Démonstration kholle 26

I Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Propriété :
$A \in M_n(\mathbb{K})$
A_{ij}, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A ($A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$)
$\Delta_{ij} = det(A_{ij})$ mineur principal i-j
1) Pour $j \in [[1,n]]$ fixé :
$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la j-ième colonne
2) Pour $i \in [[1,n]]$ fixé :
$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la i-ème ligne
Démonstration :

1) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ coeffA & 1 & coeffA \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{vmatrix}$

par linéarité sur la j-ième colonne

par permutation circulaire des colonnes j à n, on ammène $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ en position n

puis permutation circulaire des lignes i à n, on ammène la ligne i en position n

$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{(-1)^{n-j}(-1)^{n-i}}_{=(-1)^{2n}(-1)^{i+j}} \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} & 0 \\ A_{ij} & \vdots \\ & 0 \\ \hline ? & 1 \end{array}\right|}_{\Delta_{ij}}$

$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

2) $det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} & & coeffA & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & coeffA & & \end{vmatrix}$

cycle sur les lignes puis les colonnes :

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \left|\begin{array}{ccc|c} & A_{ij} & & ? \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right|$

II Relation $A^tCom(A) = {}^tCom(A)A = det(A)I_n$.

Propriété :
$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), A^tCom(A) = {}^tCom(A) = det(A)I_n$
Démonstration :
coeff i-j de $A^tCom(A)$
$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}$(cofacteur j-k car transposée)

si $i = j$: On reconnait le développement de det(A) par rapport à la ligne i :
$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta_{ik} = det(A)$
si $i \neq j$: Soit B ayant les mêmes coefficients que A sauf la ligne j, que l'on remplace par la ligne i de A.
Alors $det(B) = 0$ car deux lignes sont égales développement de B par rapport à la ligne j :
$0 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}b_{jk}\Delta_{jk}$
Comme B a les mêmes coefficient que A hors de la ligne j :
$0 = a_{ij}$ par définition de B
idem avec les colonnes :
$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\Delta_{ki}a_{kj}$
si $i \neq j$: on remplace la colonne i de A par sa colonne j

III Déterminant triangulaire par blocs.

Propriété :
Avec $A \in M_r(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-r}(\mathbb{K})$:
$\left|\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right| = det(A)det(B)$
et $\left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline * & B \end{array}\right| = det(A)det(B)$
Démonstration :
$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$
donc $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix}$
or $\begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$
par développement par rapport à la première colonne on repète jusqu'à $det(B)$
de meme : $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n+n}\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r-1} \end{vmatrix}$
par développement par rapport à la dernière colonne on repète jusqu'à $det(A)$
enfin: $\begin{vmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} = 1$ car $\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_n^s(\mathbb{K})$

IV Déterminant de Vandermonde

Propriété :
$n \in \mathbb{N}^*, (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$:
$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$
Démonstration :
récurrence sur n :
Initialisation :
$n = 1 : |1| = 1 =$ produit vide
Hérédite :
Soit $n \geq 2$ tel que la formule soit vrai au rang n-1.
si deux des a_k sont égaux : deux lignes égales donc $V_n(a_1, ..., a_n) = 0$ et le produit en un facteur nul.
Sinon :
Posons pour $x \in \mathbb{K}$:

$$f(x) = V_n(a_1,...,a_{n-1},x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

En developpant par rapport à la dernière ligne on voit que $f \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et que les coeff de x^{n-1} est :
$(-1)^{n+n} V_{n-1}(a_1,...,a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \neq 0$ car $a_1,...,a_{n-1}$ sont 2 à 2 distincts
donc $deg(f) = n-1$ et $dom(f) = V_{n-1}(a_1,...,a_{n-1})$
Or par alternance : $f(a_1) = ... = f(a_{n-1}) = 0$
ce qui donne n-1 racines distincts de f
Ainsi f est scindé simple :
$\forall x \in \mathbb{K}, f(x) = V_{n-1}(a_1,...,a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$
pour $x = a_n$;
$V_{n-1}(a_1,...,a_n) = (\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i))(\prod_{1 \leq i < j = n} (a_j - a_i))$
$V_{n-1}(a_1,...,a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

V Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

Propriété :
Soit $(E,\langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel :
Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E$ Alors :
$\langle \vec{x},\vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$
c'est-à-dire : $|\langle \vec{x},\vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$
avec égalité si et seulement si $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée
Démonstration :
Posons pour $t \in \mathbb{R}$:
$P(t) = \|\vec{x} + t\vec{y}\|^2$
Alors : $P(t) = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, t\vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$
$P(t) = \|\vec{x}\|^2 + 2t\langle \vec{x},\vec{y} \rangle + t^2 \|\vec{y}\|^2$
donc $P \in \mathbb{R}_2[X]$
1^{er} cas : $\vec{y} = \vec{0}$, alors $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 = \|\vec{y}\|$
l'inégalité est vraie et est même une égalité $0 \leq 0$
2^{nd} cas : $\vec{y} \neq \vec{0}$. Alors : $deg(P) = 2$
or $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$, ainsi, P a au plus une racine réelle donc son discriminant est ≤ 0 :
$(2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - 4\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$
$4\langle \vec{x},\vec{y} \rangle^2 \leq \|4\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$
$\langle \vec{x},\vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$
Cas d'égalité :
$\Rightarrow$: on suppose $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 = \|x\|^2 \|\vec{y}\|^2$
si $\vec{y} = \vec{0}$: $(\vec{x}, \vec{y})$ liée
sinon : P possède une racine réelle t_0 car son discriminant est nul :
$P(t_0) = 0$
$\|\vec{x} + t_0\vec{y}\|^2 = 0$
$\underbrace{1}_{\neq 0} \vec{x} + t_0 \vec{y} = \vec{0}$
donc $(\vec{x}, \vec{y})$ liée
$\Leftarrow$: on suppose $(\vec{x}, \vec{y})$ liée.
- si $\vec{y} = \vec{0}$: on a l'égalité (déjà vu)
-sinon : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} = \lambda \vec{y}$
Alors : $\|\vec{x}\|^2 = \lambda^2 \|\vec{y}\|^2$
et $\langle x,y \rangle = \lambda \langle y,y \rangle = \lambda \|\vec{y}\|^2$
on a bien : $(\lambda \|\vec{y}\|^2)^2 = (\lambda^2 \|\vec{y}\|^2) \|\vec{y}\|^2$

VI Inégalité triangulaire et cas d'égalité

Propriété :
1) $\forall (x,y) \in E^2, \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
2) C'est une égalité si et seulement $(\vec{x},\vec{y})$ est positivement liée,
c'est-à-dire : $\vec{y} = \vec{0}$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \vec{x} = \lambda\vec{y}$
Démonstration :
1) inégalité :
$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2$
et $(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2$
Or : $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle \leq |\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$
donc : $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$
Or $\|\vec{x}+\vec{y}\|$ et $\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ sont > 0
donc $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
2) $\Rightarrow$ si $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
alors : $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = |\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$
donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} = \lambda\vec{y}$
Si $\vec{y} \neq \vec{0}$:
$\langle\lambda\vec{y},\vec{y}\rangle = |\langle\lambda\vec{y},\vec{y}\rangle|$
$\lambda\|\vec{y}\|^2 = |\lambda|\|\vec{y}\|^2$
Or $\|\vec{y}\|^2 \neq 0$ donc $\lambda = |\lambda| \geq 0$
$\Leftarrow$: si $\vec{y} = \vec{0}$: $\|\vec{x}+\vec{0}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{0}\|$
Si $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$:
$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\underbrace{(\lambda+1)}_{\geq 0}\vec{y}\|$
$\|\vec{x}+\vec{y}\| = (\lambda+1)\|\vec{y}\|$
$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \lambda\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|$
$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\lambda\vec{y}\| + \|\vec{y}\|$
$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

VII Propriétés variées de la norme + théorème de Pythagore

Propriété :
1) $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| \geq 0$
2) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3) $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$
Démonstration :
1) $\sqrt{\cdot}$ est à valeur dans $\mathbb{R}_+$
2) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{x}\| = 0$
$\Leftrightarrow \langle\vec{x},\vec{x}\rangle = 0$
$\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3) $\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{\langle\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}\rangle}$
$\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{\lambda^2\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}$
$\|\lambda\vec{x}\| = \underbrace{\sqrt{\lambda^2}}_{=|\lambda|}\|\vec{x}\|$
Propriété : Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ préhilbertien réel, $\vec{x}$ et $\vec{y} \in E$
1) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2$
2) $2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$ identité de polarisation.
3) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$ identité de parrallélogramme
4) $\|\vec{x}\|^2 - \|y\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}-\vec{y}\rangle$
Démonstration :
1) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle$
$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x},\vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle$ linéarité par rapport à la première variable
$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle$
Par symétrie : $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle\vec{y},\vec{x}\rangle$: $|\vec{x}+\vec{y}|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2$

2) Trivial
3)$\| \vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \underbrace{2\langle \vec{x}, -\vec{y}\rangle}_{=-2\langle \vec{x},\vec{y}\rangle} + \underbrace{\| -\vec{y}\|^2}_{=\|\vec{y}\|^2}$
Or $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2$
on les somme : $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$
4) $\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}-\vec{y}\rangle = \langle \vec{x},\vec{x}\rangle + \langle \vec{y}, -\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|^2 - \|y\|^2$
Théorème de Pythagore :
Soit $(\vec{x}_1,...,\vec{x}_p) \in E^p$ une famille orthogonale alors :
$\|\vec{x}_1 + ... + \vec{x}_p\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + ... + \|\vec{x}_p\|^2$
Démonstration :
$\|\vec{x}_1 + ... + \vec{x}_p\|^2 = \langle \sum_{i=1}^p \vec{x}_i, \sum_{j=1}^p \vec{x}_j\rangle$
$\|\vec{x}_1 + ... + \vec{x}_p\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}_i, \sum_{j=1}^p \vec{x}_j\rangle$
$\|\vec{x}_1 + ... + \vec{x}_p\|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underbrace{\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j\rangle}_{=0 \quad si \quad i\neq j}$
$\|\vec{x}_1 + ... + \vec{x}_p\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle \vec{x}_i, \vec{x}_i\rangle = \sum_{i=1}^p \|\vec{x}_i\|^2$

VIII Propriétés générales de l'orthogonal d'une partie

Propriété :
1) $\emptyset^\perp = \{\vec{0}\}^\perp = E$
2) $E^\perp = \{\vec{0}\}$
Démonstration :
1) $\emptyset^\perp = \{\vec{y} \in E : \underbrace{\forall \vec{x} \in \emptyset, \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0}_{Toujours \quad vrai}\}$
$\emptyset^\perp = E$
$\{\vec{0}\}^\perp = \{\vec{y} \in E : \langle \vec{0}, \vec{y}\rangle = 0\}$
$\{\vec{0}\}^\perp = E$
2) Soit $\vec{y} \in E^\perp$:
$\forall x \in E, \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$ en particulier, pour $\vec{x} = \vec{y}$: $\|\vec{y}\| = 0$
ainsi : $E \subset \{\vec{0}\}$
Par ailleurs : $\forall \vec{x} \in E, \langle \vec{x},\vec{0}\rangle = 0$ donc $\vec{0} \in E^\perp$
Propriété :
$\forall X \in \mathscr{P}(E), X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
Démonstration :
soit $X \in \mathscr{P}(E)$
$X^\perp \subset E$, par définition
$\forall \vec{x} \in X, \langle \vec{x},\vec{0}\rangle = 0$ donc $\vec{0} \in X^\perp$
pour $(\vec{y}, \vec{z}) \in (X^\perp)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
soit $\vec{x} \in X$:
$\langle \vec{x}, \vec{y} + \lambda\vec{z}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \lambda\langle \vec{x}, \vec{z}\rangle$
$\langle \vec{x}, \vec{y} + \lambda\vec{z}\rangle = 0 + \lambda 0 = 0$
donc: $\forall \vec{x} \in X, \langle \vec{x}, \vec{y} + \lambda\vec{z}\rangle = 0, \vec{y} + \lambda\vec{y} \in X^\perp$
Propriété :
Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$:
$X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$
Démonstration :
soit $\vec{z} \in Y^\perp$: $\forall \vec{y} \in Y, \langle \vec{y}, \vec{z}\rangle = 0$
Or $X \subset Y$, a fortiori :
$\forall \vec{y} \in X, \langle \vec{y}, \vec{z}\rangle = 0$ donc $\vec{z} \in X^\perp$
Propriété :
$\forall X \in \mathscr{P}(E), X^\perp = (Vect(X))^\perp$
Démonstration :
D'une part : $X \subset Vect(X)$ donc $(Vect(X))^\perp \subset X^\perp$
D'autre part : pour $\vec{y} \in X^\perp$

Soit $\vec{z} \in Vect(X)$:
il existe $(\vec{x}_1,...,\vec{x}_p) \in X^p$ et $(\lambda_1,...,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :
$\vec{z} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \vec{x}_k$
$\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \underbrace{\langle \vec{y}, \vec{x}_k \rangle}_{=0 \quad car \quad \vec{y} \in X^{\perp}}$
ainsi : $\forall \vec{z} \in Vect(X), \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$ donc $\vec{y} \in (Vect(X))^{\perp}$