

Démonstration kholle 27

I Cardinal d'un produit, extension à $\bigcup_{x \in A} \{x\} B_x$ avec tous les B_x de même cardinal (principe des bergers)

Propriété :

Si E et F sont finis $E \times F$ aussi et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F)$

Démonstration : Si E ou $F = \emptyset$ alors $E \times F = \emptyset$ $0 = 0$

Si $E = \{x_0\}$, singleton

Soit $f : F \rightarrow \{x_0\} \times F$

$y \mapsto (x_0, y)$ et $g : \{x_0\} \times F \rightarrow F$

$(x_0, y) \mapsto y$

Ces applications sont trivialement réciproques.

ainsi : f est bijective $\{x_0\} \times F$ est finie et $\text{Card}(\{x_0\} \times F) = \text{Card}(F)$ Si x_1, \dots, x_n sont les éléments distincts de E :

Notons $F_k = \{x_k\}$ et $F(1 \leq k \leq n)$

Alors : (F_1, \dots, F_n) est une partition de $E \times F$ en effet : $F_k \subset E \times F$ pour tout k donc $\bigcup_{k=1}^n F_k \subset E \times F$

Soit $(x, y) \in E \times F$

Alors : $\exists k \in [1, n], x = x_k$

Or $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ donc $(x, y) \in F_k$

A fortiori $E \times F \subset \bigcup_{k=1}^n F_k$

si $i \neq j$ et $(x, y) \in F_i \cap F_j$:

$x = x_i$ et $x = x_j$

or $x_i \neq x_j$

ainsi : $F_i \cap F_j = \emptyset$

On a bien ;

$E \times F = \bigcup_{k=1}^n F_k$ avec les F_k disjoint

$E \times F$ est fini et :

$\text{Card}(E \times F) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(F_k)$

Or on a vu précédemment : $\forall k \in [1, n], \text{Card}(F_k) = \text{Card}(F)$

donc $\text{Card}(E \times F) = n\text{Card}(F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F)$

Propriété :

Si on effectue un 1^{er} choix parmi n options puis un second ayant p options (pouvant dépendre du 1^{er} choix), il y a np couples de choix possibles

Formellement : A fini de cardinal $n \geq 1$

F ensemble quelconque et, pour tout $x \in A$

Soit $B_x \subset F$ fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ (indépendant de x)

Alors :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{x \in A} \underbrace{(\{x\} \times B_x)}_{\{(x, y), y \in B_x\}}\right) = np$$

Démonstration :

Soit $G = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times B_x)$

l'union est disjointe car, si $x \neq x'$:

$\{x\} \times B_x = \{(x, y) : y \in B_x\}$

$\{x'\} \times B_{x'} = \{(x', z) : z \in B_{x'}\}$

pas d'élément commun car la première composante diffère toujours

De plus :

$$\forall x \in A, \text{Card}(\{x\} \times B_x) = \underbrace{\text{Card}(B_x)}_p$$

donc G est fini de cardinal np

II Dénombrement des arrangements, des injections

Propriété :

pour $0 \leq p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

si $p = 0$: $A_n^0 = 1$ (liste vide)

si $p \geq 1$: on a n choix pour la première composante
puis $n-1$ choix pour la seconde composante

⋮
⋮
⋮

puis $n - p - 1$ choix pour la p -ième composante

donc : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Propriété :

E fini de cardinal p et F fini de cardinal n alors $\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = A_n^p$

Démonstration:

Notons x_1, \dots, x_p les éléments distincts on a vu que :

$$\Phi : F^E \rightarrow F^p$$

$f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_p))$ est une bijection

ainsi : $\psi = \Phi|_{\text{Inj}(E, F)}$

ψ est une injection de $\text{Inj}(E, F)$ vers F^p , elle réalise donc une bijection sur son image ainsi :

$$\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = \text{Card}(\text{Im}(\psi))$$

Or $\text{Im}(\psi)$ est l'ensemble des p -arrangements de f :

$$\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = A_n^p$$

III Expression des combinaisons avec des factorielles

Propriété :

Pour $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Démonstration : 1^{ère} démonstration :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \dots \frac{n-p+1}{1} \binom{n-p}{0} \text{ Or : } \binom{n-p}{0} = 1 \text{ car la seule partie de cardinal 0 est } \emptyset$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2^{nde} démonstration :

pour choisir un p -arrangements on peut choisir une p -combinaison : $\binom{n}{p}$ choix puis une permutation de ces p valeurs : $p!$ choix

d'où $A_n^p = p! \binom{n}{p}$

$$\binom{n}{p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

IV Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Propriété :

Si E est fini, $\mathcal{P}(E)$ aussi et $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$ **Démonstration :**

Posons $\Phi : (E) \rightarrow \{0,1\}^E$

$$A \mapsto 1|_A$$

$$\Psi : \{0,1\}^E \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$f \mapsto \{x \in E : f(x) = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

Elles sont réciproques ainsi :

$$\mathcal{P}(E) \text{ est fini de cardinal : } \text{Card}(\{0,1\}^E) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration :

Soit E de cardinal n :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(E) \text{ avec } \mathcal{P}_k(E) \text{ disjoints donc :}$$

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{P}_k(E))$$

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

V Formule du triangle de Pascal.

Propriété :

pour $1 \leq p \leq n$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration : $E = [[1, n]]$

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(E) : \text{Card}(A) = p \text{ et } n \in A\}$$

$$\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{P}(E) : \text{Card}(A) = p-1 \text{ et } n \notin A\}$$

$$\text{Alors : } \mathcal{P}(E) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

$$\text{donc } \binom{n}{p} = \text{Card}(\mathcal{U}) + \text{Card}(\mathcal{V})$$

$$\text{on a } \mathcal{V} = \{A \subset [[1, n-1]] : \text{Card}(A) = p\}$$

$$\text{donc } \text{Card}(\mathcal{V}) = \binom{n-1}{p}$$

Pour \mathcal{U} posons :

$$\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}_{p-1}([1, n-1])$$

$$A \mapsto A \setminus \{n\}$$

$$\psi : \mathcal{P}_{p-1}([1, n-1]) \rightarrow \mathcal{U}$$

$$A \mapsto A \cup \{n\}$$

Ces applications sont réciproques ainsi :

$$\text{Card}(\mathcal{U}) = \binom{n-1}{p-1}$$

VI Démonstration combinatoire de $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$

Propriété :

pour $1 \leq p \leq n$:

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration :

E de cardinal n

$$X = \{(x, A) : x \in A \subset E \text{ et } \text{Card}(A) = p\}$$

1^{er} calcul de $\text{Card}(X)$ on choisit A : $\binom{n}{p}$ choix puis $x \in A$: p choix

soit $p \binom{n}{p}$

2^{eme} calcul : on choisit $x \in E$: n choix on choisit A en complétant x par p-1 éléments, parmi les n-1 restants

soit $\binom{n-1}{p-1}$ choix soit $n \binom{n-1}{p-1}$ choix

VII Exercice : calcul combinatoire de $\sum_{k=p}^n \binom{p-1}{k-1}$

Propriété :

$$\sum_{k=p}^n \binom{p-1}{k-1} = \binom{n}{p} \text{ Démonstration :}$$

On pose :

$$E_k = \{A \subset [[1, n]] : \text{Card}(A) = p \text{ et } \max(A) = k\}$$

$$F_k = \{B \subset [[1, k-1]] : \text{Card}(B) = p-1\}$$

$$\phi_k : E_k \rightarrow F_k$$

$$A \mapsto A \setminus \{k\}$$

$$\psi_k : F_k \rightarrow E_k$$

$$B \mapsto B \cup \{k\}$$

sont des bijections réciproques

$$P_p([1, n]) = \bigcup_{k=p}^n E_k \text{ avec } E_k \text{ disjoints :}$$

$$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$$

VIII Exercice : Formule de Vandermonde

Propriété :

Pour $0 \leq p \leq m, n$ on a :

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

Démonstration :

Soit A et B deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs m et n :

Nombre de $A \cup B$ à p éléments : $\binom{m+n}{p}$ car $\text{Card}(A \cup B) = m + n$

Posons :

$$E = \{X \subset A \cup B : \text{Card}(X) = p\}$$

$$E_k = \{X \subset A \cup B : \text{Card}(A \cap X) = k\} \text{ avec } 0 \leq k \leq p$$

Alors : $E = \bigcup_{k=0}^p E_k$ avec E_k disjoints

$$\text{donc : } \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \text{Card}(E_k)$$

On a à k fixé :

$$\phi_k : E_k \rightarrow \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{p-k}(B)$$

$$X \mapsto (A \cap X, B \cap X)$$

est bien définie de réciproque :

$$\psi_k : \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{p-k}(B) \rightarrow E_k$$

$$(Y, Z) \mapsto Y \cup Z$$

pour $X \in E_k$:

$$\psi_k(\phi_k(X)) = (A \cap X) \cup (B \cap X)$$

$$\psi_k(\phi_k(X)) = (A \cup B) \cap X$$

$$\psi_k(\phi_k(X)) = X \text{ car } X \subset A \cup B$$

pour $(Y, Z) \in \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{p-k}(B)$:

$$\phi_k(\psi_k(Y, Z)) = (A \cap (Y \cup Z), B \cap (Y \cup Z))$$

$$\phi_k(\psi_k(Y, Z)) = ((A \cap Y) \cup (A \cap Z), (B \cap Y) \cup (B \cap Z))$$

Or : $Y \subset A$ donc $A \cap Y = Y$

et $A \cap B = \emptyset$ donc $B \cap Y = \emptyset$

de même : $A \cap Z = \emptyset$ et $B \cap Z = Z$ donc :

$$\phi_k(\psi_k(Y, Z)) = (Y, Z)$$

$$\text{Ainsi : } \text{Card}(E_k) = \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$

On remplace :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$