Démonstration kholle 5

I Exponentielle propriété et unicité

Propriété :
On admet l'existence d'une fonction $f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ tel que $f(0) = 1$ et $f' = f$
Elle est unique. On la note exp (fonction exponentielle).
De plus :
$\forall x \in \mathbb{R}, (exp(x) \neq 0$ et $\frac{1}{exp(x)} = exp(-x))$
Démonstration :
Soit f convenant, $f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}), f(0) = 1$ et $f' = f$
a) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)f(-x)$
Alors $u \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ et pour $x \in \mathbb{R}$
$u'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$
or $f' = f$ donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$
u' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc u est constante
$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = u(0) = 1$ car $f(0) = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{f(x)}_{\neq 0,\quad inverse \quad de \quad f(-x)} f(-x) = 1$
b) Si g convient aussi :
Posons v : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to g(x)f(-x)$
alors $v \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ est pour $x \in \mathbb{R}$:
$v'(x) = g'(x)f(-x) + g(x)(-f'(-x))$
or $f' = f$ et $g' = g$ donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = g(x)f(-x) - g(x)f(-x) = 0$
v' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc v est constante
$\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = v(0) = 1$ car $f(0) = g(0) = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x)f(-x) = 1$
donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x)\underbrace{f(-x)f(x)}_{=1 \quad par \quad a} = f(x)$
$g = f$

II exponentielle: strictement positive, croissante, limites, logarithme

Propriété : la fonction exponentielle est :
1) strictement positive
2) strictement croissante
3) $\lim_{x\to+\infty} exp(x) = +\infty$,
4) $\lim_{x\to-\infty} exp(x) = 0$
Démonstration :
1) exp ne s'annule pas (propriété précédente) et est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Elle ne change pas de signe (contraposé du TVI) $exp(0) = 1 > 0$, son signe est donc > 0

2) $exp'(0) = exp > 0$ donc exponentielle strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$
3) Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to exp(x) - (x+1)$
$f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = exp(x) - 1$ >0 si x>0; 0 si x=0; <0 si x<0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) \geq x + 1$
or $\lim_{x \to +\infty}(x+1) = +\infty$
donc $\lim_{x \to +\infty}(exp(x)) = +\infty$
4) Ainsi $\lim_{x \to -\infty} \underbrace{(exp(-x))}_{\frac{1}{exp(x)}} = +\infty$
Donc $\lim_{x \to -\infty}(exp(x)) = 0$
Corolaire : exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
La réciproque est notéé ln (logarithme népérien).
On a : $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
On pose $e = exp(1) \approx 2.718$
(On a donc $\ln(e) = 1$, $\ln(1) = 0$)
Démonstration : corolaire du TVI appliqué à exp grâce à la propriété précédente

III Exponentielle de somme, logarithme de produit, dérivée de ln

Propriété :
1) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, exp(a+b) = exp(a)exp(b)$
2) $\forall (a, b \in \mathbb{R}^2, exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$
Démonstration :
1) Soit $a \in \mathbb{R}$
Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to exp(a+x)exp(-x)$
$f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1exp'(a+x)exp(-x) + exp(a+x)(-exp'(-x))$
Comme $exp' = exp$:
$f'(x) = 0$
f' est nulle sur $\mathbb{R}$ donc f est constante :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) = exp(a)$ car $exp(0) = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, exp(a+x)\underbrace{exp(-x)exp(x)}_{1} = exp(a)exp(x)$
2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$exp(a) = exp(a-b+b)$
Par 1 :
$exp(a) = exp(a-b)\underbrace{exp(b)}_{\neq 0}$
$exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$
Propriété :
1)$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2) $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

Démonstration :
1) $exp(\ln(a)+\ln(b)) = exp(\ln(a))exp(\ln(b))$
$= a \times b$
$= ab$
donc :
$\ln(a)+\ln(b) = \ln(ab)$
2) $\ln(a) = \ln(\frac{a}{b}b)$
Par 1 :
$\ln(a) = \ln(\frac{a}{b}) + \ln(b)$
$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
Propriété :
$\ln \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
Démonstration : exp' ne s'annule pas (car exp'=exp) donc ln est dérivable.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y = \ln(x) \in \mathbb{R}$:
$\ln'(x) = \frac{1}{exp'(y)} = \frac{1}{exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$

IV Croissances comparées logarithme

Propriété :
1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:
2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$
3)$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$
Démonstration :
1) Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to \ln(x) - 2\sqrt{x}$
$\forall x \in [1;+\infty[, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, =0 si x=1, <0 si x>1
donc f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$
donc $\forall x \in [1;+\infty[, f(x) \leq f(1) = -2 \leq 0$
Comme $x \geq 1$ et $f \leq 0$:
$\forall x \in [1;+\infty[, 0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$ puis:
$\forall x \in [1;+\infty[, 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$
or $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$
donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
2) On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
et $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ car $\alpha > 0$
donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^\alpha)}{x^\alpha} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \alpha\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$
or $\alpha \neq 0$ donc
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$
3) par 2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1/x)}{1/x^\alpha} = 0$
$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$
Comme ln(x) n'est pas défini sur x<0 on a :
$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$

V Croissances comparées exponentielle

Propriété :
1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:
2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
3)$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
Démonstration :
1) On a :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{e^x} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ strictement positif pour x>0
donc :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
2) Cas général avec $\alpha > 0$:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (par 1)
et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\alpha} = +\infty$ car $\alpha > 0$
donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/\alpha}}{x/\alpha} = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \cancel{\alpha} \frac{e^{x/\alpha}}{x} = +\infty$ car $\alpha > 0$
enfin : $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ car $\alpha > 0$
donc $\lim_{x\to+\infty} (\frac{e^{x/\alpha}}{x})^\alpha = +\infty$
$= \frac{e^x}{x^\alpha}$
3) $n \in \mathbb{N}^*$ donc par 2 :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
or $\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$
donc
$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(-1)^n x^n e^x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\cancel{(-1)^n}}_{constante \quad \neq 0} x^n e^x = 0$

VI Fonction arcsin : dérivation justification de $\cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, tracé avec sinus

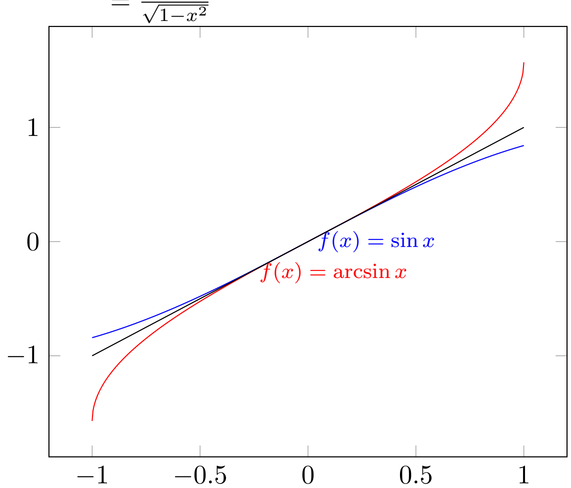
Propriété :
1) $\forall x \in [-1;1], \sin(\arccos(x)) = cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
2)arcsin est dérivable sur]-1;1[:
$\forall x \in]-1;1[, \quad arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Démonstration :
1) Posons $\theta = \arccos(x)$ et $y = sin(\theta)$
On a $\cos(\theta) = x$ et $0 \leq \theta \leq \pi$
On sait que :
$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
c'est-à-dire $y^2 + x^2 = 1$
$y^2 = 1 - x^2$
Or $y = \sin(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$
donc $y \geq 0$
donc $y = \sqrt{1-x^2}$
c'est-à-dire : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
Puis :
$\cos(\arcsin(x)) = cos(\frac{\pi}{2} - \arccos(x))$
$= \sin(\arccos(x))$
2) La fonction :
$f : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$
$x \to \sin(x)$
Celle-ci est continue et strictement croissant sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Elle réalise une bijection sur image [-1 ; 1]
Et par définition, $\arcsin = f^{-1}$
Ainsi :
$arcsin \in \mathscr{C}^0([-1;1])$ et arcsin est dérivable en un point $x \in [-1;1]$
ssi $sin'(y) \neq 0$ où $y = \arcsin(x)$
et dans ce cas :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(y)}$$

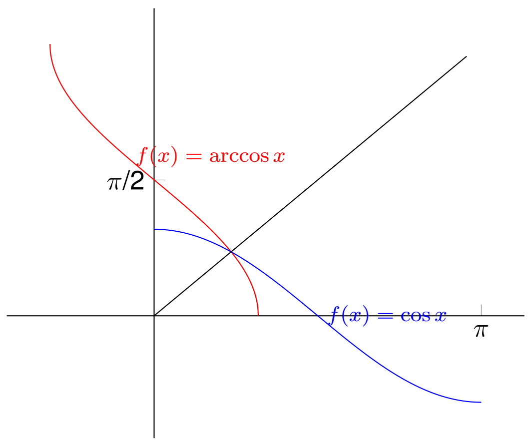
or : si $x = -1$, $y = \frac{\pi}{2}$ et $sin'(y) = 0$ car $sin' = cos$
si $x = 1$, $y = \frac{\pi}{2}$ et $\sin'(y) = 0$ car $sin' = cos$
si $-1 < x < 1$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ et $sin'(y) > 0$ car $sin' = cos$
Pour $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}\\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$



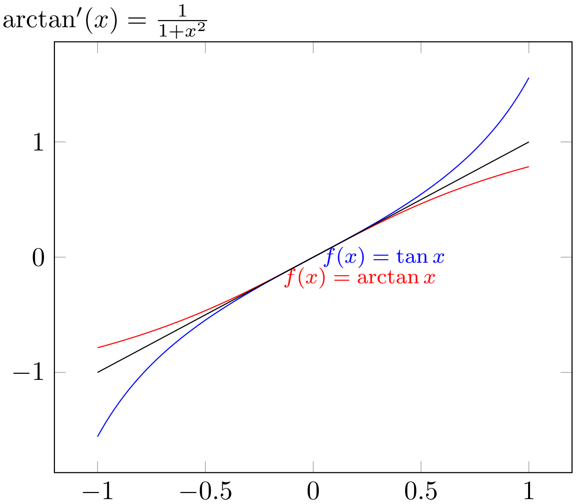
VII arccosinus: dérivation(avec $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$) tracé avec le cosinus

Propriété :
1) $\forall x \in [-1;1], \quad \arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
2) arccos est dérivable sur]-1;1[:
$\forall x \in]-1;1[, \quad arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Démonstration :
1) Posons $\theta = \arcsin(x)$: $\sin(\theta) = x$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
On a :
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = sin(\theta) = x$
or : $-\frac{\pi}{2} \leq -\theta \leq \frac{\pi}{2}$, donc $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$
donc : $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos(x)$
Comme $\theta = \arcsin(x)$
$\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \arccos(x)$
$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
2) Comme on a :
$\arccos = \frac{\pi}{2} - \arcsin$
donc $\arccos' = -\arcsin'$
$\arccos' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



VIII arctangente : dérivation (avec justification $tan'(x) = 1 + tan^2(x)$), tracé avec tangente

Propriété :
1) $\forall x \in \mathscr{D}_{tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
2) $\arctan \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Démonstration :
1) $\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - sin(x)cos'(x)}{\cos^2(x)}$
$= \frac{\sin^2(x)+cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
2) soit f :$] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$:
$x \to \tan(x)$
$f \in \mathscr{D}^1(] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[)$, strictement croissante, réalise une bijection sur $] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$
Comme f' ne s'annule pas sur $] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
or : $f' = 1 + f^2$
donc pour $x \in \mathbb{R}$:
$f'(f^{-1}(x)) = 1 + (f(f^{-1}(x)))^2$
$= 1 + x^2$
On a donc :
$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$



IX Étude de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ dérivation et trigonométrie

Propriété :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$
Démonstration :
Par dérivation :
Posons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \to \arctan'(x) + \arctan(1/x)$
$f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^*)$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(1+x)^2} = 0$
f est constante sur chaque intervalle sur chaque intervalle : $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
Or : $f(1) = \frac{\pi}{2}$
$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$
On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\pi}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = -\frac{\pi}{2}$
Par trigonométrie :
Posons $\theta = \arctan(x)$
$\tan(\theta) = x$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\theta \neq 0$ car $x \neq 0$
On a : $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{1}{x}$
$-\frac{\pi}{2} < -\theta < \frac{\pi}{2}$ donc $0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \pi$
1^{er} cas : $\theta > 0$ (c'est-à-dire x>0)
alors : $0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$
donc $\frac{\pi}{2} - \theta = \arctan(\frac{1}{x})$
On trouve: $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan(\frac{1}{x})$
$\arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
2^{eme} cas : $\theta < 0$ (c'est-à-dire x<0)
alors $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta < \pi$
donc $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \theta < 0$
On a : $\tan(-\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{x}$
d'où : $-\frac{\pi}{2} - \theta = \arctan(\frac{1}{x})$
On trouve $\theta - \theta - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

X x^x, limite de la suite de terme général $(1 + \frac{1}{n})^n$

x^x :
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \to x^x$
Il ne s'agit pas d'une fonction puissance car **l'exposant est variable.** Revenons à la définition :
$f(x) = exp(x(\ln(x)))$
$f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*$ car composition de fonction dérivable
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = (1 + \ln(x))exp(x\ln(x))$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	$f(\frac{1}{e})$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ par croissance comparée

$1 + \frac{1}{n}$
$U_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
$\ln(U_n) = n\ln(1 + \frac{1}{n})$

$\ln(U_n) = \frac{\ln(1+1/n)}{1/n}$
or : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
et $\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n\to +\infty} \ln(U_n) = 1$
On a donc $\lim_{n\to +\infty} = exp(1) = e$