Démonstration kholle 8

I équation différentielles linéaire du premier ordre : résolution d'équation homogène associée

Propriété : Soit une EDL1H :
$a(x)y' + b(x)y = 0$
Si a ne s'annule pas sur I.
Notons A une primitive de $\frac{b}{a}$ sur I.
Les solutions sont les fonctions sous la forme :
$x \in I \to \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
Démonstration :
1) Ces fonctions conviennent bien :
soit $f : I \to \mathbb{K}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé
$\quad x \to \lambda e^{-A(x)}$
Pour $x \in I$:
$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = a(x)(-\frac{b(x)}{a(x)}f(x)) + b(x)f(x) = 0$
2)Soit $f \in S_h$
Posons $g : I \to \mathbb{K}$
$\quad x \to f(x)e^{A(x)}$
Pour $x \in I$:
$g'(x) = f'(x)e^{A(x)} + f(x)\frac{b(x)}{a(x)}e^{A(x)}$
$g'(x) = \frac{e^{A(x)}}{a(x)}\underbrace{(a(x)f'(x) + b(x)f(x))}_{=0}$
$g = \tilde{0}$ sur l'intervalle I donc g est constante :
$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in I, g(x) = \lambda$
$f(x)e^{A(x)} = \lambda \quad f(x) = \lambda e^{A(x)}$

II équation différentielles linéaire du premier ordre : méthode de variation de la constante

Propriété :
Soit une EDL1 :
$a(x)y' + b(x)y = c(x)$
On peut chercher une solution particulière y_p de la forme :
$y_p : I \to \mathbb{K}$
$\quad x \to \lambda(x)e^{-A(x)}$
avec $\lambda \in \mathscr{D}^1(I, \mathbb{K})$ à déterminer
Démonstration : Si la fonction λ existe :
Pour $x \in I$:
$$a(x)y_p'(x) + b(x)y_p(x) = c(x)$$
$$a(x)\lambda'(x)e^{-A(x)}\underbrace{-a(x)\lambda(x)A'(x)e^{-A(x)} + b(x)\lambda(x)e^{-A(x)}}_{=0 \quad car \quad A'(x)=\frac{b(x)}{a(x)}} = c(x)$$
donc : $a(x)\lambda'(x)e^{-A(x)} = c(x)$
$\quad \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{A(x)}$

synthèse :
Soit $\lambda : I \to \mathbb{K}$: une primitive de $x \to \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)}$
Posons $f : I \to \mathbb{R}$
$x \to \lambda(x) e^{-A(x)}$
Pour $x \in I$:
$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = a(x)\lambda'(x)e^{-A(x)} \underbrace{-a(x)\lambda(x)A'(x)e^{-A(x)} + b(x)\lambda(x)e^{-A(x)}}_{=0 \quad car \quad A'(x)=\frac{b(x)}{a(x)}}$
$a(x)\lambda'(x)e^{-A(x)} = a(x)\frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)} e^{-A(x)} = c(x)$
donc f est bien solution de l'équation

III équation différentielles linéaire du 2 ordre à coefficient constant homogène : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, équation caractéristiques de discriminant $\neq 0$

Propriété : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Soit une EDL2CCH :
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$
Soit l'équation :
$az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
Alors :
Si l'équation possède deux racines simples de r et s :
$S_h = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \to \lambda e^{rs} + \mu e^{sx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$
le couple $\lambda, \mu)$ est uniquement déterminé pour chaque solution
Démonstration :
Comme s et r sont des racines simples :
$r + s = -\frac{b}{a}$
$rs = \frac{c}{a}$
1) Ces fonctions conviennent :
si $f : x \in \mathbb{R} \to \lambda e^{rs} + \mu e^{sx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$:
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda r e^{rx} + \mu s e^{sx}$
$f''(x) = \lambda r^2 e^{rx} + \mu s^2 e^{sx}$
$af''(x) + b'f(x) + cf(x) = \lambda e^{rx} \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} + \mu e^{sx} \underbrace{(as^2 + bs + c)}_{=0} = 0$
2) Montrons que toute solution est de cette forme :
Soit $f \in S_h : af'' + bf' + cf = 0$
Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \to f(x)e^{-rx}$
Pour $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = f'(x)e^{-rx} - rf(x)e^{-rx}$
$g''(x) = f''(x)e^{-rx} - 2rf'(x)e^{-rx} + r^2 f(x)e^{-rx}$
$g''(x) = (-\frac{b}{a}f'(x) - \frac{c}{a}f(x))e^{-rx} - 2rf'(x)e^{-rx} + r^2 f(x)e^{-rx}$
$g''(x) = ((s - r)f'(x) - (s - r)rf(x))e^{-rx}$
$g''(x) = (s - r)e^{-rx}(f'(x) - rf(x))e^{-rx} = (s - r)g'(x)$
Posons h=g' :
$h' - (s - r)h = 0$
Ainsi il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \alpha e^{(s-r)x}$
Comme $g' = h$, et $s - r \neq 0$ donc il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \beta + \frac{\alpha}{s-r} e^{(s-r)x}$
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \beta e^{rx} + \frac{\alpha}{s-r} e^{sx}$
3) Si on se donne $f \in S_E$:
$f(0) = \lambda + \mu$
$f'(0) = \lambda r + \mu s$
donc : $\mu(s - r) = f'(0) - rf(0)$

$\lambda(s-r) = sf(0) - f(0)$
Comme $s - r \neq 0$:
$\lambda = \frac{sf(0)-f'(0)}{s-r}$
$\mu = \frac{f'(0)-rf(0)}{s-r}$

IV équation différentielles linéaire du 2 ordre à coefficient constant homogène : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, équation caractéristique de discrimant = 0

Propriété : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Soit une EDL2CCH :
$ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$
Soit l'équation :
$az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
Alors :
Si l'équation admet une racine double r :
$S_H = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \to (x + \mu x)e^{rx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$
Démonstration : Comme r est une racine double donc :
$2r_0 = -\frac{b}{a}$
$r_0^2 = \frac{c}{a}$
1) soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \to (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$
avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$
Pour $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = \mu e^{r_0 x} + (\lambda + \mu x)r_0 e^{r_0 x}$
$f''(x) = 2\mu r_0 e^{r_0 x} + (\lambda + \mu x){r_0}^2 e^{r_0 x}$
$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = e^{r_0 x}(\underbrace{(ar_0^2 + br_0 + c)}_{=0}(\lambda + \mu x) + \mu \underbrace{(2r_0 a + b)}_{=0}) = 0$

b) Soit $f \in S_H$:
Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \to f(x)e^{-r_0 x}$
Posons $x \in \mathbb{R}$:
$g'(x) = f'(x)e^{-r_0 x} - r_0 f(x)e^{r_0 x}$
$g''(x) = f''(x)e^{-r_0 x} - 2r_0 f'(x)e^{-r_0 x} + {r_0}^2 f(x)e^{-r_0 x}$
$f''(x)e^{-r_0 x} = \frac{-b}{a} f'(x) - \frac{c}{a} f(x)$
$f''(x)e^{-r_0 x} = 2r_0 f'(x) - {r_0}^2 f(x)$
$g''(x) = \tilde{0}$
$\exists \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \mu$
$\exists \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda + \mu x$
$f(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$
3) Si $f \in S_H$ est donnée :
$f(0) = \lambda$
$f'(0) = \mu + \lambda r_0$
$\lambda = f(0)$
$\mu = f'(0) - r_0 f(0)$

V équation différentielles linéaire du 2 ordre à coefficient constant homogène : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, équation caractéristique de discrimant > 0

Propriété : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit une EDL2CCH :
$ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$az^2 + bz + c = 0$
Si l'équation a deux racines réelles simples r et s :

$S_H = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
Démonstration :
1) f(x) convient bien voir cas complexe
2) soit $f \in S_H$ par la propriété précédente :
$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$
alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \overline{f(x)} = \overline{\lambda} e^{\overline{rx}} + \overline{\mu} e^{\overline{sx}}$
Comme r et s sont réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{f(x)} = \overline{\lambda} e^{rx} + \overline{\mu} e^{sx}$
Par unicité des coefficients dans le cas complexe on a donc :
$\lambda = \overline{\lambda}, \mu = \overline{\mu}$
c'est-à-dire $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
3) unicité : acquise

VI équation différentielles linéaire du 2 ordre à coefficient constant homogène : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, équation caractéristique de discrimant < 0

Propriété : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit une EDL2CCH :
$ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$az^2 + bz + c = 0$
Si l'équation a deux racines réelles complexes non réelles conjuguées :
$\alpha \pm i\omega(\alpha \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^*)$
$S_H = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \underbrace{e^{\alpha x}(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)}_{=Ae^{\alpha x}\cos(\omega x - \phi)}$
Coefficient (C,D) uniquement déterminé
Démonstration :
1) Notons $r = \alpha + i\omega$
Nous savons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \to e^{ix}$
verifie : $af'' + bf' + cf = 0$
avec $u = \mathscr{R}(f)$ et $v = \mathscr{I}(f(x))$
comme $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:
$au'' + bu' + cu = 0$
$av'' + bv' + cv = 0$
Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:
$a(\lambda u + \mu v)'' + b(\lambda u + \mu v)' + c(\lambda u + \lambda v) = 0$
$\lambda u + \mu v \in S_H$
On a bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda u(x) + \mu v(x) = \lambda \mathscr{R}(e^{\alpha x} e^{i\omega x}) + \mu \mathscr{I}(e^{ax} e^{i\omega x})$
$= \lambda e^{\alpha x}\cos(\omega x) + \mu e^{\alpha x}\sin(\omega x)$
2) Soit $f \in S_H$:
$af'' + bf' + cf = 0$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
On sait qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{(\alpha + i\omega)x} + \mu e^{(a - i\omega)x}$
donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \overline{f(x)} = \overline{\lambda e^{(\alpha+i\omega)x} + \mu e^{(a-i\omega)x}}$
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \overline{\lambda} e^{(\alpha - i\omega)x} + \overline{\mu} e^{(a+i\omega)x}$ car $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Par unicité des coefficients dans le cas complexe :
$\lambda = \overline{\mu}\ \mu = \overline{\lambda}$
Sous forme exponentielle ; $\mu = Be^{i\phi}$ $(B \in \mathbb{R}_+, \phi \in \mathbb{R})$ donc $\lambda = Be^{-i\phi}$
Pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = Be^{-i\phi} e^{(\alpha + i\omega)x} + Be^{i\phi} e^{(\alpha - i\omega)x}$
$f(x) = Be^{\alpha x}(e^{i(\omega x - \phi)} + e^{i(\phi - \omega x)})$
$f(x) = 2Be^{\alpha x}\cos(\omega x - \phi)$
Posons $A = 2B \in \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{\alpha x}(Ccos(\omega x) + Dsin(\omega x))$
avec $C = A\cos(\phi) \in \mathbb{R}$

$D = A\sin(\phi) \in \mathbb{R}$
3) Pour $f \in S_H$ donnée :
$f(0) = C$
$f(\frac{\pi}{2\omega}) = \underbrace{e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}}_{\neq 0} D$

VII équation différentielles linéaire du 2 ordre à coefficient constant à second membre de la forme $P(x)e^{mx}$: recherche d'une solution particulière (uniquement P=1)

Propriété : solution particulière pour second membre polynôme $\times$ exponnentielle :
$ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx}$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $P(x)$: polynôme $m \in \mathbb{K}$
$az^2 + bz + c = 0$
1) Si m n'est pas racine de l'équation on cherche une solution particulière de E sous la forme :
$x \to Q(x)e^{mx}$
Avec $Q(x)$polynome de même degré que P
2) Si m est racine simple on a :
$x \to xQ(x)e^{mx}$