1.

$$\begin{aligned}\psi\colon E^* \times E &\longrightarrow k\\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda(x)\end{aligned}$$

2.

3. Écrivons t comme somme de $\ell(t)$ tenseurs simples :
$t = \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i$, avec $\lambda_i \in E^*$ et $x_i \in E$ pour $1 \leq i \leq \ell(t)$
Soit $z \in \ker \varphi(t)$.
Alors $\sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i = 0$
Or les $(x_i)_{1 \leq i \leq \ell(t)}$ sont libres.

Sinon, un des e_i est une combinaison linéaire des autres. Supposons sans perdre de généralité que ce soit x_1. Alors il existe $\mu_2, \ldots, \mu_{\ell(t)}$ des scalaires tels que $x_1 = \sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i$.
On a alors

$$\begin{aligned}t &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i\\ &= \lambda_1 \otimes \left(\sum_{i=2}^{\ell(t)} \mu_i x_i\right) + \sum_{i=2}^{\ell(t)} \lambda_i \otimes x_i\\ &= \sum_{i=2}^{\ell(t)} (\lambda_i + \mu_i \lambda_1) \otimes x_i \quad \text{par bilinéarité de } \otimes\end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire t comme somme de $\ell(t) - 1$ vecteurs simples : contradiciton.

Tous les $\lambda_i(z)$ sont donc nuls.

Donc $\ker \varphi(t) \subseteq \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$

De plus on a l'inclusion réciproque :

En effet, si $z \in \bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(t)(z) &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} \lambda_i(z) x_i\\ &= \sum_{i=1}^{\ell(t)} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

On en conclut que $\ker \varphi(t) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i$, puis l'égalité des dimensions.

Or les λ_i sont libres, d'après le même argument que pour les x_i, donc $\dim \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\ell(t)} \ker \lambda_i = n - \ell(t)$

Ainsi, en appliquant le théorème du rang à $\varphi(t)$, on obtient $\boxed{\operatorname{rg} \varphi(t) = \ell(t)}$