Démonstration kholle 24

I Matrice de $f(\vec{x})$, de $g \circ f$

Propriété :
E: $\mathbb{K}$ espace-vectoriel de dimension finie $p \geq 1$
$\mathscr{B} = (\vec{u}_1,...,\vec{u}_p)$ base de E
F: $\mathbb{K}$ espace-vectoriel de dimension finie $n \geq 1$
$\mathscr{C} = (\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ base de F
$f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\vec{x} \in E$
$\underbrace{Mat_{\mathscr{C}}(f(\vec{x}))}_{n\times 1} = \underbrace{Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}_{n\times p}\underbrace{Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}}}_{p\times 1}$
Démonstration :
Notons : $Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$
c'est-à-dire : $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k\vec{u}_k$
et $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = (a_{ij})$ $Mat(f(\vec{x}))_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$
c'est-à-dire : $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} y_i\vec{v}_i$
Or : $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(\vec{u}_k)$ car $f \in \mathscr{L}(E,F)$
$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} x_k(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{v}_i)$ par définition de $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$
$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_k a_{ik}\vec{v}_i$
$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p} a_k x_k)\vec{v}_i$
on a $(\sum_{k=1}^{p} a_k x_k) = y_i$ donc le coefficient de i de $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}}Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}} = y_i$
Propriété : E : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $r \geq 1$
F : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$
G : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$
$f \in \mathscr{L}(E,F), g \in \mathscr{L}(F,G)$
$\mathscr{B} = (\vec{u}_1,..., \vec{u}_r)$ base de E
$\mathscr{C} = (\vec{v}_1,..., \vec{v}_p)$ base de F
$\mathscr{D} = (\vec{w}_1,..., \vec{w}_n)$ base de G
Alors :
$\underbrace{Mat(g \circ f)_{\mathscr{B}\mathscr{D}}}_{n\times r} = \underbrace{Mat(g)_{\mathscr{C}\mathscr{D}}}_{n\times p}\underbrace{Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}_{p\times r}$
Démonstration :
Notons : $Mat(g)_{\mathscr{C}\mathscr{D}} = (a_{ij})$ $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = (b_{ij})$ $Mat(g \circ f)_{\mathscr{B}\mathscr{D}} = (c_{ij})$
Par définition :
$\forall j \in [[1,r]], f(\vec{u}_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\vec{v}_k$
et :$\forall k \in [[1,p]], g(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{w}_i$
Alors pour $j \in [[1,r]]$:
$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} g(\vec{v}_k)$ car g linéaire
$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{k=1}^{p}(b_{kj}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{w}_i)$

$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj})}_{=c_{ij}} \vec{w}_i$

II Définition des matrices de passage et démonstration des formules de changement de base (vecteurs, applications linéaires en général, endomorphisme)

Définition :
On note la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(\mathscr{C})_{\mathscr{B}} = Mat(Id_E)_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$
Propriété : Pour $\vec{x} \in E$:
$Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} Mat_{\mathscr{C}}(\vec{x})$
Démonstration :
$P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} Mat_{\mathscr{C}}(\vec{x}) = Mat(Id_E)_{\mathscr{C}\mathscr{B}} Mat(\vec{x})_{\mathscr{C}}$
Propriété :
E : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$
F : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$
$\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, bases de E
et , bases de F alors :
$Mat(f)_{\mathscr{C}\mathscr{V}} = \underbrace{P}_{n\times n} \underbrace{Mat(f)_{\mathscr{B}}}_{n\times p} \underbrace{P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}_{p\times p}$
Démonstration :
$PMat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(Id_F) Mat(f)_{\mathscr{B}} Mat(Id_E)_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$
$PMat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(Id_f \circ f \circ Id_E)_{\mathscr{C}}$
$PMat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(f)_{\mathscr{C}}$
Corrolaire cas d'un endomorphisme
$dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ $(p = n)$
$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$ bases de E $f \in \mathscr{L}(E)$ alors :
$Mat(f)_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}\mathscr{B}} Mat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$
$Mat(f)_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}^{-1} Mat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$

III Relation de similitude : c'est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$, invariance de la trace, trace d'un projecteur.

Propriété :
la similitude est une relation d'équivalence.
Démonstration :
reflexivité : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $P = I_n \in Gl_n(\mathbb{K})$:
$A = P^{-1}AP$
symétrie : s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$:
$A = Q^{-1}BQ$ avec $Q = P^{-1} \in Gl_n(\mathbb{K})$
transitivité :
si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$ avec $(B,Q) \in GL_n(\mathbb{K})$
alors $C = R^{-1}AR$ où $R = PQ \in Gl_n(\mathbb{K})$
Propriété :
si A et B sont semblables : $tr(A) = tr(B)$
Démonstration :

IV **si** $f \in \mathscr{L}(E,F)$ **est de rang r, il existe** $\mathscr{U}$ **base de** E **et** $\mathscr{V}$ **base de** F **telles que** $Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = J_{n,p,r}$

V **Si** $f \in \mathscr{L}(E,F)$ **et s'il existe** $\mathscr{U}$ **base de** E **et** $\mathscr{V}$ **base de** F **telles que** $Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = J_{n,p,r}$**,** $rg(f) = r$

VI **Une matrice** $n \times p$ **est de rang** r **si et seulemnt si, elle est équivalente à**$J_{n,p,r}$**. Application au rang de la transposée**