DM 2 :Exercice 5 TD 3

Guillaume Gatt Pierre Goutagny

20 Octobre 2020

1.

$$\begin{aligned}\psi \colon E^* \times E &\longrightarrow k\\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda(x)\end{aligned}$$

2. On pose $n = (dim(E))$
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.
On pose les endomorphismes $e_{i,j}$ de la manière suivant :
$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ e_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j \ si\ i=k \\ 0\ sinon \end{cases}$
Montrons que $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $Hom(E)$.
On a $|(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}| = n^2 = dim(Hom(E))$.
Montrons que cette famille est libre :
Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tel que $\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0$
On donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:
$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} e_{i,j}(e_k) = 0$
$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{k,j} e_j = 0$
On a donc comme $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre :
$\forall k \in [\![1,n]\!] \forall j \in [\![1,n]\!], \lambda_{k,j} = 0$
donc $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre et a pour cardinal la dimension de Hom(E) donc c'est une base.

Montrons que $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = tr(e_{i,j})$:
Montrons que $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$ où $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ sont les formes linéaires coordonnées à la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)$ est l'application $z \to e_i^*(z)e_j$
Il s'agit donc de l'application qui pour $k \in [\![1,n]\!]$:
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)(e_k) = \begin{cases} e_j \ si\ i=k \\ 0\ sinon \end{cases}$
donc $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$.
On a donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \overline{\psi}(e_i^* \otimes e_j) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1\ si\ i=j \\ 0\ sinon \end{cases} = tr(e_{i,j})$
On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = tr(e_{i,j})$
On a donc comme $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base on a pour $u \in Hom(E)$:
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} tr(e_{i,j})$
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = tr(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = tr(u)$
Donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1} = tr$

3. Écrivons t comme somme de $\ell(t)$ tenseurs simples :
$t = \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i$, avec $\lambda_i \in E^*$ et $x_i \in F$ pour $1 \leq i \leq \ell(t)$
Soit $z \in \ker \varphi(t)$.
Alors $\sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i = 0$
Or les $(x_i)_{1\leq i\leq \ell(t)}$ sont libres.

Sinon, un des e_i est une combinaison linéaire des autres. Supposons sans perdre de généralité que ce soit x_1. Alors il existe $\mu_2, \ldots, \mu_{\ell(t)}$ des scalaires tels que $x_1 = \sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
t &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\
&= \lambda_1 \otimes \left(\sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i \right) + \sum_{i=2}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\
&= \sum_{i=2}^{\ell(t)} (\lambda_i + \mu_i \lambda_1) \otimes x_i \quad \text{par bilinéarité de } \otimes
\end{aligned}
$$

Ainsi on peut écrire t comme somme de $\ell(t) - 1$ vecteurs simples : contradiciton.

Tous les $\lambda_i(z)$ sont donc nuls.

Donc $\ker \varphi(t) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$

De plus on a l'inclusion réciproque :

En effet, si $z \in \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, on a

$$
\begin{aligned}
\varphi(t)(z) &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell(t)} 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On en conclut que $\ker \varphi(t) = \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, puis l'égalité des dimensions.

Or les λ_i sont libres, d'après le même argument que pour les x_i, donc $\dim \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i = n - \ell(t)$

Ainsi, en appliquant le théorème du rang à $\varphi(t)$, on obtient $\boxed{\operatorname{rg} \varphi(t) = \ell(t)}$

4. Cherchons $t \in E^* \otimes F$ tel que $rg(\varphi(t)) \geq 2$.
   Comme $dim(E) \geq 2$ il existe e_1 et e_2 deux vecteur non colinéaire de E, on complète cette famille libre (e_1, e_2) en une base de E $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.
   On considère $e_i^* \in E^*$ les formes linéaire coordonnées dans la base e_i à cette base.
   De même avec $m = dim(F) \geq 2$ on construit $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de F.
   On pose $t = e_1^* \otimes f_1 + e_2^* \otimes f_2$
   on a donc $\varphi(t)$ est l'application $z \in E \to e_1^*(z) f_1 + e_2^*(z) f_2$.
   On a donc $\varphi(t)(e_1) = f_1$ et $\varphi(t)(e_2) = f_2$ donc $(f_1, f_2) \in Im(\varphi(t))$
   Comme $Im(\varphi(t))$ est un espace vectoriel, $Vect(f_1, f_2) \subset Im(\varphi(t))$
   On a donc comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaire $l(t) = rg(\varphi(t) = dim(Im(\varphi(t))) \geq 2$
   donc t ne peut s'écrire comme un tenseur simple.