Démonstration kholle 26

I Dévellopement par rapport à une ligne ou une colonne.

Propriété :
$A \in M_n(\mathbb{K})$
A_{ij}, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A ($A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$)
$\Delta_{ij} = det(A_{ij})$ mineur principal i-j
1) Pour $j \in [[1,n]]$ fixé :
$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la j-ième colonne
2) Pour $i \in [[1,n]]$ fixé :
$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement par rapport à la i-ème ligne
Démonstration :

1) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ coeffA & 1 & coeffA \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{vmatrix}$ par linéarité sur la j-ième colonne

par permutation circulaire des colonnes j à n, on ammène $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ en position n

puis permutation circulaire des lignes i à n, on ammène la ligne i en position n

$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{(-1)^{n-j}(-1)^{n-i}}_{=(-1)^{2n}(-1)^{i+j}} \underbrace{\begin{vmatrix} & 0 \\ A_{ij} & \vdots \\ & 0 \\ ? & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{ij}}$

$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

2) $det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} coeffA & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ coeffA & & & \end{vmatrix}$ cycle sur les lignes puis les colonnes :

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \begin{vmatrix} A_{ij} & & & ? \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

II Relation $A^tCom(A) = {}^tCom(A)A = det(A)I_n$.

Propriété :
$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), A^tCom(A) = {}^tCom(A) = det(A)I_n$
Démonstration :
coeff i-j de $A^tCom(A)$
$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}$(cofacteur j-k car transposée)
si $i = j$: On reconnait le développement de det(A) par rapport à la ligne i :
$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{il} = det(A)$

si $i \neq j$: Soit B ayant les mêmes coefficients que A sauf la ligne j, que l'on remplace par la ligne i de A.
Alors $det(B) = 0$ car deux lignes sont égales dévellopement de B par rapport à la ligne j :
$0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} b_{jk} \Delta_{jk}$
Comme B a les mêmes coefficient que A en hors de la ligne j :
$0 = a_{ij}$ par définitions de B
idem avec les colonnes :
$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \Delta_{ki} a_{kj}$
si $i \neq j$: on remplace la colonne i de A par sa colonne j

III Déterminant triangulaire par blocs.

Propriété :
Avec $A \in M_r(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-r}(\mathbb{K})$:
$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = det(A)det(B)$
et $\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = det(A)det(B)$
Démonstration :
$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$
donc $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix}$ or $\begin{vmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$
par développement par rapport à la première colonne on repète jusqu'à $det(B)$
de meme : $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r-1} \end{vmatrix}$
par développement par rapport à la dernière colonne on repète jusqu'à $det(A)$
enfin: $\begin{vmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix} = 1$ car $\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_n^s(\mathbb{K})$

IV Déterminant de Vandermonde

V Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

VI Inégalité triangulaire et cas d'égalité

VII Propriétés variées de la norme + théorème de Pythagore

VIII Propriétés générales de l'orthogonal d'une partie