Démonstration kholle 11

I Première question de cours

I.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : cas complexe et discriminant $\neq 0$

Propriété: On définit un suite linéaire d'ordre 2 une suite sous la forme :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
Si l'équation $z^2 = az + b$ admet 2 racines simples r et s
Les suites convenant sont des combinaisons linéaires de $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc de la forme:
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu s^n$
avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ uniquement déterminé par u_0 et u_1
Démonstration:
a) Ces suites conviennent :
Si $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$au_{n+1} + bu_n = \lambda r^n \underbrace{(ar+b)}_{=r^2} + \mu s^n \underbrace{(as+b)}_{=s^2}$
$r^{n+2} + s^{n+2} = u_{n+2}$
b) Soit u_n tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
Posons pour $n \in \mathbb{N}$:
$v_n = u_{n+1} - ru_n$
$w_n = u_{n+1} - su_n$
Alors :
$v_{n+1} - sv_n = (u_{n+2} - ru_{n+1} - s(u_{n+1} - ru_n))$
$v_{n+1} - sv_n = u_{n+2} - \underbrace{(r+s)}_{a} u_{n+1} + \underbrace{rs}_{-b} u_n$
$v_{n+1} - sv_n = u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n$
$v_{n+1} - sv_n = 0$
donc :
$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 s^n$
De même avec w_n:
$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 r^n$
Enfin pour $n \in \mathbb{N}$:
$v_n - w_n = \underbrace{(s-r)}_{\neq 0} u_n$
$u_n = \frac{u_n - w_n}{s-r}$
$u_n = \underbrace{\frac{-w_0}{s-r}}_{\lambda} r^n + \underbrace{\frac{v_0}{s-r}}_{\mu} s^n$
c) $\lambda + \mu = u_0$
$\lambda r + \mu s = u_1$
donc $ru_0 - u_1$: $\mu \underbrace{(r-s)}_{\neq 0}$
$\mu = \frac{ru_0 - u_1}{r-s}$
de même avec λ :
$su_0 - u_1 = \frac{su_0 - u_1}{s-r}$

I.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : cas complexe et discriminant $= 0$

Propriété :
Si l'équation caractéristique de la suite admet une racine double$r_0 \neq 0$, u_n peut se mettre sous la forme :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n){r_0}^n$
avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ uniquement déterminé par u_0 et u_1
Démonstration :
a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n){r_0}^n$
avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$:
Pour $n \in \mathbb{N}$:
$au_{n+1} + bu_n = a\lambda {r_0}^{n+1} + a\mu(n+1){r_0}^{n+1} + b\lambda {r_0}^n + b\mu n {r_0}^n$
$au_{n+1} + bu_n = \lambda {r_0}^n \underbrace{(ar_0 + b)}_{r^2} + \mu {r_0}^n(\underbrace{a}_{2r_0}(n+1)r_0 + \underbrace{b}_{{r_0}^2} n$
$au_{n+1} + bu_n = \lambda {r_0}^{n+2} + \mu {r_0}^{n+2}\mu(n+2) = u_{n+2}$
b) Soit (u_n) tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2r_0 u_{n+1} - {r_0}^2 u_n$
Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{u_n}{{r_0}^n}$ (licite $r_0 \neq 0$)
On a, puisque $a = 2r_0$ et $-b = {r_0}^2$:
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2r_0 u_{n+1} - {r_0}^2 u_n$
on a donc en divisant par ${r_0}^{n+2}$: $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$
$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$
donc $x_{n+1} - x_n$ est constante donc (x_n) est arithmétique :
$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, x_n = \lambda + \mu n$
$u_n = (\lambda + \mu n){r_0}^n$
c) $\lambda = u_0$
$(\lambda + \mu n)r_0 = u_1$ donc $\mu = \frac{u_1}{r_0} - u_0$

I.3 Cas réel à partir du cas complexe dans le cas d'un discriminant < 0

Propriété :
Si l'équation caractéristique a deux racines complexes non réelle conjugées écrivons les $e^{\pm i\theta}$.
Les suites sont de la formes :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = p^n(C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta))$
avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ déterminé par u_0 et u_1
Démonstration :
$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(pe^{i\theta})^n + \mu(pe^{-i\theta})^n$
conjuguons :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}, u_n = \bar{\lambda}(pe^{-i\theta})^n + \bar{\mu}(pe^{i\theta})$
Donc par unicité des coefficients :
$\lambda = \bar{\mu}$ Notons $\mu = Be^{i\phi}(B \in \mathbb{R}_+, \phi \in \mathbb{R})$
Pour $n \in \mathbb{N}$:
$u_n = Be^{-i\phi}p^n e^{in\theta} + Be^{i\phi}p^n e^{-in\theta}$
$u_n = 2Bp^n\cos(n\theta - \phi)$
$u_n = p^n(\underbrace{2B\cos(\phi)}_{C \in \mathbb{R}} cos(n\theta) + \underbrace{2Bsin(\phi)}_{D \in \mathbb{R}} sin(n\theta))$
ensuite: $u_0 = c$
$u_1 = p(Ccos(\theta) + Dsin(\theta))$
$D = \frac{u_1 - pCcos(\theta)}{psin(\theta)}$
licite car $p > 0$ et $\theta \not\equiv 0[\pi]$ car racines $\notin \mathbb{R}$

I.4 Etude de la suite récurrentes $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ avec illustration graphique

Soit la suite suivante :
$u_{n+1} = \sqrt{(1 + u_n)}$
$I = [-1, +\infty[$

$f : I \to \mathbb{R}_+$
$x \to \sqrt{1+x}$
I stable donc, avec $u_0 \in I$
Posons $g : I \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) - x$
$\forall x \in I, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1$

x	-1		$-\frac{3}{4}$		α $+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Après étude du tableau de variation on voit :
$\exists ! \alpha \in I, g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$
Calculons α:
$\sqrt{1+\alpha} = \alpha$
$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$
$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Or $\alpha = \sqrt{1+\alpha} \geq 0$ donc $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
On voit d'après la réprésentation graphique :
Si $u_0 \in [-1; \alpha[$
Comme f est strictement croissante ;
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1, \alpha[$
Si $-1 \leq u_n \leq \alpha$
$-1 \leq f(-1) \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \leq f(\alpha) = \alpha$
Pour $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$ car $u_n \in [-1, \alpha[$
donc u_n strictement croissante Par le théorèmes de la limite monotone :
u_n converge
la limite l est telle que $l = \sqrt{1+l}$ c'est-à-dire $f(l) = l$ donc $l = \alpha$ donc $u_n \to \alpha$
Si$u_0 = \alpha$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha$
Si $u_0 > \alpha$ Comme f est strictement croissante :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \alpha$
En effet, si $u_n > \alpha$
$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(\alpha) = \alpha$
Pour $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ donc u_n est croissante
or $u_n > \alpha$
Par le théorème de la limite monotone :
on obtient $u_n \to \alpha$

I.5 Etude de la suite récurrentes $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$ avec illustration graphique

On a :
$u_0 > -1$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$
Avec $I =]-1; +\infty[$ et :
$f : I \to \mathbb{R}$
$x \to \frac{1}{1+x}$
Posons $h = fof$ h est strictement croissante car f est strictement décroissante
Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$:
$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = h(v_n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = h(w_n)$

Pour $x \in I$: $h(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}$
Posons $g(x) : x \in I \to h(x) - x = \frac{1-x-x^2}{2+x}$
or $g(x) = 1 - \frac{1}{2+x} - x$
d'où ; $g'(x) = \frac{1}{(2+x)^2} - 1$
On trouve comme solution pour g(x)=x :
$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -1$ donc $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Si $u_0 < a$:
$v_0 = u_0 < \alpha$
Comme h strictement croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < \alpha$
Comme $g > 0$ sur $]-1; \alpha[$ v_n est strictement croissante
Théorème de la limite monotone :
Soit $l = \lim_{n \to +\infty}(v_n) \in \mathbb{R}$ alors $h(l) = l$ $l = \alpha$ donc :
$v_n \to \alpha$
$w_0 = u_1 = f(u_0) > f(\alpha) = \alpha$
Comme h est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}, w_n > a$
Comme $g < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$ (w_n) strictement décroissante
donc w_n converge vers α
Commme $u_{2n} \to \alpha$ et $u_{2n+1} \to \alpha$ donc $u_n \to \alpha$
Si $u_0 = \alpha$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha$
Si $u_0 > \alpha$: comme si $u_0 < \alpha$ en intervertissant les roles de u_n et v_n : $u_n \to \alpha$

II Deuxième question de cours

II.1 Neuf définitions quantifiées de la définition de la limite d'une fonction

Propriété :
1) l finis :
Si a fini : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (|x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$
Si $a = +\infty$: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, (x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$
Si $a = -\infty$: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, (x \leq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$
2)$l = +\infty$:
Si a fini : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A)$
Si $a = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, (x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A)$
si $a = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, (x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A)$
3)$l = -\infty$:
Si a fini : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq A)$
Si $a = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, (x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A)$
si $a = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, (x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A)$

II.2 Unicité de la limite: cas l et l' réels en a fini

Propriété :
si $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ et $f(x) \to l' \in \mathbb{R}$ alors $l' = l$
Démonstration :
Suppposons l<l' finis :
Prenons $\epsilon = \frac{l'-l}{3} > 0$ dans la définition $f(x) \to_{x \to a} l$ et $f(x) \to_{x \to a} l'$: on a :
$l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon$ au voisinage de a et $l' - \epsilon \leq f(x) \leq l' + \epsilon$
d'où: $l' - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon$ au voisinage de a car : $(l' - \epsilon) - (l + \epsilon) = \epsilon > 0$
Vérification formelle de la conjonction :
$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, f(x) \leq l + \epsilon$
$\exists A' \in \mathbb{R}, \forall x \geq A', f(x) \geq l' - \epsilon$
Posons $B = max(A, A')$

alors :
$\forall x \geq B, l' - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon$

II.3 Caractérisation séquentielle de la limite : sens direct, cas a et l finis et cas $a = l = +\infty$ uniquement

Propriété: Les propositions suivante sont équivalentes :
1) $f(x) \to l$
2) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}_f^{\mathbb{N}}, (u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to l)$
Démonstration :
Montrons que 2 $\Rightarrow$ 1
Contraposons et montrons que :
si non($f(x) \to l$)
alors $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D_f^{\mathbb{N}}, (u_n \to a$ et $non(f(u_n) \to l)$
a) Cas l et a finis :
Hypothèse :
$\exists \underbrace{\epsilon_0}_{constante} \in \mathbb{R}_+^*, \forall \delta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in D_f, (|x-a| \leq \delta$ et $|f(x) - l| > \epsilon_0$
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et prenons $\delta = \frac{1}{n} > 0$
Alors : $\exists x_n \in \mathscr{D}_f, (|x_n - a| \leq \frac{1}{n})$ et $|f(x) - l| > \epsilon_0$
On a définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D_f^{\mathbb{N}}$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, (|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n})$ et $|f(x_n) - l| > \epsilon_0$
D'abord : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ donc $x_n \to a$
Ensuite : si on avait $f(x_n) \to l$ alors le passage à la limite dans :
$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - l| > \epsilon_0$
donne $0 \geq \epsilon_0$ ce qui contredit $\epsilon_0 > 0$
ainsi non($f(x_n) \to l$)
b) Cas l et $a = +\infty$
Hypothèse : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathbb{R}, \exists x \geq B, f(x) < A$
Soit $n \in \mathbb{N}$ prenons $B = n$: $\exists x_n \leq B, f(x_n) < A_0$
On a défini $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D_f^{\mathbb{N}}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n > n$ et $f(x_n) < A_0$
On a $x_n \to +\infty$ et $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ majorée donc non($f(x_n) \to +\infty$)

II.4 Caractérisation séquentielle de la limite : réciproque dans le cas a et l finis

Propriété: Les propositions suivante sont équivalentes :
1) $f(x) \to l$
2) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}_f^{\mathbb{N}}, (u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to l)$
Démonstration :
On suppose $f(x) \to_{x\to a} l$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D_f^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to a$
Montrons que $f(u_n) \to l$
Si l et a finis :
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$:
$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (|x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon)$
Appliquons la définition de $u_n \to a$ avec $\delta > 0$:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - a| \leq \delta$
Ainsi pour $n \geq n_0$, $|f(u_n) - l| \leq \epsilon$
En conclusion :
$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f(u_n) - l| \leq \epsilon$

II.5 Limite composée : démonstration quantifiée dans le cas a et l finis et $b = +\infty$

Propriété :
on suppose $f(x) \to_{x\to a} b$ et $g(x) \to_{x\to b} l \in \mathbb{R}$

Alors : $g(f(x)) \to_{x\to a} l$
Démonstration :
Si a et l finis et $b = +\infty$:
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors comme $b = +\infty$:
$\exists A \in \mathbb{R}, \forall y \in D_g, (x \geq A \Rightarrow |f(y) - l| \leq \epsilon)$
Puisque $f(x) \to +\infty$:
$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D_f, (|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A)$ Pour $x \in D_f$, si$|x-a| \leq \delta$:
$f(x) \in D_g$ et $f(x) \geq A$ donc :
$|g(f(x)) - l| \leq \epsilon$

II.6 Théorème de la limite monotone : cas f croissante sur $]a, b[$, limite en b fini (cas f majorée et non majorée) puis limite à gauche en $c \in]a, b[$

Propriété :
$f :]a, b[\to \mathbb{R}$
avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$
1) Si f est croissante :
a) En a :
soit f converge vers sa borne inférieure (si elle est minorée)
soit f tend vers $-\infty$ (sinon)
greenb) En b :
soit f converge vers sa borne supérieure(si elle est majoré)
soit f tend vers $+\infty$
c) En $c \in]a, b[$:
f possède des limites latérales finies et $\lim_{x\to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c^+} f(x)$
Démonstration : si f est croissante et b fini :
1) si f non majorée :
Soit $A \in \mathbb{R}$, Ce n'est pas un majorant :
$\exists x_0 \in]a, b[, f(x) > M$
Comme f est croissante :
$\forall x \in [x_0, b[, f(x) \geq f(x_0)$
Posons $\delta = b - x_0 \in \mathbb{R}_+^*$
Pour $x \in]a, b[$ tel que $|b - x| \leq \delta$
$f(x) \geq A$
2) Si f majorée:
Soit $l = sup(f(]a, b[))$ Soient $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$:
Comme $l - \epsilon < l$, $l - \epsilon$ ne majora pas f :
$\exists x_0 \in]a, b[, f(x_0) > l - \epsilon$
Posons $\delta = b - x_0 \in \mathbb{R}_+^*$
Pour $x \in [b - \delta, b[$:
$f(x) > l - \epsilon$
Or :
$\forall x \in]a, b[, f(x) \leq l \leq l + \epsilon$ donc : pour $x \in [x_0, b[$
$l - \epsilon \leq f(x) \leq l + \epsilon$
3) $c \in]a, b[$ On applique 1 à $f_{|]a,c[|}$ qui est croissante est majoré par f(c)
Ainsi: $l = \lim_{x\to c} f(x)$ existe et finie et
$l = sup\{f(x) : a < x < c\}$
donc $l \geq f(c)$ car $f(c)$ est un majorant de $\{f(x) : a < x < c\}$