Démonstration kholle 10

I Première question de cours

I.1 Unicité de la limite (cas des limites finies)

Propriété :
Si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $u_n \to l' \in \mathbb{R}$ alors $l = l'$
Démonstration :
Supposons $l \neq l'$
1^{er} cas: $l < l'$:
Posons $\epsilon = \frac{l'-l}{3} > 0$
$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, l - \epsilon \geq u_n \geq l + \epsilon$ et $\exists q \in \mathbb{N}, \forall n \geq q, l' - \epsilon \geq u_n \geq l' + \epsilon$
Par ailleurs : $l + \epsilon = \frac{2}{3}l + \frac{1}{3}l$ et $l' - \epsilon = \frac{2}{3}l' + \frac{1}{3}l$
$(l' - \epsilon) - (l + \epsilon) = \epsilon > 0$
Posons $n \geq max(p, q)$:
$u_n \leq l + \epsilon < l - \epsilon \leq u_n$ donc $u_n < u_n$ absurde
2^{eme} cas : $l' < l$: même principe
On a donc $l = l'$

I.2 Limite de la somme de deux suites convergente

Propriété :
Si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $v_n \to l' \in \mathbb{R}$, $u_n + v_n \to l + l'$
Démonstration :
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, appliquons la définition de $u_n \to l$ avec $\frac{\epsilon}{2} > 0$ au lieu de ϵ
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$
On a de même avec v_n:
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |v_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}$
Posons $n_2 = max(n_0, n_1) \in \mathbb{N}$:
Pour $n \geq n_2$ $|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')|$
$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$
$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$
$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq \epsilon$

I.3 Toute suite convergente est bornée + lemme pour le produit (bornée x limite nulle) + limite de produit (cas convergent uniquement)

Propriété :
1) Si u_n tend vers un réel elle est bornée
2) Si $u_n \to 0$ et v_n borné, $u_n \times v_n \to 0$
3) Si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ et $v_n \to l' \in \mathbb{R}$, $u_n v_n \to l \times l'$
Démonstration :
1) Prenons $\epsilon = 1$ dans la définition de $u_n \to l \in \mathbb{R}$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq 1$ Pour $n \geq n_0$:
$|u_n| = |(u_n - l) + l|$
$|u_n| \leq |(u_n - l)| + |l|$
$|u_n| \leq 1 + |l|$

Posons $c = \underbrace{max|u_k| : 0 \leq k \leq n_0}_{finie \quad et \quad \neq\emptyset}$ et $M = max(c, 1 + |l|)$
$|u_n| \leq c \leq M$ si $n \leq n_0$
$|u_n| \leq 1 + |l| \leq M$ si $n \geq n_0$
On a donc :
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
2) Comme v_n est bornée :
$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$
On peut toujours choisir $M \in \mathbb{R}_+^*$(si M=0 $v = \tilde{0}$)
Appliquons la définition de $u_n \to 0$ avec $\frac{\epsilon}{M}$ pour ϵ:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - 0| \leq \frac{\epsilon}{M}$
Pour $n \geq n_0$: $0 \leq |u_n| \leq \frac{\epsilon}{M}$
Or $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |v_n| \leq M$
donc pour $n \geq n_0$ $|u_n v_n| \leq \epsilon$
3) $u_n v_n - l \times l' = u_n(v_n - l') + (u_n - l)v_n$
On a : $v_n - l' \to 0$ et u_n borné car elle converge donc $u_n(v_n - l') \to 0$ et de même $v_n(u_n - l) \to 0$ On en conclut:
$u_n v_n - l \times l' \to 0$
$u_n v_n \to l \times l'$

I.4 Limite de somme et produit dans le cas où l'une est finie et l'autre infinie

Propriété : 1) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to l \in \mathbb{R}, u_n + v_n \to +\infty$
2) Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \to l \in \mathbb{R}, u_n + v_n \to -\infty$
3) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to l \in \mathbb{R}_+^*, u_n v_n \to +\infty$
4) Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \to l \in \mathbb{R}_+^*, u_n v_n \to -\infty$
5) Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to l \in \mathbb{R}_-^*, u_n v_n \to -\infty$
6) Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \to l \in \mathbb{R}_-^*, u_n v_n \to +\infty$
Démonstration :
1) v_n converge donc est bornée, en particulier minorée. Comme $u_n \to +\infty$:
$u_n + v_n \to +\infty$
2) Appliquons 1 à $-u_n$ et $-v_n$ donc :
$-u_n - v_n \to +\infty$
$u_n + v_n \to -\infty$
3) Prenons $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$ dans la définition de $v_n \to l$:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \underbrace{l - \epsilon}_{l/2} \leq v_n \leq l + \epsilon$
Prenons A=0 dans celle de $u_n \to +\infty$:
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, u_n \geq 0$
Pour $n \geq max(n_0, n_1) \in \mathbb{N}$:
$v_n \geq \frac{l}{2}$ et $u_n \geq 0$
donc $u_n v_n \geq \frac{l}{2} u_n$
Comme $u_n \to +\infty$ et $\frac{l}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ on a :
$\frac{l}{2} u_n \to +\infty$
Comme $u_n v_n \geq \frac{l}{2} u_n$ à partir d'un certain rang :
$u_n v_n \to +\infty$
4) Appliquons 3 à $-u_n$ et v_n
5) Appliquons 3 à u_n et $-v_n$
6) Appliquons 3 à $-u_n$ et $-v_n$

I.5 Limite d'inverse, cas convergente de limite non nulle

Propriété :
Si $u_n \to l \in \mathbb{R}^*$

$u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$
Démonstration :
1^{er} cas : $l > 0$
Prenons $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$ dans la définition de $u_n \to l$:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \underbrace{l - \epsilon}_{l/2} \leq v_n \leq l + \epsilon$
en particulier pour $n \geq n_0$: $u_n \geq \frac{l}{2} > 0$
Pour $n \geq n_0$: $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = |\frac{l-u_n}{u_n l}|$
$|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{1}{u_n l}|u_n - l|$
donc comme $l > 0$:
$u_n l \geq \frac{l^2}{2} > 0$
$\frac{1}{u_n l} \leq \frac{2}{l^2}$
Comme $|u_n - l| \geq 0$ on a donc :
$|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| \leq \frac{1}{u_n l}|u_n - l| \leq \frac{2}{l^2}|u_n - l|$ à partir du rang n_0
Conclusion :
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$
Appliquons la définition de $u_n \to l$ avec $\epsilon\frac{l^2}{2} > 0$ à la place de ϵ :
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - l| \leq \epsilon\frac{l^2}{2}$
Posons $n_2 = max(n_0, n_1) \in \mathbb{N}$
Pour $n \geq n_2$: $|u_n - l| \leq \epsilon\frac{l^2}{2}$
donc $\frac{2}{l^2} > 0$: $\frac{2}{l^2}|u_n - l| \leq \epsilon$
Or $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| \leq \frac{2}{l^2}|u_n - l|$
On a donc : $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| \leq \epsilon$
Or à partir de n_0 $u_n \geq \frac{l}{2} > 0$
Comme l>0 :
$u_n l \geq \frac{l^2}{2} > 0$

$\frac{1}{u_n l} \leq \frac{2}{l^2}$
Pour $n \geq n_0$:
$|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{1}{u_n l}|u_n - l|$
D'une part $|u_n - l| \to 0$
D'autre part pour $n \geq n_0$, $0 < \frac{l}{2} \leq u_n$
$0 < \frac{l^2}{2} \leq l u_n$(car $l > 0$)
$0 < \frac{1}{u_n l} \leq \frac{2}{l^2}$
donc $\frac{1}{u_n l}$ est bornée à partir de n_0
Par le lemme du produit $\frac{1}{u_n l}|u_n - l| \to 0$ c'est-à-dire $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| \to 0$

I.6 Limite d'inverse, cas de limite infinie ou nulle

Propriété :
1) Si $u_n \to +\infty$: $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \to 0$
2) Si $u_n \to -\infty$: $u_n < 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \to 0$
3) Si $u_n \to 0$: $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \to +\infty$
4) Si $u_n \to 0$: $u_n < 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \to -\infty$
Démonstration :
1) Hypothèse :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$
Prenons A=1 : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 1 > 0$
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$:
Prenons $A = \frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}$ dans l'hypothèse :
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, u_n \geq \frac{1}{\epsilon}$
Pour $n \geq n_1$:
$u_n \geq \frac{1}{\epsilon} > 0$
$0 < \frac{1}{u_n} \leq \epsilon$

A fortiori : $0-\epsilon \leq \frac{1}{u_n} \leq 0+\epsilon$
2) On applique 1 à $-u_n$:
$-u_n \to +\infty$
$\frac{1}{-u_n} \to 0$
$\frac{1}{u_n} \to -0 = 0$
3) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq N, u_n > 0$
Soit $A \in \mathbb{R}$:
1^{er} cas : $A \leq 0$
on a $\frac{1}{U_n} > 0 \geq A$ pour $n \geq N$
2^{eme}cas : $A > 0$
Prenons $\epsilon = \frac{1}{A} > 0$ dans la définition de $u_n \to 0$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, -\epsilon \leq u_n \leq \epsilon$
Prenons $n_1 = max(N, n_0)$:
Pour $n \geq n_1$ $0 < u_n < \frac{1}{A}$ donc $\frac{1}{u_n} \geq A$
4) On applique 3 à $-u_n$

I.7 Limite de sous-suite + réciproque partielle avec pairs et impairs(cas convergent uniquement)

Propriété :
1) Si $u_n \to l$ et ϕ extractrice, $u_{\phi(n)} \to l$
2) Soit $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u_{2n} \to l$ et $u_{2n+1} \to l$ alors $u_n \to l$
Démonstration :
1) Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ par hypothèse :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon$
Pour $n \geq n_0$: $\phi(n) \geq n$ (lemme) donc $\phi(n) \geq n_0$
donc $|u_{\phi(n)} - l| \leq \epsilon$
2) Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, hypothèse :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_{2n} - l| \leq \epsilon$
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon$
Posons $n_2 = max(2n_0, 2n_1 + 1)$
Pour $n \geq n_2$:
-Si n pair $n = 2k \quad k \in \mathbb{N}$ comme $k \geq n_0$ donc $|u_{2k} - l| \leq \epsilon$
-Si n impair $n = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}$ comme $k \geq n_1$ donc $|u_{2k+1} - l| \leq \epsilon$
Dans les deux cas : $|u_n - l| \leq \epsilon$

II Deuxième question de cours

II.1 Passage à la limite dans les inégalités larges

Propriété :
Si $u_n \to l \in \mathbb{R}$ $v_n \to l' \in \mathbb{R}$ et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $l \leq l'$
Démonstration :
1^{er} cas : supposons $v_n \to l' \in \mathbb{R}$ et $v_n \geq 0$ à partir du rang N.
Montrons que $l' \geq 0$:
Si $l' < 0$:
Prenons $\epsilon = -\frac{l'}{2} > 0$ dans la définition de $v_n \to l'$:
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, l' - \epsilon \leq v_n \leq l' + \epsilon$
En particulier, pour $n \geq n_0$: $v_n \leq l' + \epsilon = \frac{l'}{2} < 0$ contradiction au rang $max(N, n_0)$
Passons au cas général :
On a alors : $v_n - u_n \to l' - l$ et $v_n - u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang
donc $l' - l \geq 0$ et $l' \geq l$

II.2 Théorème de la limite monotone: cas croissante et majorée

Propriété :
Soit $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et majorée alors elle converge vers sa borne supérieure
Démonstration :
Posons $X = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$(image de la suite)
On a : $X \in \mathbb{R}$ $X \neq \emptyset$ car par exemple $u_0 \in X$ et X majorée par hypothèse.
Posons $l = sup(X)$ et montrons que $u_n \to l$:
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$: Alors : $l - \epsilon$ n'est pas un majorant car $l - \epsilon < l = sup(X)$ donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, l - \epsilon < u_{n_0}$
Comme u_n est croissante donc pour tout $n \geq n_0$:
$u_n \geq u_{n_0}$
Par ailleurs : $l = sup(X)$ donc l est un majorant de u_n :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$
ainsi pour $n \geq n_0$:
$l - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l$ a fortiori : $l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon$

II.3 Adjacence des approximation décimales

Propriété :
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose :
$a_n = \frac{1}{10^n}\lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{D}$
$b_n = a_n + \frac{1}{10^n} \in \mathbb{D}$
approximation décimales par défaut et par excès à 10^{-n} près de x
Les suites a_n et b_n sont adjacentes de limite x
Démonstration :
Montrons que a_n est croissante pour $n \in \mathbb{N}$:
$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$
$10\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x$
$10\lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier $\leq 10^{n+1}x$ donc :
$10\lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$
On divise par $10^{n+1} > 0$:
$a_n \leq a_{n+1}$
Montrons que b_n décroissante pour $n \in \mathbb{N}$:
$10^n x < 1 + \lfloor 10^n x \rfloor$
$10^{n+1} x < 10 + 10\lfloor 10^n x \rfloor$
ou $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leq 10^{n+1} x$ donc :
$\lfloor 10^{n+1} \rfloor < 10 + 10\lfloor 10^n x \rfloor$
Les deux membres étant entier :
$1 + \lfloor 10^{n+1} \rfloor \leq 10 + 10\lfloor 10^n x \rfloor$
On divise par $10^{n+1} > 0$:
$b_{n+1} = b_n$
$b_n - a_n = \frac{1}{10^n} \to 0$
Ainsi ces suites converge vers un réel l vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l \leq b_n$
Calculons l, pour $n \in \mathbb{N}$:
$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < 1 + \lfloor 10^n x \rfloor$
$a_n \leq x < b_n$
Puisque a_n et b_n converge vers l, le passage à la limite dans les inégalités large donne :
$l \leq x \leq l$ donc $x = l$

II.4 Théorème des gendarmes

Propriété :
Soit a_n, b_n et $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose :
$a_n \to l$ et $b_n \to l$

$a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang
Alors : $u_n \to l$
Démonstration :
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq n_0, a_n \leq u_n \leq b_n$
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$:
Par hypothèse :
$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon$
$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, l - \epsilon \leq b_n \leq l + \epsilon$
Posons $n_3 = max(n_0, n_1, n_2) \in \mathbb{N}$
pour $n \geq n_3$: $l - \epsilon \leq a_n \leq u_n \leq b_n \leq l + \epsilon$
donc $l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon$

II.5 Démonstration du théorème des suites adjacentes

Propriété :
Deux suites u_n et v_n sont adjacentes si :
u_n croissante
v_n décroissante
$v_n - u_n \to 0$
Alors : elles sont convergentes de même limite l et :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$
Démonstration : lemme : montrons que
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
Posons $w_n = v_n - u_n (n \in \mathbb{N})$
D'une part : $w_n \to 0$
D'autre part : pour $n \in \mathbb{N}$,
$w_{n+1} - w_n = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leq 0} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0}\ w_{n+1} - w_n \leq 0$
donc w_n décroit Ainsi: soit $w_n \to -\infty$, soit elle tend vers sa borne inférieure.
Comme $w_n \to 0$: sa borne inférieure est 0 donc $\forall n \in , w_n \geq 0$
Pour $n \in \mathbb{N}$:
$u_n \leq v_n$ et $v_n \leq v_0$ donc $u_n \leq v_0$
Ainsi: u_n est croissante est majorée et croissante donc elle converge.
Notons $l = \lim_{n \to +\infty} u_n \in \mathbb{R}$.
On a aussi: $l = sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ donc :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$
$v_n = (v_n - u_n) + u_n \to 0 + l$ Comme v_n décroit et l est sa borne inférieure donc :
$\forall n \in \mathbb{N}, l \leq v_n$

II.6 Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété : Soit $D \subset \mathbb{R}$ les propositions suivantes sont équivalentes :
1) D est dense dans $\mathbb{R}$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists u_n \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}, u_n \to x$
C'est-à-dire tout réel est limite d'une suite d'élément de D
Démonstration :
$1 \Rightarrow 2$:
Soit $x \in \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ on a :
$x < x + \frac{1}{2^n}$
donc comme D est dense dans $\mathbb{R}$:
$\exists u_n \in D, x < u_n < x + \frac{1}{2^n}$
Ainsi :
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in D, x < u_n < x + \frac{1}{2^n}$
On a : $u_n \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$
Par théorème des gendarmes : $u_n \to x$

$2 \Rightarrow 1$:
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$:
Comme on a 2 : $\exists u_n \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}, u_n \to \frac{x+y}{2}$
Prenons $\epsilon = \frac{y-x}{4} > 0$ dans la définition :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{x+y}{2} - \epsilon \leq u_n \leq \frac{x+y}{2} + \epsilon$
Ainsi pour $n \geq n_0$:
$x < \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y \leq u_n \leq \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}x < y$
$u_{n_0} \in \mathbb{D} \quad \cap \quad]x, y[\quad \neq 0$