Informatique : DM sur la dynamique gravitationnelle

Gatt Guillaume

I Quelques fonctions utilitaires

1. a) $[1,2,3]+[4,5,6]=[1,2,3,4,5,6]$

b) $2*[1,2,3]=[1,2,3,1,2,3]$

```
#Question I.2
def smul(n,L) :
    T=[]
    for i in range(len(L)) :
        T.append(n*L[i])
    return T

#Question I.3 a)
def vsom(L_1,L_2) :
    T=[]
    for i in range(len(L_1)) :
        T.append(L_1[i] +L_2[i])
    return T

#Question I.3 b)
def vdiff(L_1,L_2) :
    T=[]
    for i in range(len(L_1)) :
        T.append(L_1[i] -L_2[i])
    return T
```

II Etude de schémas numériques

II.1 Mise en forme du problème

1. On peut écrire l'équation (1) sous la forme :
$\forall t\in I, z'(t)=f(y(t))$ car $\forall t\in I, z(t)=y'(t)$

2. On a :
$y(t_{i+1})=y(t_i)+(y(t_{i+1})-y(t_i))$
Or : $(y(t_{i+1})-y(t_i))=\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt$
$y(t_{i+1})=y(t_i)+\int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)dt$ car $\forall t\in I, z(t)=y'(t)$
de même pour z(t) :
$z(t_{i+1})=z(t_i)+(z(t_{i+1})-z(t_i))$
Or : $(z(t_{i+1})-z(t_i))=\int_{t_i}^{t_{i+1}} z'(t)dt$
$z(t_{i+1})=z(t_i)+\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))dt$ car $\forall t\in I, z'(t)=f(y(t))$

II.2 Schéma d'Euler explicite

1. On approche les intégrales par la méthode des rectangles à gauche :
$y_{i+1} = y_i + hz_i = y_0 + h\sum_{k=0}^{i} z_k$
$z_{i+1} = z_i + hf(y_i) = z_0 + h\sum_{k=0}^{i} f(y_k)$

```
#Question II.2.2
def euler(f,t_min,t_max,n,z0,y0) :
    h=(t_max -t_min)/(n-1)
    T=[]
    for i in range(n) :
        T.append(t_min + i*h)
    z=z_0
    y=y_0
    Z=[z_0]
    Y=[y_0]
    for i in range(len(T)) :
        z,y= z + (T[i+1] - T[i])*f(y),y + (T[i+1] - T[i]) * z
        Z.append(z)
        Y.append(y)
    return(Z,Y)
```

La fonction prend en paramètre f, la fonction donné par l'équation différentielle afin de calculer les (z_i), t_{min}, t_{max} et n, pour obtenir la liste des (t_i) afin de pouvoir calculer de manière approché les intégrales, ainsi que z_0 et y_0 afin de pouvoir initialiser la récurrence.

3. a) On a l'équation :
$y'' + \omega^2 y(t) = 0$
$y''(t) \times y'(t) + y'(t) \times \omega^2 y(t) = 0$
On reconnait $g'(x) = -f(x) = \omega^2 x$:
$y''(t) \times y'(t) + y'(t) \times g'(y(t)) = 0$
On primitive l'équation avec une constante d'intégration $-E$:
$\frac{1}{2}(y'(t))^2 + g(y(t)) - E = 0$
$\frac{1}{2}(y'(t))^2 + g(y(t)) = E$

b) On a en remplaçant $y(t)$ par y_i et $y'(t)$ par z_i :
$E_i = \frac{1}{2}(z_i)^2 + g(y_i)$
On a donc :
$E_{i+1} - E_i = (\frac{1}{2}(z_{i+1})^2 + g(y_{i+1})) - (\frac{1}{2}(z_i)^2 + g(y_i))$
$E_{i+1} - E_i = \frac{1}{2}((z_{i+1})^2 - (z_i)^{\mathbf{2}\cdot} + g(y_{i+1}) - g(y_i)$
Comme $g' = -f$, $g(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ on a :
$E_{i+1} - E_i = h^2\omega^2(\frac{\omega^2 y_i^2}{2} + \frac{z_i^2}{2})$
$E_{i+1} - E_i = h^2\omega^2(\frac{1}{2}(z_i)^2 + g(y_i))$
$E_{i+1} - E_i = h^2\omega^2 E_i$

c) On aurait :
$\forall i, \frac{1}{2}(z_i)^2 + g(y_i) = E$

d) On a si conservation de E :
$2E = (z_i)^2 + \omega^2 {y_i}^2$ donc $E \geq 0$
Si $E \neq 0$:
$(\frac{(z_i)}{\sqrt{2E}})^2 + (\frac{\omega y_i}{\sqrt{2E}})^2 = 1$
On a une ellipse
Si $E = 0$:
$z_i^2 = -\omega^2 {y_i}^2$ Or $(z_i)^2 \geq 0$ et $\omega^2 {y_i}^2 \geq 0$ donc $z_i = 0$ et $y_i = 0$ on obtient un point de coordonnées $(0; 0)$

e) Si le schéma numérique satisfaisait la conservation de E on aurait une ellipse ou un point or on a une spirale. Comme les y_i et z_i ont une valeur plus grande que leurs valeurs réelles $y(t_i)$ et $z(t_i)$ l'écart entre la solution et le calcul approché s'agrandit à chaque calcul ce qui donne une spirale qui s'éloigne du centre.

II.3 Schéma de Verlet

```
#Question II.3.1
def verlet(f,t_min,t_max,n,z0,y0) :
    h=(t_max -t_min)/(n-1)
    T=[]
    for i in range(n) :
        T.append(t_min + i*h)
    z=z_0
    y=y_0
    Z=[z_0]
    Y=[y_0]
    for i in range(len(T)) :
        y= y + h*z + (h**2)/2*f(y_i)
        z= z+ h/2*(f(Y[-1])+f(y))
        Z.append(z)
        Y.append(y)
    return(Z,Y)
```

2. a) On a :
$E_{i+1}-E_i=\frac{1}{2}((z_{i+1}-z_i)(z_{i+1}+z_i))+\frac{\omega^2}{2}((y_{i+1}-y_i)(y_{i+1}+y_i))$
$E_{i+1}-E_i=\frac{h}{4}(f_i+f_{i+1})(2z_i+\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}))+\frac{\omega^2}{2}((hz_i+\frac{h^2}{2}f_i)(2y_i+hz_i+\frac{h^2}{2}f_i)$
$E_{i+1}-E_i=\frac{h}{4}(f_i+f_{i+1})(2z_i+\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}))+\frac{\omega^2}{2}((hz_i+\frac{h^2}{2}f_i)(2y_i+hz_i+\frac{h^2}{2}f_i)$
$E_{i+1}-E_i=\frac{h}{4}(f_i+f_{i+1})(2z_i+\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}))+\frac{\omega^2}{2}(h^2z_i^2+f_ih^2y_i+2hy_iz_i+O(h^3))$
Or $f_{i+1}=-\omega^2(y_i+hz_i+\frac{h^2}{2}f_i)$
$E_{i+1}-E_i=\frac{h}{4}(f_i+-\omega^2(y_i+hz_i+\frac{h^2}{2}f_i))(2z_i+\frac{h}{2}(f_i-\omega^2(y_i+hz_i+\frac{h^2}{2}f_i)))+\frac{\omega^2}{2}(h^2z_i^2+f_ih^2y_i+2hy_iz_i+O(h^3))$
$E_{i+1}-E_i=\frac{1}{4}(hf_i+-\omega^2(hy_i+h^2z_i+O(h^3))(2z_i+\frac{1}{2}(hf_i+-\omega^2(hy_i+h^2z_i+O(h^3))))+\frac{\omega^2}{2}(h^2z_i^2+f_ih^2y_i+2hy_iz_i+O(h^3))$
$E_{i+1}-E_i=\frac{1}{8}(hf_i+-\omega^2(hy_i+h^2z_i+O(h^3))(hf_i+-\omega^2(hy_i+h^2z_i+O(h^3)))+\frac{\omega^2}{2}(f_ih^2y_i+O(h^3))$ car $f(y_i)=-\omega^2y_i$
$E_{i+1}-E_i=\frac{f_i}{8}(h^2f_i+-\omega^2(h^2y_i+O(h^3)))+\frac{\omega^2}{2}(\frac{2f_ih^2y_i}{4}+O(h^3))$
$E_{i+1}-E_i=O(h^3)$ car $f(y_i)=-\omega^2y_i$

b) L'allure du graphique est une ellipse ce qui est en accord avec une conservation de E.

c) Le schéma de Verlet conserve E

III Problème à N corps

III.1 Position du problème

1.$\vec{F}_j=\sum_{k\neq j}\vec{F}_{k/j}$

```
#Question III.1.2
def force2(m1,p1,m2,p2) :
    G=6.67e-11
    p1p2= vdiff(p2,p1)
    r=sqrt(p1p2[0]**2+p1p2[1]**2+p1p2[2]**2)
    return(smul(G*m1*m2/(r**3),p1p2))
```

```python
#Question III.1.3
def forceN(j,m,pos):
    m1=m[j]
    p1=pos[j]
    F=[0,0,0]
    for i in range(len(m)) :
        if i!=j :
            vsom(F,force2(m1,p1,m[i],pos[i]))
    return F
```

III.2 Approche numérique

1. position[i] donne la position des objets au temps t_i, **vitesse[i]** donne la vitesse des objets au temps t_i

2.On a par le principe fondamental de la dynamique appliqué à un corps j avec O, origine du repère :
$m_j(\overrightarrow{OP_j})'' = \vec{F_j}$
$(\overrightarrow{OP_j})'' = \frac{\vec{F_j}}{m_j}$
On a donc comme l'équation (1) avec $f = \frac{\vec{F_j}}{m_j}$

```python
#Question III.2.2
def euler_3d(f,t_min,t_max,n,z0,y0) :
    h=(t_max -t_min)/(n-1)
    T=[]
    for i in range(n) :
        T.append(t_min + i*h)
    z=z_0
    y=y_0
    Z=[z_0]
    Y=[y_0]
    for i in range(len(T)) :
        z,y= vsom(z, smul((T[i+1] - T[i]),f(y))),vsom(y, smul((T[i+1] - T[i]), z))
        Z.append(z)
        Y.append(y)
    return(Z,Y)
def pos_suiv(m, pos, vit,h) :
    pos2=[]
    vit2=[]
    def f(y) :
        return forceN(y,m,pos)
    for i in range(len(pos)) :
        solution=euler_3d(f,0,h,2,vit[i],pos[i])
        pos2.append(solution[1][1])
        vit2.append(solution[0][1])
    return(vit2,pos2)

#Question III.2.3
def verlet_3d(f,t_min,t_max,n,z0,y0) :
    h=(t_max -t_min)/(n-1)
    T=[]
    for i in range(n) :
        T.append(t_min + i*h)
    z=z_0
    y=y_0
    Z=[z_0]
    Y=[y_0]
```

```python
    for i in range(len(T)) :
        y= vsom(vsom( y  ,smul(h,z)),smul((h**2)/2,f(y)))
        z= vsom(z, smul(h/2,vsom(f(Y[-1]),f(y))))
        Z.append(z)
        Y.append(y)
    return(Z,Y)
def etat_suiv(m,pos,vit,h) :
    pos2=[]
    vit2=[]
    def f(j) :
        return (forceN(j,m,pos)/m[j])
    for i in range(len(pos)) :
        solution=verlet_3d(f,0,h,2,vit[i],pos[i])
        vit2.append(solution[0][1])
        pos2.append(solution[1][1])
    return(vit2,pos2)
```

4.a) $ln(\tau_N) = Kln(N)$ avec $K = 2$

b) on a donc une complexité en $O(N^{\mathbf{2}}$.

5. a) etat suiv a une complexité en $O(N^3)$

b) La complexité est plus grande que celle obtenue en III.2.4

```python
#Question III.2.6
def simulation_verlet(deltat,n) :
    pos=p0
    vit=v0
    position=[p0]
    for i in range(n) :
        solutions=etat_suiv(m,pos,vit,deltat)
        vit=solutions[0]
        pos=solutions[1]
        position.append(pos)
    return position
```