Démonstration kholle 26

I Dévellopement par rapport à une ligne ou une colonne.

Propriété :
$A \in M_n(\mathbb{K})$
A_{ij}, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A ($A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$)
$\Delta_{ij} = det(A_{ij})$ mineur principal i-j
1) Pour $j \in [[1,n]]$ fixé :
$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la j-ième colonne
2) Pour $i \in [[1,n]]$ fixé :
$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la i-ème ligne
Démonstration :

1) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ coeffA & 1 & coeffA \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{vmatrix}$ par linéarité sur la j-ième colonne

par permutation circulaire des colonnes j à n, on ammène $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ en position n

puis permutation circulaire des lignes i à n, on ammène la ligne i en position n

$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{(-1)^{n-j}(-1)^{n-i}}_{=(-1)^{2n}(-1)^{i+j}} \underbrace{\begin{vmatrix} & 0 \\ A_{ij} & \vdots \\ & 0 \\ ? & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{ij}}$

$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ 2) $det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} coeffA & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ coeffA & & & \end{vmatrix}$ cycle sur les lignes puis les colonnes :

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \begin{vmatrix} A_{ij} & & & ? \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

II Relation $A^tCom(A) = {}^tCom(A)A = det(A)I_n$.

III Déterminant triangulaire par blocs.

IV Déterminant de Vandermonde

V Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

VI Inégalité triangulaire et cas d'égalité

VII Propriétés variées de la norme + théorème de Pythagore

VIII Propriétés générales de l'orthogonal d'une partie