Démonstration kholle 19

I Projection : définition et propriétés.

Définition :
E: K espace-vectoriel, F et G sous-espace vectoriel telle que $E = F \oplus G$
Soit $\vec{x} \in E$ alors :
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
On pose p la projection sur F parallèlement à G :
$p(\vec{x}) = \vec{y} \in F$
Propriété :
$p \in \mathscr{L}(E)$
Démonstration :
On a d'abord bien $p : E \longrightarrow E$
Ensuite, pour $(\vec{x},\vec{x'}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
$\exists!(\vec{y'},\vec{z'}) \in F \times G, \vec{x'} = \vec{y'} + \vec{z'}$
alors : $\vec{x} + \lambda\vec{x'} = \underbrace{(\vec{y} + \lambda\vec{y'})}_{\in F} + \underbrace{(\vec{z} + \lambda\vec{z'})}_{\in G}$
donc par définition :
$p(\vec{x} + \lambda\vec{x'}) = \vec{y} + \lambda\vec{y'}$
Or toujours par définition de p :
$p(\vec{x}) = \vec{y}$ et $p(\vec{x'}) = \vec{y'}$
On a donc : $p(\vec{x} + \lambda\vec{x'}) = p(\vec{x}) + \lambda p(\vec{x'})$
Propriété :
1) $F = Inv(p) = Im(p)$
2) $G = Ker(p)$
3) $p^2 = p$
Démonstration :
1) Montrons que $F \subset Inv(p) = Ker(p - Id_E)$
Soit $\vec{x} \in F$:
$\vec{x} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G}$
donc par définition de p : $p(\vec{x}) = \vec{x}$
Montrons que $Inv(p) \subset Im(p)$ vraie en général (pour tout endomorphisme) :
Soit $\vec{x} \in Inv(p)$: $\vec{x} = p(\vec{x}) \in Im(p)$
$Im(p) \subset F$, triviale par la définition de p
2) $\subset$: soit $\vec{x} \in G$:
$\vec{x} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{x}}_{\in G}$
donc par définition de p : $p(\vec{x}) = \vec{0}$
$\supset$: soit $\vec{x} \in Ker(p)$:
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
avec $\vec{y} = p(\vec{x})$, par définition de p , on a par hypothèse $p(\vec{x}) = 0$ donc $\vec{x} = \vec{z} \in G$
3) Soit $\vec{x} \in E$, $p(\vec{x}) \in Im(p) = Inv(p)$ donc $p(p(\vec{x})) = p(\vec{x})$
Propriété :
1) si p injective : $p = Id_E$
2) Si p surjective : $p = Id_E$

Démonstration :
1) Soit $\vec{x} \in E$:
$p(p(\vec{x})) = p(\vec{x})$ donc si p injective : $p(\vec{x}) = \vec{x}$
2) $\forall \vec{x} \in F, p(\vec{x}) = \vec{x}$ or $F = Im(p) = E$ car p est surjective

II Symétrie : définition et propriétés (démontrées avec la définition).

Définition :
E: K espace-vectoriel, F et G sous-espace vectoriel telle que $E = F \oplus G$
Soit $\vec{x} \in E$ alors :
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
On pose s la symétrie sur F parallèlement à G :
$s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$
Propriété :
1) $F = Inv(s)$ c'est-à-dire $Ker(s - Id_E)$
2) $G = Opp(s)$ c'est-à-dire $Ker(s + Id_E)$
3) $s^2 = Id_E$
Démonstration :
1) $\subset$: Soit $\vec{x} \in F$:
$\vec{x} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G}$ donc $s(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{0} = \vec{x}$
$\supset$: Soit $\vec{x} \in Inv(s)$:
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
alors : $s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$ (définition de s) or $s(\vec{x}) = \vec{x}$ donc :
$\vec{y} - \vec{z} = \vec{y} + \vec{z}$
$2\vec{z} = \vec{0}$ or $2 \neq 0$ donc $\vec{z} = \vec{0}$
donc $\vec{x} = \vec{y} \in F$
2) Soit $\vec{x} \in Opp(s)$:
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ par définition : $s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$
par hypothèse : $s(\vec{x}) = -\vec{x} = -\vec{y} - \vec{z}$ donc $\vec{y} = \vec{0}$
$\vec{x} = \vec{z} \in G$
3) Soit $\vec{x} \in E$:
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
par définition de s $s(x) = \vec{y} - \vec{z} = \underbrace{\vec{y}}_{\in F} + \underbrace{(-\vec{z})}_{\in G}$
donc $s(s(\vec{x})) = \vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$

III Symétrie : définition et propriétés (démontrées à partir de celles des projections).

Définition :
E: K espace-vectoriel, F et G sous-espace vectoriel telle que $E = F \oplus G$
Soit $\vec{x} \in E$ alors :
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
On pose s la symétrie sur F parallèlement à G :
$s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$
Propriété :
$s \in \mathscr{L}(E)$
Démonstration : $s = 2p - Id_E$ or $(p, Id_E) \in \mathscr{L}(E)^2$ donc $s \in \mathscr{L}(E)$
Propriété :
1) $F = Inv(s)$ c'est-à-dire $Ker(s - Id_E)$
2) $G = Opp(s)$ c'est-à-dire $Ker(s + Id_E)$
3) $s^2 = Id_E$
Démonstration :

Soit p la projection sur F parallèlement à G $s = 2p - Id_E$
1) soit $\vec{x} \in F$:
$\vec{x} \in F \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x} \Leftrightarrow s(\vec{x}) = \vec{x}$
2) De même : $\vec{x} \in G \Leftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow s(\vec{x}) = -\vec{x}$
3) $s^2 = (2p - Id_E)^2$
$2p$ et $-Id_E$ commutent donc :
$s^2 = 4p^2 - 4pId + Id^2 = 4p - 4p + Id = Id$

IV Projecteur : définition et propriétés.

Propriété :
Soit p un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$
Alors : $E = Inv(p) \oplus Ker(p)$ (c'est-à-dire $E = Ker(p - Id_E) \oplus Ker(p)$) et p est la projection sur Inv(p) parallèlement à Ker(p)
Démonstration :
Soit $\vec{x} \in E$
Analyse : Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $(\vec{y},\vec{z}) \in Inv(p) \times Ker(p)$ alors :
$p(\vec{x}) = p(\vec{y}) + p(\vec{z})$ car $p \in \mathscr{L}(E)$
$p(\vec{x}) = \vec{y} + \vec{0}$ d'où l'unique couple candidat :
$(\vec{y},\vec{z}) = (p(\vec{x}),\vec{x} - p(\vec{x}))$
Synthèse : Posons $\vec{y} = p(\vec{x})$ et $\vec{z} = \vec{x} - p(\vec{x})$ alors :
$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
$p(\vec{y}) = p^2(\vec{x}) = p(\vec{x}) = \vec{y}$ donc $\vec{y} \in Inv(p)$
$p(\vec{z}) = p(\vec{x}) - p(\vec{y}) = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0}$
Conclusion : $E = Inv(p) \oplus Ker(p)$
Soit $\vec{x} \in E$:
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in Inv(p) \times Ker(p), \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
Par définition, $\vec{y}$ est la projection de $\vec{x}$ sur Inv(p) parallèlement à Ker(p).
On a vu que $\vec{y} = p(\vec{x})$:
$p(\vec{x})$ est donc le projeté de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G

V Involution linéaire : définition et propriétés.

Propriété :
Soit s une involution linéaire ($s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = Id_E$) Alors :
$E = Inv(s) \oplus Opp(s)$ et s est la symetrie par rapport Inv(s) parallèlement à Opp(s)
Démonstration :
Soit $\vec{x} \in E$:
Analyse Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in Inv(s)$ et $\vec{z} \in Opp(s)$
$s(\vec{x}) = s(\vec{y}) + s(\vec{z})$ car $s \in \mathscr{L}(E)$
$s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$
$\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + s(\vec{x}))$
$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} - s(\vec{x}))$
$(\vec{y},\vec{z})$couple unique
Synthèse : Posons :
$\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + s(\vec{x}))$
$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} - s(\vec{x}))$
alors :
$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
$s(\vec{y}) = \frac{1}{2}(s(\vec{x}) + \underbrace{s^2(\vec{x})}_{=\vec{x}})$
$s(\vec{y}) = \vec{y}$ donc $\vec{y} \in Inv(s)$

$s(\vec{z}) = \frac{1}{2}(s(\vec{x}) - \underbrace{s^2(\vec{x})}_{=\vec{x}})$
$s(\vec{z}) = -\vec{z}$
Conclusion : $E = Inv(s) \oplus Opp(s)$
Soit $\vec{x} \in E$:
$\exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
Le symétrique de $\vec{x}$ sur Inv(s) parallèlement à Opp(s) est $\vec{y} - \vec{z}$
Or : $\vec{y} - \vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} + s(\vec{x})) - \frac{1}{2}(\vec{x} - s(\vec{x}))$
$\vec{y} - \vec{z} = s(\vec{x})$

VI Si H est un hyperplan (noyau de forme linéaire non nulle), toute droite non incluse dans H en est un supplémentaire.

Propriété :
Soit H un hyperplan de E alors pour toute droite D tel que $D \not\subset H$, $E = H \oplus D$
Démonstration :
Par hypothèse il existe $\phi \in \mathscr{L}(E,K)$ tel que $\phi \neq \tilde{0}$ et $H = Ker(\phi)$
Soit D une droite vectoriel non inclus dans H :
il existe $\vec{u} \in E\backslash\{\vec{0}\}$ tel que $D = Vect(\vec{u})$ et $\vec{u} \notin H$
Soit $\vec{x} \in E$:
Analyse : Si $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in H$ et $\vec{z} \in D$:
$\phi(\vec{y}) = 0$ et $\exists\lambda \in \mathbb{K}, \vec{z} = \lambda\vec{u}$.
Comme $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ et ϕ linéaire :
$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{y}) + \phi(\vec{z})$
$\phi(\vec{x}) = \lambda\phi(\vec{u})$ or $\phi(\vec{u}) \in \mathbb{K}^*$ donc le seul candidat pour λ est :
$\lambda = \frac{\phi(\vec{x})}{\phi(\vec{u})} \in \mathbb{K}$
d'où l'unicité de $(\vec{y}, \vec{z})$
Synthèse : Comme $\phi(\vec{u}) \in \mathbb{K}^*$ posons :
$\lambda = \frac{\phi(\vec{x})}{\phi(\vec{u})}$
$z = \lambda\vec{u}$ et $\vec{y} = \vec{x} - \vec{z}$
Alors :
$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
$\vec{z} \in Vect(\vec{u})$
$\phi(\vec{y}) = \phi(\vec{x}) - \phi(\vec{z})$
$\phi(\vec{y}) = \phi(\vec{x}) - \lambda\phi(\vec{u})$
$\phi(\vec{y}) = \phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x})$ car $\lambda = \frac{\phi(\vec{x})}{\phi(\vec{u})}$
$\phi(\vec{y}) = 0$ donc $\vec{y} \in H$

VII Si un sous-espace H possède une droite supplémentaire, c'est un hyperplan.

Démonstration :
Par hypothèse : $E = H \oplus D$ et $\exists\vec{u} \in E\backslash\{\vec{0}\}, D = Vect(\vec{u})$
Soit p la projection sur D parallèlement à H, $p \in \mathscr{L}(E), H = Ker(p)$ et $D = Im(p)$
$(\vec{u})$ est une base de D donc pour $\vec{v} \in D$:
$\exists!\lambda \in \mathbb{K}, \vec{v} = \lambda\vec{u}$
Notons $\lambda = \psi(\vec{v})$ cela définit une application :
$\psi : D \to \mathbb{K}$
Vérifions que $\psi \in \mathscr{L}(D,\mathbb{K})$, pour $(\vec{v}, \vec{w}) \in D^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :
$\vec{v} = \psi(\vec{v})\vec{u}$ et $\vec{w} = \psi(\vec{w})\vec{u}$
donc $\vec{v} + \lambda\vec{w} = (\psi(\vec{v}) + \lambda\psi(\vec{w}))\vec{u}$
Or par définition de ψ :

$\vec{v} + \lambda\vec{w} = \psi(\vec{v} + \lambda\vec{w})\vec{u}$
Comme $\vec{u}$ est une base de D $\vec{u} \neq \vec{0}$:
$\psi(\vec{v}) + \lambda\psi(\vec{w}) = \psi(\vec{v} + \lambda\vec{w})$
Comme $Im(p) \subset D$ on peut poser $\phi = \psi \circ p \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$
Vérifions que $H = Ker(\phi)$:
$H \subset Ker(\phi)$: Soit $\vec{x} \in H$:
$\phi(\vec{x}) = \psi(p(\vec{x}))$
$\phi(\vec{x}) = \psi(\vec{0})$ car $H = Ker(p)$
$\phi(\vec{x}) = 0$
$H \supset Ker(\phi)$ Soit $\vec{x} \in Ker(\phi)$: $\phi(\vec{x}) = 0$
c'est-à-dire $\psi(p(\vec{x})) = 0$
or $p(\vec{x}) = \psi(p(\vec{x}))\vec{u}$ par définition de ψ avec $p(\vec{x}) = \vec{0}$
donc $\vec{x} \in H$
Enfin : $Ker(\phi) = H \neq E$(hypothèse) donc $\phi \neq \tilde{0}$