

## Работа №6

### Обработка деревьев, хеш-функций

**Цель работы — получить навыки применения двоичных деревьев, реализовать основные операции над деревьями: обход деревьев, включение, исключение и поиск узлов; построить и обработать хеш-таблицы, сравнить эффективность поиска в сбалансированных деревьях, в двоичных деревьях поиска и в хеш-таблицах.**

#### Краткие теоретические сведения

Дерево — это нелинейная структура данных, используемая для представления иерархических связей, имеющих отношение «один ко многим».

Дерево с базовым типом  $T$  определяется рекурсивно либо как пустая структура (пустое дерево), либо как узел типа  $T$  с конечным числом древовидных структур этого же типа, называемых поддеревьями.

Деревья используются при построении организационных диаграмм, анализе электрических цепей, для представления синтаксических структур в компиляторах программ, для представления структур математических формул, организации информации в СУБД и, кроме того, для более эффективного извлечения данных.

Самый верхний узел дерева называется корнем. Верхний узел для нижнего узла называется предком, а нижний узел для верхнего — потомком. Вершины (узлы), не имеющие потомков, называются терминальными вершинами или листьями. Нетерминальные вершины называются внутренними. Две вершины дерева соединяются ветвью. Дерево без ветвей с одной вершиной — это пустое или нулевое дерево.

Корень дерева лежит на нулевом уровне. Максимальный уровень какой-либо вершины дерева называется ее глубиной (от корня до узла) или высотой (от узла до максимально удаленного листа). Отсюда максимальный уровень корня равен нулю. Максимальный уровень всех вершин называется глубиной дерева.

Число непосредственных потомков у вершины (узла) дерева называется степенью вершины (узла).

Максимальная степень всех вершин является степенью дерева. Число ветвей от корня к вершине есть длина пути к этой вершине.

Каждому узлу дерева можно сопоставить имя узла и значение узла, то есть собственно данные, хранящиеся в этом узле. Причем, если значением являются разнородные данные (записи или объединения), то значением узла можно считать значение одного из полей этих данных, называемого ключом.

Например, есть дерево (рис 1), где номер узла может быть как его именем, так и его значением (в данном случае все равно)

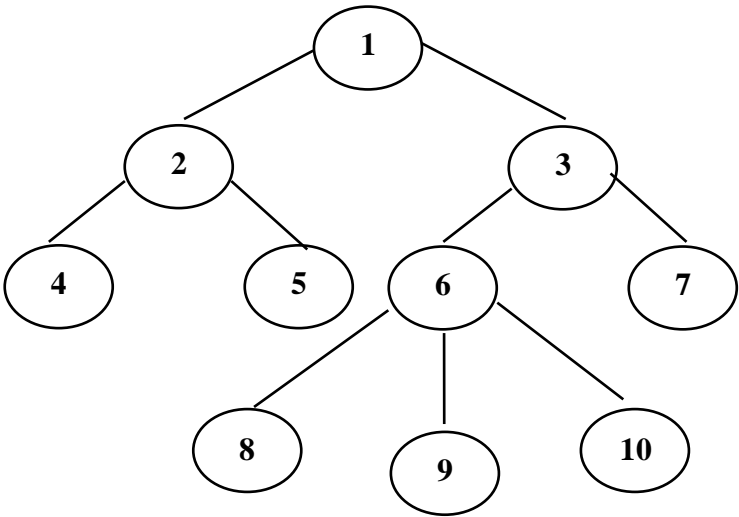


Рис.1

В памяти дерева можно представить в виде связей с предками (еще их называют родителями); связного списка потомков (сыновей) или структуры данных.

Представление указанного дерева (см. рис 1) в виде связей с предками:

№ вершина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Родитель	0	1	1	2	2	3	3	6	6	6

Пример представления этого же дерева в виде связного списка сыновей приведен на рис 2:

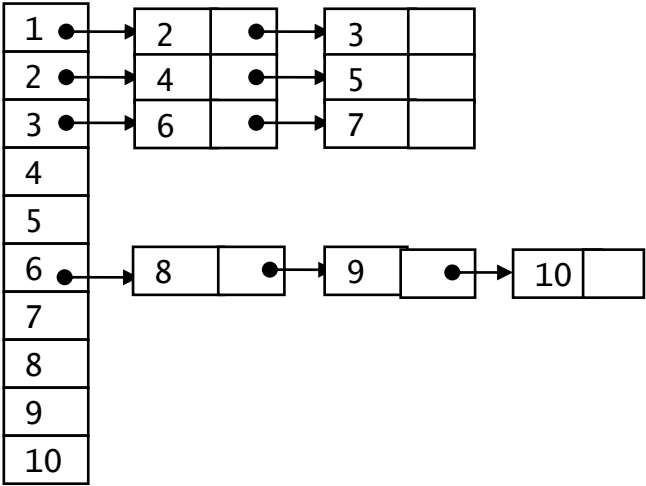


Рис 2.

Если у каждой вершины дерева имеется не более двух потомков (левые и правые поддеревья), то такое дерево называется двоичным или бинарным.

Двоичные деревья широко используются в программировании.

Основные операции с деревьями: обход дерева, поиск по дереву, включение в дерево, исключение из дерева.

Обход (посещение) вершин дерева можно осуществить следующим образом (рис 3):

- сверху вниз: R,A,B (префиксный обход)
- слева направо: A,R,B (инфиксный обход)
- снизу вверх: A,B,R (постфиксный обход)

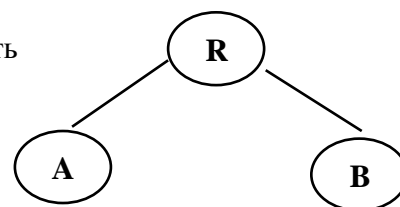


Рис. 3

Для реализации алгоритмов поиска используются деревья двоичного поиска. Дерево двоичного поиска – это такое дерево, в котором все левые потомки моложе предка, а все правые – старше. Это свойство называется характеристическим свойством дерева двоичного поиска и выполняется для любого узла, включая корень. С учетом этого свойства поиск узла в двоичном дереве поиска можно осуществить, двигаясь от корня в левое или правое поддерево в зависимости от значения ключа поддерева.

Если при построении дерева поочередно располагать узлы слева и справа, то получится дерево, у которого число вершин в левом и правом поддеревьях отличается не более чем на единицу. Такое дерево называется идеально сбалансированным.

N элементов можно организовать в бинарное дерево с высотой не более  $\log_2(N)$ , поэтому для поиска среди N элементов может потребоваться не больше  $\log_2(N)$  сравнений, если дерево идеально сбалансировано. Отсюда следует, что дерево – это более подходящая структура для организации поиска, чем, например, линейный список.

Операция включения элемента в дерево разбивается на три этапа: включение узла в пустое дерево, поиск корня для добавления нового узла, включение узла в левое или правое поддерево.

Для удаления узла с указанным ключом сначала происходит его поиск. В случае, если узел найден, то он удаляется. Если удаляемый узел является концевым, то просто удаляется ссылка на него. Если удаляемый узел имеет одного потомка, в этом случае переадресуется ссылка на этого потомка. Если удаляемый узел имеет

двух потомков, то на его место ставится самый правый потомок из левого поддерева или самый левый потомок из правого поддерева.

Рассмотрим алгоритм построения двоичного дерева. Если при добавлении узлов в дерево мы будем их равномерно располагать слева и справа, то получится дерево, у которого число вершин в левом и правом поддеревьях отличается не более, чем на единицу. Такое дерево называется **идеально сбалансированным**.

Для построения идеально сбалансированного дерева используется рекурсия. Для дерева из  $n$  узлов, где  $nl$  - количество узлов в левом поддереве,  $nr$  - количество узлов в правом поддереве, алгоритм построения идеально сбалансированного дерева описывается следующим образом:

1. выбрать одну вершину в качестве корня;
2. рекурсивно построить левое поддерево с  $nl = n \div 2$  узлами;
3. рекурсивно построить правое поддерево с  $nr = n - nl - 1$  узлами.

Идеальная балансировка дает наименьшую высоту дерева, а так как высота дерева определяет длину пути поиска в нем, то, следовательно, и укорачивает поиск. Но поддержание идеальной сбалансированности дерева при включении или исключении элемента – это достаточно сложная процедура.

Адельсон-Вельский и Ландис сформулировали менее жесткий критерий сбалансированности таким образом: двоичное дерево называется сбалансированным, если у каждого узла дерева высота двух поддеревьев отличается не более чем на единицу. Такое дерево называется *АВЛ-деревом*.

Использование этого критерия приводит к легко выполняемой балансировке. При этом средняя длина поиска остается практически такой же, как и у идеально сбалансированного дерева.

При включении узла в сбалансированное дерево возможны 3 случая: (рассматриваем включение в левое поддерево):

- 1) левое и правое поддеревья становятся неравной высоты, но критерий сбалансированности не нарушается;
- 2) левое и правое поддерево приобретают равную высоту и, таким образом, сбалансированность даже улучшается;
- 3) критерий сбалансированности нарушается, и дерево надо перестраивать.

Алгоритм включения и балансировки существенно зависит от способа хранения информации о сбалансированности дерева. Одно из решений – хранить в каждой вершине показатель ее сбалансированности. В этом случае сбалансированность будет определяться как разность между высотой правого и левого поддеревьев. Например,

$Bal = 1$ , если правое поддереву выше левого,  $Bal = 0$ , если правое и левое поддеревья равной высоты и  $Bal = -1$ , если левое поддереву выше правого.

Процесс включения узла фактически состоит из трех последовательно выполняемых подзадач:

- 1) проход по пути поиска (пока не убедимся, что элемента с таким ключом в дереве нет);
- 2) включение нового узла и определение показателя сбалансированности ( $Bal$ );
- 3) «отступление» (возврат) по пути поиска, с проверкой показателей сбалансированности для каждой вершины, и если необходимо, то проведение балансировки.

Этот метод требует некоторой избыточной проверки, но зато его можно реализовать с помощью простого расширения алгоритма поиска с включением. На каждом шаге при этом необходима информация о высоте дерева.

Операция по балансировке состоит только из последовательных переприсваиваний ссылок. Фактически ссылки циклически меняются, что приводит к одно- или двукратному повороту двух или трех участвующих в процессе балансировки узлов. Кроме вращения, необходимо должным образом изменять и показатели сбалансированности этих узлов.[1]

Алгоритм удаления узла из сбалансированного дерева основан на алгоритме удаления из дерева (на замене удаляемого узла на самого левого потомка из правого поддерева или на самого правого потомка из левого поддерева) с учетом операции балансировки, то есть тех же поворотов узлов.[1]

Использование деревьев для поиска информации достаточно эффективно (трудоемкость –  $O(\log_2 n)$ ). Можно ли создать еще более эффективную структуру или метод, позволяющий лучше осуществлять поиск информации? Для этого было бы хорошо по значению ключа сразу определять индекс элемента массива, в котором хранится информация. То есть необходимо создать такую функцию, по которой можно вычислить этот индекс. Такая функция называется *хеш-функцией* (от англ. to hash - крошить, рубить) и она ставит в соответствие каждому ключу  $k_i$  индекс ячейки  $j$ , где расположен элемент с этим ключом, таким образом:

$$h(k_i) = j, \text{ если } j \in (1, m),$$

где  $j$  принадлежит множеству от 1 до  $m$ , а  $m$  – размерность массива.

Массив, заполненный в порядке, определенным хеш-функцией, называется *хеш-таблицей*. Минимальная трудоемкость поиска в хеш-таблице равна  $O(1)$ !

Принято считать, что хорошей является такая функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

- функция должна быть простой с вычислительной точки зрения;
- функция должна распределять ключи в хеш-таблице наиболее равномерно.

Итак, первое свойство хорошей хеш-функции зависит от характеристик компьютера, а второе – от значений данных. Если бы все данные были случайными, то хеш-функции были бы очень простые (несколько битов ключа, например). Однако на практике случайные данные встречаются крайне редко, и приходится создавать функцию, которая зависела бы от всего ключа.

Может возникнуть ситуация, когда разным ключам соответствует одно значение хеш-функции, то есть, когда  $h(K1)=h(K2)$ , в то время как  $K1 \neq K2$ . Такая ситуация называется *коллизией*. В этом случае, очевидно, необходимо найти новое место для хранения ключей, претендующих на одну и ту же ячейку хеш-таблицы. Причем количество коллизий необходимо минимизировать. Таким образом, хорошая хеш-функция должна удовлетворять еще одному требованию, а именно: она должна минимизировать число коллизий.

Существует два основных типа хеширования, один из которых основан на делении, а другой на умножении. Впрочем, это не единственные методы, которые существуют, более того, они не всегда являются оптимальными.

Если ключей меньше, чем элементов массива, то в качестве хеш-функции можно принять вычисление остатка от деления целочисленного ключа на размерность массива ( $m$ ), то есть:

$$h(k_i) = (k_i \% m),$$

при  $p < m$ , где  $p$  – количество ключей.

Данная функция очень проста, хотя и не самая лучшая. Вообще, можно использовать любую размерность (константу  $m$ ), но она должна быть такой, чтобы минимизировать число коллизий. Для этого лучше использовать простое число. В большинстве случаев подобный выбор вполне удовлетворителен. Для символьной строки ключом может являться остаток от деления, например, суммы кодов символов строки на  $m$ .

На практике, метод деления – самый распространенный

Существует несколько возможных вариантов разрешения коллизий, которые имеют свои достоинства и недостатки.

Первый метод – **внешнее** (открытое) хеширование (метод цепочек)

В случае, когда элемент таблицы с индексом, который вернула хеш-функция, уже занят, к нему присоединяется связный список. Таким образом, если для нескольких различных значений ключа возвращается одинаковое значение хеш-функции, то по этому адресу находится указатель на связанный список, который содержит все значения. Поиск в этом списке осуществляется простым перебором, так как при грамотном выборе хеш-функции любой из списков оказывается достаточно коротким.

Другой путь решения проблемы, связанной с коллизиями – внутреннее (**закрытое**) хеширование (открытая адресация). Оно, состоит в том, чтобы полностью отказаться от ссылок. В этом случае, если ячейка с вычисленным индексом занята, то можно просто просматривать следующие записи таблицы по порядку (с шагом 1), до тех пор, пока не будет найден ключ К или пустая позиция в таблице. При этом, если индекс следующего просматриваемого элемента определяется добавлением какого-то постоянного шага (от 1 до n), то данный способ разрешения коллизий называется линейной адресацией. Для вычисления шага можно также применить формулу:

$$h = h + a^2,$$

где  $a$  – это номер попытки поиска ключа. Этот вид адресации называется квадратичной или произвольной адресацией.

При любом методе разрешения коллизий необходимо ограничить длину поиска элемента. Если для поиска элемента необходимо более 3–4 сравнений, то эффективность использования такой хеш-таблицы пропадает и ее следует реструктуризировать (т.е. найти другую хеш-функцию), чтобы минимизировать количество сравнений для поиска элемента

### Задание

Построить дерево в соответствии с заданным вариантом задания. Вывести его на экран в виде дерева. Реализовать основные операции работы с деревом: обход дерева, включение, исключение и поиск узлов. Сравнить эффективность алгоритмов сортировки и поиска в зависимости от высоты дерева и степени его ветвления. Построить хеш-таблицу по указанным данным. Сравнить эффективность поиска в сбалансированном двоичном дереве, в двоичном дереве поиска и в хеш-таблице. Вывести на экран деревья и хеш-таблицу. Подсчитать среднее количество сравнений для поиска данных в указанных структурах. Произвести реструктуризацию хеш-таблицы, если среднее количество сравнений больше указанного. Оценить

эффективность использования этих структур (по времени и памяти) для поставленной задачи.

Примерные варианты заданий приведены в приложении.

### **Указания к выполнению работы**

Все логически завершённые фрагменты алгоритма (ввод, вывод, обход дерева, включение узла, исключение узла и т.п.) необходимо оформить в виде подпрограмм.

При разработке интерфейса программы следует предусмотреть:

- указание типа, формата и диапазона вводимых данных,
- указание действий, производимых программой,
- наличие пояснений при выводе результата,
- вывод дерева осуществить в графическом виде (или предложить иную визуализацию в виде дерева)
- вывод на экран хеш-таблицы;
- возможность изменения хеш-функции при необходимости реструктуризации таблицы;
- вывод времени и количества сравнений при поиске одних и тех же данных в различных структурах данных.

При тестировании программы необходимо:

- проверить правильность ввода и вывода данных (т.е. их соответствие требуемому типу и формату). Обеспечить адекватную реакцию программы на неверный ввод данных;
- обеспечить вывод сообщений при отсутствии входных данных («пустой ввод»);
- проверить правильность выполнения операций;
- обеспечить возможность добавления узла в пустое дерево;
- предусмотреть вывод сообщения при попытке удаления узла из пустого дерева;
- проверить различные варианты включения и исключения узла в существующее дерево;
- проверить поиск существующего узла и поиск несуществующего узла в дереве и хеш-таблице;
- создать левостороннее или правостороннее дерево, проверить время обработки узла в нем;
- предусмотреть вывод сообщения при необходимости реструктуризации хеш-таблицы.



## Содержание отчета

В отчете по лабораторной работе должны быть сделаны выводы о том, в каких случаях удобно применять деревья, какую выгоду дает использование этого типа данных, какие «узкие места» необходимо протестировать в разработанной программе.

В отчете по лабораторной работе должны быть сделаны выводы о том, применение какой структуры (дерева двоичного поиска, сбалансированного дерева или хеш-таблицы) целесообразно для решения поставленной задачи, какие преимущества дает использование той или иной структуры, какие преимущества и недостатки использования файлов. Выводы следует подтвердить результатом числовых сравнений расходования памяти и времени выполнения программы, а также количеством сравнений при поиске данных. Для этого необходимо, например, осуществить поиск всех элементов структуры и найти среднее значение. В отчете также следует указать, в каком случае необходима реструктуризация хеш-таблицы и на что нужно обратить особое внимание при тестировании программы

В отчете по лабораторной работе должны быть даны ответы на следующие вопросы:

1. Что такое дерево?
2. Как выделяется память под представление деревьев?
3. Какие стандартные операции возможны над деревьями?
4. Что такое дерево двоичного поиска?
5. Чем отличается идеально сбалансированное дерево от AVL дерева?
6. Чем отличается поиск в AVL-дереве от поиска в дереве двоичного поиска?
7. Что такое хеш-таблица, каков принцип ее построения?
8. Что такое коллизии? Каковы методы их устранения.
9. В каком случае поиск в хеш-таблицах становится неэффективен?
10. Эффективность поиска в AVL деревьях, в дереве двоичного поиска и в хеш-таблицах

Отчет предоставляется в электронном или печатном виде.

## Список рекомендуемой литературы

1. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных: Пер. с англ. СПб.: Невский диалект, 2001. С. 69–71, 235–258, 261 – 274, 324–336.
2. *Ахо А., Хопкрофт Д. Ульман Д.* Структуры данных и алгоритмы: Пер. с англ. М.: Издат. дом «Вильямс», 2000. С. 77–99.

3. *Иванова Г. С.* Основы программирования. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. С. 238–253.
4. *Керниган Б., Пайк Р.* Практика программирования: Пер. с англ. СПб.: Невский диалект, 2001. С. 83–90.
5. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ, Пер. с англ. М.: МЦНМО, 2001. С. 92–97. С. 213–235.
6. *Кнут Д.* Искусство программирования, Т. 3. Сортировка и поиск: Пер. с англ. М.: Издат. дом «Вильямс», 2001. С. 492–507, 549–586.