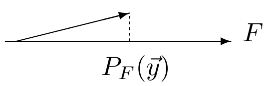
Démonstration kholle 27

I Distance d'un point à un sous-espace,atteinte en un unique point (le projeté orthogonal) Exemple : $d(X^2,\mathbb{R}_1[X])$ pour le produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

Propriété :
Soit F de dimension finie $d(\vec{y},F)$ est atteinte en un unique point qui est $p_F(\vec{y})$
Démonstration :
si $dim(E) = 2$ et $dim(F) = 1$:



$\|\vec{y}-\vec{x}\| > \|\vec{y}-p_F(\vec{y})\|$
Cas général : $p_F(\vec{y}) - \vec{x} \in F$ car $\vec{x}$ et $p_F(\vec{y}) \in F$
et $\vec{y} - p_F(\vec{y}) \in F^\perp$ car p_F est la projection sur F parrallèle à $F^\perp$
donc par le théorème de Pythagore :
$\|\vec{y}-\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}-P_F(\vec{y})\|^2 + \|p_F(\vec{y})-\vec{x}\|^2$
$\|y-x\|^2 \geq \|\vec{y}-p_F(\vec{y})\|^2$ avec égalité si et seulement si $\|p_F(\vec{y})-\vec{x}\| = 0$, c'est-à-dire $\vec{x} = p_F(\vec{y})$
Exemple :
$E = \mathbb{R}[X]$ $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$
Calculer $(d(X^2,\mathbb{R}_1[X]))^2$
où $\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt = \|X^2-(aX+b)\|^2$
Il est atteint pour (a,b) tel que $p_F(X^2) = aX+b$ uniquement :
$X^2 - p_F(X^2) \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp$
donc :
$\langle X^2-p_F(X^2),1\rangle = 0$
$\langle X^2-p_F(X^2),X\rangle = 0$

$\langle aX+b,1\rangle = \langle X^2,1\rangle$
$\langle aX+b,X\rangle = \langle X^2,X\rangle$

$\langle X,1\rangle a + \langle 1,1\rangle b = \langle X^2,1\rangle$
$\langle X,X\rangle a + \langle 1,X\rangle b = \langle X^2,X\rangle$

$\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{-1/12} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$(a,b) = (1, \frac{-1}{6})$

Le minimum cherché est :
$\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{4})^2 dt$
On peut écrire :
$X^2 = \underbrace{p_F(X^2)}_{\in F} + \underbrace{(X^2 - p_F(X^2))}_{\in F^\perp}$
donc par Pythagore :
$\|X^2\|^2 = \|p_F(X^2)\|^2 + \underbrace{\|X^2 - p_F(X^2)\|^2}_{m}$
$m = \|X^2\|^2 - \|aX + b\|^2$
$m = \int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 (t - \frac{1}{6})^2 dt$
ce qui est le plus simple à calculer
On obtient :
$m = \frac{1}{5} - [\frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{36}t]_0^1$
$m = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$

II Si E est un espace euclidien, isomorphisme $\phi : u \in E \mapsto \langle u, \cdot \rangle \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$

Théorème :
Soit E euclidien et $n = dim(E) \in \mathbb{N}^*$, l'application :
$\phi : E \to \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$
$\vec{u} \mapsto \langle \vec{u}, \cdot \rangle$
est un isomorphisme
Démonstration :
Montrons que ϕ **est linéaire** c'est-à-dire : $\phi \in \mathscr{L}(E,\mathscr{L}(E,\mathbb{R}))$
Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Pour $\vec{x} \in E$:
$\langle \vec{u} + \lambda \vec{v} n \vec{x} \rangle = \langle \vec{u},\vec{x} \rangle + \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
nombre réels donc : $\phi(\vec{u} + \lambda \vec{v})(\vec{x}) = \phi(\vec{u})(\vec{x}) + \lambda \phi(\vec{v})(\vec{x})$
Vrai pour tout $\vec{x}$ donc :
application de E dans $\mathbb{R}$ $\phi(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \phi(\vec{u}) + \lambda \phi(\vec{v})$
Soit $\boldsymbol{\vec{u} \in Ker(\phi)}$:
$\phi(\vec{u}) = \tilde{0}$
$\forall \vec{x} \in E, \underbrace{\phi(\vec{u}, \vec{x})}_{\langle \vec{u},\vec{x} \rangle} = 0$
pour $\vec{x} = \vec{u}$: $\|\vec{u}\|^2 = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$
$Ker(\phi) = \{\vec{0}\}$
Théorème du rang :
$dim(Im(\phi)) = dim(E) - dim(Ker(\phi))$
$dim(Im(\phi)) = n = dim(\mathscr{L}(E,\mathbb{R}))$
or $Im(\phi) \subset \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ donc $Im(\phi) = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$

III Isométries vectorielles : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, équivalence entre conservation de la norme et conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormée

IV Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ + description de $O_2(\mathbb{R})$ + commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$

V Etude de $SO(E)$ (E plan vectoriel orienté)

VI Etude de $O^-(E)$(E plan vectoriel orienté)