I démonstration injectivité

$Soit(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$:

$g(f(x)) = g(f(y))$

comme $g \circ f$ est injective c'est-à-dire il existe au plus un unique x tel que $f(x) = y$

$\mathbf{donc\ x = y,\ f\ est\ injective}$

II démonstration surjectivité

Soit $z \in G$
Comme $g \circ f$ est surjective donc :
$\exists x \in E\ \ z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
Posons $y = f(x) \in F$:
$z = g(y)$
$\mathbf{donc\quad g\quad est\quad surjective}$

III démonstration bijectivité

$1)$ Soit $y \in F$
Notons $x = f^{-1}(y) \in E$
Par définition $f(x) = y$
Ainsi : $f(f^{-1}(y)) = y$
$\forall y \in F$, $f(f^{-1}(y) = y)$
$\mathbf{donc\ f \circ f^{-1} = Id_F}$
$2)$ Soit $x \in E$,
Notons $y = f(x) \in F$
Alors x est l'antécédent de y par f donc par définition
$x = f^{-1}(y)$
$x = f^{-1}(f(x))$
$\forall x \in E\ \ f^{-1}(f(x)) = x$
$\mathbf{donc\ f^{-1} \circ f = Id_E}$

IV démonstration réciproque

Soit $y \in F$
$\mathbf{analyse}$: s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$:
$g(f(x)) = g(y)$
$(g \circ f)(x) = x$ car $g \circ f = Id_E$
$\mathbf{donc\ x = g(y)\ unique\ candidat\ donc\ g\ est\ bijective}$
$\mathbf{Synthèse}$: Posons $x = g(y) \in E$
on a $f(x) = f(g(y))$
$f(x) = (f \circ g)(y)$
$f(x) = y$ car $f \circ g = Id_F$
$\mathbf{donc\ g(y)\quad est\quad l'unique\quad antécédent\quad de\quad y\quad par\quad f,\quad f\quad est\quad donc\quad bijective}$
Notons $g = f^{-1} : F \to E$
On a : $g \circ f = Id_E$
et $f \circ g = Id_F$
$\mathbf{donc\quad g\quad est\quad bijective\quad et\quad g^{-1} = f}$

V démonstration bijectivité et réciproque

d'une part :

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \quad par \quad associativit\acute{e} \\ &= g \circ Id_F \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= Id_G\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ Id_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= Id_E\end{aligned}$$

VI différence symétrique fonction indicatrice

VII démonstration relation d'ordre

On a le cycle suivant :
$(x_1 \mathscr{R} x_2) \quad et \quad ... \quad et \quad (x_{n-1} \quad \mathscr{R} \quad x_n) \quad et \quad (x_n \quad \mathscr{R} \quad x_1)$
Démonstration : soit $i \in [[2, n]]$
Par transitivité $[\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x \quad \mathscr{R} \quad y \quad et \quad y \quad \mathscr{R} \quad z) \quad \Rightarrow \quad (x \quad \mathscr{R} \quad z)]$:

$$(x_1 \quad \mathscr{R} \quad x_i) \quad et \quad (x_i \quad \mathscr{R} \quad x_1)$$

Par antisymétrie :

$$x_1 = x_i$$

VIII démonstration unicité du maximum

IX démonstration maximum ensemble finie totalement ordonnée

réccurence sur le nombre n d'élément de A
Initialisation : $n = 1 \quad A = \{x_1\}$
$x_1 = max(A) = min(A)$ car $x_1 \mathscr{R} x_1$ par rélféxivité et $x_1 \in A$
Hérédité : si vrai au rang n,
Soit $A = \{x_1, ..., x_{n+1}\} \subset E$
Soit $B = \{x_1, ..., x_n\}$: par hypothèse de réccurence
il existe $j \in [[1, n]]$ tel que :

$$\forall i \in [[1, n]], x_i \mathscr{R} x_j$$

l'ordre étant <u>total</u> :
$(x_j \mathscr{R} x_{n+1}) ou (x_{n+1} \mathscr{R} x_j)$
1^er^ cas : si $x_j \mathscr{R} x_{n+1}$
alors par transitivité : $\forall i \in [[1, n]], x_i \mathscr{R} x_{n+1}$
et par réflexivité :

$$\forall i \in [[1, n+1]], x_i \mathscr{R} x_{n+1}$$

et $x_{n+1} \in A$ donc $x_{n+1} = max(A)$
2^nd^ cas : si $x_{n+1} \mathscr{R} x_j$ alors :

$$\forall i \in [[1, n+1]], x_i \mathscr{R} x_j$$

et $x_j \in A$ donc $x_j = max(A)$

X Classe d'équivalence et partition

Propriété : E: ensemble, $\mathscr{R}$: relation d'équivalence
1) $\forall x \in E, x \in Cl(x) \neq \emptyset$
2) Pour $(x,y) \in E^2$:
- soit $x\mathscr{R}y$, auquel cas Cl(x)=Cl(y)
- soit non($x\mathscr{R}y$), auquel cas $Cl(x) \cap Cl(y) = \emptyset$

Démonstration : 1) reflexivité
2)
- Si $\mathbf{x} \quad \mathscr{R} \quad \mathbf{y}$: montrons que Cl(x)=Cl(y)
$\subseteq$: soit $z \in Cl(x)$
$z\mathscr{R}x$ or $x\mathscr{R}y$ donc par transitivité : $z\mathscr{R}y$
c'est-à-dire : $z \in Cl(y)$
$\supseteq$: pour symétrie yRx donc
la première $\subseteq$ appliqué avec (y,x) au lieu de (x,y) donne $Cl(y) \subset Cl(x)$
- Si non ($\mathbf{x} \quad \mathscr{R} \quad \mathbf{y}$) si l'on avait $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$,
considérons $z \in Cl(x) \cap Cl(y)$:
$z\mathscr{R}x$ et $z\mathscr{R}y$
Par symétrie : $x\mathscr{R}z$
Par transitivié: $x\mathscr{R}y$ contradiction