Démonstration kholle 22

I Théorème de la base incomplète (cas $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$).

Théorème de la base incomplète :
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie :
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{L}$ soit libre.
Alors il existe une base B de E tel que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$
Démonstration :
Posons : $\Omega = \{\mathscr{H}$ famille libre de E : $\mathscr{L} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{G}\}$
$A = \{Card(\mathscr{H}) : \mathscr{H} \in \Omega\}$
A est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par $Card(\mathscr{G})$ et $A \neq \emptyset$ car $\mathscr{L} \in \Omega$ donc $card(\mathscr{L}) \in A$
Soit $p = max(A)$ et $B \in \Omega$ tel que $Card(B) = p$.
On a bien $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ et $\mathscr{B}$ libre car $\mathscr{B} \in \Omega$
Supposons que B n'engendre pas E :
Si tous les vecteurs de $\mathscr{G}$ appartiennent à $Vect(\mathscr{B})$:
$E = Vect(\mathscr{G}) \subset Vect(\mathscr{B})$, ce qu'on a exclu.
Soit $\vec{x} \in \mathscr{G}$ tel que $\vec{x} \notin Vect(\mathscr{B})$ et $\mathscr{M} = \mathscr{B} \cup \{\vec{x}\}$ alors :
$\mathscr{L} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{G}$ et $\mathscr{M}$ libre car B libre et $x \notin Vect(\mathscr{B})$
donc $\mathscr{M} \in \Omega$ et $Card(M) > max(A)$ absurde

II Lemme de Steinitz.

Lemme de Steinitz :
Dans un K-espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille d'au moins n+1 vecteurs est liée
Démonstration

III Conséquences du lemme de Steinitz : les bases sont finies et de même cardinal, cardinaux des familles libres et cas d'égalité.

IV Sous-espaces : inégalité des dimensions en cas d'égalité.

V Si $E = F \oplus G, dim(E) = dim(F) + dim(G)$

VI Existence de supplémentaires, formule de Grassmann.

VII Dimension de $E \times F$, de $\mathscr{L}(E,F)$.

VIII Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base (énoncé complet + démonstration de la caractérisation de l'injectivité).

IX Théorème du rang (avec énoncé et démonstration du lemme)