DM 2 :Exercice 5 TD 3

Guillaume Gatt Pierre Goutagny

20 Octobre 2020

1.

$$\begin{aligned} \psi \colon E^* \times E &\longrightarrow k \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda(x) \end{aligned}$$

2. On pose $n = (\dim(E))$
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.
On pose les endomorphismes $e_{i,j}$ de la manière suivant :
$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ e_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Montrons que $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathrm{Hom}(E)$.
On a $|(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}| = n^2 = \dim(\mathrm{Hom}(E))$.
Montrons que cette famille est libre :
Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tel que $\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0$
On donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:
$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} e_{i,j}(e_k) = 0$
$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{k,j} e_j = 0$
On a donc comme $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre :
$\forall k \in [\![1,n]\!] \forall j \in [\![1,n]\!], \lambda_{k,j} = 0$
donc $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre et a pour cardinal la dimension de $\mathrm{Hom}(E)$ donc c'est une base.

Montrons que $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \mathrm{tr}(e_{i,j})$:
Montrons que $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$ où $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ sont les formes linéaires coordonnées à la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)$ est l'application $z \mapsto e_i^*(z) e_j$
Il s'agit donc de l'application qui pour $k \in [\![1,n]\!]$:
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
donc $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$.
On a donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \overline{\psi}(e_i^* \otimes e_j) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathrm{tr}(e_{i,j})$
On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \mathrm{tr}(e_{i,j})$
On a donc comme $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base on a pour $u \in \mathrm{Hom}(E)$:
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j}\, \mathrm{tr}(e_{i,j})$
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \mathrm{tr}(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \mathrm{tr}(u)$
Donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{tr}$

3. Écrivons t comme somme de $\ell(t)$ tenseurs simples :
   $t = \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i$, avec $\lambda_i \in E^*$ et $x_i \in F$ pour $1 \leq i \leq \ell(t)$
   Soit $z \in \ker \varphi(t)$.
   Alors $\sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i = 0$
   Or les $(x_i)_{1 \leq i \leq \ell(t)}$ sont libres.

   Sinon, un des e_i est une combinaison linéaire des autres. Supposons sans perdre de généralité que ce soit x_1. Alors il existe $\mu_2, \dots, \mu_{\ell(t)}$ des scalaires tels que $x_1 = \sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i$.
   On a alors

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\ &= \lambda_1 \otimes \left(\sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i \right) + \sum_{i=2}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(t)} (\lambda_i + \mu_i \lambda_1) \otimes x_i \quad \text{par bilinéarité de } \otimes \end{aligned}$$

   Ainsi on peut écrire t comme somme de $\ell(t) - 1$ vecteurs simples : contradiciton.

   Tous les $\lambda_i(z)$ sont donc nuls.
   Donc $\ker \varphi(t) \subseteq \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$
   De plus on a l'inclusion réciproque :

   En effet, si $z \in \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(t)(z) &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On en conclut que $\ker \varphi(t) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, puis l'égalité des dimensions.

   Or les λ_i sont libres, d'après le même argument que pour les x_i, donc $\dim \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i = n - \ell(t)$

   Ainsi, en appliquant le théorème du rang à $\varphi(t)$, on obtient $\boxed{\operatorname{rg} \varphi(t) = \ell(t)}$

4. Cherchons $t \in E^* \otimes F$ tel que $\operatorname{rg}(\varphi(t)) \geq 2$.
   Comme $\dim(E) \geq 2$ il existe e_1 et e_2 deux vecteur non colinéaire de E, on complète cette famille libre (e_1, e_2) en une base de E $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.
   On considère $e_i^* \in E^*$ les formes linéaire coordonnées dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ à cette base.
   De même avec $m = \dim(F) \geq 2$ on construit $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de F.
   On pose $t = e_1^* \otimes f_1 + e_2^* \otimes f_2$
   On a donc $\varphi(t)$ est l'application $z \in E \to e_1^*(z) f_1 + e_2^*(z) f_2$.
   On a donc $\varphi(t)(e_1) = f_1$ et $\varphi(t)(e_2) = f_2$ donc $(f_1, f_2) \in \operatorname{Im}(\varphi(t))^2$
   Comme $\operatorname{Im}(\varphi(t))$ est un espace vectoriel, $\operatorname{Vect}(f_1, f_2) \subset \operatorname{Im}(\varphi(t))$
   On a donc comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaire $l(t) = \operatorname{rg}(\varphi(t)) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi(t))) \geq 2$
   donc t ne peut s'écrire comme un tenseur simple.