

Exercice 5 TD 3

Guillaume Gatt, Pierre Goutagny

October 18, 2020

2) On pose $n = (\dim(E))$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

On pose les endomorphismes $e_{i,j}$ de la manière suivant :

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, \quad e_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\text{Hom}(E)$.

On a $|(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}| = n^2 = \dim(\text{Hom}(E))$.

Montrons que cette famille est libre :

Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ tel que $\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0$

On donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \lambda_{i,j} e_{i,j}(e_k) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{k,j} e_j = 0$$

On a donc comme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_{k,j} = 0$$

donc $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre et a pour cardinal la dimension de $\text{Hom}(E)$ donc c'est une base.

Montrons que $\bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \text{tr}(e_{i,j})$:

Montrons que $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$

$\varphi(e_i^* \otimes e_j)$ est l'application $z \rightarrow e_i^*(z)e_j$

Il s'agit donc de l'application qui pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\varphi(e_i^* \otimes e_j)(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$.

$$\text{On a donc } \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \bar{\psi}(\varphi(e_i^* \otimes e_j)) = \bar{\psi}(e_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \text{tr}(e_{i,j})$$

On a donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \text{tr}(e_{i,j})$

On a donc comme $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base on a pour $u \in \text{Hom}(E)$:

$$\bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} \text{tr}(e_{i,j})$$

$$\bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \text{tr}(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \text{tr}(u)$$

Donc $\bar{\psi} \circ \varphi^{-1} = \text{tr}$

4) Cherchons $t \in E^* \otimes F$ tel que $\text{rg}(\varphi(t)) \geq 2$.

Comme $\dim(E) \geq 2$ il existe e_1 et e_2 deux vecteur non colinéaire de E , on complète cette famille libre (e_1, e_2) en une base de E $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On considère $e_i^* \in E^*$ les application linéaire canonique associé à cette base.

de même avec $m = \dim(F) \geq 2$ on construit $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de F .

On pose $t = e_1^* \otimes f_1 + e_2^* \otimes f_2$

on a donc $\varphi(t)$ est l'application $z \in E \rightarrow e_1^*(z)f_1 + e_2^*(z)f_2$.

On a donc $\varphi(t)(e_1) = f_1$ et $\varphi(t)(e_2) = f_2$ donc $(f_1, f_2) \in \text{Im}(\varphi(t))$

Comme $\text{Im}(\varphi(t))$ est un espace vectoriel, $\text{Vect}(f_1, f_2) \subset \text{Im}(\varphi(t))$

On a donc comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaire $l(t) = \text{rg}(\varphi(t) = \dim(\text{Im}(\varphi(t))) \geq 2$

donc t ne peut s'écrire comme un tenseur simple