Démonstration kholle 6

I Unicité des coefficients d'une fonction polynomiale réelle

Propriété :
L'écriture des fonctions polynomiales est unique à l'ajout de termes à coefficients nuls près
Démonstration :
1^{er} cas : si $f \in \mathbb{R}[X]$
Supposons $f = \tilde{0}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
Soit $n \in \mathbb{N}, (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
Montrons que $a_0 = ... = a_n = 0$
Raisonnons par l'absurde : notons A=$\{k \in [[0, n]], a_k \neq 0\} \in \mathbb{N}$
On a donc $A \neq \emptyset$ Par la propriété du bon ordre on peut poser $p = min(A)$
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^{n} a_k x^k = 0$
car $a_k = 0$ si $k < p = min(A)$
c'est-à-dire : $a_p x^p + ... + a_n x^n = 0$
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sum_{k=p}^{n} a_k x^{k-p} = 0$
limite quand x tend vers 0 :
$\lim_{x \to 0} x^{k-p} = 0$ si k>p
$\lim_{x \to 0} x^{k-p} = 1$ si k=p alors il reste $a_p = 0$
Or $p \in A$ car $p = min(A)$ donc $a_p \neq 0$ absurde donc $A = \emptyset$ $\forall k \in [[0, n]], a_k = 0$
Cas général :
$f : x \in \mathbb{R} \to \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
$g : x \in \mathbb{R} \to \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$
Avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}$
On suppose $f = g$ (c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$
Posons $N = max(m, n)$
et $a_k = 0$ si k>n, $b_k = 0$ si k>m
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ et $g(x) = \sum_{k=0} b_k x^k$
Comme $f = g, f - g = \tilde{0}$, $\forall x \in \mathbb{R}, (f - g)(x) = \sum_{k=0}^{N} (a_k - b_k) x^k$
Donc d'après le cas 1 : $\forall k \in [[0, N]], a_k - b_k = 0 \quad a_k = b_k$

II Caractérisation des racines par la factorisation de x-c

Propriété :
Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ et $c \in \mathbb{R}$ Les propositions suivantes sont équivalentes :
1) f(c)=0
2) $\exists y \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - c)g(x)$
Démonstration : 2 $\Rightarrow$ 1 : évident
1 $\Rightarrow$ 2 : Notons
$f : x \to \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \geq 1$ et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$
Pour $x \in \mathbb{R}$:
$f(x) = f(x) - f(c) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - c^k)$
Or pour $k \geq 1$

$$x^k - c^k = (x - c) \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} c^{k-1-i} x^i}_{g_k(x)}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-c)\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x)}_{g(x)}$$

On a $\forall k \in [[1,n]], g_k \in \mathbb{R}[X]$ donc $g \in \mathbb{R}[X]$

III Une fonction polynomiale n'a pas plus de racine que son degré

Propriété :
Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors f possède au plus n racines.
Démonstration : récurrence sur n
Initialisation : n=0, $f \in \mathbb{R}^*$ aucune racine .
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie au rang n-1
Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré n :
-si f n'a pas de racine : il n'en a pas plus de n
- si f a au moins une racine $c \in \mathbb{R}$, soit $g \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-c)g(x)$
alors $deg(g) = n-1$
g a donc au plus n-1 racines
On a pour $x \in \mathbb{R}$:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-c)$ ou $g(x) = 0$
f possède au plus une racine de plus que g donc au plus n au total

IV Factorisation d'une fonction polynomiale ayant autant de racine que son degré

Propriété : Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$
coefficient dominant $\lambda \in \mathbb{R}^*$
Supposons que f possède exactement n racines distinctes $x_1, ..., x_n$
On a la factorisation :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(x-c_k)$
$= \lambda(x-c_1)...(x-c_n)$
Démonstration : Posons le polynome :
$g : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) - \lambda \prod_{k=1}^{n}(x-c_k)$
D'une part :
$\forall j \in [[1,n]], g(c_j) = 0 - 0 = 0$
D'autre part :
$deg(g) < n$ car f et $\lambda \prod_{k=1}^{n}(x-c_k)$ sont de degré n et ont le même coefficients dominant.
Conclusion : Comme les c_j sont 2 à 2 distincts, le polynome g a plus de racines que son degré $g = \tilde{0}$

V Formule d'interpolation de Lagrange

Propriété :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$,
$(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts quelconque,
$(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$
Alors il existe un unique $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$\forall j \in [[1,n]], f(a_j) = b_j$ et $deg(f) < n$
On a la formule :
$f = \sum_{k=1}^{n} b_k L_k$
où pour $k \in [[1,n]]$:
$L_k : x \in \mathbb{R} \rightarrow \prod_{i=1 \quad i \neq k}^{n} \frac{x-a_i}{a_k-a_i}$

$(L_1, ..., L_n)$ polynomes de Lagrange associés à $(a_1, ..., a_n)$
Démonstration : Lemme : $L_k(a_j) = \delta_{k,j}$
En effet : $L_k(a_k)$ est un produit de 1 : $L_k(a_k) = 1$
Si $j \neq k$ on a $L_k(a_j)$ un facteur d'indice
i=j ce facteur vaut $\frac{a_j - a_j}{a_k - a_j} = 0$: $L_k(a_j) = 0$
Existence: verifier que $f = \sum_{k=1}^{n} b_k L_k$ convient d'une part, pour $j \in [[1, n]]$:
$f(a_j) = \sum_{k=1}^{n} b_k \underbrace{L(a_j)}_{\delta_{k,j}}$

$= b_j$
d'autre part : tous les L_k sont de degré n-1 donc f est de degré$\geq n-1$ donc $< n$
Unicité : si f et g conviennent :

$\forall j \in [[1, n]], f(a_j) = bj = g(a_j)$
et $deg(f) < n, deg(g) < n$
Le polynome $f - g$ est de degré $\leq max(deg(f), deg(g)) < 0$ et possède au moins n racines distinctes (les a_j)
ainsi : $f - g = \tilde{0}$
$f = g$

VI Décomposition en éléments simples de f/g avec deg(f)<deg(g) et g scindé simple

Propriété :
Soit $\frac{f}{g} \in \mathbb{R}(X)$ avec :
$f \in \mathbb{R}[X]$
$g \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple: $g(x) = C(x - a_1)...(x - a_n)$
où $n \in \mathbb{N}^*$
$a_1 < ... < a_n$ réels
$C \in \mathbb{R}^*$
avec $deg(f) < n = deg(g)$
Il existe un unique $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x - a_k}$
décomposition en éléments simples de $\frac{f}{g}$
Pour $j \in [[1, n]]$ on a :

$\lambda_j = \lim_{x \to a_j} (x - a_j) \frac{f(x)}{g(x)}$
Démonstration :
Existence : puisque les a_k sont n réels 2 à 2 distincts est $deg(f) < n_1$ on a par la formule de Lagrange.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) L_k(x)$
où $L_k(x) = \prod_{i=1 \quad i \neq k}^{n} \frac{x - a_i}{a_k - a_i}$
$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \frac{L_k(x)}{g(x)}$
Or $L_k(x) = C_k(x - a_1)...(x - a_n)$ sans le facteur $(x - a_k)$
avec C_k une constante
$g(x) = C(x - a_1)...(x - a_n)$
donc $f(a_k) \frac{L_k(x)}{g(x)} = \frac{f(a_k) C_k}{C} \times \frac{1}{x - a_k}$
Avec $\lambda_k = \frac{f(a_k) C_k}{C}$
Unicité :
Pour $j \in [[1, n]]$
$(x - a_j) \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda_j + \sum_{k=1 k \neq j}^{n} \lambda_k \times \frac{x - a_j}{x - a_k}$
$\lim_{x \to a_j)} (x - a_j) \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda_j$ d'où l'unicité des coefficients

VII Formule d'intégration par parties + relations de récurrence des intégrales de Wallis

Propriété :
Soient u et v $\in \mathscr{C}^1(I)$
et $(a,b) \in I^2$ on a :
$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$
où $\mathscr{C}^1(I) = \{f \in \mathscr{D}^1(I) : f \in \mathscr{C}^(I)\}$
Démonstration :
$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b (uv)'(t)dt$
$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) + v'(t)u(t)dt$
$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$
$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Récurrence intégrale de Wallis :
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose:
$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$
$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+2}(t)dt$
$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{cos(t)}_{P} \underbrace{cos^{n+1}(t)} Ddt$
$W_{n+2} = \underbrace{[sin(t)cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)(n+1)cos^n(t)dt$
$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{sin^2(t)}_{1-cos^2(t)} cos^n(t)dt$
$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$
$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}(W_n)$