Démonstration kholle 24

I Matrice de $f(\vec{x})$, de $g \circ f$

Propriété :
E: $\mathbb{K}$ espace-vectoriel de dimension finie $p \geq 1$
$\mathscr{B} = (\vec{u}_1,...,\vec{u}_p)$ base de E
F: $\mathbb{K}$ espace-vectoriel de dimension finie $n \geq 1$
$\mathscr{C} = (\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ base de F
$f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\vec{x} \in E$
$\underbrace{Mat_{\mathscr{C}}(f(\vec{x}))}_{n\times 1} = \underbrace{Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}_{n\times p}\underbrace{Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}}}_{p\times 1}$
Démonstration :
Notons : $Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$
c'est-à-dire : $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{u}_k$
et $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = (a_{ij})$ $Mat(f(\vec{x}))_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$
c'est-à-dire : $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} y_i \vec{v}_i$
Or : $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(\vec{u}_k)$ car $f \in \mathscr{L}(E,F)$
$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} x_k (\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{v}_i)$ par définition de $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$
$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_k a_{ik}\vec{v}_i$
$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{p} a_k x_k)\vec{v}_i$
on a $(\sum_{k=1}^{p} a_k x_k) = y_i$ donc le coefficient de i de $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}} Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}} = y_i$
Propriété : E : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $r \geq 1$
F : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$
G : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$
$f \in \mathscr{L}(E,F), g \in \mathscr{L}(F,G)$
$\mathscr{B} = (\vec{u}_1,..., \vec{u}_r)$ base de E
$\mathscr{C} = (\vec{v}_1,..., \vec{v}_p)$ base de F
$\mathscr{D} = (\vec{w}_1,..., \vec{w}_n)$ base de G
Alors :
$\underbrace{Mat(g \circ f)_{\mathscr{B}\mathscr{D}}}_{n\times r} = \underbrace{Mat(g)_{\mathscr{C}\mathscr{D}}}_{n\times p}\underbrace{Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}_{p\times r}$
Démonstration :
Notons : $Mat(g)_{\mathscr{C}\mathscr{D}} = (a_{ij})$ $Mat(f)_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = (b_{ij})$ $Mat(g \circ f)_{\mathscr{B}\mathscr{D}} = (c_{ij})$
Par définition :
$\forall j \in [[1,r]], f(\vec{u}_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\vec{v}_k$
et :$\forall k \in [[1,p]], g(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{w}_i$
Alors pour $j \in [[1,r]]$:
$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} g(\vec{v}_k)$ car g linéaire
$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{k=1}^{p} (b_{kj} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{w}_i)$

$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj})}_{=c_{ij}} \vec{w}_i$

II Définition des matrices de passage et démonstration des formules de changement de base (vecteurs, applications linéaires en général, endomorphisme)

Définition :
On note la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(\mathscr{C})_{\mathscr{B}} = Mat(Id_E)_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$
Propriété : Pour $\vec{x} \in E$:
$Mat(\vec{x})_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} Mat_{\mathscr{C}}(\vec{x})$
Démonstration :
$P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} Mat_{\mathscr{C}}(\vec{x}) = Mat(Id_E)_{\mathscr{C}\mathscr{B}} Mat(\vec{x})_{\mathscr{C}}$
Propriété :
E : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$
F : $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$
$\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, bases de E
et , bases de F alors :
$Mat(f)_{\mathscr{C}\mathscr{V}} = \underbrace{P}_{n\times n} \underbrace{Mat(f)_{\mathscr{B}}}_{n\times p} \underbrace{P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}_{p\times p}$
Démonstration :
$PMat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(Id_F) Mat(f)_{\mathscr{B}} Mat(Id_E)_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$
$PMat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(Id_f \circ f \circ Id_E)_{\mathscr{C}}$
$PMat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = Mat(f)_{\mathscr{C}}$
Corrolaire cas d'un endomorphisme
$dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ $(p = n)$
$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$ bases de E $f \in \mathscr{L}(E)$ alors :
$Mat(f)_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}\mathscr{B}} Mat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$
$Mat(f)_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}^{-1} Mat(f)_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$

III Relation de similitude : c'est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$, invariance de la trace, trace d'un projecteur.

Propriété :
la similitude est une relation d'équivalence.
Démonstration :
reflexivité : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $P = I_n \in Gl_n(\mathbb{K})$:
$A = P^{-1}AP$
symétrie : s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$:
$A = Q^{-1}BQ$ avec $Q = P^{-1} \in Gl_n(\mathbb{K})$
transitivité :
si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$ avec $(B,Q) \in GL_n(\mathbb{K})$
alors $C = R^{-1}AR$ où $R = PQ \in Gl_n(\mathbb{K})$
Propriété :
si A et B sont semblables : $tr(A) = tr(B)$
Démonstration :
Soit $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que :
$B = P^{-1}AP$
$tr(B) = tr(P^{-1}AP)$
$tr(B) = tr(AP^{-1}P)$
$tr(B) = tr(A)$

Propriété :
$dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$
$p \in \mathscr{L}(E)$ projecteur et $r = rg(p)$
Alors : il existe une base de E tel que :

$$Mat(p)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ En particulier } tr(p) = r$$

Démonstration :
si $r = 0$: $p = \tilde{0}$, si $r = n$: $p = Id_E$
si $1 \leq r \leq n-1$ on a :
$E = Inv(f) \oplus Ker(f)$
et $dim(Ker(f)) = n - r$ (théorème du rang) $dim(Inv(f)) = r$
Soit $(\vec{u}_1,..., \vec{u}_r)$ base de $Inv(f)$
$(\vec{u}_{r+1},..., \vec{u}_n)$ base de $Ker(f)$
Posons $\mathscr{C} = (\vec{u}_1,..., \vec{u}_n)$ c'est une base de E car concaténation de bases de sous-espace vectoriel supplémentaires :

$$Mat_{\mathscr{C}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & (0) & \\ & \ddots & & 0 \\ (0) & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

IV si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe $\mathscr{U}$ base de E et $\mathscr{V}$ base de F telles que $Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = J_{n,p,r}$

Propriété :
$dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ $dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$
$f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang r. Alors :
il existe une base $\mathscr{U}$ de E et une base $\mathscr{V}$ de F tel que : $Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = J_{npr} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Démonstration :
si $r = 0$, $f = \tilde{0}$, toutes bases conviennent.
sinon :
soit $(\vec{v}_1,..., \vec{v}_r)$ base de $Im(f)$
pour $1 \leq j \leq r$, soit $\vec{u}_j$, un antécédent de $\vec{v}_j$ de f
$(\vec{v}_1,..., \vec{v}_r)$ est en particulier libre : par le théorème de la base incomplète, il existe $(\vec{v}_{r+1},..., \vec{v}_n) \in F^{n-r}$ tel que $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ soit une base de F.
Théorème du rang : $dim(Ker(f)) = p - r$.
Soit $(\vec{u}_{r+1},..., \vec{u}_p)$ base de $Ker(f)$ et montrons que $(\vec{u}_1,..., \vec{u}_p)$ est base de E
Montrons qu'elle est libre :
Soit $\lambda_1,...,\lambda_p) \in \mathbb{K}$, tel que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E$
appliquons f : on a $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$ si $j \leq r$ ou $\vec{0}_F$ sinon donc $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}_F$
Or $(\vec{v}_1,..., \vec{v}_r)$ libre donc $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$
Si $r = p$, c'est triviale
sinon, il reste alors : $\sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E$
$(\vec{u}_{r+1},...,\vec{u}_p)$ libre (car base de $Ker(f)$) donc $\lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0$
avec $\mathscr{U} = (\vec{u}_1,..., \vec{u}_p)$ base de E et $\mathscr{V} = (\vec{v}_1,..., \vec{v}_n)$ base de F :

$$Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & (0) & \\ & \ddots & & 0 \\ (0) & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

V Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et s'il existe $\mathscr{U}$ base de E et $\mathscr{V}$ base de F telles que $Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = J_{n,p,r}$, $rg(f) = r$

Propriété :
$dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ $f \in \mathscr{L}(E,F)$
S'il existe une base $\mathscr{U}$ de E et une base $\mathscr{V}$ de F tel que $Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = J_{npr} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$ alors $rg(f) = r$
Démonstration :
Notons $\mathscr{U} = (\vec{u}_1,...,\vec{u}_p)$ et $\mathscr{V} = (\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$
Si $r = 0$: $Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = 0_{np}, f = \tilde{0}, rg(f) = 0 = r$
Sinon : on a :
$Im(f) = Vect(\underbrace{f(\vec{u}_1)}_{=\vec{v}_1},...,\underbrace{f(\vec{u}_r)}_{=\vec{v}_r},\underbrace{f(\vec{u}_{r+1})}_{=\vec{0}_F},...,\underbrace{f(\vec{u}_p)}_{=\vec{0}_F})$
donc : $Im(f) = Vect(\vec{v}_1,..., \vec{v}_r)$
Or $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_r)$ est libre car sous-famille de $\mathscr{V}$, qui l'est.
On a donc :$(\vec{v}_1,...,\vec{v}_r)$ base de $Im(f)$ donc $dim(Im(f)) = r$

VI Une matrice $n \times p$ est de rang r si et seulemnt si, elle est équivalente à$J_{n,p,r}$. Application au rang de la transposée

Propriété :
soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $r \in [[0,min(n,p)]]$:
$rg(A) = r \iff$ A équivalente à J_{npr}
Démonstration : $\mathscr{B}$ base canonique de $\mathbb{K}^p$ $\mathscr{C}$ base canonique base canonique de $\mathbb{K}^n$
$\Rightarrow$ soit f canoniquement associé à A :
$rg(f) = r$ (par définition de rg(A)) et $Mat_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) = A$
Or: il existe $\mathscr{U}$ base de E et $\mathscr{V}$ base de F tel que :$Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) = J_{npr}$
Formule de changement de base général :
$Mat_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) = \underbrace{Mat_{\mathscr{V}\mathscr{C}}(Id_E)}_{P_{\mathscr{C}\mathscr{V}} \in Gl_n(\mathbb{K})} Mat_{\mathscr{U}\mathscr{V}}(f) \underbrace{Mat_{\mathscr{B}\mathscr{U}}(Id_E)}_{P \in GL_p(\mathbb{K})}$
$\Leftarrow$: $\exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}), A = PJ_{npr}Q$
donc $rg(A) = rg(J_{npr})$
Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à J_{npr} :
$Mat_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(g) = J_{npr}$ donc $rg(g) = r$
Or par définition $rg(J_{npr}) = rg(g) = r$ donc : $rg(A) = r$
Propriété :
$\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), rg({}^tA) = rg(A)$
Démonstration :
Soit n=rg(A) :
$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists Q \in Gl_p(\mathbb{K}), A = PJ_{npr}Q$
${}^tA = \underbrace{{}^tQ}_{\in Gl_p(\mathbb{K})} \; {}^tJ_{npr} \; \underbrace{{}^tP}_{\in Gl_n(\mathbb{K})}$
donc : ${}^tA$ équivalent à ${}^tJ_{npr} = J_{pn\underline{r}}$
donc $rg({}^tA) = r$