

Démonstration kholle 26

I Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Propriété :

$A \in M_n(\mathbb{K})$

A_{ij} , obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A ($A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$)

$\Delta_{ij} = \det(A_{ij})$ mineur principal i-j

1) Pour $j \in [[1, n]]$ fixé :

$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la j-ième colonne

2) Pour $i \in [[1, n]]$ fixé :

$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la i-ème ligne

Démonstration :

$$1) \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \text{coeff } A & 1 & \text{coeff } A \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \text{ par linéarité sur la j-ième colonne}$$

par permutation circulaire des colonnes j à n, on amène $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ en position n

puis permutation circulaire des lignes i à n, on amène la ligne i en position n

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \underbrace{(-1)^{n-j} (-1)^{n-i}}_{=(-1)^{2n} (-1)^{i+j}} \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{ij} \\ 0 \\ ? \\ 1 \end{vmatrix} \underbrace{\quad}_{\Delta_{ij}}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

$$2) \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} \text{coeff } A & & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ \text{coeff } A & & & \end{vmatrix} \text{ cycle sur les lignes puis les colonnes :}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{n-i} (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} A_{ij} & & ? \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

II Relation $A^t \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A) A = \det(A) I_n$.

Propriété :

$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), A^t \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A) = \det(A) I_n$

Démonstration :

coeff i-j de $A^t \text{Com}(A)$

$\sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} \Delta_{jk}$ (cofacteur j-k car transposée)

si $i = j$: On reconnaît le développement de $\det(A)$ par rapport à la ligne i :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik} = \det(A)$$

si $i \neq j$: Soit B ayant les mêmes coefficients que A sauf la ligne j, que l'on remplace par la ligne i de A. Alors $\det(B) = 0$ car deux lignes sont égales développement de B par rapport à la ligne j :

$$0 = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} b_{jk} \Delta_{jk}$$

Comme B a les mêmes coefficients que A en hors de la ligne j :

$$0 = a_{ij} \text{ par définitions de B}$$

idem avec les colonnes :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \Delta_{ki} a_{kj}$$

si $i \neq j$: on remplace la colonne i de A par sa colonne j

III Déterminant triangulaire par blocs.

Propriété :

Avec $A \in M_r(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-r}(\mathbb{K})$:

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$$

Démonstration :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} \text{ or } \begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

par développement par rapport à la première colonne on répète jusqu'à $\det(B)$

$$\text{de même : } \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r-1} \end{vmatrix}$$

par développement par rapport à la dernière colonne on répète jusqu'à $\det(A)$

$$\text{enfin : } \begin{vmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} = 1 \text{ car } \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_n^s(\mathbb{K})$$

IV Déterminant de Vandermonde

Propriété :

$n \in \mathbb{N}^*, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Démonstration :

récurrence sur n :

Initialisation :

$$n = 1 : |1| = 1 = \text{produit vide}$$

Hérédité :

Soit $n \geq 2$ tel que la formule soit vraie au rang n-1.

si deux des a_k sont égaux : deux lignes égales donc $V_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ et le produit en un facteur nul.

Sinon :

Poosons pour $x \in \mathbb{K}$:

$$f(x) = V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne on voit que $f \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et que les coeff de x^{n-1} est :

$$(-1)^{n+n} V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \neq 0 \text{ car } a_1, \dots, a_{n-1} \text{ sont 2 à 2 distincts}$$

donc $\deg(f) = n - 1$ et $\text{dom}(f) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$
 Or par alternance : $f(a_1) = \dots = f(a_{n-1}) = 0$
 ce qui donne $n-1$ racines distincts de f
 Ainsi f est scindé simple :
 $\forall x \in \mathbb{K}, f(x) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$
 pour $x = a_n$; $V_{n-1}(a_1, \dots, a_n) = (\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)) (\prod_{1 \leq i < j = n} (a_j - a_i))$
 $V_{n-1}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

V Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

Propriété :

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel :

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E$ Alors :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

c'est-à-dire : $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

avec égalité si et seulement si (\vec{x}, \vec{y}) est liée

Démonstration :

Posons pour $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = \|\vec{x} + t\vec{y}\|^2$$

$$\text{Alors : } P(t) = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, t\vec{y} \rangle + \|t\vec{y}\|^2$$

$$P(t) = \|\vec{x}\|^2 + 2t\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + t^2\|\vec{y}\|^2$$

donc $P \in \mathbb{R}_2[X]$

1^{er} cas : $\vec{y} = \vec{0}$, alors $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 = \|\vec{y}\|$

l'inégalité est vraie et est même une égalité $0 \leq 0$

2nd cas : $\vec{y} \neq \vec{0}$. Alors : $\deg(P) = 2$

or $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$, ainsi, P a au plus une racine réelle donc son discriminant est ≤ 0 :

$$(2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - 4\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

$$4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

Cas d'égalité :

$$\Rightarrow \text{on suppose } \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

si $\vec{y} = \vec{0}$: (\vec{x}, \vec{y}) liée

sinon : P possède une racine réelle t_0 car son discriminant est nul :

$$P(t_0) = 0$$

$$\|\vec{x} + t_0\vec{y}\|^2 = 0$$

$$\underbrace{1}_{\neq 0} \vec{x} + t_0\vec{y} = \vec{0}$$

donc (\vec{x}, \vec{y}) liée

\Leftarrow : on suppose (\vec{x}, \vec{y}) liée.

- si $\vec{y} = \vec{0}$: on a l'égalité (déjà vu) -sinon : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} = \lambda\vec{y}$

$$\text{Alors : } \|\vec{x}\|^2 = \lambda^2 \|\vec{y}\|^2$$

$$\text{et } \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \lambda \|\vec{y}\|^2$$

$$\text{on a bien : } (\lambda \|\vec{y}\|^2)^2 = (\lambda^2 \|\vec{y}\|^2) \|\vec{y}\|^2$$

VI Inégalité triangulaire et cas d'égalité

VII Propriétés variées de la norme + théorème de Pythagore

VIII Propriétés générales de l'orthogonal d'une partie