Démonstration kholle 28

I Cardinal d'un produit, extension à $\bigcup_{x\in A}\{x\}B_x$ avec tous les B_x de même cardinal (principe des bergers)

Propriété :
Si E et F sont finis $E \times F$ aussi et $Card(E\times F) = Card(E)Card(F)$
Démonstration :
Si E ou F $= \emptyset$ alors $E\times F = \emptyset$ $0 = 0$
Si $E = \{x_0\}$, singleton
Soit $f : F \to \{x_0\}\times F$
$y \mapsto (x_0,y)$
et $g : \{x_0\}\times F \to F$
$(x_0,y) \mapsto y$
Ces applications sont trivialements réciproques.
ainsi : f est bijective $\{x_0\}\times F$ est finie et $Card(\{x_0\}\times F) = Card(F)$
Si $x_1,...,x_n$ sont les éléments distincts de E :
Notons $F_k = \{x_k\}\times F$
Alors : $(F_1,...,F_n)$ est une partition de $E\times F$
en effet :
$F_k \subset E\times F$ pour tout k donc $\bigcup_{k=1}^n F_k \subset E\times F$
Soit $(x,y)\in E\times F$
Alors : $\exists k \in [[1,n]], x = x_k$
Or $E = \{x_1,..,x_n\}$ donc $(x,y)\in F_k$
A fortiori $E\times F \subset \bigcup_{k=1}^n F_k$
si $i \neq j$ et $(x,y)\in F_i\cap F_j$:
$x = x_i$ et $x = x_j$
or $x_i \neq x_j$
ainsi : $F_i \cap F_j = \emptyset$
On a bien ;
$E\times F = \bigcup_{k=1}^n F_k$ avec les F_k disjoint
$E\times F$ est fini et :
$Card(E\times F) = \sum_{k=1}^n Card(F_k)$
Or on a vu prédemment : $\forall k\in[[1,n]], Card(F_k) = Card(F)$
donc $Card(E\times F) = nCard(F) = Card(E)Card(F)$
Propriété :
Si on effectue un 1^{er} choix parmi n options puis un second ayant p options (pouvant dépendre du 1^{er} choix), il y a np couples de choix possibles
Formellement : A fini de cardinal $n \geq 1$
F ensemble quelconque et, pour tout $x\in A$
Soit $B_x \subset F$ fini de cardinal $p\in\mathbb{N}^*$ (indépendant de x)
Alors :
$Card(\bigcup_{x\in A}\underbrace{(\{x\}\times B_x))}_{\{(x,y),y\in B_x\}} = np$
Démonstration :
Soit $G = \bigcup_{x\in A}(\{x\}\times B_x))$
l'union est disjointe car, si $x \neq x'$:
$\{x\}\times B_x = \{(x,y) : y\in B_x\}$

$\{x'\} \times B_{x'} = \{(x',z) : z \in B_{x'}\}$
pas d'élément commun car la première composante diffère toujours
De plus :
$\forall x \in A, Card(\{x\} \times B_x) = \underbrace{Card(B_x)}_{p}$
donc G est fini de cardinal np

II Dénombrement des arrangements, des injections

Propriété :
pour $0 \leq p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Démonstration :
si $p = 0$: $A_n^0 = 1$ (liste vide)
si $p \geq 1$: on a n choix pour la première composante
puis n-1 choix pour la seconde composante
⋮
⋮
puis $n - p - 1$ choix pour la p-ième composante
donc : $A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)$
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Propriété :
E fini de cardinal p et F fini de cardinal n alors $Card(Inj(E,F)) = A_n^p$
Démonstration:
Notons $x_1,...,x_p$ les éléments distincts on a vu que :
$\Phi : F^E \to F^p$
$f \mapsto (f(x_1),...,f(x_p))$ est une bijection
ainsi : $\psi = \Phi_{|Inj(E,F)}$
ψ est une injection de $Inj(E,F)$ vers F^p, elle réalise donc une bijection sur son image ainsi :
$Card(Inj(E,F)) = Card(Im(\psi))$
Or $Im(\psi)$ est l'ensembles des p-arrangements de f :
$Card(Inj(E,F)) = A_n^p$

III Expression des combinaisons avec des factorielles

Propriété :
Pour $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Démonstration : 1^{ere} démonstration :
$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$
$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}...\frac{n-p+1}{1}\binom{n-p}{0}$
Or :$\binom{n-p}{0} = 1$ car la seule partie de cardinal 0 est $\emptyset$
$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
2^{nde} démonstration :
pour choisir un p-arrangements on peut choisir une p-combinaison : $\binom{n}{p}$ choix puis une permutation de ces p valeurs : $p!$ choix
d'où $\underbrace{A_n^p}_{=\frac{n!}{(n-p)!}} = p!\binom{n}{p}$
$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

IV Cardinal de $\mathscr{P}(E)$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Propriété :
Si E est fini, $\mathscr{P}(E)$ aussi et $Card(\mathscr{P}(E))=2^{Card(E)}$
Démonstration :
Posons Φ : $(E)\rightarrow\{0,1\}^E$
$A\mapsto 1|_A$
Ψ : $\{0,1\}^E\rightarrow\mathscr{P}(E)$
$f\mapsto\{x\in E : f(x)=1\}=f^{-1}(\{1\})$
Elles sont réciproques ainsi :
$\mathscr{P}(E)$ est fini de cardinal : $Card(\{0,1\}^E)=2^{Card(E)}$
Propriété :
$\forall n\in\mathbb{N},\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
Démonstration :
Soit E de cardinal n :
$\mathscr{P}(E)=\bigcup_{k=0}^{n}\mathscr{P}_k(E)$ avec $\mathscr{P}_k(E)$ disjoints donc :
$Card(\mathscr{P}(E))=\sum_{k=0}^{n}Card(\mathscr{P}_k(E)$
$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

V Formule du triangle de Pascal.

Propriété :
pour $1\leq p\leq n$
$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$
Démonstration :
$E=[[1,n]]$
$\mathscr{U}=\{A\in\mathscr{P}(E) : Card(A)=p$ et $n\in A\}$
$\mathscr{V}=\{A\in\mathscr{P}(E) : Card(A)=p$ et $n\notin A\}$
Alors : $\mathscr{P}(E)=\mathscr{U}\cup\mathscr{V}$
donc $\binom{n}{p}=Card(\mathscr{U})+Card(\mathscr{V})$
on a $\mathscr{V}=\{A\subset[[1,n-1]] : Card(A)=p\}$
donc $Card(\mathscr{V})=\binom{n-1}{p}$
Pour $\mathscr{U}$ posons :
$\phi : \mathscr{U}\rightarrow\mathscr{P}_{p-1}([[1,n-1]])$
$A\mapsto A\backslash\{n\}$
$\psi : \mathscr{P}_{p-1}([[1,n-1]])\rightarrow\mathscr{U}$
$A\mapsto A\cup\{n\}$
Ces applications sont réciproques ainsi :
$Card(\mathscr{U})=\binom{n-1}{p-1}$

VI Démonstration combinatoire de $\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Propriété :
pour $1\leq p\leq n,$:
$p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$
$\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n}{p-1}$
Démonstration :
E de cardinal n
$X=\{(x,A) : x\in A\subset E$ et $Card(A)=p\}$
1^{er} calcul de $Card(X)$ on choisit A :$\binom{n}{p}$ choix puis $x\in A$: p choix
soit $p\binom{n}{p}$
2^{eme} calcul : on choisit $x\in E$: n choix on choisit A en complétant x par p-1 éléments, parmi les n-1 restants

soit $\binom{n-1}{p-1}$ choix soit $n\binom{n-1}{p-1}$ choix

VII Exercice : calcul combinatoire de $\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}$

Propriété :
$\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$
Démonstration :
On pose :
$E_k = \{A \subset [[1,n]] : Card(A) = p$ et $max(A) = k\}$
$F_k = \{B \subset [[1,k-1]] : Card(B) = p-1\}$
$\phi_k : E_k \to F_k$
$A \mapsto A\backslash\{k\}$
$\psi_k : F_k \to E_k$
$B \mapsto B \cup \{k\}$
sont des bijections réciproques
$\mathscr{P}_p([[1,n]]) = \bigcup_{k=p}^{n} E_k$ avec E_k disjoints :
$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}$

VIII Exercice : Formule de Vandermonde

Propriété :
Pour $0 \leq p \leq m,n$ on a :
$\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$
Démonstration :
Soit A et B deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs m et n :
Nombre de $A \cup B$ à p éléments :$\binom{m+n}{p}$ car $Card(A \cup B) = m+n$
Posons :
$E = \{X \subset A \cup B : Card(X) = p\}$
$E_k = \{X \in E : Card(A \cap X) = k\}$ avec $0 \leq k \leq p$
Alors : $E = \bigcup_{k=0}^{p} E_k$ avec E_k disjoints
donc : $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{n} Card(E_k)$
On a à k fixé :
$\phi_k : E_k \to \mathscr{P}_k(A) \times \mathscr{P}_{p-k}(B)$
$X \mapsto (A \cap X, B \cap X)$
est bien définie de réciproque :
$\psi_k : \mathscr{P}_k(A) \times \mathscr{P}_{p-k}(B) \to E_k$
$(Y,Z) \mapsto Y \cup Z$
pour $X \in E_k$:
$\psi_k(\phi_k(X)) = (A \cap X) \cup (B \cap X)$
$\psi_k(\phi_k(X)) = (A \cup B) \cap X$
$\psi_k(\phi_k(X)) = X$ car $X \subset A \cup B$
pour $(Y,Z) \in \mathscr{P}_k(A) \times \mathscr{P}_{p-k}(B)$:
$\phi_k(\psi_k(Y,Z)) = (A \cap (Y \cup Z), B \cap (Y \cup Z))$
$\phi_k(\psi_k(Y,Z)) = ((A \cap Y) \cup (A \cap Z),(B \cap Y) \cup (B \cap Z))$
Or : $Y \subset A$ donc $A \cap Y = Y$
et $A \cap B = \emptyset$ donc $B \cap Y = \emptyset$
de meme : $A \cap Z = \emptyset$ et $B \cap Z = Z$ donc :
$\phi_k(\psi_k(Y,Z)) = (Y,Z)$
Ainsi : $Card(E_k) = \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$
On remplace :
$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$