1.

$$\begin{aligned}\psi\colon E^* \times E &\longrightarrow k\\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda(x)\end{aligned}$$

2.

3. Écrivons t comme somme de $\ell(t)$ tenseurs simples :
   $t = \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i$, avec $\lambda_i \in E^*$ et $x_i \in F$ pour $1 \leq i \leq \ell(t)$
   Soit $z \in \ker \varphi(t)$.
   Alors $\sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i = 0$
   Or les $(x_i)_{1 \leq i \leq \ell(t)}$ sont libres.

   Sinon, un des e_i est une combinaison linéaire des autres. Supposons sans perdre de généralité que ce soit x_1. Alors il existe $\mu_2, \ldots, \mu_{\ell(t)}$ des scalaires tels que $x_1 = \sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i$.
   On a alors

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\ &= \lambda_1 \otimes \left(\sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i \right) + \sum_{i=2}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(t)} (\lambda_i + \mu_i \lambda_1) \otimes x_i \quad \text{par bilinéarité de } \otimes \end{aligned}$$

   Ainsi on peut écrire t comme somme de $\ell(t) - 1$ vecteurs simples : contradiciton.

   Tous les $\lambda_i(z)$ sont donc nuls.
   Donc $\ker \varphi(t) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$
   De plus on a l'inclusion réciproque :

   En effet, si $z \in \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(t)(z) &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On en conclut que $\ker \varphi(t) = \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, puis l'égalité des dimensions.

   Or les λ_i sont libres, d'après le même argument que pour les x_i, donc $\dim \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i = n - \ell(t)$

   Ainsi, en appliquant le théorème du rang à $\varphi(t)$, on obtient $\boxed{\operatorname{rg} \varphi(t) = \ell(t)}$