

Démonstration kholle 27

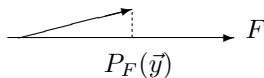
I Distance d'un point à un sous-espace, atteinte en un unique point (le projeté orthogonal) Exemple : $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$ pour le produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

Propriété :

Soit F de dimension finie $d(\vec{y}, F)$ est atteinte en un unique point qui est $p_F(\vec{y})$

Démonstration :

si $\dim(E) = 2$ et $\dim(F) = 1$:



$$\|\vec{y} - \vec{x}\| > \|\vec{y} - p_F(\vec{y})\|$$

Cas général : $p_F(\vec{y}) - \vec{x} \in F$ car \vec{x} et $p_F(\vec{y}) \in F$

et $\vec{y} - p_F(\vec{y}) \in F^\perp$ car p_F est la projection sur F parallèle à F^\perp

donc par le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{y} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{y} - p_F(\vec{y})\|^2 + \|p_F(\vec{y}) - \vec{x}\|^2$$

$\|\vec{y} - \vec{x}\|^2 \geq \|\vec{y} - p_F(\vec{y})\|^2$ avec égalité si et seulement si $\|p_F(\vec{y}) - \vec{x}\| = 0$, c'est-à-dire $\vec{x} = p_F(\vec{y})$

Exemple :

$$E = \mathbb{R}[X] \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Calculer $(d(X^2, \mathbb{R}_1[X]))^2$

$$\text{où } \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|X^2 - (aX + b)\|^2$$

Il est atteint pour (a, b) tel que $p_F(X^2) = aX + b$ uniquement :

$$X^2 - p_F(X^2) \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp$$

donc :

$$\langle X^2 - p_F(X^2), 1 \rangle = 0$$

$$\langle X^2 - p_F(X^2), X \rangle = 0$$

$$\langle aX + b, 1 \rangle = \langle X^2, 1 \rangle$$

$$\langle aX + b, X \rangle = \langle X^2, X \rangle$$

$$\langle X, 1 \rangle a + \langle 1, 1 \rangle b = \langle X^2, 1 \rangle$$

$$\langle X, X \rangle a + \langle 1, X \rangle b = \langle X^2, X \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a + b &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{-1/12} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ (a, b) &= (1, -\frac{1}{6}) \end{aligned}$$

Le minimum cherché est :

$$\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{4})^2 dt$$

On peut écrire :

$$X^2 = \underbrace{p_F(X^2)}_{\in F} + \underbrace{(X^2 - p_F(X^2))}_{\in F^\perp}$$

donc par Pythagore :

$$\|X^2\|^2 = \|p_F(X^2)\|^2 + \underbrace{\|X^2 - p_F(X^2)\|^2}_m$$

$$m = \|X^2\|^2 - \|aX + b\|^2$$

$$m = \int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 (t - \frac{1}{6})^2 dt$$

ce qui est le plus simple à calculer

On obtient :

$$m = \frac{1}{5} - [\frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{36}t]_0^1$$

$$m = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$$

II Si E est un espace euclidien, isomorphisme

$$\phi : u \in E \mapsto \langle u, \cdot \rangle \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

Théorème :

Soit E euclidien et $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$\phi : E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

$$\vec{u} \mapsto \langle \vec{u}, \cdot \rangle$$

est un isomorphisme

Démonstration :

Montrons que ϕ est linéaire c'est-à-dire : $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Pour $\vec{x} \in E$:

$$\langle \vec{u} + \lambda \vec{v}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle + \lambda \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle$$

nombre réels donc : $\phi(\vec{u} + \lambda \vec{v})(\vec{x}) = \phi(\vec{u})(\vec{x}) + \lambda \phi(\vec{v})(\vec{x})$

Vrai pour tout \vec{x} donc :

application de E dans \mathbb{R} $\phi(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \phi(\vec{u}) + \lambda \phi(\vec{v})$

Soit $\vec{u} \in \text{Ker}(\phi)$:

$$\phi(\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\forall \vec{x} \in E, \underbrace{\phi(\vec{u}, \vec{x})}_{\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle} = 0$$

pour $\vec{x} = \vec{u}$: $\|\vec{u}\|^2 = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$

$$\text{Ker}(\phi) = \{\vec{0}\}$$

Théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(\phi)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(\phi))$$

$$\dim(\text{Im}(\phi)) = n = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$$

or $\text{Im}(\phi) \subset \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ donc $\text{Im}(\phi) = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

III Isométries vectorielles : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, équivalence entre conservation de la norme et conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormée

Propriété :

l'ensemble $O(E)$ des isométries vectorielles d'un espace euclidien E est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

C'est le groupe orthogonal de E, les isométries sont aussi appelées automorphismes orthogonaux

Démonstration :

Montrons que $O(E) \subset GL(E)$:

Soit $f \in O(E)$: $f \in \mathcal{L}(E)$ et :

$$\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

$$\text{Soit } \vec{x} \in \text{Ker}(f) : \|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\| = \|\vec{0}\| = 0 \text{ donc } \vec{x} = \vec{0}$$

f est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie donc f est bijectif (corollaire du théorème du rang)

$$O(E) \neq \emptyset \text{ car } Id_E \in O(E)$$

$$\text{Soit } (f, g) \in (O(E))^2 :$$

$$\text{Pour } \vec{x} \in E :$$

$$\|f(g(\vec{x}))\| = \|g(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \text{ car } (f, g) \in (O(E))^2$$

$$\text{donc } fg \in O(E)$$

$$\text{Soit } f \in O(E) :$$

$$\text{Soit } \vec{x} \in E$$

$$\text{avec } \vec{y} = f^{-1}(\vec{x}) \in E :$$

$$\|f(\vec{y})\| = \|\vec{y}\| \text{ car } f \in O(E)$$

$$\|\vec{x}\| = \|f^{-1}(\vec{x})\| \text{ ainsi } f^{-1} \in O(E)$$

Propriété : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$1) \forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

$$2) \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Démonstration :

$$2 \Rightarrow 1 : \text{ Soit } \vec{x} \in E : \text{ Avec } \vec{y} = \vec{x} :$$

$$\|f(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$$

$$\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \text{ car les normes sont positives}$$

$$1 \Rightarrow 2 : \text{ Soit } (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$$

polarisation :

$$2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \|f(\vec{x}) + f(\vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x})\|^2 - \|f(\vec{y})\|^2$$

$$\text{comme } f \in \mathcal{L}(E), 2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \|f(\vec{x} + \vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x})\|^2 - \|f(\vec{y})\|^2$$

$$\text{Par hypothèse : } 2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$$

$$\text{par polarisation : } \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Propriété : E euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$1) f \in O(E)$$

$$2) \text{ Pour toute base orthonormée } \mathcal{B} \text{ de } E, f(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormée de } E$$

$$3) \text{ Il existe une base orthonormée } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ tel que } f(\mathcal{B}) \text{ soit une base orthonormée de } E$$

Démonstration :

$$\text{notons } n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$$

$$1 \Rightarrow 2 : f \in O(E)$$

$$\text{Soit } \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ une base orthonormée de } E$$

$$\text{Alors pour } (i, j) \in [[1, n]]^2 :$$

$$\langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \text{ car } f \in O(E)$$

$$\langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) \rangle = \delta_{ij} \text{ car } \mathcal{B} \text{ orthonormée.}$$

$$\text{ainsi : } f(\mathcal{B}) \text{ est une famille orthonormée donc libre.}$$

$$\text{Comme elle a } n = \dim(E) \text{ vecteurs, c'est une base orthonormée de } E$$

$$2 \Rightarrow 3 : \text{ Il existe au moins une base orthonormée de } E \text{ elle convient (par 2)}$$

$$3 \Rightarrow 1 : \text{ Soit } \mathcal{B} \text{ une base orthonormée de } E \text{ tel que } f(\mathcal{B}) \text{ le soit aussi on a donc :}$$

$$\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, \langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\text{Soit } (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$$

$$\text{On a : } \vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

$$\text{donc comme } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée donc :}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle$$

$$\text{en appliquant } f \text{ à } \vec{x} \text{ et } \vec{y} :$$

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle f(\vec{e}_i) \text{ car } f \in \mathcal{L}(E)$$

$$f(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle f(\vec{e}_i)$$

$$\text{Or } f(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormée de } E :$$

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle$$

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

IV Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ + description de $O_2(\mathbb{R})$ + commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$

Propriété :

$O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$

Démonstration :

$O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ par définition

$O_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ car $I_n \in O_n(\mathbb{R})$

Soit $(A, B) \in (O_n(\mathbb{R}))^2$:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB {}^tA = {}^t(AB)$$

Propriété : soit $A \in O_2(\mathbb{R})$:

- si $\det(A) = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R} \text{ unique modulo } 2\pi) \text{ et toute matrice de cette forme de } O_2^+(\mathbb{R})$$

- si $\det(A) = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

($\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π) et toute matrice de cette forme $\in O_2^-(\mathbb{R})$

Démonstration :

Il est clair que toute matrices de ces formes conviennent

Réciproquement, soit $A \in O_1(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ colonnes orthonormés donc :}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = 0$$

Il existe $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ tel que:

$$a = \cos(\theta), b = \sin(\theta)$$

$$c = \cos(\phi), d = \sin(\phi)$$

$$\text{or : } 0 = ac + bd = \cos(\phi - \theta)$$

$$\text{donc } \phi - \theta \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Si } \phi - \theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] :$$

$$c = \cos(\phi) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$$

$$d = \sin(\phi) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ du premier type}$$

$$\text{si } \phi - \theta \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] :$$

$$c = \cos(\phi) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\theta)$$

$$d = \sin(\phi) = \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\theta)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ du deuxième type}$$

Propriété :

$SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif

Démonstration :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}$$

V Etude de $SO(E)$ (E plan vectoriel orienté)

Propriété :

E : plan euclidien orienté

$f \in SO(E)$

1) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près tel que pour toute base orthonormée direct \mathcal{B} , $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

2) pour tout $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ f est appelée rotation vectorielle d'angle

θ

Démonstration :

1) Soit \mathcal{B} une base orthonormée directe :

$Mat_{\mathcal{B}}(f) \in SO_2(\mathbb{R})$ donc on a vu qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Si \mathcal{C} est une base orthonormée directe quelconque :

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$(P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}, P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}) \in SO_2(\mathbb{R})$ car \mathcal{B} et \mathcal{C} base orthonormée de même sens

$Mat_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ car $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif

2) Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée directe de E

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$f(\vec{u}) = (a \cos(\theta) - b \sin(\theta))\vec{i} + (a \sin(\theta) + b \cos(\theta))\vec{j}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \text{ car } f \in O(E)$$

$$\langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle = a(a \cos(\theta) - b \sin(\theta)) + b(a \sin(\theta) + b \cos(\theta))$$

$$\langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle = (a^2 + b^2) \cos(\theta)$$

$$\langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle = \|\vec{u}\| \|f(\vec{u})\| \cos(\theta)$$

$$[\vec{u}, f(\vec{u})] \neq 0$$

VI Etude de $O^-(E)$ (E plan vectoriel orienté)