

Démonstration kholle 25

I Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique.

Propriété :

Soit $\phi \in A_n(E)$

$$\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n, \phi(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

On dit que ϕ est antisymétrique

Démonstration :

cas où $\sigma = (i \ j), i < j$ Comme ϕ est alternée :

$$\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i + \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i + \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

$$0 = \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i + \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i + \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n)$$

$$0 = \underbrace{\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n)}_{=0} + \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) + \underbrace{\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n)}_{=0}$$

$$\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = -\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n)$$

$$\text{Or } \epsilon(\sigma) = -1$$

Pour σ quelconque :

$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m$ avec σ_k transposition.

$$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = \underbrace{\epsilon(\sigma_1) \dots \epsilon(\sigma_m)}_{\epsilon(\sigma)} \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

$$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

II $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée et vaut 1 sur \mathcal{B} .

Propriété :

Soit \mathcal{B} une base de E .

Alors : $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme alternée sur E et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

Démonstration : alternée : si $\vec{x}_i = \vec{x}_k$ avec $i \neq k : \forall j \in [[1, n]], a_{ij} = a_{kj}, \tau = (i \ k)$

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), \tau(j)} \text{ car } \vec{x}_i = \vec{x}_k$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\gamma \in S_n} \underbrace{\epsilon(\gamma\tau)}_{=\epsilon(\gamma)\epsilon(\tau)=-\epsilon(\gamma)} \prod_{j=1}^n a_{\gamma(\tau(j)), \tau(j)}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = - \sum_{\gamma \in S_n} \epsilon(\gamma) \prod_{l=1}^n a_{\gamma(l), l} \text{ en posant } l = \tau(j)$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ qui est donc nul}$$

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$:

$$a_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n \delta_{\sigma(j), j}$$

si $\sigma \neq id$: il existe j tel que $\sigma(j) \neq j$ donc $\delta_{\sigma(j), j} = 0$ produit nul

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \epsilon(id) \prod_{j=1}^n \delta_{j, j}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

III Formule de changement de base des déterminants, caractérisation des bases.

Propriété :

Fixons \mathcal{B} base de E . Soit $\phi \in A_n(E)$, alors :

$$\forall \mathcal{F} \in E, \phi(\mathcal{F}) = \phi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Propriété :

formule de changement de base. Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} bases de E . Alors :

$$\forall \mathcal{F}, \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Démonstration :

cas particulier de la propriété précédente avec $\phi = \det_{\mathcal{C}} \in A_n$

Corrolaire :

\mathcal{B} et \mathcal{C} bases de E . Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0 \text{ et } \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})}$$

Démonstration :

$$\text{En prenant } \mathcal{F} = \mathcal{C} : \underbrace{\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})}_{=1} = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$$

Corrolaire :

Soit \mathcal{B} base de E , $\mathcal{F} \in E^n$ quelconque . Alors :

$$\mathcal{F} \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

Démonstration :

\Rightarrow : propriété précédente

\Leftarrow : par contraposition.

Supposons que \mathcal{F} ne soit pas une base de E . Comme elle a $n = \dim(E)$ vecteurs, si elle était libre alors ce serait une base, elle est donc liée.

Comme $\det_{\mathcal{B}} \in A_n(E)$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$

IV $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} + $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

1) Pour toutes bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{C}))$$

On note cette valeur $\det(f) \in \mathbb{K}$ c'est le déterminant de f

$$2) \forall \mathcal{F} \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Démonstration :

1) Soit $\phi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n))$$

Montrons que $\phi \in A_n(E)$:

$$\phi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

n-linéarité Soit $i \in [[1, n]]$, fixons $\vec{x}_k \in E$ pour $k \neq i$.

Soit \vec{y} et $\vec{z} \in E$, $\lambda \in K$.

$$\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{y} + \lambda \vec{z}, \dots, f(\vec{x}_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{y}) + \lambda f(\vec{z}), \dots, f(\vec{x}_n)) \text{ car } f \in \mathcal{L}(E)$$

$$\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{y} + \lambda \vec{z}, \dots, f(\vec{x}_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{y}), \dots, f(\vec{x}_n)) + \lambda \det_{\mathcal{B}}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{z}), \dots, f(\vec{x}_n)) \text{ car } \det_{\mathcal{B}} \in A_n(E)$$

$$\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{y} + \lambda \vec{z}, \dots, f(\vec{x}_n)) = \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{y}, \dots, \vec{x}_n) + \lambda \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{z}, \dots, \vec{x}_n)$$

alternance : s'il existe $i \neq k$ tel que $\vec{x}_i = \vec{x}_k$:

$$f(\vec{x}_i) = f(\vec{x}_k) \text{ donc comme } \det_{\mathcal{B}} \text{ est alternée :}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n)) = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } \phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

Conclusion : comme $\phi \in A_n(E)$ et \mathcal{C} base de E on a :

$$\forall \mathcal{F} \in E^n, \phi(\mathcal{F}) = \phi(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) \text{ avec } \mathcal{F} = \mathcal{B} :$$

$$\phi(\mathcal{B}) = \phi(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$$

donc, par définition de ϕ , $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{C}))\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$
 $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{C}))$ (formule de changement de base)

2) Si l'on écrit plutôt :

$$\forall \mathcal{F} \in E^n, \phi(\mathcal{F}) = \phi(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

$$\phi(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \text{ c'est-à-dire } \det(f) \text{ par 1}$$

$$\text{par définition de } \phi : \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{F})) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

V Propriété variées de $\det(f)$ déduites de la question précédente.

Propriété :

$$\det(Id_E) = 1$$

Démonstration :

Soit \mathcal{B} base de E :

$$\det(Id_E) = \det_{\mathcal{B}}(Id_E(\mathcal{B}))$$

$$\det(Id_E) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

Propriété :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$$

Démonstration :

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de E

Par définition : $\det(\lambda f) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda f(\vec{e}_1), \dots, \lambda f(\vec{e}_n))$

$\det(\lambda f) = \lambda \det(f(\vec{e}_1), \lambda f(\vec{e}_2), \dots, \lambda f(\vec{e}_n))$ par linéarité par rapport à la première variable etc.

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))}_{\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det(f)}$$

Propriété :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2, \det(gf) = \det(g)\det(f)$$

Démonstration :

Soit \mathcal{B} base de E :

$$\det(gf) = \det_{\mathcal{B}}(gf(\mathcal{B}))$$

$$\det(gf) = \det(g) \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))}_{= \det(f)}$$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$f \in GL(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$$

$$\text{Dans ce cas } \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$$

Démonstration :

$f \in GL(E) \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ base de E

$$\Leftrightarrow \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))}_{= \det(f)} \neq 0 \text{ si c'est le cas :}$$

$$ff^{-1} = Id_E$$

$$\det(ff^{-1}) = \det(Id_E)$$

$$\det(f)\det(f^{-1}) = 1$$

VI $\det({}^t A) = \det(A)$

Propriété :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \det({}^t A) = \det(A)$$

Démonstration :

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \quad {}^t A = (a'_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \text{ avec } a'_{ij} = a_{ji}$$

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a'_{\sigma(j), j}$$

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma(j)}$$

$$\text{en posant } \sigma = \gamma^{-1} \quad \det({}^t A) = \sum_{\gamma \in S_n} \underbrace{\epsilon(\gamma^{-1})}_{= \epsilon(\gamma)} \prod_{j=1}^n a_{j, \gamma^{-1}(j)}$$

Dans le produit pour γ donnée, posons $j = \gamma(i)$:

$$\det({}^t A) = \sum_{\gamma \in S_n} \epsilon(\gamma) \prod_{i=1}^n a_{\gamma(i),i}$$

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

VII Déterminant triangulaire

Propriété : soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ Si A est triangulaire (éventuellement diagonale) :

$$\det(A) = \prod_{j=1}^n a_{jj}$$

Démonstration :

Si $A \in \mathcal{T}_n^s(\mathcal{K})$:

pour $i > j, a_{ij} = 0$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$$

Soit $\sigma \in S_n$ dès qu'il existe un $j \in [[1, n]]$ tel que $\sigma(j) > j$, le produit est nul. Les seuls σ considérés sont ceux tel que $\sigma(j) \leq j$ pour $j \in [[1, n]]$:

$$\sigma(1) \leq 1 \text{ donc } \sigma(1) = 1$$

$$\sigma(2) \leq 2 \text{ et } \sigma(1) \neq \sigma(2) \text{ (car } \sigma \text{ injective) donc } \sigma(2) = 2 \text{ etc.}$$

donc $\sigma = id$

$$\det(A) = \epsilon(id) \prod_{j=1}^n a_{jj}$$

Si $A \in \mathcal{T}_n^i$:

$$\det(A) = \det({}^t A) \text{ cas précédent.}$$