Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 1

Дисциплина Методы вычислений

Тема Венгерский метод решения задачи о назначениях

Вариант №2

Студент Блохин Д.М.

Группа ИУ7-11М

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Власов П.А.

Москва.
2023 г.

Цель работы: изучение венгерского метода решения задачи о назначениях.

Содержательная и математическая постановка задачи

В распоряжении работодателя имеется n работ и n исполнителей. Стоимость выполнения i-ой работы j-ым исполнителем составляет $c_{ij} \geq 0$ единиц.

Требуется распределить все работы между исполнителями так, чтобы:

1) каждый исполнитель выполнял ровно 1 работу;
2) общая стоимость выполнения всех работ была минимальна.

Матрица стоимостей: $C = (c_{ij}),\ i,j = \overline{1,n}$.

Матрица назначений: $X = (x_{ij}), i,j = \overline{1,n}$.

Введём управляющие переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i-\text{ую работу выполняет } j-\text{ый исполнитель}, \\ 0, \text{иначе} \end{cases},$$

$i,j = \overline{1,n}$.

Общая стоимость выполнения всех работ:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Условие того, что j-ый исполнитель выполняет ровно 1 работу:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}$$

Условие того, что i-ую работу выполняет ровно 1 исполнитель:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$$

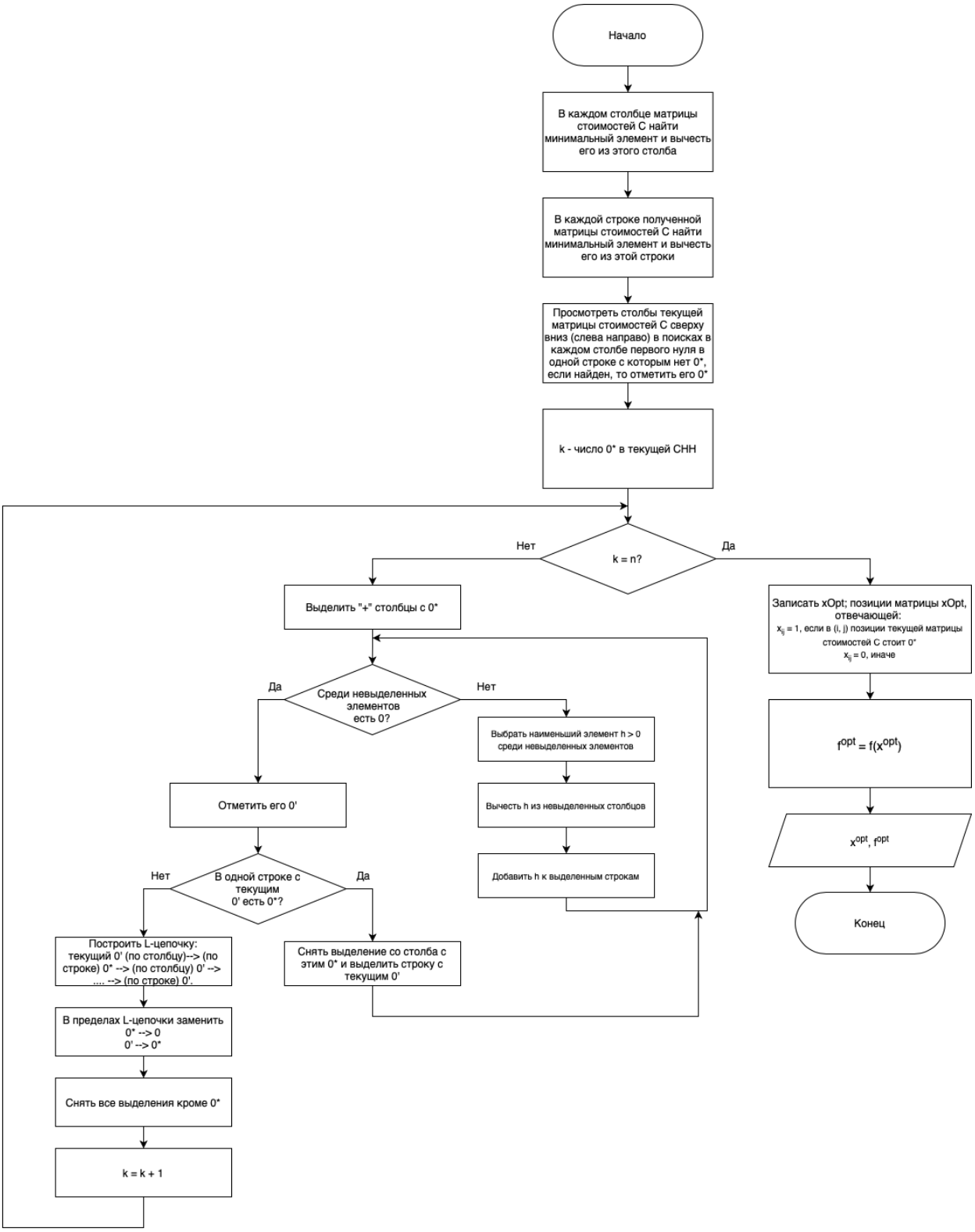
Таким образом, математическая постановка задачи о назначениях:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\ , i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Вариант 2

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 10 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Схема алгоритма:



Текст программы представлен на Листинге 1

Листинг 1

```
function lab01()
clc;
debugFlag = 1;
maximizationFlag = 0;

matr = [
    4 10 10 3 6;
    5 6 2 7 4;
    9 5 6 8 3;
    2 3 5 4 8;
    8 5 4 9 3];


disp('2 вариант. Матрица:');
disp(matr);

C = matr;

if maximizationFlag == 1
    C = convertToMin(matr);
    if debugFlag == 1
        disp('Матрица после приведения к задаче минимизации:');
        disp(C);
    end
end

% 1.1 Вычитание из каждого столбца матрицы наименьшего элемента этого
столбца
C = updateColumns(C);
if debugFlag == 1
    disp('Матрица после преобразования столбцов:');
    disp(C);
end

% 1.2 Вычитание из каждой строки матрицы наименьшего элемента этой строки
C = updateRows(C);
if debugFlag == 1
    disp('Матрица после преобразования строк:');
    disp(C);
end

% 1.3 Построение начальной СНН
[numColumns, numRows] = size(C);
addMatr = initAddMatr(numRows, numColumns, C);

% 1.4 Вывод начальной СНН
if debugFlag == 1
    disp('Начальная СНН:');
    printCurMatr(C, addMatr, numRows, numColumns);
end

% 1.5 подсчет 0* в текущей СНН
k = sum(addMatr, 'all');
if debugFlag == 1
    fprintf('Число нулей в построенной СНН: k = %d\n\n', k);
end

iteration = 1;
```

```
while k < numRows
    if debugFlag == 1
        fprintf('---------------- Итерация №%d ----------------\n',
iteration);
    end

    % Матрица для выделения 0'
    primeMatr = zeros(numRows, numColumns);

    % Массивы для выделения строк и столбцов
    selectedRows = zeros(numRows);
    selectedColumns = sum(addMatr);

    % Выделение столбцов с 0*
    selection = getSelection(numRows, numColumns, selectedColumns);

    if debugFlag == 1
        disp('Результат выделения столбцов, в которых стоит 0*:');
        printMarkedMatr(C, addMatr, primeMatr, selectedColumns,
selectedRows, numRows, numColumns);
    end

    flag = true;
    primePnt = [-1 -1];
    while flag
        if debugFlag == 1
            disp('Поиск 0 среди невыделенных элементов');
        end

        % 2.1 поиск невыделенных 0
        primePnt = findPrime(C, selection, numRows, numColumns);
        if primePnt(1) == -1
            C = updateMatrNoZero(C, numRows, numColumns, selection,
selectedRows, selectedColumns);

            if debugFlag == 1
                disp('Т.к. среди невыделенных элементов нет нулей, матрица
была преобразована:');
                printMarkedMatr(C, addMatr, primeMatr, selectedColumns,
selectedRows, numRows, numColumns);
            end

            primePnt = findPrime(C, selection, numRows, numColumns);
        end

        primeMatr(primePnt(1), primePnt(2)) = 1;
        if debugFlag == 1
            disp('Матрица с найденным 0-штрих');
            printMarkedMatr(C, addMatr, primeMatr, selectedColumns,
selectedRows, numRows, numColumns);
        end

        zeroWithStarInRow = getZeroWithStarInRow(primePnt, numColumns,
addMatr);
        if zeroWithStarInRow(1) == -1
            flag = false;
        else
            % Перенос выделения со столбца на строку
            selection(:, zeroWithStarInRow(2)) = selection(:,
zeroWithStarInRow(2)) - 1;
            selectedColumns(zeroWithStarInRow(2)) = 0;
```

```
            selection(zeroWithStarInRow(1), :) =
selection(zeroWithStarInRow(1), :) + 1;
            selectedRows(zeroWithStarInRow(1)) = 1;
            if debugFlag == 1
                disp("Т.к. в одной строке с 0' есть 0*, было переброшено
выделение:");
                printMarkedMatr(C, addMatr, primeMatr, selectedColumns,
selectedRows, numRows, numColumns);
            end
        end
    end

    if debugFlag == 1
       disp('L-цепочка: ');
    end

    [primeMatr, addMatr] = createL(numRows, numColumns, primePnt,
primeMatr, addMatr);

    k = sum(addMatr, 'all');
    if debugFlag == 1
        disp('Текущая СНН:');
        printCurMatr(C, addMatr, numRows, numColumns);
        fprintf('Итого, k = %d\n', k);
    end

    iteration = iteration + 1;
    disp('-----------------------------------------------');
end

if debugFlag == 1
        disp('Конечная СНН:');
        printCurMatr(C, addMatr, numRows, numColumns);
end

disp('X =');
disp(addMatr);

fOpt = getFOpt(matr, addMatr, numRows, numColumns);
fprintf('Ответ: fOpt = %d\n', fOpt);
end

% Приведение задачи максимизации к задаче минимизации
function matr = convertToMin(matr)
    maxEl = max(max(matr));
    matr = matr * (-1) + maxEl;
end

% Начальное изменение столбцов
function matr = updateColumns(matr)
    minEl = min(matr);
    for i = 1 : length(minEl)
        matr(:, i) = matr(:, i) - minEl(i);
    end
end

% Начальное изменение строк
function matr = updateRows(matr)
    minEl = min(matr,[],2);
    for i = 1 : length(minEl)
        matr(i, :) = matr(i, :) - minEl(i);
    end
```

```
end

% Создание СНН
function addMatr = initAddMatr(numRows, numColumns, matr)
        addMatr = zeros(numRows, numColumns);
        for j = 1 : numColumns
            for i = 1 : numRows
                if matr(i, j) == 0
                    counter = 0;
                    for k = 1 : numColumns
                        counter = counter + addMatr(i, k);
                    end
                    for k = 1 : numRows
                        counter = counter + addMatr(k, j);
                    end
                    if counter == 0
                        addMatr(i, j) = 1;
                    end
                end
            end
        end
end

% Вывод СНН
function [] = printCurMatr(matr, addMatr, numRows, numColumns)
    fprintf("\n");
    for i = 1 : numRows
        for j = 1 : numColumns
            if addMatr(i, j) == 1
                fprintf("\t%d*\t", matr(i, j));
            else
                fprintf("\t%d\t", matr(i, j));
            end
        end
        fprintf("\n");
    end
    fprintf("\n");
end

% Выделение столбцов с 0*
function [selection] = getSelection(numRows, numColumns, selectedColumns)
    selection = zeros(numRows, numColumns);
    for i = 1 : numColumns
        if selectedColumns(i) == 1
            selection(:, i) = selection(:, i) + 1;
        end
    end
end

% Вывод текущей СНН с выделениями столбцов и строк
function [] = printMarkedMatr(matr, addMatr, primeMatr, selectedColumns,
selectedRows, numRows, numColumns)

    for i = 1 : numRows
        if selectedRows(i) == 1
            fprintf("+");
        end

        for j = 1 : numColumns
            fprintf("\t%d", matr(i, j));
            if addMatr(i, j) == 1
                fprintf("*\t");
            elseif primeMatr(i, j) == 1
```

```
                fprintf("'\t");
            else
                fprintf("\t");
            end
        end

        fprintf('\n');
    end

    for i = 1 : numColumns
        if selectedColumns(i) == 1
            fprintf("\t+\t")
        else
            fprintf(" \t\t")
        end
    end
    fprintf('\n\n');
end

% Нахождение невыделенного 0
function [primePnt] = findPrime(matr, selection, numRows, numColumns)
    primePnt = [-1 -1];
    for j = 1 : numColumns
        for i = 1 : numRows
            if matr(i, j) == 0 && selection(i, j) == 0
                primePnt(1) = i;
                primePnt(2) = j;
                return;
            end
        end
    end
end

% Изменение матрицы в случае, если среди невыделенных элементов нет нуля
function [matr] = updateMatrNoZero(matr, numRows, numColumns, selection,
selectedRows, selectedColumns)
    h = 1e5; % Наименьший элемент среди невыделенных
    for j = 1 : numColumns
        for i = 1 : numRows
            if selection(i, j) == 0 && matr(i, j) < h
                h = matr(i, j);
            end
        end
    end

    for j = 1 : numColumns
        if selectedColumns(j) == 0
            matr(:, j) = matr(:, j) - h;
        end
    end

    for i = 1 : numRows
        if selectedRows(i) == 1
            matr(i, :) = matr(i, :) + h;
        end
    end
end

% Нахождение 0* в одной строке с 0'
function [zeroWithStarInRow] = getZeroWithStarInRow(primePnt, numColumns,
addMatr)
    primeI = primePnt(1);
    zeroWithStarInRow = [-1 -1];
```

```
    for j = 1 : numColumns
        if addMatr(primeI, j) == 1
            zeroWithStarInRow(1) = primeI;
            zeroWithStarInRow(2) = j;
            break;
        end
    end
end

% Построение L-цепочки
function [primeMatr, addMatr] = createL(numRows, numColumns, primePnt,
primeMatr, addMatr)
    i = primePnt(1);
    j = primePnt(2);
    while i > 0 && j > 0 && i <= numRows && j <= numColumns
        % Снятие '
        primeMatr(i, j) = 0;

        % Замена ' на *
        addMatr(i, j) = 1;

        fprintf("[%d, %d] ", i, j);

        % Дойти до 0* по столбцу от 0'
        kRow = 1;
        while kRow <= numRows  && (addMatr(kRow, j) ~= 1 || kRow == i)
            kRow = kRow + 1;
        end

        if (kRow <= numRows)
            % Дойти до 0' по строке от 0*
            lCol = 1;
            while lCol <= numColumns && (primeMatr(kRow, lCol) ~= 1 || lCol
== j)
                lCol = lCol + 1;
            end

            if lCol <= numColumns
                addMatr(kRow,j) = 0;
                fprintf("-> [%d, %d] -> ", kRow, j);
            end
            j = lCol;
        end
        i = kRow;
     end

     fprintf("\n");
end

% Вычисление fOpt
function fOpt = getFOpt(matr, addMatr, numRows, numColumns)
    fOpt = 0;
    for i = 1 : numRows
        for j = 1 : numColumns
            if addMatr(i, j) == 1
                fOpt = fOpt + matr(i, j);
            end
        end
    end
end
```

Результаты расчетов для задач из индивидуального варианта.

Задача минимизации

2 вариант. Матрица:

4	10	10	3	6
5	6	2	7	4
9	5	6	8	3
2	3	5	4	8
8	5	4	9	3

Матрица после преобразования столбцов:

2	7	8	0	3
3	3	0	4	1
7	2	4	5	0
0	0	3	1	5
6	2	2	6	0

Матрица после преобразования строк:

2	7	8	0	3
3	3	0	4	1
7	2	4	5	0
0	0	3	1	5
6	2	2	6	0

Начальная СНН:

2	7	8	0*	3
3	3	0*	4	1
7	2	4	5	0*
0*	0	3	1	5
6	2	2	6	0

Число нулей в построенной СНН: k = 4

---------- Итерация №1 ----------

Результат выделения столбцов, в которых стоит 0*:

2	7	8	0*	3
3	3	0*	4	1
7	2	4	5	0*
0*	0	3	1	5
6	2	2	6	0
+		+	+	+

Поиск 0 среди невыделенных элементов

Матрица с найденным 0-штрих

2	7	8	0*	3
3	3	0*	4	1
7	2	4	5	0*
0*	0'	3	1	5
6	2	2	6	0
+		+	+	+

Т.к. в одной строке с 0' есть 0*, было переброшено выделение:

	2	7	8	0*	3
	3	3	0*	4	1
	7	2	4	5	0*
+	0*	0'	3	1	5
	6	2	2	6	0
			+	+	+

Поиск 0 среди невыделенных элементов
Т.к. среди невыделенных элементов нет нулей, матрица была преобразована:

	0	5	8	0*	3
	1	1	0*	4	1
	5	0	4	5	0*
+	0*	0'	5	3	7
	4	0	2	6	0
			+	+	+

Матрица с найденным 0-штрих

	0'	5	8	0*	3
	1	1	0*	4	1
	5	0	4	5	0*
+	0*	0'	5	3	7
	4	0	2	6	0
			+	+	+

Т.к. в одной строке с 0' есть 0*, было переброшено выделение:

+	0'	5	8	0*	3
	1	1	0*	4	1
	5	0	4	5	0*
+	0*	0'	5	3	7
	4	0	2	6	0
			+		+

Поиск 0 среди невыделенных элементов
Матрица с найденным 0-штрих

+	0'	5	8	0*	3
	1	1	0*	4	1
	5	0'	4	5	0*
+	0*	0'	5	3	7
	4	0	2	6	0
			+		+

Т.к. в одной строке с 0' есть 0*, было переброшено выделение:

+	0'	5	8	0*	3
	1	1	0*	4	1
+	5	0'	4	5	0*
+	0*	0'	5	3	7
	4	0	2	6	0
			+		

Поиск 0 среди невыделенных элементов
Матрица с найденным 0-штрих

+	0'	5	8	0*	3
	1	1	0*	4	1

+	5	0'	4	5	0*
+	0*	0'	5	3	7
	4	0'	2	6	0
			+		

L-цепочка:
[5, 2]
Текущая СНН:

0	5	8	0*	3
1	1	0*	4	1
5	0	4	5	0*
0*	0	5	3	7
4	0*	2	6	0

Итого, k = 5

Конечная СНН:

0	5	8	0*	3
1	1	0*	4	1
5	0	4	5	0*
0*	0	5	3	7
4	0*	2	6	0

X =

0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0

Ответ: fOpt = 15

Задача максимизации

2 вариант. Матрица:

4	10	10	3	6
5	6	2	7	4
9	5	6	8	3
2	3	5	4	8
8	5	4	9	3

Матрица после приведения к задаче минимизации:

6	0	0	7	4
5	4	8	3	6
1	5	4	2	7
8	7	5	6	2
2	5	6	1	7

Матрица после преобразования столбцов:

5	0	0	6	2
4	4	8	2	4

```
   0   5   4   1   5
   7   7   5   5   0
   1   5   6   0   5

Матрица после преобразования строк:
   5   0   0   6   2
   2   2   6   0   2
   0   5   4   1   5
   7   7   5   5   0
   1   5   6   0   5

Начальная СНН:

        5          0*         0          6          2
        2          2          6          0*         2
        0*         5          4          1          5
        7          7          5          5          0*
        1          5          6          0          5

Число нулей в построенной СНН: k = 4

---------- Итерация №1 ----------
Результат выделения столбцов, в которых стоит 0*:
        5          0*         0          6          2
        2          2          6          0*         2
        0*         5          4          1          5
        7          7          5          5          0*
        1          5          6          0          5
        +          +                     +          +

Поиск 0 среди невыделенных элементов
Матрица с найденным 0-штрих
        5          0*         0'         6          2
        2          2          6          0*         2
        0*         5          4          1          5
        7          7          5          5          0*
        1          5          6          0          5
        +          +                     +          +

Т.к. в одной строке с 0' есть 0*, было переброшено выделение:
+       5          0*         0'         6          2
        2          2          6          0*         2
        0*         5          4          1          5
        7          7          5          5          0*
        1          5          6          0          5
        +                                 +          +

Поиск 0 среди невыделенных элементов
Т.к. среди невыделенных элементов нет нулей, матрица была преобразована:
+       7          0*         0'         8          4
        2          0          4          0*         2
        0*         3          2          1          5
        7          5          3          5          0*
```

	1	3	4	0	5
	+			+	+

Матрица с найденным 0-штрих

+	7	0*	0'	8	4
	2	0'	4	0*	2
	0*	3	2	1	5
	7	5	3	5	0*
	1	3	4	0	5
	+			+	+

Т.к. в одной строке с 0' есть 0*, было переброшено выделение:

+	7	0*	0'	8	4
+	2	0'	4	0*	2
	0*	3	2	1	5
	7	5	3	5	0*
	1	3	4	0	5
	+				+

Поиск 0 среди невыделенных элементов
Матрица с найденным 0-штрих

+	7	0*	0'	8	4
+	2	0'	4	0*	2
	0*	3	2	1	5
	7	5	3	5	0*
	1	3	4	0'	5
	+				+

L-цепочка:
[5, 4] -> [2, 4] -> [2, 2] -> [1, 2] -> [1, 3]
Текущая СНН:

7	0	0*	8	4
2	0*	4	0	2
0*	3	2	1	5
7	5	3	5	0*
1	3	4	0*	5

Итого, k = 5

Конечная СНН:

7	0	0*	8	4
2	0*	4	0	2
0*	3	2	1	5
7	5	3	5	0*
1	3	4	0*	5

X =

0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1

0 0 0 1 0

Ответ: fOpt = 42