

Démonstration kholle 20

I Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$

Définition :

Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est une partie de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

1) I est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$

2) $\forall P \in I, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in I$

Propriété :

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Démonstration :

1) $P\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $\neq \emptyset$ car $0 \in P\mathbb{K}[X]$

Soit $(A, B) \in (P\mathbb{K}[X])^2 : P|A$ et $P|B$ donc $P|(A+B)$

2) Soit $(A, B) \in (P\mathbb{K}[X]) \times \mathbb{K}[X] :$

$P|A$ donc $P|AB$ $AB \in P\mathbb{K}[X]$

II En admettant le théorème de D'Alembert-Gauss: description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$

Propriété :

1) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1

2) Dans $\mathbb{R}[X]$:

-les polynômes de degré 1

-ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif

Démonstration :

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 :

D'une part, P n'est pas constant.

D'autre part, si $P=QR$ avec Q et R non constant : $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(R) \geq 2$ contradiction donc P est irréductible.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, P irréductible montrons que $\deg(P)=1$

P irréductible donc non constant. Par le théorème de D'Alembert-Gauss : $\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - z)Q$ or P irréductible donc Q constant d'où $\deg(P) = 1$

2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, P irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ on a de même :

$\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

1^{er} cas : $z \in \mathbb{R}$, idem que dans $\mathbb{C}[X]$, $P = (X - z)Q$ avec Q constant $\deg(P) = 1$

2^{eme} cas : $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ comme $P \in \mathbb{R}[X]$, \bar{z} aussi est racine de P

Comme $z \neq \bar{z}$:

$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - z)(X - \bar{z})Q$

$P = \underbrace{(X^2 - 2 * \operatorname{Re}(z)X + |z|^2)}_{\in \mathbb{R}[X]} Q$

On constate que Q est le quotient de la division euclidienne de $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X^2 - 2 * \operatorname{Re}(z)X + |z|^2) \in \mathbb{R}[X]$ donc $Q \in \mathbb{R}[X]$

Comme P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ Q est constante $\deg(P) = 2$ et P n'a pas de racine réelle donc son discriminant est strictement négatif

III Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ selon la parité de n

Factorisons $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

1^{er} cas : n paire , $n = 2p \in \mathbb{N}^*$

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{ik\pi}{p}}, 0 \leq k \leq 2p-1$$

$z_0 = 1$ et $z_p = -1$, les autres $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Pour $k \in [[1, p-1]] : \bar{z}_k = e^{-\frac{ik\pi}{p}} = e^{\frac{i(2p-k)\pi}{p}} = z_{2p-k}$ avec $2p-k \in [[p+1, 2p-1]]$

$$X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} \underbrace{(X-z_k)(X-\bar{z}_k)}_{=X^2-2\operatorname{Re}(z_k)X+|z_k|^2}$$

$$X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} (X^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{p})X + 1)$$

2^{eme} cas : $n = 2p+1 (p \in \mathbb{N}^*)$

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}, 0 \leq k \leq 2p$$

$z_0 = 1$, les autres sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

pour $k \in [[1, p]] : \bar{z}_k = e^{-\frac{2ik\pi}{2p+1}} = e^{\frac{2i(2p+1-k)\pi}{2p+1}}$ avec $2p+1-k \in [[p+1, 2p]]$

$$X^{2p+1} - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^p (X-z_k)(X-\bar{z}_k)$$

$$X^{2p+1} - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^p (X^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2p+1})X + 1)$$

IV Enoncer sans démonstration les relations coefficients-racines, les formules $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$. Exemple : somme des carrés, cubes et inverses des racines de $X^3 - 3X + 1$

Propriété :

soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ alors :

1) la somme des multiplicités de ses racines est $\leq n$

2) égalité si et seulement si P scindé (toujours le cas quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Propriété :

$$1) \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$$

Démonstration :

$$1) (\sum_{k=1}^n x_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j$$

2) Mise au même dénominateur.

Exemple :

$$P = X^3 - 3X + 1 = (X-a)(X-b)(X-c)$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$:

$$\sigma_1 = a + b + c = 0$$

$$\sigma_2 = ab + bc + ac = -3$$

$$\sigma_3 = abc = -1$$

$$1) a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6$$

$$2) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

Comme (a,b,c) sont racines de $X^2 - 3X + 1$ on a :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (3a-1) + (3b-1) + (3c-1)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3\sigma_1 - 3 = -3$$

- V Existence et unicité de la forme irréductibles d'une fraction rationnelle.**
- VI Coefficients d'un pôle simple (formule $\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$), décomposition de $\frac{1}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$**
- VII Décomposition en élément simples de $\frac{P'}{P}$ lorsque P est scindé**