Démonstration kholle 20

I Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$

Définition :
Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est une partie de I de $\mathbb{K}[X]$ tel que :
1) I est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X],+)$
2)$\forall P \in I, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in I$
Propriété :
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$
Démonstration :
1) $P\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $\neq \emptyset$ car $0 \in P\mathbb{K}[X]$
Soit $(A,B) \in (P\mathbb{K}[X])^2$: $P|A$ et $P|B$ donc $P|(A+B)$
2) Soit $(A,B) \in (P\mathbb{K}[X]) \times \mathbb{K}[X]$:
$P|A$ donc $P|AB$ $AB \in P\mathbb{K}[X]$

II En admettant le théorème de D'Alembert-Gauss: description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$

III Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ selon la parité de n

IV Enoncer sans démonstration les relations coefficients-racines, les formules $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$. Exemple : somme des carrés, cubes et inverses des racines de $X^3 - 3X + 1$

V Existence et unicité de la forme irréductibles d'une fraction rationnelle.

VI Coefficients d'un põle simple (formule $\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$), décomposition de $\frac{1}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$

VII Décomposition en élément simples de $\frac{P'}{P}$ lorsque P est scindé