

## Démonstration kholle 27

### I Cardinal d'un produit, extension à $\bigcup_{x \in A} \{x\} B_x$ avec tous les $B_x$ de même cardinal (principe des bergers)

#### Propriété :

Si  $E$  et  $F$  sont finis  $E \times F$  aussi et  $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F)$

#### Démonstration :

Si  $E$  ou  $F = \emptyset$  alors  $E \times F = \emptyset$   $0 = 0$

Si  $E = \{x_0\}$ , singleton

Soit  $f : F \rightarrow \{x_0\} \times F$

$y \mapsto (x_0, y)$

et  $g : \{x_0\} \times F \rightarrow F$

$(x_0, y) \mapsto y$

Ces applications sont trivialement réciproques.

ainsi :  $f$  est bijective  $\{x_0\} \times F$  est finie et  $\text{Card}(\{x_0\} \times F) = \text{Card}(F)$

Si  $x_1, \dots, x_n$  sont les éléments distincts de  $E$  :

Notons  $F_k = \{x_k\} \times F$

Alors :  $(F_1, \dots, F_n)$  est une partition de  $E \times F$

en effet :

$F_k \subset E \times F$  pour tout  $k$  donc  $\bigcup_{k=1}^n F_k \subset E \times F$

Soit  $(x, y) \in E \times F$

Alors :  $\exists k \in [1, n], x = x_k$

Or  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  donc  $(x, y) \in F_k$

A fortiori  $E \times F \subset \bigcup_{k=1}^n F_k$

si  $i \neq j$  et  $(x, y) \in F_i \cap F_j$  :

$x = x_i$  et  $x = x_j$

or  $x_i \neq x_j$

ainsi :  $F_i \cap F_j = \emptyset$

On a bien ;

$E \times F = \bigcup_{k=1}^n F_k$  avec les  $F_k$  disjoint

$E \times F$  est fini et :

$\text{Card}(E \times F) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(F_k)$

Or on a vu précédemment :  $\forall k \in [1, n], \text{Card}(F_k) = \text{Card}(F)$

donc  $\text{Card}(E \times F) = n\text{Card}(F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F)$

#### Propriété :

Si on effectue un 1<sup>er</sup> choix parmi  $n$  options puis un second ayant  $p$  options (pouvant dépendre du 1<sup>er</sup> choix),

il y a  $np$  couples de choix possibles

Formellement :  $A$  fini de cardinal  $n \geq 1$

$F$  ensemble quelconque et, pour tout  $x \in A$

Soit  $B_x \subset F$  fini de cardinal  $p \in \mathbb{N}^*$  (indépendant de  $x$ )

Alors :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{x \in A} \underbrace{(\{x\} \times B_x)}_{\{(x,y), y \in B_x\}}\right) = np$$

#### Démonstration :

Soit  $G = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times B_x)$

l'union est disjointe car, si  $x \neq x'$  :

$\{x\} \times B_x = \{(x, y) : y \in B_x\}$

$$\{x'\} \times B_{x'} = \{(x', z) : z \in B_{x'}\}$$

pas d'élément commun car la première composante diffère toujours

De plus :

$$\forall x \in A, \text{Card}(\{x\} \times B_x) = \underbrace{\text{Card}(B_x)}_p$$

donc G est fini de cardinal  $np$

## II Dénombrement des arrangements, des injections

**Propriété :**

$$\text{pour } 0 \leq p \leq n, A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Démonstration :**

si  $p = 0 : A_n^0 = 1$  (liste vide)

si  $p \geq 1$  : on a  $n$  choix pour la première composante

puis  $n-1$  choix pour la seconde composante

⋮  
⋮  
⋮

puis  $n - p - 1$  choix pour la  $p$ -ième composante

donc :  $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Propriété :**

E fini de cardinal  $p$  et F fini de cardinal  $n$  alors  $\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = A_n^p$

**Démonstration:**

Notons  $x_1, \dots, x_p$  les éléments distincts on a vu que :

$$\Phi : F^E \rightarrow F^p$$

$f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_p))$  est une bijection

ainsi :  $\psi = \Phi|_{\text{Inj}(E, F)}$

$\psi$  est une injection de  $\text{Inj}(E, F)$  vers  $F^p$ , elle réalise donc une bijection sur son image ainsi :

$$\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = \text{Card}(\text{Im}(\psi))$$

Or  $\text{Im}(\psi)$  est l'ensemble des  $p$ -arrangements de  $f$  :

$$\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = A_n^p$$

## III Expression des combinaisons avec des factorielles

**Propriété :**

$$\text{Pour } 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Démonstration :** 1<sup>ère</sup> démonstration :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \dots \frac{n-p+1}{1} \binom{n-p}{0}$$

Or :  $\binom{n-p}{0} = 1$  car la seule partie de cardinal 0 est  $\emptyset$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2<sup>nde</sup> démonstration :

pour choisir un  $p$ -arrangements on peut choisir une  $p$ -combinaison :  $\binom{n}{p}$  choix puis une permutation de ces  $p$  valeurs :  $p!$  choix

$$\text{d'où } A_n^p = p! \binom{n}{p}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

## IV Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

**Propriété :**

Si  $E$  est fini,  $\mathcal{P}(E)$  aussi et  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$

**Démonstration :**

Posons  $\Phi : (E) \rightarrow \{0,1\}^E$

$A \mapsto 1|_A$

$\Psi : \{0,1\}^E \rightarrow \mathcal{P}(E)$

$f \mapsto \{x \in E : f(x) = 1\} = f^{-1}(\{1\})$

Elles sont réciproques ainsi :

$\mathcal{P}(E)$  est fini de cardinal :  $\text{Card}(\{0,1\}^E) = 2^{\text{Card}(E)}$

**Propriété :**

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

**Démonstration :**

Soit  $E$  de cardinal  $n$  :

$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(E)$  avec  $\mathcal{P}_k(E)$  disjoints donc :

$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{P}_k(E))$

$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

## V Formule du triangle de Pascal.

**Propriété :**

pour  $1 \leq p \leq n$

$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

**Démonstration :**

$E = [1, n]$

$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(E) : \text{Card}(A) = p \text{ et } n \in A\}$

$\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{P}(E) : \text{Card}(A) = p \text{ et } n \notin A\}$

Alors :  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$

donc  $\binom{n}{p} = \text{Card}(\mathcal{U}) + \text{Card}(\mathcal{V})$

on a  $\mathcal{V} = \{A \subset [1, n-1] : \text{Card}(A) = p\}$

donc  $\text{Card}(\mathcal{V}) = \binom{n-1}{p}$

Pour  $\mathcal{U}$  posons :

$\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}_{p-1}([1, n-1])$

$A \mapsto A \setminus \{n\}$

$\psi : \mathcal{P}_{p-1}([1, n-1]) \rightarrow \mathcal{U}$

$A \mapsto A \cup \{n\}$

Ces applications sont réciproques ainsi :

$\text{Card}(\mathcal{U}) = \binom{n-1}{p-1}$

## VI Démonstration combinatoire de $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$

**Propriété :**

pour  $1 \leq p \leq n$  :

$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$

$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$

**Démonstration :**

$E$  de cardinal  $n$

$X = \{(x, A) : x \in A \subset E \text{ et } \text{Card}(A) = p\}$

1<sup>er</sup> calcul de  $\text{Card}(X)$  on choisit  $A : \binom{n}{p}$  choix puis  $x \in A$  :  $p$  choix

soit  $p \binom{n}{p}$

2<sup>eme</sup> calcul : on choisit  $x \in E$  :  $n$  choix on choisit  $A$  en complétant  $x$  par  $p-1$  éléments, parmi les  $n-1$  restants

soit  $\binom{n-1}{p-1}$  choix soit  $n\binom{n-1}{p-1}$  choix

## VII Exercice : calcul combinatoire de $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$

Propriété :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$$

Démonstration :

On pose :

$$E_k = \{A \subset [1, n] : \text{Card}(A) = p \text{ et } \max(A) = k\}$$

$$F_k = \{B \subset [1, k-1] : \text{Card}(B) = p-1\}$$

$$\phi_k : E_k \rightarrow F_k$$

$$A \mapsto A \setminus \{k\}$$

$$\psi_k : F_k \rightarrow E_k$$

$$B \mapsto B \cup \{k\}$$

sont des bijections réciproques

$$\mathcal{P}_p([1, n]) = \bigcup_{k=p}^n E_k \text{ avec } E_k \text{ disjoints :}$$

$$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$$

## VIII Exercice : Formule de Vandermonde

Propriété :

Pour  $0 \leq p \leq m, n$  on a :

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

Démonstration :

Soit A et B deux ensembles disjoints de cardinaux respectifs m et n :

Nombre de  $A \cup B$  à p éléments :  $\binom{m+n}{p}$  car  $\text{Card}(A \cup B) = m + n$

Posons :

$$E = \{X \subset A \cup B : \text{Card}(X) = p\}$$

$$E_k = \{X \in E : \text{Card}(A \cap X) = k\} \text{ avec } 0 \leq k \leq p$$

Alors :  $E = \bigcup_{k=0}^p E_k$  avec  $E_k$  disjoints

$$\text{donc : } \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \text{Card}(E_k)$$

On a à k fixé :

$$\phi_k : E_k \rightarrow \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{p-k}(B)$$

$$X \mapsto (A \cap X, B \cap X)$$

est bien définie de réciproque :

$$\psi_k : \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{p-k}(B) \rightarrow E_k$$

$$(Y, Z) \mapsto Y \cup Z$$

pour  $X \in E_k$  :

$$\psi_k(\phi_k(X)) = (A \cap X) \cup (B \cap X)$$

$$\psi_k(\phi_k(X)) = (A \cup B) \cap X$$

$$\psi_k(\phi_k(X)) = X \text{ car } X \subset A \cup B$$

pour  $(Y, Z) \in \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{p-k}(B)$  :

$$\phi_k(\psi_k(Y, Z)) = (A \cap (Y \cup Z), B \cap (Y \cup Z))$$

$$\phi_k(\psi_k(Y, Z)) = ((A \cap Y) \cup (A \cap Z), (B \cap Y) \cup (B \cap Z))$$

Or :  $Y \subset A$  donc  $A \cap Y = Y$

et  $A \cap B = \emptyset$  donc  $B \cap Y = \emptyset$

de meme :  $A \cap Z = \emptyset$  et  $B \cap Z = Z$  donc :

$$\phi_k(\psi_k(Y, Z)) = (Y, Z)$$

$$\text{Ainsi : } \text{Card}(E_k) = \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$

On remplace :

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$