Démonstration kholle 3

I Unicité du neutre

Propriété : Si le neutre existe, il est unique
Le magma est dit unifère ou unitaire
Démonstration : Soit e et e' neutres :
$e \star e' = e'$ car e est neutre
$e \star e' = e$ car e' est neutre
donc $e' = e$

II Symétrisabilité et symétrique de x^-1 de $x \star y$ dans un monoïde

Propriété :
$\forall x \in U(m)$, ($x^{-1} \in U(M)$ et $(x^{-1})^{-1} = x$)
Pour une loi + : $-(-x) = x$
Démonstration : Notons $y = x^{-1} \in M$
alors : $x \star y = e$ et $y \star x = e$
donc : $y \in U(M)$ donc $y^{-1} = x$
Propriété :
$\forall (x, y) \in (U(M))^2, (x \star y) \in U(M)$ et $(x \star y)^{-1} = x^{-1} \star y^{-1}$
$U(M)$ est donc stable par $\star$
Démonstration :
D'une part avec $u = x \star y$ et $v = y^{-1} \star x^{-1}$
$u \star v = (x \star y) \star (y^{-1} \star x^{-1})$
$u \star v = x \star (y \star y^{-1}) \star x^{-1}$
$u \star v = x \star e \star x^{-1}$
$u \star v = x \star x^{-1}$
$u \star v = e$
D'autre part :
$v \star u = y^{-1} \star x^{-1} \star x \star y$
$v \star u = y^{-1} \star e \star y$
$v \star u = y^{-1} \star y$
$v \star u = e$
Ainsi: $u \in U(M)$ et $u^{-1} = v$

III régularité des symétrisables dans un monoïde

Propriété : Dans un monoïde, tout élément symétrisable est régulier
Démonstration : $(M, \star)$ monoïde de neutre e, $a \in U(M)$
Soit $(x, y) \in M^2$
1) Si $a \star x = a \star y$
$a^{-1} \star (a \star x) = a^{-1} \star (a \star y)$
Par associativité : $(a^{-1} \star a) \star x = (a^{-1} \star a) \star y$
$e \star x = e \star y$
$x = y$
2) si $x \star a = y \star a$

$x \star a \star a^{-1} = y \star a \star a^{-1}$
$x = y$

IV x^n, ses propriétés, cas $n \in \mathbb{Z}$ dans un monoïde multiplicatif

Propriété : Pour $(x, y) \in M^2$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$
1) $x^{m+n} = x^m \star x^n$
2) $(x^m)^n = x^{mn}$
3) Si $x \star y = y \star x$: $(x \star y)^n = x^n \star y^n$

Démonstration :
1) Si $n = 0$:
$x^m = x^m \star e$
Si $m = 0$:
$x^n = e \star x^n$
Si m et $n \geq 1$:
$$x^{m+n} = \overbrace{(x \star ... \star x)}^{m+n \quad fois \quad x}$$

$$x^{m+n} = \underbrace{(x \star ... \star x)}_{m \quad fois \quad x} \star \underbrace{(x \star ... \star x)}_{n \quad fois \quad x}$$

2) Si $n = 0$ $(x^m)^0 = e = x^{m \times 0}$
Si $n \geq 1$
$(x^m)^n = (x^m) \star ... \star (x^m)$
$(x^m)^n = x^{m+...+m}$ par 1
$(x^m)^n = x^{mn}$
3) Si $n = 0$ $e = e \star e$
si $n \geq 1$:
$(x \star y)^n = x \star y \star x \star y \star ... \star x \star y$
$(x \star y)^n = x \star ... \star x \star y \star ... \star y$ car $x \star y = y \star x$
$(x \star y)^n = x^n \star y^n$
Soit $x \in U(M)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :
$x^{-n} = (x^{-1})^n$
$x^{-n} = x^{-1} \star ... \star x^{-1}$
$x^{-n} = (x \star ... \star x)^{-1}$
$x^{-n} = (x^n)^{-1}$
On obtient donc les même propriéte avec $m, n \in \mathbb{Z}^2$

V relation d'équivalence de la congruence modulo $m \in \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$

Propriété : soit $m \in \mathbb{R}_+^*$
$\bullet \equiv \bullet[m]$ est une relation d'équivalence

Démonstration :

Reflexivité :
Posons $k = 0 \in \mathbb{Z}$
$x = x + 0 \cdot m$
donc : $x \equiv x[m]$
Transitivité :
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 telque$:
$x \equiv y[m]$ et $y \equiv z[m]$
Alors : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + km$ et $\exists l \in \mathbb{Z}, y = z + lm$

Alors : $x = z + \underbrace{(k+l)}_{\in\mathbb{Z}} m$

donc $x \equiv z[m]$

Symétrie :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$x \equiv [m]$
$\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + km$
$y = x + \underbrace{(-k)}_{\in\mathbb{Z}} m$

donc $y \equiv x[m]$