Exercice 5 TD 3

Guillaume Gatt, Pierre Goutagny

October 18, 2020

2) On pose $n = (dim(E))$
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.
On pose les endomorphismes $e_{i,j}$ de la manière suivant :
$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ e_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j\ si\ i=k \\ 0\ sinon \end{cases}$
Montrons que $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $Hom(E)$.
On a $|(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}| = n^2 = dim(Hom(E))$.
Montrons que cette famille est libre :
Soit $(\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tel que $\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0$
On donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:
$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{i,j} e_{i,j}(e_k) = 0$
$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{k,j} e_j = 0$
On a donc comme $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre :
$\forall k \in [\![1,n]\!] \forall j \in [\![1,n]\!], \lambda_{k,j} = 0$
donc $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est libre et a pour cardinal la dimension de Hom(E) donc c'est une base.

Montrons que $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = tr(e_{i,j})$:
Montrons que $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$ où $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ sont les formes linéaires coordonnées à la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)$ est l'application $z \to e_i^*(z)e_j$
Il s'agit donc de l'application qui pour $k \in [\![1,n]\!]$:
$\varphi(e_i^* \otimes e_j)(e_k) = \begin{cases} e_j\ si\ i=k \\ 0\ sinon \end{cases}$
donc $\varphi(e_i^* \otimes e_j) = e_{i,j}$.
On a donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \overline{\psi}(e_i^* \otimes e_j) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1\ si\ i=j \\ 0\ sinon \end{cases} \quad = tr(e_{i,j})$
On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = tr(e_{i,j})$
On a donc comme $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base on a pour $u \in Hom(E)$:
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} \overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(e_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} tr(e_{i,j})$
$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(u) = tr(\sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j} e_{i,j}) = tr(u)$
Donc $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1} = tr$

4) Cherchons $t \in E^* \otimes F$ tel que $rg(\varphi(t)) \geq 2$.
Comme $dim(E) \geq 2$ il existe e_1 et e_2 deux vecteur non colinéaire de E, on complète cette famille libre (e_1, e_2) en une base de E $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.
On considère $e_i^* \in E^*$ les formes linéaire coordonnées dans la base e_i à cette base.
De même avec $m = dim(F) \geq 2$ on construit $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de F.
On pose $t = e_1^* \otimes f_1 + e_2^* \otimes f_2$
on a donc $\varphi(t)$ est l'application $z \in E \to e_1^*(z)f_1 + e_2^*(z)f_2$.
On a donc $\varphi(t)(e_1) = f_1$ et $\varphi(t)(e_2) = f_2$ donc $(f_1, f_2) \in Im(\varphi(t))$
Comme $Im(\varphi(t))$ est un espace vectoriel, $Vect(f_1, f_2) \subset Im(\varphi(t))$
On a donc comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaire $l(t) = rg(\varphi(t) = dim(Im(\varphi(t))) \geq 2$
donc t ne peut s'écrire comme un tenseur simple