Démonstration kholle 23

I Produit matriciel : associativité, matrices identités.

Propriété : $\forall (A,B,C) \in M_{np}(\mathbb{K}) \times M_{pr}(\mathbb{K}) \times M_{rs}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C$
Démonstration :
$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq r}}$ $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\1\leq j\leq s}}$ $BC = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq s}}$ $AB = (e_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}}$ Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq s$
d'une part, le coefficient i-j de $A(BC)$ est :
$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj}$
or $d_{kj} = \sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj}$ donc c'est : $\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$
d'autre part le coefficient de i-j de $(AB)C$ est :
$\sum_{l=1}^{r} e_{il} c_{ej}$
Or $e_{il} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl}$ donc c'est : $\sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$
même valeur par intervertion des sommes rectangulaires.
Propriété : $\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \underbrace{I_n}_{n\times n} \underbrace{A}_{n\times p} = \underbrace{A}_{n\times p} \underbrace{I_p}_{p\times p} = \underbrace{A}_{n\times p}$

Démonstration :
coefficient i-j de $I_n A$:
$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$
pour AI_p : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \delta_{kj} = a_i j$

II Matrice d'ordre 2 : caractérisation de l'inversibilité et formule pour l'inverse

III Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, pour toute colonne C, il existe une unique colonne X telle que $AX = C$

IV Transposition : produit, inverse $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$

V Trace : définition et propriété $tr(AB) = tr(BA)$.

VI L'application $\Phi : A \in M_{n,p} \longmapsto (\Phi_A : M \mapsto tr({}^tAM)) \in \mathscr{L}(M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ est un isomorphisme