Démonstration kholle 9

I Nombre réel

I.1 Borne supérieure: cas du maximum

Propriété :
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée :
Si A possède un maximum alors $sup(A) = max(A) \in A$
Démonstration :
Par définition $max(A) \in A$ et $max(A)$ est un majorant de A.
Soit M un majorant de A:
$\forall x \in A, x \leq M$
Or $max(A) \in A$ en particulier : $M \geq max(A)$
$max(A)$ est le plus petit majorant de A $max(A) = sup(A)$

I.2 Forme des intervalles bornées

Propriété :
Soit I un intervalle non vide :
Si I est borné: il est de la forme $]a, b[, \quad]a, b], \quad [a, b[, \quad [a, b]$ avec $a = inf(I)$ et $b = sup(I)$
Démonstration :
I non vide et majoré : posons $b = sup(I)$
I non vide et minoré : posons $a = inf(I)$
D'une part : soit $x \in I$
a est un minorant de I donc $a \leq x$
b est un majorant de I dans $b \geq x$
Ainsi $I \subset [a, b]$.
D'autre part $x \in]a, b[$:
si $x \geq a = inf(I)$ x ne minore donc pas
$\exists u \in I, u < x$
$x < b = sup(I)$ donc x ne majore pas I :
$\exists v \in I, x < v$
Ainsi $u < x < v$ et $u \in I, v \in I$
donc par définition d'un intervalle $x \in I$
Ainsi : $]a, b[\subset I$
Conclusion: $]a, b[\subset I \subset [a, b]$ ce qui donne les 4 cas

I.3 Caractérisation des intervalles ouverts

Propriété : Soit I intervalle, les proposition suivantes sont équivalentes :
1) I n'a ni minimum ou maximum
2) $\forall a \in I, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, [a - \delta, a + \delta] \subset I$
I est alors un intervalle ouvert
Démonstration :
$1 \Rightarrow 2$: soit $a \in I$
I n'a pas de minimum
Si a minorait I, ce serait le minimum de I car $a \in I$

donc a ne minore pas I :
$\exists u \in I, u < v$
De même, a ne majore pas I :
$\exists v \in I, a < v$
Posons $\delta = min(a-u, v-a) > 0$ car $a-u$ et $v-a$ >0
On a $\delta \leq a-u$ et $\delta \leq v-u$
donc $u \leq a-\delta$ et $a+\delta \leq v$
Montrons que δ convient c'est-à-dire $[a-b; a+\delta] \subset I$
Soit $x \in [a-\delta, a+\delta]$: $u \leq a-\delta \leq x \leq a+\delta$ et $(u,v) \in I$
donc par définition d'un intervalle: $x \in I$ 1 $\Rightarrow$ 1 On suppose: $\forall a \in I, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*[a-\delta, a+\delta] \subset I$
Si I avait un minimum :
$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, [m-\delta; m+\delta] \subset I$
$m-\delta \in I$
or $m-d < m = min(I)$ absurde
Si I avait un maximum M : $\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, [M-\delta; M+\delta] \subset I$
$M+\delta \in I$
Or $M+\delta > M = max(I)$ absurde

I.4 Densité de $\mathbb{Q}$

Propriété : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
Démonstration : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$
1er cas : si $y-x > 1$
On a alors $x < y-1 < \lfloor y \rfloor \leq y$
- Si $y \notin \mathbb{Z}$ on a $x < \underbrace{\lfloor y \rfloor}_{\in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}} < y$
- si $y \in \mathbb{Z}$ on a toujours $x < \underbrace{y-1}_{\in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}} < y$
Cas général : on a seulement $x < y$:
Posons $n = 1 + \underbrace{\lfloor \frac{1}{y-x} \rfloor}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^*$
On a : $n > \frac{1}{y-x}$
Comme $y-x > 0$ $ny - nx > 1$
On applique le premier cas au couple (nx, ny),
$\exists k \in \mathbb{Z}, nx < k < ny$
comme n>0 :
$x < \underbrace{\frac{k}{n}}_{\in \mathbb{Q}} < y$

I.5 Densité de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Propriété : $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
Démonstration : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$
On a car $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$
$\exists t \in \mathbb{Q}, x - \sqrt{2} < t < y - \sqrt{2}$
$x < t + \sqrt{2} < y$
si $t \in \mathbb{Q}$:
comme $t \in \mathbb{Q}$:
$(t+\sqrt{2}) - t \in \mathbb{Q}$
Or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ contradiction donc $t + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

II Limites infinies

II.1 Existence de limite infinie par inégalité

Propriété : soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:
$n^\alpha \to +\infty$
Démonstration : soit $A \in \mathbb{R}$
- Si $A \leq 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$
- Si $A > 0$: posons $n_0 > 1 + \lfloor A^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor \in \mathbb{N}$

pour $n \geq n_0$: $n > A^{\frac{1}{\alpha}}$
$n^\alpha > A$ car $t \to t^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$
Ainsi on a toujours :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n^\alpha \geq A$

II.2 Théorème de la limite monotone (suite croissante non majorée)

Propriété :
1) Si u est croissante et non majorée, $u_n \to +\infty$
2) Si u est décroissante et non minorée, $u_n \to -\infty$
Démonstration : 1) Soit $A \in \mathbb{R}$
A n'est pas un majorant :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > A$
Pour $n \geq n_0$:
$u_n \leq u_{n_0}$, car u est croissante
on a donc :
$u_n \geq A$
2) on applique 1 à $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

II.3 Limite de $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Propriété :
Si $u_n \to +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\lambda u_n \to +\infty$
Démonstration : Soit $A \in \mathbb{R}$:
On suppose :
$\forall B \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq B$
Prenons $B = \frac{A}{\lambda}(\lambda \neq 0)$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq \frac{A}{\lambda}$
Comme $\lambda > 0$:
pour $n \geq n_0, \lambda u_n \geq A$

II.4 Somme d'une suite minorée et d'une suite tendant vers $+\infty$, de deux suites de limite $+\infty$

Propriété :
Si $u_n \to +\infty$ et v_n minorée, $u_n + v_n \to +\infty$
Démonstration :
On suppose :
$\forall B \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq B$
$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq m$
Montrons que $u_n + v_n \to +\infty$ Soit $A \in \mathbb{R}$:
Prenons $B = A - m$ dans l'hypothèse :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A - m.$
ainsi, pour $n \geq n_0$
$u_n + v_n \geq A$

II.5 Limite du produit de deux suites de limites infinies

Propriété :
1) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$ alors $u_n \times v_n \to +\infty$
2) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ alors $u_n \times v_n \to -\infty$
3) Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \to +\infty$ alors $u_n \times v_n \to -\infty$
4) Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \to -\infty$ alors $u_n \times v_n \to +\infty$
Démonstration : 1) Prenons A=1 comme $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \geq 1$
Avec A=0 dans la définition de $u_n \to +\infty$:
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, u_n \geq 0$
A partir du rang $n_2 = max(n_0, n_1)$:
$u_n v_n \geq u_n$
or $u_n \to +\infty$
donc $u_n v_n \to +\infty$
2) on applique 1 à u_n et $-v_n$
3) on applique 1 à $-u_n$ et v_n
4) on applique 1 à $-u_n$ et $-v_n$