

DM 2 : Exercice 5 TD 3

Guillaume Gatt

Pierre Goutagny

20 Octobre 2020

1.

$$\begin{aligned}\psi: E^* \times E &\longrightarrow k \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda(x)\end{aligned}$$

2. On pose $n = (\dim(E))$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

On pose les endomorphismes $e_{i,j}$ de la manière suivant :

$$\forall (i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3, e_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\text{Hom}(E)$.

On a $|(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}| = n^2 = \dim(\text{Hom}(E))$.

Montrons que cette famille est libre :

Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ tel que $\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0$

On donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \lambda_{i,j} e_{i,j}(e_k) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{k,j} e_j = 0$$

On a donc comme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_{k,j} = 0$$

donc $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre et a pour cardinal la dimension de $\text{Hom}(E)$ donc c'est une base.

Montrons que $\bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \text{tr}(e_{i,j})$:

Montrons que $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$ où $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ sont les formes linéaires coordonnées à la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$

$\varphi(e_i^* \otimes e_j)$ est l'application $z \rightarrow e_i^*(z)e_j$

Il s'agit donc de l'application qui pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\varphi(e_i^* \otimes e_j)(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$.

$$\text{On a donc } \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \bar{\psi}(e_i^* \otimes e_j) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \text{tr}(e_{i,j})$$

On a donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \text{tr}(e_{i,j})$

On a donc comme $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base on a pour $u \in \text{Hom}(E)$:

$$\bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} \text{tr}(e_{i,j})$$

$$\bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \text{tr}(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \text{tr}(u)$$

Donc $\bar{\psi} \circ \varphi^{-1} = \text{tr}$

3. Écrivons t comme somme de $\ell(t)$ tenseurs simples :

$$t = \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i, \text{ avec } \lambda_i \in E^* \text{ et } x_i \in F \text{ pour } 1 \leq i \leq \ell(t)$$

Soit $z \in \ker \varphi(t)$.

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i = 0$$

Or les $(x_i)_{1 \leq i \leq \ell(t)}$ sont libres.

Sinon, un des e_i est une combinaison linéaire des autres. Supposons sans perdre de généralité que ce soit x_1 . Alors il existe $\mu_2, \dots, \mu_{\ell(t)}$ des scalaires tels que $x_1 = \sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i$.

On a alors

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\ &= \lambda_1 \otimes \left(\sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i \right) + \sum_{i=2}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(t)} (\lambda_i + \mu_i \lambda_1) \otimes x_i \quad \text{par bilinéarité de } \otimes \end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire t comme somme de $\ell(t) - 1$ vecteurs simples : contradiction.

Tous les $\lambda_i(z)$ sont donc nuls.

$$\text{Donc } \ker \varphi(t) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$$

De plus on a l'inclusion réciproque :

En effet, si $z \in \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(t)(z) &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en conclut que $\ker \varphi(t) = \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, puis l'égalité des dimensions.

Or les λ_i sont libres, d'après le même argument que pour les x_i , donc $\dim \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i = n - \ell(t)$

Ainsi, en appliquant le théorème du rang à $\varphi(t)$, on obtient $\boxed{\text{rg } \varphi(t) = \ell(t)}$

4. Cherchons $t \in E^* \otimes F$ tel que $\text{rg}(\varphi(t)) \geq 2$.

Comme $\dim(E) \geq 2$ il existe e_1 et e_2 deux vecteurs non colinéaires de E , on complète cette famille libre (e_1, e_2) en une base de E $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On considère $e_i^* \in E^*$ les formes linéaires coordonnées dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ à cette base.

De même avec $m = \dim(F) \geq 2$ on construit $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de F .

On pose $t = e_1^* \otimes f_1 + e_2^* \otimes f_2$

On a donc $\varphi(t)$ est l'application $z \in E \rightarrow e_1^*(z) f_1 + e_2^*(z) f_2$.

On a donc $\varphi(t)(e_1) = f_1$ et $\varphi(t)(e_2) = f_2$ donc $(f_1, f_2) \in \text{Im}(\varphi(t))^2$

Comme $\text{Im}(\varphi(t))$ est un espace vectoriel, $\text{Vect}(f_1, f_2) \subset \text{Im}(\varphi(t))$

On a donc comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires $\ell(t) = \text{rg}(\varphi(t)) = \dim(\text{Im}(\varphi(t))) \geq 2$

donc t ne peut s'écrire comme un tenseur simple.