

Démonstration kholle 24

I Matrice de $f(\vec{x})$, de $g \circ f$

Propriété :

E: \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base de E

F: \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$

$\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ base de F

$f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\vec{x} \in E$

$$\underbrace{Mat_{\mathcal{C}}(f(\vec{x}))}_{n \times 1} = \underbrace{Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)}_{n \times p} \underbrace{Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x})}_{p \times 1}$$

Démonstration :

Notons : $Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $\vec{x} = \sum_{k=1}^p x_k \vec{u}_k$

et $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} Mat_{\mathcal{C}}(f(\vec{x})) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n y_i \vec{v}_i$

Or : $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p x_k f(\vec{u}_k)$ car $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p x_k (\sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{v}_i)$ par définition de $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$

$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n x_k a_{ik} \vec{v}_i$

$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^p a_{ik} x_k) \vec{v}_i$

on a $(\sum_{k=1}^p a_{ik} x_k) = y_i$ donc le coefficient de i de $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = y_i$

Propriété : E : \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $r \geq 1$

F : \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$

G : \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ base de E

$\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ base de F

$\mathcal{D} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ base de G

Alors :

$$\underbrace{Mat(g \circ f)_{\mathcal{D}\mathcal{B}}}_{n \times r} = \underbrace{Mat(g)_{\mathcal{D}\mathcal{C}}}_{n \times p} \underbrace{Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)}_{p \times r}$$

Démonstration :

Notons : $Mat(g)_{\mathcal{D}\mathcal{C}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$

$Mat_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(g \circ f) = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$

Par définition :

$\forall j \in [[1, r]], f(\vec{u}_j) = \sum_{k=1}^p b_{kj} \vec{v}_k$

et $\forall k \in [[1, p]], g(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{w}_i$

Alors pour $j \in [[1, r]]$:

$$\begin{aligned}
g(f(\vec{u}_j)) &= \sum_{k=1}^p b_{kj} g(\vec{v}_k) \text{ car } g \text{ linéaire} \\
g(f(\vec{u}_j)) &= \sum_{k=1}^p (b_{kj} \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{w}_i) \\
g(f(\vec{u}_j)) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)}_{=c_{ij}} \vec{w}_i
\end{aligned}$$

II Définition des matrices de passage et démonstration des formules de changement de base (vecteurs, applications linéaires en général, endomorphisme)

Définition :

On note la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_E)$

Propriété : Pour $\vec{x} \in E$:

$$Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} Mat_{\mathcal{C}}(\vec{x})$$

Démonstration :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} Mat_{\mathcal{C}}(\vec{x}) = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_E) Mat_{\mathcal{C}}(\vec{x})$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} Mat_{\mathcal{C}}(\vec{x}) = Mat_{\mathcal{B}}(Id_E(\vec{x}))$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} Mat_{\mathcal{C}}(\vec{x}) = Mat_{\mathcal{B}}(\vec{x})$$

Propriété :

$E : \mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$

$F : \mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

\mathcal{B} et \mathcal{C} , bases de E

u et v , bases de F alors :

$$Mat_{\mathcal{C}v}(f) = \underbrace{P_{vu}}_{n \times n} \underbrace{Mat_{\mathcal{B}u}(f)}_{n \times p} \underbrace{P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}_{p \times p}$$

Démonstration :

$$P_{vu} Mat_{\mathcal{B}u}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = Mat_{uv}(Id_F) Mat_{\mathcal{B}u}(f) Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_E)$$

$$P_{vu} Mat_{\mathcal{B}u}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{C}v}(Id_f \circ f \circ Id_E)$$

$$P_{vu} Mat_{\mathcal{B}u}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{C}v}(f)$$

Corrolaire cas d'un endomorphisme

$$dim(E) = n \in \mathbb{N}^* (p = n)$$

\mathcal{B}, \mathcal{C} bases de E $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

III Relation de similitude : c'est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$, invariance de la trace, trace d'un projecteur.

Propriété :

la similitude est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration :

reflexivité : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $P = I_n \in Gl_n(\mathbb{K})$:

$$A = P^{-1}AP$$

symétrie : s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$:

$$A = Q^{-1}BQ \text{ avec } Q = P^{-1} \in Gl_n(\mathbb{K})$$

transitivité :

si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$ avec $(B, Q) \in Gl_n(\mathbb{K})$

alors $C = R^{-1}AR$ où $R = PQ \in Gl_n(\mathbb{K})$

Propriété :

si A et B sont semblables : $tr(A) = tr(B)$

Démonstration :

Soit $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$B = P^{-1}AP$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP)$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(AP^{-1}P)$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$$

Propriété :

$$\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$$

$p \in \mathcal{L}(E)$ projecteur et $r = \text{rg}(p)$

Alors : il existe une base de E tel que :

$$\text{Mat}(p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{ En particulier } \text{tr}(p) = r$$

Démonstration :

si $r = 0 : p = \tilde{0}$, si $r = n : p = \text{Id}_E$

si $1 \leq r \leq n - 1$ on a :

$$E = \text{Inv}(f) \oplus \text{Ker}(f)$$

et $\dim(\text{Ker}(f)) = n - r$ (théorème du rang) $\dim(\text{Inv}(f)) = r$

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ base de $\text{Inv}(f)$

$(\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n)$ base de $\text{Ker}(f)$

Posons $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ c'est une base de E car concaténation de bases de sous-espace vectoriel supplémentaires :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

IV si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe \mathcal{U} base de E et \mathcal{V} base de F telles que $\text{Mat}_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{n,p,r}$

Propriété :

$$\dim(E) = p \in \mathbb{N}^* \dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r . Alors :

il existe une base \mathcal{U} de E et une base \mathcal{V} de F tel que : $\text{Mat}_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{npr} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

Démonstration :

si $r = 0, f = \tilde{0}$, toutes bases conviennent.

sinon :

soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ base de $\text{Im}(f)$

pour $1 \leq j \leq r$, soit \vec{u}_j , un antécédent de \vec{v}_j de f

$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ est en particulier libre : par le théorème de la base incomplète, il existe $(\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n) \in F^{n-r}$ tel que $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ soit une base de F .

Théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(f)) = p - r$.

Soit $(\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_p)$ base de $\text{Ker}(f)$ et montrons que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est base de E

Montrons qu'elle est libre :

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}$, tel que $\sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E$

appliquons f : on a $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$ si $j \leq r$ ou $\vec{0}_F$ sinon donc $\sum_{j=1}^r \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}_F$

Or $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$

Si $r = p$, c'est triviale

sinon, il reste alors : $\sum_{j=r+1}^p \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E$

$(\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_p)$ libre (car base de $\text{Ker}(f)$) donc $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0$

avec $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base de E et $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ base de F :

$$Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & (0) & \\ & \ddots & & 0 \\ (0) & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

V Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et s'il existe \mathcal{U} base de E et \mathcal{V} base de F telles que $Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{n,p,r}$, $rg(f) = r$

Propriété :

$dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ $f \in \mathcal{L}(E, F)$

S'il existe une base \mathcal{U} de E et une base \mathcal{V} de F tel que $Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{npr} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ alors $rg(f) = r$

Démonstration :

Notons $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ et $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

Si $r = 0$: $Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = 0_{np}$, $f = \vec{0}$, $rg(f) = 0 = r$

Sinon : on a :

$$Im(f) = Vect(\underbrace{f(\vec{u}_1)}_{=\vec{v}_1}, \dots, \underbrace{f(\vec{u}_r)}_{=\vec{v}_r}, \underbrace{f(\vec{u}_{r+1})}_{=\vec{0}_F}, \dots, \underbrace{f(\vec{u}_p)}_{=\vec{0}_F})$$

donc : $Im(f) = Vect(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$

Or $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ est libre car sous-famille de \mathcal{V} , qui l'est.

On a donc : $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ base de $Im(f)$ donc $dim(Im(f)) = r$

VI Une matrice $n \times p$ est de rang r si et seulement si, elle est équivalente à $J_{n,p,r}$. Application au rang de la transposée

Propriété :

soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $r \in [[0, \min(n, p)]]$:

$rg(A) = r \iff A$ équivalente à J_{npr}

Démonstration :

\mathcal{B} base canonique de \mathbb{K}^p , \mathcal{C} base canonique de \mathbb{K}^n

\Rightarrow soit f canoniquement associé à A :

$rg(f) = r$ (par définition de $rg(A)$) et $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = A$

Or: il existe \mathcal{U} base de E et \mathcal{V} base de F tel que : $Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{npr}$

Formule de changement de base général :

$$Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = \underbrace{Mat_{\mathcal{V}\mathcal{C}}(Id_E)}_{P_{\mathcal{C}\mathcal{V}} \in GL_n(\mathbb{K})} Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) \underbrace{Mat_{\mathcal{B}\mathcal{U}}(Id_F)}_{P_{\mathcal{U}\mathcal{B}} \in GL_p(\mathbb{K})}$$

$$\iff \exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}), A = P J_{npr} Q$$

donc $rg(A) = rg(J_{npr})$

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à J_{npr} :

$Mat_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g) = J_{npr}$ donc $rg(g) = r$

Or par définition $rg(J_{npr}) = rg(g) = r$ donc : $rg(A) = r$

Propriété :

$\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), rg({}^t A) = rg(A)$

Démonstration :

Soit $n=rg(A)$:

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_p(\mathbb{K}), A = P J_{npr} Q$

$${}^t A = \underbrace{{}^t Q}_{\in GL_p(\mathbb{K})} {}^t J_{npr} \underbrace{{}^t P}_{\in GL_n(\mathbb{K})}$$

donc : ${}^t A$ équivalent à ${}^t J_{npr} = J_{pnr}$

donc $rg({}^t A) = r$