Démonstration kholle 20

I Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$

Définition :
Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est une partie de I de $\mathbb{K}[X]$ tel que :
1) I est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X],+)$
2)$\forall P \in I, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in I$
Propriété :
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$
Démonstration :
1) $P\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $\neq \emptyset$ car $0 \in P\mathbb{K}[X]$
Soit $(A,B) \in (P\mathbb{K}[X])^2$: $P|A$ et $P|B$ donc $P|(A+B)$
2) Soit $(A,B) \in (P\mathbb{K}[X]) \times \mathbb{K}[X]$:
$P|A$ donc $P|AB$ $AB \in P\mathbb{K}[X]$

II En admettant le théorème de D'Alembert-Gauss: description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$

Propriété :
1) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1
2) Dans $\mathbb{R}[X]$:
 -les polynômes de degré 1
 -ceux de dgré 2 à discriminant strictement négatif
Démonstration :
1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 :
D'une part, P n'est pas constant.
D'autre part, si P=QR avec Q et R non constant : $deg(P) = deg(Q) + deg(R) \geq 2$ contradiction dons P est irréductible.
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, P irréductible montrons que deg(P)=1
P irréductible donc non constant. Par le théorème de D'Alembert-Gauss : $\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$
$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - z)Q$ or P irréductible donc Q constant d'où $deg(P) = 1$
2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, P irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ on a de même :
$\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$
1^{er} **cas :** $z \in \mathbb{R}$, idem que dans $\mathbb{C}[X]$, $P = (X - z)Q$ avec Q constant $deg(P) = 1$
2^{eme} **cas :** $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ comme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{z}$ aussi est racine de P
Comme $z \neq \bar{z}$:
$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - z)(X - \bar{z})Q$
$P = \underbrace{(X^2 - 2 * Re(z)X + |z|^2)}_{\in\mathbb{K}[X]} Q$
On constate que Q est le quotient de la division euclidienne de $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X^2-2*Re(z)X+|z|^2) \in \mathbb{R}[X]$ donc $Q \in \mathbb{R}[X]$
Comme P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ Q est constante $deg(P) = 2$ et P n'a pas de racine réelle donc son discriminant est strictement négatif

III Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ selon la parité de n

IV Enoncer sans démonstration les relations coefficients-racines, les formules $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$. Exemple : somme des carrés, cubes et inverses des racines de $X^3 - 3X + 1$

V Existence et unicité de la forme irréductibles d'une fraction rationnelle.

VI Coefficients d'un pôle simple (formule $\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$), décomposition de $\frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$

VII Décomposition en élément simples de $\frac{P'}{P}$ lorsque P est scindé