Exercice 5 TD 3

Guillaume Gatt, Pierre Goutagny

October 15, 2020

2) On pose $n = (dim(E))$
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.
On pose les endomorphismes $e_{i,j}$ de la manière suivant :
$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ e_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j\ si\ i = k \\ 0\ sinon \end{cases}$
Montrons que $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $Hom(E)$.
On a $|(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}| = n^2 = dim(Hom(E))$.
Montrons que cette famille est libre :
On pose $k\%n$ le reste de la division euclidienne de k par n.
On pose $k//n$ le quotient de la division euclidienne de k par n.
On pose $u_k = e_{(k\%n)+1,(k//n)+1}$.
Soit $\lambda_1, ..., \lambda_{n^2}$ tel que $\sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k u_k = 0$
On donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
$\sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k u_k(e_i) = 0$
$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{kn+i} e_{(k+i)\%(n+1)} = 0$
or la famille $(e_{(k+i)\%(n+1)})_{0\leq k\leq n-1} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$
On a donc comme $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre :
$\forall i \in [\![1,n]\!] \forall k \in [\![0,n-1]\!], \lambda_{kn+i} = 0$
On a donc : $\forall k \in [\![1,n^2]\!] \lambda_k = 0$
donc $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre et a pour cardinal la dimension de Hom(E) donc c'est une base.

Montrons que $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = tr(e_{i,j})$:
Montrons que $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)$ est l'application $z \to e_i^*(z)e_j$
Il s'agit donc de l'application qui pour $k \in [\![1,n]\!]$:
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)(e_k) = \begin{cases} e_j\ si\ k = j \\ 0\ sinon \end{cases}$
donc $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$.
On a donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \overline{\psi}(e_i^* \otimes e_j) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1\ si\ i = j \\ 0\ sinon \end{cases} = tr(e_{i,j})$
On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = tr(e_{i,j})$
On a donc comme $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base on a pour $u \in Hom(E)$:
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} tr(e_{i,j})$
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = tr(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = tr(u)$
Donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1} = tr$

4) Cherchons $t \in E^* \otimes F$ tel que $rg(\varphi(t)) \geq 2$.
Comme $dim(E) \geq 2$ il existe e_1 et e_2 deux vecteur non colinéaire de E, on complète cette famille libre (e_1, e_2) en une base de E $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. On considère $e_i^* \in E^*$ les application linéaire canonique associé à cette base.
de même avec $m = dim(F) \geq 2$ on construit $(f_i)1 \leq i \leq m$ une base de F.
On pose $t = e_1^* \otimes f_1 + e_2^* \otimes f_2$
on a donc $\varphi(t)$ est l'application $z \in E \to e_1^*(z)f_1 + e_2^*(z)f_2$.
On a donc $\varphi(t)(e_1) = f_1$ et $\varphi(t)(e_2) = f_2$ donc $(f_1, f_2) \in Im(\varphi(t))$

Comme $Im(\varphi(t))$ est un espace vectoriel, $Vect(f_1, f_2) \subset Im(\varphi(t))$
On a donc comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaire $l(t) = rg(\varphi(t) = dim(Im(\varphi(t))) \geq 2$
donc t ne peut s'écrire comme un tenseur simple