Démonstration kholle 23

I Produit matriciel : associativité, matrices identités.

Propriété : $\forall (A,B,C) \in M_{np}(\mathbb{K}) \times M_{pr}(\mathbb{K}) \times M_{rs}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C$
Démonstration :
$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq r}}$ $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r \\ 1\leq j\leq s}}$ $BC = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq s}}$ $AB = (e_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq r}}$ Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq s$
d'une part, le coefficient i-j de $A(BC)$ est :
$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj}$
or $d_{kj} = \sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj}$ donc c'est : $\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$
d'autre part le coefficient de i-j de $(AB)C$ est :
$\sum_{l=1}^{r} e_{il} c_{ej}$
Or $e_{il} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl}$ donc c'est : $\sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$
même valeur par intervertion des sommes rectangulaires.
Propriété : $\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \underbrace{I_n}_{n\times n} \underbrace{A}_{n\times p} = \underbrace{A}_{n\times p} \underbrace{I_p}_{p\times p} = \underbrace{A}_{n\times p}$
Démonstration :
coefficient i-j de $I_n A$:
$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$
pour AI_p : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \delta_{kj} = a_i j$

II Matrice d'ordre 2 : caractérisation de l'inversibilité et formule pour l'inverse

Propriété :
La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et on a alors : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Démonstration :
si $ad - bc \neq 0$ alors :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & ad-bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$= I_2$ de même $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$
si $ad - bc = 0$ alors
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$
si A était inversible on aurait :
$A{-}1A \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} \times 0_2$
$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$
$a = b = c = d = 0$ donc $A = 0_2$ contradiction avec A inversible

III Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, pour toute colonne C, il existe une unique colonne X telle que $AX = C$

Propriété :
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a les équivalences :
1) $A \in GL_n(\mathbb{K})$
2) Pour toute matrice colonne $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = C$
3) Tout système dont la matrice des coefficient est A possède une unique solution
Démonstration :
$3 \Leftrightarrow 2$ est immédiate. On transpose le système en écriture matricielle.
$1 \Rightarrow 3$
On cherche $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = C$
Analyse : si une matrice X_0 convient alors comme A est inversible on aurait $X_0 = A^{-1}C$ d'où l'unicité de X_0
Synthèse : vérifions que $A^{-1}C$ convient :
$A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = I_nC = C$ il convient
$2 \rightarrow 1$
On va construire une matrice B tel que $AB = I_n$. On vérifiera $BA = I_n$ pour $j \in [[1,n]]$, notons $E_j \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ la j-ième colonne de I_n soit $B_j \in M_{n,1}$ telle que $AB_j = E_j$ (B_j existe et est unique par 2) considérons $B \in M_n(\mathbb{K})$ avec B_j l'ensemble des colonnes de B :
$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & ... & B_n \end{pmatrix}$
alors $AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & ... & AB_n \end{pmatrix} = I_n$ (propriété au calcul matriciel par colonne)
pour $j \in [[1,n]]$; on note note A_j la j-ième colone de A
par définition du produit matriciel : $AE_j = A_j$
Par ailleurs, on sais que $AB = I_n$ donc $(AB)A_j = A_j$ et $A(BA_j) = A_j$ donc par unicité $BA_j = E_j$ et par propriété du calcul matriciel :
$BA = I_n$

IV Transposition : produit, inverse $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$

Propriété : Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pr}(\mathbb{K})$. Alors :
$$\underbrace{{}^t\underbrace{(AB)}_{n\times r}}_{r\times n} = \underbrace{\underbrace{{}^tB}_{r\times p}\ \underbrace{{}^tA}_{p\times n}}_{r\times n}$$
Démonstration :
$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq r}}$
$AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}}$ ${}^tB^tA = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\1\leq j\leq n}}$
${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$ ${}^tB = (b'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\1\leq j\leq p}}$ avec $b'_{ij} = b_{ji}$ ${}^t(AB) = (c'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\1\leq n}}$ avec $c'_{ij} = c_{ji}$
Soit $(i,j) \in [[1,r]] \times [[1,n]]$
$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik}a'_{kj}$ par définition de ${}^tB^tA$
$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk}$ déf de ${}^tA$ et ${}^tB$
$d_{ij} = c_{ji}$ définition de AB
$d_{ij} = c'_{ij}$ définition de ${}^t(AB)$
Propriété :
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K}), {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
Démonstration :
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ transposons :
${}^t(A^{-1})^tA = {}^tA^tA^{-1} = I_n$ car ${}^tI_n = I_n$
donc ${}^tA \in Gl_n(\mathbb{K})$ d'inverse ${}^t(A^{-1})$
Propriété :
$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$
Démonstration :

Soit $s : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$
$A \to {}^tA$
Alors s est une involution linéaire ($s^2 = Id_{M_n(\mathbb{K})}$) donc :
$M_n(\mathbb{K}) = \underbrace{Ker(s - Id_{M_n(\mathbb{K})})}_{S_n(\mathbb{K})} \oplus \underbrace{Ker(s + Id_{M_n(\mathbb{K})})}_{AS_n(\mathbb{K})}$

V Trace : définition et propriété $tr(AB) = tr(BA)$.

VI L'application $\Phi : A \in M_{n,p} \longmapsto (\Phi_A : M \mapsto tr({}^tAM)) \in \mathscr{L}(M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ est un isomorphisme