>	<b>Вопросы</b>	<b>17</b>
7.1	Какие способы тестирования программы, кроме указанного в п.2, можете предложить ещё? . . . . .	17
7.2	Получите систему разностных уравнений для решения сформулированной задачи неявным методом трапеций. Опишите алгоритм реализации полученных уравнений. . . . .	17
7.3	Из каких соображений проводится выбор численного метода того или иного порядка точности, учитывая, что чем выше порядок точности метода, тем он более сложен и требует, как правило, больших ресурсов вычислительной системы? . . . . .	18

- 7.4 Можно ли метод Рунге - Кутта применить для решения задачи, в которой часть условий задана на одной границе, а часть на другой? Например, напряжение по-прежнему задано при  $t=0$ , т.е.  $t = 0, U = U_0$ , а ток задан в другой момент времени, к примеру, в конце импульса, т.е. при  $t = T, I = I_T$ . Какой можете предложить алгоритм вычислений? . . . . . 18

# 1 Цель работы

Получение навыков разработки алгоритмов решения задачи Коши при реализации моделей, построенных на системе ОДУ, с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности

## 2 Исходные данные

Задана система электротехнических уравнений, описывающих разрядный контур, включающий постоянное активное сопротивление  $R_k$ , нелинейное сопротивление  $R_p(I)$ , зависящее от тока  $I$ , индуктивность  $L_k$  и ёмкость  $C_k$ .

$$\begin{cases} \frac{dI}{dT} = \frac{U - (R_k + R_p(I))I}{L_k} \\ \frac{dU}{dt} = -\frac{I}{C_k} \end{cases}$$

Начальные условия:

$$t = 0, I = I_0, U = U_0$$

Здесь  $I$ ,  $U$  - ток и напряжение на конденсаторе. Сопротивление  $R_p$  рассчитать по формуле:

$$R_p = \frac{l_p}{2\pi R^2 \int_0^1 \sigma(T(z))z dz}$$

Для функции  $T(z)$  применить выражение  $T_z = T_0 + (T_w - T_0)z^m$

Параметры  $T_0, m$  находятся интерполяцией из табл.1 при известном токе  $I$ .

Коэффициент электропроводности  $\sigma(T)$  зависит от  $T$  и рассчитывается интерполяцией из табл.2.

Таблица 1

I, A	$T_0$ , K	m
0.5	6730	0.50
1	6790	0.55
5	7150	1.7
10	7270	3
50	8010	11
200	9185	32
400	10010	40
800	11140	41
1200	12010	39

Таблица 2

T, K	$\sigma$ , 1/Ом см
4000	0.031
5000	0.27
6000	2.05
7000	6.06
8000	12.0
9000	19.9
10000	29.6
11000	41.1
12000	54.1
13000	67.7
14000	81.5

Параметры разрядного контура:

$$R=0.35 \text{ см}$$

$$l_{\text{э}} = 12 \text{ см}$$

$$L_k = 187 * 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$C_k = 268 * 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_k = 0.25 \text{ Ом}$$

$$U_{co} = 1400 \text{ В}$$

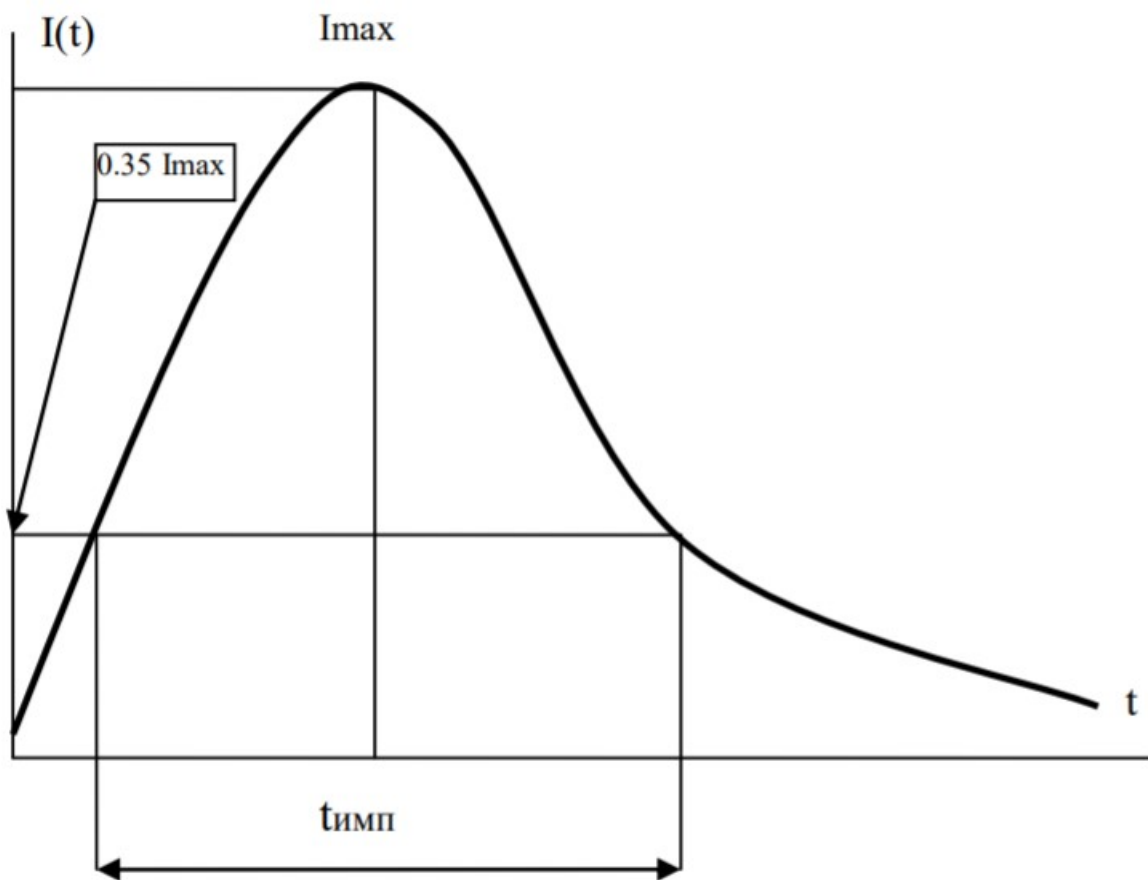
$$I_o = 0..3 \text{ А}$$

$$T_w = 2000 \text{ К}$$

Для справки: при указанных параметрах длительность импульса около 600 мкс, максимальный ток – около 800 А

### 3 Результаты работы

1. Графики зависимости от времени импульса  $t$ :  $I(t)$ ,  $U(t)$ ,  $R_p(t)$ , произведения  $I(t) * R_p(t)$ ,  $T_0(t)$  при заданных выше параметрах. Указать шаг сетки.
2. График зависимости  $I(t)$  при  $R_k + R_p = 0$ . Обратить внимание на то, что в этом случае колебания тока будут незатухающими.
3. График зависимости  $I(t)$  при  $R_k + R_p = \text{const} = 200 \text{ Ом}$  в интервале значений  $t$  0-20 мкс.
4. Результаты исследования влияния параметров контура  $C_k$ ,  $L_k$ ,  $R_k$  на длительность импульса  $t_{\text{имп}}$  апериодической формы. Длительность импульса определяется по кривой зависимости тока от времени на высоте  $0.35 I_{\text{max}}$ ,  $I_{\text{max}}$  - значение тока в максимуме (см. рисунок)



## 4 Теоретическая часть

Метод Рунге-Кутты является численным. Методы Рунге-Кутты бывают различных порядков точности. Наиболее употребительны схемы (методы) второго и четвертого порядков. Рассмотрим схему четвёртого порядка точности.

### 4.1 Схема Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

Формулы для подсчёта схемы Рунге-Кутты четвёртого порядка точности

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$k_1 = h_n \phi(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n \phi(x_n + h_n/2, y_n + k_1/2)$$

$$k_3 = h_n \phi(x_n + h_n/2, y_n + k_2/2)$$

$$k_4 = h_n \phi(x_n + h_n, y_n + k_3)$$

Схемы с большим числом членов практически не применяются. Пятичленные формулы обеспечивают четвертый порядок точности, шестичленные формулы имеют шестой порядок, но их вид весьма сложен.

Погрешность приведенной схемы Рунге-Кутты определяется максимальными значениями соответствующих производных. Оценку погрешностей легко получить для частного случая вида правой части дифференциального уравнения

$$\phi(x, \mu) \equiv \phi(x)$$



## 5 Листинг программы

### 5.1 Листинг схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности

```
1 std::vector<double> RungeKutta::fourth_approx(  
2     std::function<double(double,  
3         double,  
4         double,  
5         double)> dICalc,  
6     std::function<double(double, double)> dUCalc,  
7     double I, double U, double R_k, double L_k,  
8     double C_k, double t0, double h) {  
9  
10    double k1 = h * dICalc(I, U, R_k, L_k);  
11    double m1 = h * dUCalc(I, C_k);  
12  
13    double k2 = h * dICalc(I + k1 / 2, U + m1 / 2, R_k, L_k);  
14    double m2 = h * dUCalc(I + k1 / 2, C_k);  
15  
16    double k3 = h * dICalc(I + k2 / 2, U + m2 / 2, R_k, L_k);  
17    double m3 = h * dUCalc(I + k2 / 2, C_k);  
18  
19  
20    double k4 = h * dICalc(I + k3, U + m3, R_k, L_k);  
21    double m4 = h * dUCalc(I + k3, C_k);  
22  
23  
24    double newI = I + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;  
25    double newU = U + (m1 + 2 * m2 + 2 * m3 + m4) / 6;  
26  
27    return {newI, newU};  
28 }
```

### 5.2 Листинг функций, вычисляющих $R_p(t)$

```
1 double countRp(const double& I) {  
2     double T_0 = linearInterpolate(IT, I);  
3     double m = linearInterpolate(IM, I);  
4  
5     double integral = integrate(0, 1, [&](double z) {  
6         double T_z = T_0 + (T_w - T_0) * pow(z, m);  
7         double sigma = linearInterpolate(TSigma, T_z);  
8         sigma = std::exp(sigma);  
9         return sigma * z;  
10    });  
11  
12    double denominator = 2 * M_PI * R * R * integral;
```

```

13     double res = l_e / denominator;
14     return res;
15 }
16
17
18 double integrate(double start, double emd,
19                 const std::function<double(double)>
20                 &function) {
21     double h = 1e-2;
22     double result = 0;
23
24     while (start < emd) {
25         double left = function(start);
26         start += h;
27         double right = function(start);
28         result += left + right;
29     }
30
31     return result * h / 2;
32 }

```

### 5.3 Листинг функции интерполяции

```

1 double linearInterpolate(std::vector<std::vector<double>>& table,
2                           double parameter) {
3     size_t index = 0;
4     for (; index < table.size() - 1; index++) {
5         if ((parameter >= table[index][0] &&
6             parameter <= table[index + 1][0]) ||
7             (parameter < table[index][0])) { break; }
8     }
9     if (index == table.size() - 1) {index -= 1;}
10
11     return table[index][1] +
12            (table[index + 1][1] - table[index][1]) *
13            (parameter - table[index][0]) /
14            (table[index + 1][0] - table[index][0]);
15 }

```

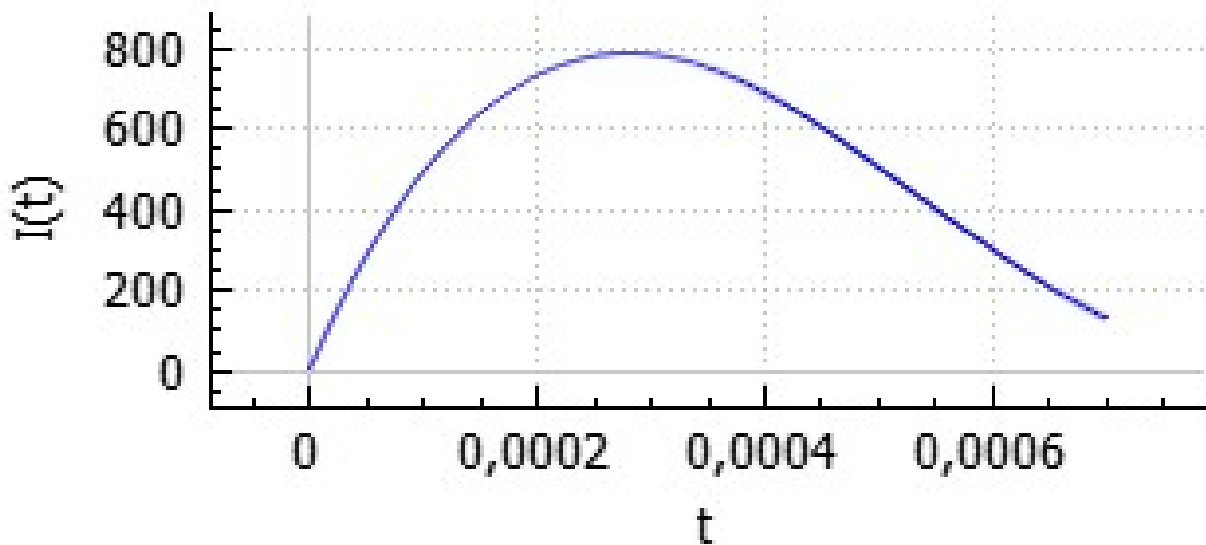
## 6 Результаты программы

6.1 Графики зависимости от времени импульса  $t$ :  $I(t)$ ,  $U(t)$ ,  $R_p(t)$ , произведения  $I(t) * R_p(t)$ ,  $T_0(t)$  при заданных выше параметрах. Указать шаг сетки.

Шаг сетки -  $0.5e - 6$

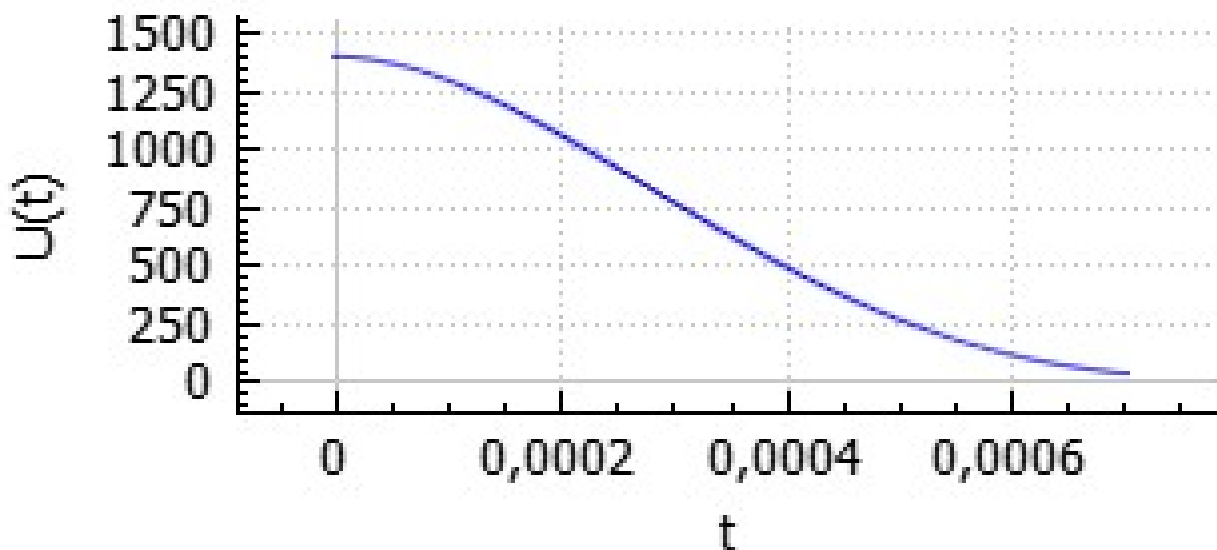
### 6.1.1 $I(t)$

Ниже представлен график зависимости  $I(t)$



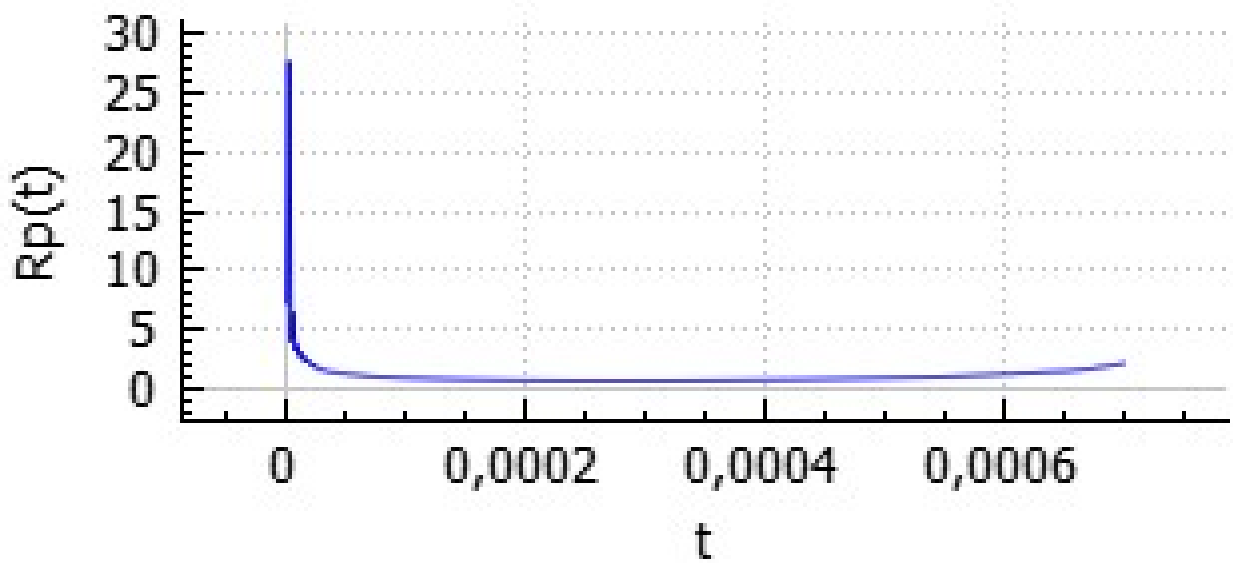
### 6.1.2 $U(t)$

Ниже представлен график зависимости  $U(t)$



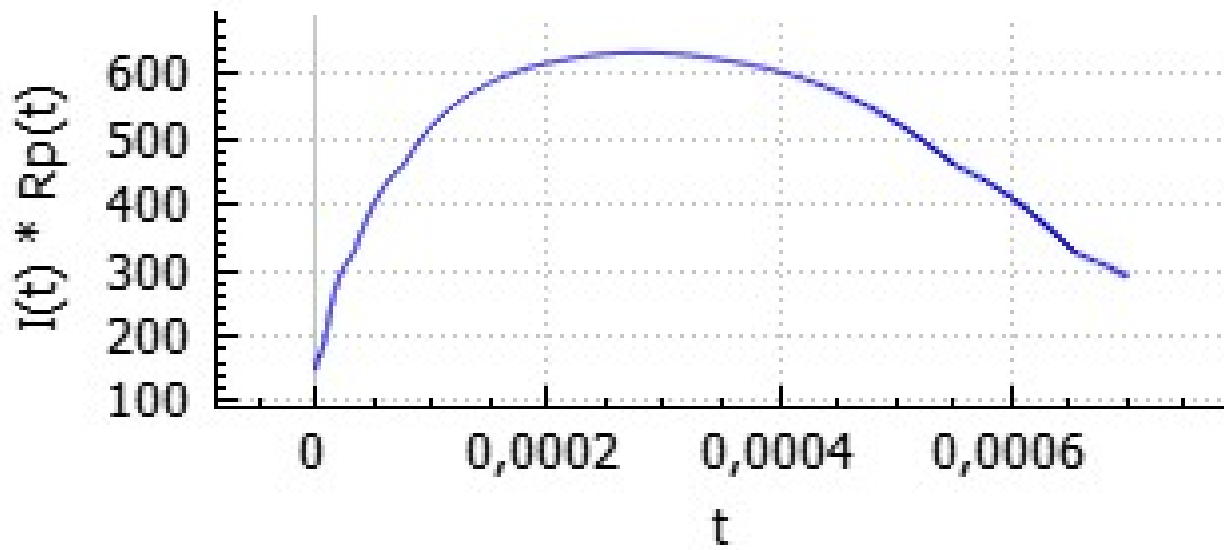
### 6.1.3 $R_p(t)$

Ниже представлен график зависимости  $R_p(t)$



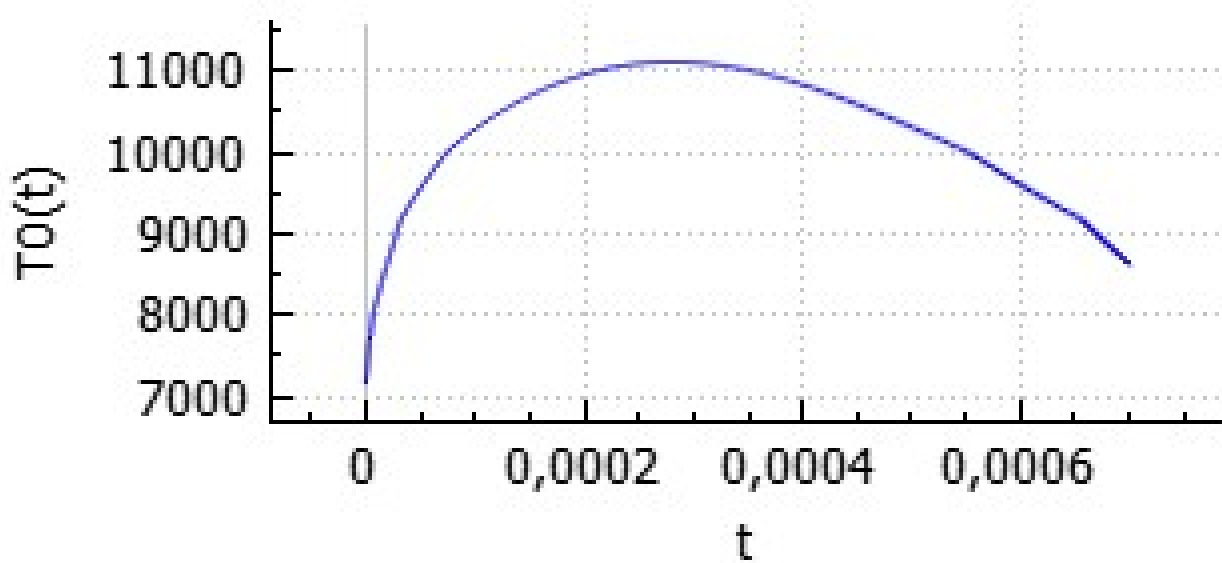
### 6.1.4 $I(t) * R_p(t)$

Ниже представлен график зависимости  $I(t) * R_p(t)$



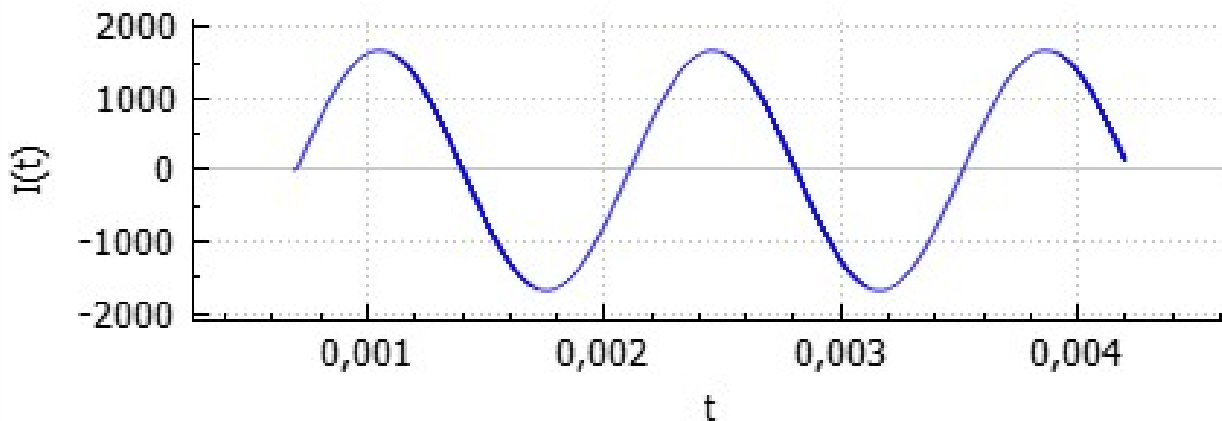
### 6.1.5 $T_0(t)$

Ниже представлен график зависимости  $T_0(t)$



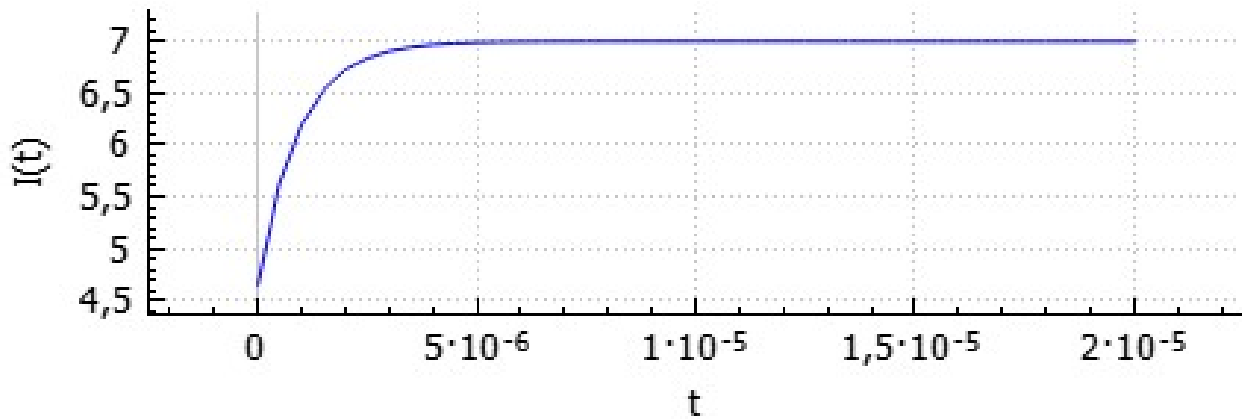
### 6.2 График зависимости $I(t)$ при $R_k + R_p = 0$ . Обратите внимание на то, что в этом случае колебания тока будут незатухающими

Ниже представлен график зависимости  $I(t)$  при  $R_k + R_p = 0$



### 6.3 График зависимости $I(t)$ при $R_k + R_p = \text{const} = 200\text{Ом}$ в интервале значений $t$ 0-20 мкс.

Ниже представлен график зависимости  $I(t)$  при  $R_k + R_p = \text{const} = 200\text{Ом}$  в интервале значений  $t$  0-20 мкс



**6.4 Результаты исследования влияния параметров контура  $C_k, L_k, R_k$  на длительность импульса  $t_{\text{имп.}}$  апериодической формы. Длительность импульса определяется по кривой зависимости тока от времени на высоте  $0.35I_{\text{max}}$**

#### 6.4.1 Изначальные замеры

Изначальные параметры разрядного контура:

$$\begin{aligned} C_k &= 268 * 10^{-6} \text{ Ф} \\ L_k &= 187 * 10^{-6} \text{ Гн} \\ R_k &= 0.25 \text{ Ом} \end{aligned}$$

При таких параметрах получим:

$$\begin{aligned} I_{\text{max}} &= 788.175 \text{ А} \\ 0.35 * I_{\text{max}} &= 275.86125 \text{ А} \\ t_{\text{imp\_start}} &= 0.0000475 \text{ с} \\ t_{\text{imp\_end}} &= 0.000613 \text{ с} \\ t_{\text{imp}} &= t_{\text{imp\_end}} - t_{\text{imp\_start}} = 0.0005655 \text{ с} \end{aligned}$$

#### 6.4.2 Исследование зависимости параметра $C_k$ на длительность импульса

Увеличим значение  $C_k$ . Пусть  $C_k = 300 * 10^{-6} \text{ Ф}$ :

При таких параметрах получим:

$$\begin{aligned} I_{\text{max}} &= 838.551 \text{ А} \\ 0.35 * I_{\text{max}} &= 293.49285 \text{ А} \\ t_{\text{imp\_start}} &= 0.000051 \text{ с} \\ t_{\text{imp\_end}} &= 0.000683 \text{ с} \\ t_{\text{imp}} &= t_{\text{imp\_end}} - t_{\text{imp\_start}} = 0.000632 \text{ с} \end{aligned}$$

Теперь Уменьшим значение  $C_k$ . Пусть  $C_k = 150 * 10^{-6} \text{ Ф}$ :

При таких параметрах получим:

$$\begin{aligned}
I_{max} &= 654.55 \text{ A} \\
0.35 * I_{max} &= 229.0925 \text{ A} \\
t_{imp\_start} &= 0.0000385 \text{ c} \\
t_{imp\_end} &= 0.000456 \text{ c} \\
t_{imp} &= t_{imp\_end} - t_{imp\_start} = 0.0004175 \text{ c}
\end{aligned}$$

Таким образом можно сделать вывод, что при увеличении  $C_k$  длительность импульса также увеличивается и наоборот - при уменьшении  $C_k$  длительность импульса уменьшается

#### 6.4.3 Исследование зависимости параметра $L_k$ на длительность импульса

Увеличим значение  $L_k$ . Пусть  $L_k = 230 * 10^{-6} \text{ Гн}$ :

При таких параметрах получим:

$$\begin{aligned}
I_{max} &= 738.55 \text{ A} \\
0.35 * I_{max} &= 258,4925 \text{ A} \\
t_{imp\_start} &= 0.000054 \text{ c} \\
t_{imp\_end} &= 0.0006785 \text{ c} \\
t_{imp} &= t_{imp\_end} - t_{imp\_start} = 0.0006245 \text{ c}
\end{aligned}$$

Теперь уменьшим значение  $L_k$ . Пусть  $L_k = 100 * 10^{-6} \text{ Гн}$ :

При таких параметрах получим:

$$\begin{aligned}
I_{max} &= 940.811 \text{ A} \\
0.35 * I_{max} &= 329,28385 \text{ A} \\
t_{imp\_start} &= 0.000031 \text{ c} \\
t_{imp\_end} &= 0.0004555 \text{ c} \\
t_{imp} &= t_{imp\_end} - t_{imp\_start} = 0,0004245 \text{ c}
\end{aligned}$$

Таким образом можно сделать вывод, что при увеличении  $L_k$  длительность импульса также увеличивается и наоборот - при уменьшении  $L_k$  длительность импульса уменьшается

#### 6.4.4 Исследование зависимости параметра $R_k$ на длительность импульса

Увеличим значение  $R_k$ . Пусть  $R_k = 2.25 \text{ Ом}$ :

При таких параметрах получим:

$$\begin{aligned}
I_{max} &= 596.373 \text{ A} \\
0.35 * I_{max} &= 208,73055 \text{ A} \\
t_{imp\_start} &= 0.000036 \text{ c} \\
t_{imp\_end} &= 0.000667 \text{ c} \\
t_{imp} &= t_{imp\_end} - t_{imp\_start} = 0,000631 \text{ c}
\end{aligned}$$

Теперь уменьшим значение  $R_k$ . Пусть  $R_k = 0.1 \text{ Ом}$ :

При таких параметрах получим:

$$\begin{aligned}
I_{max} &= 870.66 \text{ A} \\
0.35 * I_{max} &= 304,731 \text{ A} \\
t_{imp\_start} &= 0.000052 \text{ c} \\
t_{imp\_end} &= 0.0006075 \text{ c} \\
t_{imp} &= t_{imp\_end} - t_{imp\_start} = 0,0005555 \text{ c}
\end{aligned}$$

Таким образом можно сделать вывод, что при увеличении  $R_k$  длительность импульса также увеличивается и наоборот - при уменьшении  $R_k$  длительность импульса уменьшается



## 7 Вопросы

### 7.1 Какие способы тестирования программы, кроме указанного в п.2, можете предложить ещё?

Программа должна выдавать корректный результат при любых корректных входных параметрах. Проверить корректность результата можно, например, по виду графиков. Кроме указанного в п.2 способа проверки можно также ввести крайне большое значение сопротивления. также можно сравнить результаты двух методов разной точности. При малом значении шага результаты должны совпадать. Объясняется это тем, что при малом значении шага результат перестаёт меняться, а результаты решения двух систем уравнения, в свою очередь, должны совпадать. Вдобавок программу можно тестировать при разном значении шага. Если при очередном уменьшении шага результат не изменился - значит найден хороший шаг.

### 7.2 Получите систему разностных уравнений для решения сформулированной задачи неявным методом трапеций. Опишите алгоритм реализации полученных уравнений.

$$f(I, U) \equiv \frac{dI}{dt} = \frac{U - (R_k + R_p(I))I}{L_k}; g(I) \equiv \frac{dU}{dt} = -\frac{I}{C_k}$$

Запишем выражения для метода трапеций:

$$I_{n+1} = I_n + \Delta t \frac{f(I_n, U_n) + f(I_{n+1}, U_{n+1})}{2}$$
$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \frac{g(I_n) + g(I_{n+1})}{2}$$

В данные выражения подставим f и g:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \Delta t \frac{U_n - (R_k + R_p(I_n))I_n + U_{n+1} - (R_k + R_p(I_{n+1}))I_{n+1}}{2L_k} \\ U_{n+1} = U_n - \Delta t \frac{I_n + I_{n+1}}{2C_k} \end{cases}$$

Получили систему уравнений с двумя неизвестными:  $I_{n+1}$  и  $U_{n+1}$ . Подставим  $U_{n+1}$  из второго уравнения в первое и решим полученное уравнение относительно  $I_{n+1}$ :

$$I_{n+1} = \frac{-2C_k R_p(I_n) \Delta t + 4C_k L_k I_n - 2C_k I_n R_k \Delta t + 4C_k U_n \Delta t - I_n \Delta t^2}{4C_k L_k + 2C_k R_k \Delta t + 2C_k R_p(I_{n+1}) \Delta t + \Delta t^2}$$

Можно заметить, что в правой части уравнения присутствует  $R_p(I_{n+1})$  (выделено красным цветом). В данном случае уравнение решается методом простой итерации, то есть сначала в правую часть подставляется уже известное значение, затем значение высчитывается повторно, но уже с новым найденным значением. Процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность.

После нахождения  $I_{n+1}$  найти  $U_{n+1}$  не составляет труда:

$$U_{n+1} = U_n - \Delta t \frac{I_n + I_{n+1}}{2C_k}$$

### **7.3 Из каких соображений проводится выбор численного метода того или иного порядка точности, учитывая, что чем выше порядок точности метода, тем он более сложен и требует, как правило, больших ресурсов вычислительной системы?**

Выбор того или иного порядка точности определяется из следующих соображений: Если функция  $\phi(x, \mu)$  в правой части уравнения ограничена и непрерывна, а также ограничены и непрерывны ее четвертые производные, то оптимальный результат достигается при применении метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Если же функция  $\phi(x, \mu)$  не имеет четвертых производных, то то и четвертый порядок точности системы не сможет быть достигнут, следовательно, тратить ресурсы вычислительно системы нет смысла, целесообразным будет использование, например, метода Рунге-Кутты второго порядка точности.

### **7.4 Можно ли метод Рунге - Кутта применить для решения задачи, в которой часть условий задана на одной границе, а часть на другой? Например, напряжение по-прежнему задано при $t=0$ , т.е. $t = 0, U = U_0$ , а ток задан в другой момент времени, к примеру, в конце импульса, т.е. при $t = T, I = I_T$ . Какой можете предложить алгоритм вычислений?**

В данном случае чистый метод Рунге-Кутта неприменим, т.к. для вычисления каждого из последующих значений необходимо знать значения обоих параметров (силы тока и напряжения) в предыдущий момент времени (вычисление коэффициентов  $k_{1..4}$  для силы тока и  $m_{1..4}$  для напряжения). В данном случае в качестве алгоритма вычисления можно взять некий алгоритм, способный решать краевые задачи и уже внутри него можно использовать, например, тот же метод Рунге-Кутта.