Démonstration kholle 20

I Division euclidienne

II Factorisation d'une racine; un polynôme n'a pas plus de racines distincts que son degré

Propriété :
Soit $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in \mathbb{K}$
1) Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$
2) $P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow (X - \alpha)|P$
Démonstration :
1) $P = (X - \alpha)Q + R$
Avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, $R \in \mathbb{K}[X]$
et $deg(R) < deg(X - \alpha) = 1$ donc R est constant
substituons α à X :
$P(\alpha) = R(\alpha) = R$ car R constante
2) $(X - \alpha)|P \Longleftrightarrow R = 0$
Propriété :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors P possède au plus n racines.
Démonstration : récurrence sur n
Initialisation : n=0, $P \in \mathbb{K}^*$ aucune racine .
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie au rang n-1
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n :
-si P n'a pas de racine : il n'en a pas plus de n
- si P a au moins une racine $c \in \mathbb{K}$, soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - c)Q(x)$
alors $deg(Q) = n - 1$
Q a donc au plus n-1 racines
On a pour $x \in \mathbb{K}$:
$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x = c)$ ou $Q(x) = 0$
P possède au plus une racine de plus que Q donc au plus n au total

III Factorisation simultanée de plusieurs racines distinctes ; cas où il y a autant de racines que le degré (polynôme scindé simple)

IV Interpolation de Lagrange

V Dérivée de PQ

VI Formule de Taylor

VII Caractérisation différentielle de la multiplicité