Démonstration kholle 20

I Division euclidienne

Propriété :
Soit $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0$
$\exists!(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2, (A = BQ + R)$ et $deg(R) < deg(B)$
Démonstration :
Unicité :
Si $A = BQ_1 + R_1$ et $A = BQ_2 + R_2$
avec $deg(R_1)$ e $deg(R_2) < deg(B)$
$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$
$deg(B) + deg(Q_1 - Q_2) = deg(R_2 - R_1)$
donc $deg(B) + deg(Q_1 - Q_2) < deg(B)$
or $deg(B) \in \mathbb{N}$ car $B \neq 0$ $deg(Q_1 - Q_2) < 0$
donc $Q_1 - Q_2 = 0$ donc $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$
Existence :
$Q,R \leftarrow 0,A$
Tant que $deg(R) \geq deg(B)$:
Soit sX^d le monome tel que sX^dB ont le même terme de plus haut degré que R :
$Q,R \leftarrow Q + sX^d, R - sX^dB$
Renvoyer Q,R
Notons Q_k et R_k les valeurs de Q et R après k itérations
Terminaison : $deg(R_k)$ décroit strictement dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$
Correction Montrons que qu'après chaque itérations on a bien $A = BQ_k + R_k$
Initialisation : $k = 0, Q_0 = 0, R_0 = A$
$A = B \times 0 + A$
Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang k-1. Si on effectue une k-ième itération :
$deg(R_{k-1}) \geq deg(B)$
prenons $d = deg(R_{k-1}) - deg(B) \in \mathbb{N}$ et $s = \frac{dom(Rk-1)}{dom(B)}$ a un sens car $dom(B) \in \mathbb{K}^*$
Alors : $Q_k = Q_{k-1} + sX^d$ et $R_k = R_{k-1} - sX^dB$
donc $BQ_k + R_k = BQ_{k-1} + R_{k-1} = A$
Conclusion : Soit k_0 le nombre total d'itérations, on renvoie (Q_{k_0}, R_{k_0})
Par principe de réccurrence : $A = BQ_{k_0} + R_{k_0}$
Puisque l'on effectue plus d'itération supplémentaire $deg(R_{k_0}) < deg(B)$

II Factorisation d'une racine; un polynôme n'a pas plus de racines distincts que son degré

Propriété :
Soit $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in \mathbb{K}$
1) Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$
2) $P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha)|P$
Démonstration :
1) $P = (X - \alpha)Q + R$
Avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, $R \in \mathbb{K}[X]$
et $deg(R) < deg(X - \alpha) = 1$ donc R est constant

substituons α à X :
$P(\alpha) = R(\alpha) = R$ car R constante
2) $(X - \alpha)|P \iff R = 0$
Propriété :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors P possède au plus n racines.
Démonstration : récurrence sur n
Initialisation : n=0, $P \in \mathbb{K}^*$ aucune racine .
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie au rang n-1
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n :
-si P n'a pas de racine : il n'en a pas plus de n
- si P a au moins une racine $c \in \mathbb{K}$, soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = (x - c)Q(x)$
alors $deg(Q) = n - 1$
Q a donc au plus n-1 racines
On a pour $x \in \mathbb{K}$:
$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x = c)$ ou $Q(x) = 0$
P possède au plus une racine de plus que Q donc au plus n au total

III Factorisation simultanée de plusieurs racines distinctes ; cas où il y a autant de racines que le degré (polynôme scindé simple)

Propriété:
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$
Soit $(\alpha_1,...,\alpha_r)$ des racines deux à deux distinctes de P. Alors :
$(X - \alpha_1)...(X - \alpha_r)|P$
c'est-à-dire: $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha_1)...(X - \alpha_r)Q$
Démonstration : soit la division euclidienne :
$P = (X - \alpha_1)...(X - \alpha_r)Q + R$ avec $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]$
et $deg(R) < deg((X - \alpha_1)...(X - \alpha_r)) = r$
Pour $k \in [[1,r]]$:
$R(\alpha_k) = P(\alpha_k) = 0$ donc R possède au moins r racines or $deg(R) < r$ donc $R = 0$
Corrolaire :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il possède d racines distinctes 2à 2 $\alpha_1,...,\alpha_d$ alors :
$P = dom(P)\prod_{k=1}^{d}(X - \alpha_k)$
Démonstration : Comme les racines sont 2 à 2 disctincts :
$\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha_1)...(X - \alpha_d)Q$
de degré $d = \underbrace{1 + ... + 1}_{d \quad termes} + deg(Q)$ $deg(Q) = 0$ donc $Q = \lambda \in \mathbb{K}^*$
coefficient dominant : $dom(P) = \lambda$

IV Interpolation de Lagrange

Propriété :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1,...,a_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts.
La famille des polynomes associée à $(a_1,...,a_n)$ est $(L_1,...,L_n)$ où :
$L_k = \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$
1) $\forall k \in [[1,n]], deg(L_k) = n - 1$
2) $\forall (k,j) \in [[1,n]]^2, L_k(a_j) = \delta_{k,j}$
3) $(L_1,...,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ Plus précisement :
$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)L_k$
Démonstration :
1) Il y a n-1 facteur de degré 1
2) $L_k(a_j) = \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{a_j - a_i}{a_k - a_i}$

si $j \neq k$, i peut prendre la valeur j et donne un facteur nul $L_k(a_j) = 0$
si $j = k$: tous les facteurs valent 1 $L_k(a_j) = 1$
3) C'est bien une famille de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$
Montrons que tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est combinaison linéaire de $(L_1,...,L_n)$ de façon unique
Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$
analyse : si $P = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k$ avec $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$
Pour $j \in [[1,n]]$:
$P(a_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k(a_j)$
$P(a_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{k,j}$
$P(a_j) = \lambda_j$
unicité des candidats $(\lambda_1,..., \lambda_n)$
Synthèse : Pour $Q = P - \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_k) L_k$
d'une part : $P,L_1,...,L_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ donc $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$
d'autre part : pour $j \in [[1,n]]$:

$$Q(a_j) = P(a_j) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k(a_j)}_{=P(a_j)}$$

$Q(a_j) = 0$
Ainsi $deg(Q) < n$ et Q possède au moins n racines distinctes donc $Q = 0$, $P = \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_k) L_k$

V Dérivée de PQ

Propriété :
$(PQ)' = P'Q + PQ'$
Démonstration :
coeff de X^k dans P : a_k
coeff de X^k dans Q : b_k
coeff de X^k dans PQ : $\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$
coeff de X^k dans (PQ)' : $(k+1) \sum_{j=0}^{k+1} a_j b_{k+1-j}$
coeff de X^k dans P' : $(k+1) a_{k+1}$
coeff de X^k dans Q' : $(k+1) b_{k+1}$
coeff de X^k dans P'Q : $\sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} b_{k-j}$
coeff de X^k dans P Q' : $\sum_{j=0}^{k} a_j (k-j+1) b_{k-j+1} = \sum_{j=0}^{k+1} a_j (k-j+1) b_{k-j+1}$
Pour P'Q :
$\sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} b_{k-j} = \sum_{j=1}^{k+1} j a_j b_{k+1-j} = \sum_{j=0}^{k+1} j a_j b_{k+1-j}$
coeff de X^k dans P'Q + PQ' : $\sum_{j=0}^{k+1} (j+k-j+1) a_j b_{k+1-j} = (k+1) \sum_{j=0}^{k+1} a_j b_{k+1-j}$

VI Formule de Taylor

Propriété :
Soit $a \in \mathbb{K}$:
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$
Démonstration :
Récurrence sur n :
Initialisation : Soit $P \in \mathbb{K}_0[K] = \mathbb{K}$
$P = P(a) = \frac{P^{(0)}(a)}{0!} (X-a)^0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule soit vraie au rang n :
Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$
$P' \in \mathbb{K}_n[X]$ donc par hypothèse de récurrence :
$P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (X-a)^k$ car $P'^{(k)} = P^{(k+1)}$
Posons :

$Q = P - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$
Alors :
$Q' = P' - \sum_{k=1}^{n+1} k\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-1}$
$Q' = P' - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1}$
$Q' = P' - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!}(X-a)^k$
Or $P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!}(X-a)^k$:
$Q' = 0$ donc $Q \in \mathbb{K}$
or $Q(a) = P(a) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}0^k$
$Q(a) = P(a) - P(a) = 0$ donc $Q = 0$ l'hypothèse est vérifié au rang n+1

VII Caractérisation différentielle de la multiplicité

Propriété :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, \alpha \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$ Les propositions suivantes sont équivalentes :
1) α est racine de P de multiplicité m
2) $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour $k < m$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$
Démonstration :
1 $\Rightarrow$ 2 : Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$
Soit $k \in [[0,m]]$, par la formule de Leibniz :
$P^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}((X-\alpha)^m)^{(k-j)}Q^{(j)}$
$P^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\frac{m!}{(m-k+j)!}(X-\alpha)^{m-k+j}Q^{(j)}$ car $(k-j) \in [[0,k]] \subset [[0,m]]$ donc $m-(k-j) = m-k+j \in \mathbb{N}$
donc $P^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\frac{m!}{(m-k+j)!}0^{m-k+j}Q^{(j)}(\alpha)$
si $k < m$: $k-j$ varie entre 0 et k donc :
$\forall j \in [[0,k]], m-(k-j) \in \mathbb{N}^*$
$P^{(k)}(\alpha) = 0$
si $k = m$:
$P^{(m)}(\alpha) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}\frac{m!}{j!}0^j Q^{(j)}(\alpha)$
$P^{(m)}(\alpha) = m!Q(\alpha) \neq 0$ car $Q(\alpha) \neq 0$
2 $\Rightarrow$ 1 on a : $P^{(k)}(\alpha) = 0$ si $k < m$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$
Formule de Taylor $d = deg(P)$:
$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$
on a $0 \leq m \leq d$ car si $m > d, P^{(m)} = 0$ donc $P^{(m)}(\alpha) = 0$
On a donc :
$P = \sum_{k=m}^{d} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$

$$P = (X-\alpha)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{d} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-m \in \mathbb{N}}}_{Q \in \mathbb{K}[X]}$$

enfin :
$Q(\alpha) = \sum_{k=m}^{d} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}0^{k-m}$
$Q(\alpha) = \frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!} \neq 0$