Exercice 5 TD 3

Pierre Goutagny, Guillaume Gatt

October 15, 2020

2) On pose $n = (dim(E))$
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.
On pose les endomorphismes $e_{i,j}$ de la manière suivant :
$\forall (i,j,k) \in^3,\ e_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j\ si\ i = k \\ 0\ sinon \end{cases}$
Montrons que $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $Hom(E)$.
On a $|(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}| = n^2 = dim(Hom(E))$.
Montrons que cette famille est libre :
On pose $k\%n$ le reste de la division euclidienne de k par n.
On pose $k//n$ le quotient de la division euclidienne de k par n.
On pose $u_k = e_{(k\%n)+1,(k//n)+1}$.
Soit $\lambda_1, ..., \lambda_{n^2}$ tel que $\sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k u_k = 0$
On donc pour tout $i \in [[1,n]]$:
$\sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k u_k(e_i) = 0$
$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{kn+i} e_{(k+i)\%(n+1)} = 0$
or la famille $(e_{(k+i)\%(n+1)})_{0\leq k\leq n-1} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$
On a donc comme $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre :
$\forall i \in [[1,n]] \forall kin[[0,n-1]], \lambda_{kn+i} = 0$
On a donc : $\forall k \in [[1,n^2]] lambda_k = 0$
donc $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre et a pour cardinal la dimension de Hom(E) donc c'est une base.

Montrons que $\overline{\psi} \circ \phi^{-1}(e_{i,j}) = tr(e_{i,j})$:
Montrons que $\phi()$