Démonstration kholle 22

I Théorème de la base incomplète (cas $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$).

Théorème de la base incomplète :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie :
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{L}$ soit libre.
Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$
Démonstration :
Posons : $\Omega = \{\mathscr{H}$ famille libre de E : $\mathscr{L} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{G}\}$
$A = \{Card(\mathscr{H}) : \mathscr{H} \in \Omega\}$
A est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $Card(\mathscr{G})$ et $A \neq \emptyset$ car $\mathscr{L} \in \Omega$ donc $card(\mathscr{L}) \in A$
Soit $p = max(A)$ et $B \in \Omega$ tel que $Card(B) = p$.
On a bien $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ et $\mathscr{B}$ libre car $\mathscr{B} \in \Omega$
Supposons que B n'engendre pas E :
Si tous les vecteurs de $\mathscr{G}$ appartiennent à $Vect(\mathscr{B})$:
$E = Vect(\mathscr{G}) \subset Vect(\mathscr{B})$, ce qu'on a exclu.
Soit $\vec{x} \in \mathscr{G}$ tel que $\vec{x} \notin Vect(\mathscr{B})$ et $\mathscr{M} = \mathscr{B} \cup \{\vec{x}\}$ alors :
$\mathscr{L} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{G}$ et $\mathscr{M}$ libre car $\mathscr{B}$ libre et $x \notin Vect(\mathscr{B})$
donc $\mathscr{M} \in \Omega$ et $Card(M) > max(A)$ absurde donc $\mathscr{B}$ est une base de E

II Lemme de Steinitz.

Lemme de Steinitz :
Dans un K-espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille d'au moins n+1 vecteurs est liée
Démonstration :
récurrence sur n :
Initialisation : n=0, l'espace est noté $\{\vec{0}\}$
Seule la famille $(\vec{0})$ convient qui est liée car $\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{0} = \vec{0}$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n :
Soit E engendré par n+1 vecteurs
$E = Vect(\vec{g}_1, ..., \vec{g}_{n+1})$
Soit une famille de n+2 vecteurs : $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n+2})$
Il existe des scalaires $\alpha_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n+2,\ 1 \leq j \leq n+1)$ tel que :
$\forall i[[1, n+2]], \vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{i,j} \vec{g}_j$ car $(\vec{g}_1, ..., \vec{g}_{n+1})$ engendre E :
Notons :
$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \vec{g}_j (1 \leq i \leq n+2)$
$\beta_i = \alpha_{i,n+1}$
$F = Vect(\vec{g}_1, ..., \vec{g}_n)$
Alors : $\forall i \in [[1, n+2]], \vec{u}_i = \vec{v}_i + \beta_i \vec{g}_{n+1}$
$\mathbf{1^{er}}$ **cas :** Si $\beta_1 = ... = \beta_{n+2} = 0$
Alors : $\forall i \in [[1, n+2]], \vec{u}_i = \vec{v}_i \in F$ ainsi $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n+2})$ est une famille d'au moins n+1 vecteurs de F qui est engendré par n vecteurs par hypothèse de récurrence, elle est liée.
$\mathbf{2^{er}}$ **cas :**$\exists i_0 \in [[1, n+2]], \beta_{i_0} \neq 0$sans perte de généralité supposons $\beta_{n+2} \neq 0$
On a donc: $\vec{g}_{n+1} = \frac{1}{\beta_{n+2}}(\vec{u}_{n+2} - \vec{v}_{n+2})$
Donc pour $1 \leq i \leq n+1$:

$\vec{u}_i = \vec{v}_i + \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}(\vec{u}_{n+2} - \vec{v}_{n+2})$
Posons $\vec{w}_i = \vec{u}_i - \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}\vec{u}_{n+2}(1 \leq i \leq n+1)$
Ainsi : $\forall i \in [[1,n+1]], \vec{w}_i = \vec{v}_i - \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}\vec{v}_{n+2} \in F$
Par hypothèse de récurrence :
$(\vec{w}_1,...,\vec{w}_{n+1})$ est liée
ainsi $\exists(\mu_1,...,\mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i\vec{w}_i = \vec{0}$ et $(\mu_1,...,\mu_{n+1}) \neq (0,...,0)$
c'est-à-dire : $\mu_1\vec{u}_1 + ... + \mu_{n+1}\vec{u}_{n+1} + (-\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mu_i\beta_i}{\beta_{n+2}})\vec{u}_{n+2} = \vec{0}$
Comme au moins l'un des n+1 premiers coefficients $\neq 0$,
cela montre que : $(\vec{u}_1,..., \vec{u}_{n+2})$ est liée.

III Conséquences du lemme de Steinitz : les bases sont finies et de même cardinal, cardinaux des familles libres et cas d'égalité.

Propriétés :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Toutes ses bases sont finies et ont toutes même cardinal. Ce cardinal est la dimension de E, notéé dim(E)
Démonstration :
On sait qu'il existe une base finie $\mathscr{B}_0$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, elle est libre donc finie et $\mathscr{B}_0$engendre E donc $Card(B) \leq card(B_0)$. De même : B_0 est libre et B génératrice de E donc $Card(B_0) \leq Card(B)$ on a donc $Card(\mathscr{B}) = Card(\mathscr{B}_0)$
Propriété :
Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E alors :
1) $\mathscr{L}$ est finie et $Card(\mathscr{L}) \leq dim(E)$
2) $Card(\mathscr{L}) = dim(E) \iff \mathscr{L}$ base de E
Démonstration :
1) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Lemme de Steinitz : $\mathscr{L}$ libre et $\mathscr{B}$ génératrice finie
donc $\mathscr{L}$ finie et $Card(\mathscr{L}) \leq \underbrace{Card(\mathscr{B})}_{=dim(E)}$
2) $\Leftarrow$ definition de dim(E) par le fait que toutes les bases ont même cardinal
$\Rightarrow$ Notons $n = dim(E)$
Si n=0 : $E = \{0\}$ et $\mathscr{L} = ()$
Si $n \geq 1$: Notons $\mathscr{L} = (\vec{x}_1,..., \vec{x}_n)$
Si $\mathscr{L}$ n'engendrait pas E:
Considérons $\vec{x}_{n+1} \in E$ tel que $\vec{x}_{n+1} \notin Vect(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$
Alors $(\vec{x}_1,...,\vec{x}_{n+1})$ est encore libre mais son cardinal est $n+1 > dim(E)$: contradiction
Donc $\mathscr{L}$ engendre E et est libre c'est donc une base E

IV Sous-espaces : inégalité des dimensions et cas d'égalité.

Propriété :
Soit E K-espace vectoriel, F sous-espace vectoriel de E
1) F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$
2) $dim(F) = dim(E) \iff F = E$
Démonstration :
1) $\Omega = \{\mathscr{L}$: famille libre de F $\}$
$A = \{Card(\mathscr{L}) : \mathscr{L} \in \Omega\}$. Pour $\mathscr{L} \in \Omega$: $\mathscr{L}$ est aussi une famille libre de E donc $\mathscr{L}$ est finie et $Card(\mathscr{L}) \leq dim(E)$
Ainsi : $A \subset \mathbb{N}$ et majoré par $dim(E)$ $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$(car $() \in \Omega$) donc A possède un maximum p :
Soit $\mathscr{L}_0 \in \Omega$ tel que $Card(\mathscr{L}_0) = p$:
On a : $\mathscr{L}_0$ libre car $\mathscr{L} \in \Omega$, $Vect(\mathscr{L}_0) \subset F$ par définition de Ω
Si $Vect(\mathscr{L}_0) \subsetneq F$:
Soit $\vec{x} \in F \backslash Vect(\mathscr{L}_0)$:
Alors $\mathscr{L}_0 \cup (\vec{x})$ est une famille libre de F donc $\mathscr{L} \cup (\vec{x}) \in \Omega$ mais $Card(\mathscr{L}_0 \cup (\vec{x})) = p+1 > p$ contradiction

Ainsi : $Vect(\mathscr{L}_0) = F$
Conclusion : $\mathscr{L}_0$ est une base de F donc F est de dimension finie et $dim(F) = p \leq dim(E)$ car $dim(E)$ est un majorant de A.
2) Soit $\mathscr{B}$ une base de F
En particulier : $\mathscr{B}$ est une famille libre de F donc $\mathscr{B}$ est une famille libre de E.
De plus: $Card(\mathscr{B}) = dim(F)$ car $\mathscr{B}$ base de F
$Card(\mathscr{B}) = dim(E)$ par hypothèse donc $\mathscr{B}$ base de E
$F = Vect(\mathscr{B}) = E$

V Si $E = F \oplus G, dim(E) = dim(F) + dim(G)$

Propriété :
E K-espace vectoriel de dimension finie, F et G sous-espace vectoriel supplémentaire de E ($E = F \oplus G$) alors :
1) Si $\mathscr{B}$ base de F et $\mathscr{C}$ une base de G, $\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ est une base de E
2) $dim(E) = dim(F) + dim(G)$
Démonstration :
Si $F = \{\vec{0}\}$,$G = E$,$B = ()$ propriété trivialement vérifiée
Idem si $G = \{\vec{0}\}$,$F = E$,$\mathscr{C} = ()$
Sinon, notons : $p = dim(F) \geq 1$ $g = dim(G) \geq 1$
$\mathscr{B} = (\vec{x}_1, ...,\vec{x}_p)$ et $\mathscr{C} = (\vec{y}_1, ..., \vec{y}_q)$
Montrons que $\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ est une base de E
libre : soit$(\lambda_1,...,\lambda_p,\mu_1,...,\mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ tel que :
$\lambda_1\vec{x}_1 + ... + \lambda_p\vec{x}_p + \mu_1\vec{y}_1 + ... + \mu_q\vec{y}_q = \vec{0}$
$\underbrace{\lambda_1\vec{x}_1 + ... + \lambda_p\vec{x}_p}_{\in F} = \underbrace{-(\mu_1\vec{y}_1 + ... + \mu_q\vec{y}_q)}_{\in G}$
or $F \cap G = \{\vec{0}\}$ donc :
$\lambda_1\vec{x}_1 + ... + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}$
$\mu_1\vec{y}_1 + ... + \mu_q\vec{y}_q = \vec{0}$
or $\mathscr{B}$ libre donc $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$
et $\mathscr{C}$ libre donc $\mu_1 = ... = \mu_q = 0$
génératrice : on a trivialement $Vect(\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) \subset E$:
Soit $\vec{x} \in E$
comme $E = F + G$
$\exists(\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
Or $F = Vect(\mathscr{B})$ donc :
$\exists(\lambda_1,..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{y} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\vec{x}_k$
de même $G = Vect(\mathscr{C})$ donc :
$\exists(\mu_1,..., \mu_q) \in \mathbb{K}^q, \vec{z} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k\vec{y}_k$
ainsi : $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\vec{x}_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k\vec{y}_k \in Vect(\mathscr{B} \cup \mathscr{C})$
donc $Vect(\mathscr{B} \cup \mathscr{C}) = E$
2) $dim(E) = Card(\mathscr{B} \cup \mathscr{C})$
$dim(E) = Card(\mathscr{B}) + Card(\mathscr{C}) = dim(F) + dim(G)$

VI Existence de supplémentaires, formule de Grassmann.

Propriété :
Soit E : K-espace vectoriel de dimension finies $n \geq 2$
$\mathscr{B} = (\vec{u}_1,..., \vec{u}_n)$ base de E
$p \in [[1,n - 1]]$
$\mathscr{B}_1 = (\vec{u}_1,..., \vec{u}_p)$
$\mathscr{B}_2 = (\vec{u}_{p+1},...,u_n)$
Posons $F = Vect(\mathscr{B}_1)$ et $G = Vect(\mathscr{B}_2)$

Alors : $\mathscr{B}_1$ base de F, $\mathscr{B}_2$ base de G et $E = F \oplus G$
Démonstration :
$\mathscr{B}_1$ est engendre F par définition et $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$ qui est libre donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Idem pour $\mathscr{B}_2$
$\boldsymbol{F + G \subset E}$ trivial
$\boldsymbol{E \subset F + G}$ Soit $\vec{x} \in E$:
$\exists(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k$
ainsi $\vec{x} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{u}_k}_{\in F} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k}_{\in G}$
donc $\vec{x} \in F + G$
$\boldsymbol{\{\vec{0}\} \subset F \cap G}$ trivial
$\boldsymbol{F \cap G \subset \{\vec{0}\}}$ Soit $\vec{x} \in F \cap G$ alors :
$\vec{x} \in F$ donc : $\exists(\lambda_1,...,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{u}_k$
$\vec{x} \in G$ donc : $\exists(\lambda_{p+1},...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}, \vec{x} = \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k$
$\lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_p \vec{u}_p + (-\lambda_{p+1} \vec{u}_{p+1}) + ... + (-\lambda_n \vec{u}_n) = \vec{0}$
Or $\mathscr{B}$ libre donc $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ d'où $\vec{x} = \vec{0}$
Propriété :
Formule de Grassmann :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finies, F et G sous-espace vectoriel de E alors :
$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$
Démonstration :
$F \cap G$ sous-espace vectoriel de G qui est de dimension finie :
Il existe H,sous-espace vectoriel de G tel que : $G = (F \cap G) \oplus H$
Montrons que $F + G = F \oplus H$
Par hypothèse $F \cap G \cap H = \{\vec{0}\}$ or $H \subset G$ donc : $F \cap H = \{\vec{0}\}$
$F \oplus H \subset F + G$ évident car $H \subset G$
$F + G \subset F \oplus H$ soit $\vec{x} \in F + G$:
$\exists(\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
Comme $\vec{z} \in G$ par hypothèse :
$\exists(\vec{u}, \vec{v}) \in (F \cap G) \times H, \vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$
$\vec{x} = \underbrace{\vec{y} + \vec{u}}_{\in F} + \underbrace{\vec{v}}_{\in H}$
donc $\vec{x} \in F \oplus H$
On a donc :
$dim(G) = dim(F \cap G) + dim(H)$
$dim(F + G) = dim(F) + dim(H)$
$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$

VII Dimension de $E \times F$, de $\mathscr{L}(E,F)$.

Propriété :
E,F : K-espace vectoriel de dimension finie $n = dim(E)$ et $p = dim(F)$.
Alors $E \times F$ est de dimension finie et $dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$
Si n et p ≥ 1 :
$(\vec{u}_1,..., \vec{u}_n)$ base de E et $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p)$ base de F :
$((\vec{u}_1,\vec{0}_F),...,(\vec{u}_n, \vec{0}_F),(\vec{0}_E, \vec{v}_1),...,(\vec{0}_E, \vec{v}_p))$ est une base de $E \times F$
Démonstration :
libre : soit $(\lambda_1,...,\lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que :
$\lambda_1(\vec{u}_1, \vec{0}_F) + ... + \lambda_n(\vec{u}_n, \vec{0}_F) + \lambda_{n+1}(\vec{0}_E, \vec{v}_1) + ... + \lambda_{n+p}(\vec{0}_E, \vec{v}_p = (\vec{0}_E, \vec{0}_F)$
$\lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_n \vec{u}_n + \lambda_{n+1} \vec{v}_1 + ... + \lambda_{n+p} \vec{v}_p = (\vec{0}_E, \vec{0}_F)$
$\lambda_1 \vec{u}_1 + ... + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}_E$
$\lambda_{n+1} \vec{v}_1 + ... + \lambda_{n+p} \vec{v}_p = \vec{0}_F$
Comme $(\vec{u}_1,..., \vec{u}_n)$ base de E et $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_p)$ base de F :
$\lambda_1 = ... = \lambda_{n+p} = 0$

génératrice Soit $(\vec{x},\vec{y}) \in E \times F$:
$(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)$ base de E donc $\exists(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n$
$(\vec{v}_1,...,\vec{v}_p)$ base de F donc $\exists(\mu_1,...,\mu_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{y} = \mu_1\vec{v}_1 + ... + \mu_p\vec{v}_p$
d'où : $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{0}_F) + (\vec{0}_E,\vec{y})$
$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\vec{u}_k,\vec{0}_F) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k(\vec{0}_E,\vec{v}_k)$
Propriété :
Si E et F sont de dimensions finies , $\mathscr{L}(E,F)$ aussi et :
$dim(\mathscr{L}(E,F)) = dim(E) \times dim(F)$
Démonstration :
soit $p = dim(E)$.
Si $p = 0$: $E = \{\vec{0}\}$, $\mathscr{L}(E,F) = \{\tilde{0}\}$
Sinon, soit $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_p)$ base de E.
Posons : $\Phi : \mathscr{L}(E,F) \to F^p$
$f \to (f(\vec{u}_1),...,f(\vec{u}_p))$
Φ est bien linéaire : pour f et g$\in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
$\Phi(f+\lambda g) = (f(\vec{u}_1) + \lambda g(\vec{u}_1),...,f(\vec{u}_p) + \lambda g(\vec{u}_p))$
$\Phi(f+\lambda g) = (f(\vec{u}_1),...,f(\vec{u}_p)) + \lambda(g(\vec{u}_1),...,g(\vec{u}_p))$
$\Phi(f+\lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$
De plus, Φ est bijective : c'est le théorème de détermination des applications linéaires.
Ainsi, Φ est un isomorphisme, or F^p est de dimension finie égale à $p \times dim(F)$ donc $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie égale : $p \times dim(F) = dim(E) \times dim(F)$

VIII Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base (énoncé complet + démonstration de la caractérisation de l'injectivité).

Propriété :
E: K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$
$(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)$ base de E
$(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ famille quelconque de n vecteurs de F, K-espace vectoriel quelconque
1) $\exists! f \in \mathscr{L}(E,F), \forall k \in [[1,n]], f(\vec{u}_k) = \vec{v}_k$
2) f injective $\iff (\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ libre
Démonstration :
1)
Existence : Soit $\vec{x} \in E$:
Notons $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ l'unique n-uplet de scalaires tel que :
$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{u}_k$
On pose: $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{v}_k$. Cela définit bien une application :
$f : E \to F$ car une seule valeur est posé pour $f(\vec{x})$ (car $(\lambda_1,..,\lambda_n)$ unique).
Montrons que $f \in \mathscr{L}(E,F)$:
Soit $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{u}_k \in E$
$\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\vec{u}_k \in E$
$\alpha \in \mathbb{K}$
Alors par définition de f : $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{v}_k$
$F(\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\vec{v}_k$
Par ailleurs : $x + \alpha\vec{y} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k + \alpha\mu_k)\vec{u}_k$
donc : $f(x + \alpha y) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k + \alpha\mu_k)\vec{v}_k = f(\vec{x}) + \alpha f(\vec{y})$
Enfin pour $j \in [[1,n]]$:
$f(\vec{u}_j) = f(\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,j}\vec{u}_k)$
$f(\vec{u}_j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,j}\vec{v}_k = \vec{v}_j$
Unicité : si f et g conviennent :
$\forall k \in [[1,n]], \vec{u}_k \in Ker(f-g)$ car $f(\vec{u}_k) = g(\vec{u}_k)$
Or $Vect(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n) = E$ d'où $E \subset Ker(f-g)$
donc $f - g = \tilde{0}$, $f = g$
2) $\Rightarrow$ Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :
$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$

$f(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{u}_k)=\vec{0}$ car $f\in\mathscr{L}(E,F)$
or $Ker(f)=\{\vec{0}\}$ (car f injective)
donc $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{u}_k=\vec{0}$ or $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)$ libre donc $\lambda_1=...=\lambda_n=0$ donc $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ est libre
$\Leftarrow$ On suppose $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ libre.
Montrons que f est injective, c'est-à-dire $Ker(F)=\{\vec{0}\}$
$\supset$: toujours vraie
$\subset$: soit $\vec{x}\in Ker(f)$:
Ecrivons $\vec{x}$ dans la base $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)$:
$\vec{x}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{u}_k$
Par définition de f :
$f(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{v}_k$
Or $f(\vec{x})=\vec{0}$ et $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ libre donc $\lambda_1=...=\lambda_n=0$ puis $\vec{x}=\vec{0}$

IX Théorème du rang (avec énoncé et démonstration du lemme)

Propriété :
Soit E K-espace vectoriel de dimension finie
F K-espace vectoriel
Il est équivalent de dire :
1) E et F sont isomorphe
2) F est de dimension fini et $dim(F)=dim(E)$
Démonstration :
$1\Rightarrow 2$:
Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$ bijective
Si $E=\{\vec{0}_E\}$: $F=\{\vec{0}_F\}$
Si $dim(E)=n\geq 1$, soit $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)$ une base de E.
Comme f est un isomorphisme: $(f(\vec{u}_1),...,f(\vec{u}_n))$ est une base de F donc F est de dimension finie et $dim(F)=n$
$2\Rightarrow 1$ Si dimension nulle : $E=\{\vec{0}_E\}$ et $F=\{\vec{0}_F\}$ $f:\vec{0}_E\rightarrow\vec{0}_F$ est un isomorphisme
Si $dim(E)=dim(F)=n\geq 1$:
Soit $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)$ une base de E et $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ base de F.
Soit f l'unique élément de $\mathscr{L}(E,F)$ tel que :
$\forall k\in[[1,n]],f(\vec{u}_k)=\vec{v}_k$ (qui existe par le théorème de détermination)
Puisque $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ est une base de F, f est un isomorphisme
Propriété :
Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie
1) Tout supplémentaires S de Ker(f) dans E est un isomorphisme à $Im(f)$.
Plus précisément :
$g:S\rightarrow Im(f)$
$\vec{x}\rightarrow f(\vec{x})$
est un isomorphisme $g=f|_S^{Im(f)}$
2) $dim(Ker(f))+\underbrace{dim(Im(f))}_{rg(f)}=dim(E)$
Démonstration :
1) un tel S existe bien
On a : $*g\in\mathscr{L}(S,Im(f))$
$*Ker(g)=Ker(f)\cap S=\{\vec{0}\}$ donc g injective
$*Im(g)=f(S)\subset Im(f)$
Par ailleurs, pour $\vec{y}\in Im(f)$:
$\exists\vec{x}\in E,\vec{y}=f(\vec{x})$ or $E=Ker(f)\oplus S$ donc :
$\exists(\vec{u},\vec{v})\in Ker(f)\times S,\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$
alors : $\vec{y}=f(\vec{x})=f(\vec{u})+f(\vec{v})$
$\vec{y}=f(\vec{v})\in f(S)$
Ainsi : $Im(g)=Im(f)$ g surjective
2) On a donc :

$dim(S) = dim(Im(f))$
or: $E = Ker(f) \oplus S$
donc $dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(S)$ d'où le résultat :
$dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$
$dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f)$