Démonstration kholle 23

I Produit matriciel : associativité, matrices identités.

Propriété : $\forall (A,B,C) \in M_{np}(\mathbb{K}) \times M_{pr}(\mathbb{K}) \times M_{rs}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C$
Démonstration :
$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le r}}$ $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le s}}$ $BC = (d_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le s}}$ $AB = (e_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le r}}$
Pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le s$ d'une part, le coefficient i-j de $A(BC)$ est :
$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj}$
or $d_{kj} = \sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj}$ donc c'est : $\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$
d'autre part le coefficient de i-j de $(AB)C$ est :
$\sum_{l=1}^{r} e_{il} c_{ej}$
Or $e_{il} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl}$ donc c'est : $\sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$
même valeur par intervertion des sommes rectangulaires.
Propriété :
$\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \underbrace{I_n}_{n\times n} \underbrace{A}_{n\times p} = \underbrace{A}_{n\times p} \underbrace{I_p}_{p\times p} = \underbrace{A}_{n\times p}$
Démonstration :
coefficient i-j de $I_n A$:
$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$
pour AI_p : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$

II Matrice d'ordre 2 : caractérisation de l'inversibilité et formule pour l'inverse

Propriété :
La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$
on a alors : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Démonstration :
si $ad - bc \neq 0$ alors :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & ad-bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$= I_2$ de même $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$
si $ad - bc = 0$ alors
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$
si A était inversible on aurait :
$A^{-1} A \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} \times 0_2$
$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$
$a = b = c = d = 0$ donc $A = 0_2$ contradiction avec A inversible

III Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, pour toute colonne C, il existe une unique colonne X telle que $AX = C$

Propriété :
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a les équivalences :
1) $A \in GL_n(\mathbb{K})$
2) Pour toute matrice colonne $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = C$
3) Tout système dont la matrice des coefficient est A possède une unique solution
Démonstration :
$3 \Leftrightarrow 2$ est immédiate. On transpose le système en écriture matricielle.
$1 \Rightarrow 3$
On cherche $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = C$
Analyse : si une matrice X_0 convient alors comme A est inversible on aurait $X_0 = A^{-1}C$ d'où l'unicité de X_0
Synthèse : vérifions que $A^{-1}C$ convient :
$A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = I_nC = C$ il convient
$2 \to 1$
On va construire une matrice B tel que $AB = I_n$.
On vérifiera $BA = I_n$ pour $j \in [[1,n]]$, notons $E_j \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ la j-ième colonne de I_n
soit $B_j \in M_{n,1}$ telle que $AB_j = E_j$ (B_j existe et est unique par 2) considérons $B \in M_n(\mathbb{K})$ avec B_j l'ensemble des colonnes de B :
$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix}$
alors $AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \dots & AB_n \end{pmatrix} = I_n$ (propriété au calcul matriciel par colonne)
pour $j \in [[1,n]]$; on note note A_j la j-ième colone de A
par définition du produit matriciel : $AE_j = A_j$
Par ailleurs, on sais que $AB = I_n$ donc $(AB)A_j = A_j$ et $A(BA_j) = A_j$
donc par unicité $BA_j = E_j$ et par propriété du calcul matriciel :
$BA = I_n$

IV Transposition : produit, inverse $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$

Propriété :
Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pr}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\underbrace{{}^t\underbrace{(AB)}_{n\times r}}_{r\times n} = \underbrace{\underbrace{{}^tB}_{r\times p}\,\underbrace{{}^tA}_{p\times n}}_{r\times n}$$

Démonstration :
$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq r}}$
$AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}}$ ${}^tB{}^tA = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\1\leq j\leq n}}$

${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$ ${}^tB = (b'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\1\leq j\leq p}}$ avec $b'_{ij} = b_{ji}$ ${}^t(AB) = (c'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r\\1\leq j\leq n}}$ avec $c'_{ij} = c_{ji}$
Soit $(i,j) \in [[1,r]] \times [[1,n]]$
$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik}a'_{kj}$ par définition de ${}^tB{}^tA$
$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk}$ déf de ${}^tA$ et ${}^tB$
$d_{ij} = c_{ji}$ définition de AB
$d_{ij} = c'_{ij}$ définition de ${}^t(AB)$
Propriété :
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K}), {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
Démonstration :
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ transposons :
${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^tA^{-1} = I_n$ car ${}^tI_n = I_n$
donc ${}^tA \in Gl_n(\mathbb{K})$ d'inverse ${}^t(A^{-1})$
Propriété :

$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$
Démonstration :
Soit $s : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$
$A \mapsto {}^tA$
Alors s est une involution linéaire ($s^2 = Id_{M_n(\mathbb{K})}$) donc :
$M_n(\mathbb{K}) = \underbrace{Ker(s - Id_{M_n(\mathbb{K})})}_{S_n(\mathbb{K})} \oplus \underbrace{Ker(s + Id_{M_n(\mathbb{K})})}_{AS_n(\mathbb{K})}$

V Trace : définition et propriété $tr(AB) = tr(BA)$.

Définition :
soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$
On pose $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{K}$ trace de A
Propriété :
$\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{pn}(\mathbb{K}), tr(\underbrace{AB}_{n \times n}) = tr(\underbrace{BA}_{p \times p})$
Démonstration :
$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$
$AB = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $BA = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$
$tr(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$
$tr(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki}$
$tr(BA) = \sum_{i=1}^p d_{ii}$
$tr(BA) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$
$tr(BA) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p a_{ki} b_{ik}$
On échange les rôles des indices i et k :
$tr(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} = tr(AB)$

VI L'application $\Phi : A \in M_{n,p} \longmapsto (\Phi_A : M \mapsto tr({}^tAM)) \in \mathscr{L}(M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ est un isomorphisme

Propriété :
on fixe $(n,p) \in (N^*)^2$
1) Pour $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, l'application :
$\phi_A : M_{np}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$
$M \mapsto tr(\underbrace{{}^tAM}_{p \times p})$
est unes forme linéaire sur $M_{np}(\mathbb{K})$
2) L'application :
$\Phi : M_{np} \to \mathscr{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$
$A \mapsto \phi_A$ est un isomorphisme
Démonstration :
1) $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ fixé
Pour M_1 et $M_2 \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in K$
$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = tr({}^tA(M_1 + \lambda M_2))$
$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = tr({}^tAM_1 + \lambda {}^tAM_2)$
$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = tr({}^tAM_1) + \lambda tr({}^tAM_2)$
$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = \phi_A(M_1) + \lambda \phi_A(M_2)$
2)Montrons que $\boldsymbol{\Phi \in \mathscr{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathscr{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K}))}$
Soit $(A,B) \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
Pour $M \in M_{np}(\mathbb{K})$:
$\phi_{A+\lambda B} = tr({}^t(A + \lambda B)M)$
$\phi_{A+\lambda B} = tr({}^tAM + \lambda {}^tBM)$
$\phi_{A+\lambda B} = tr({}^tAM) + \lambda tr({}^tBM)$

$\phi_{A+\lambda B} = \phi_A(M) + \lambda\phi_B(M)$
ainsi : $\forall M \in M_{np}(\mathbb{K}), \phi_{A+\lambda B}(M) = \phi_A(M) + \lambda\phi_B(M)$
c'est-à-dire : $\phi_{A+\lambda B} = \phi_A + \lambda\phi_B$
Montrons que $\mathbf{\Phi}$ **injective**, c'est-à-dire $Ker(\Phi) = \{0_{np}\}$
$Ker(\Phi) \supset \{0_{np}\}$ toujours vraie
$Ker(\Phi) \subset \{0_{np}\}$ Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ tel que : $\Phi(A) = \tilde{0}$
$\forall M \in M_{np}(\mathbb{K}), \phi_A(M) = 0$
en particulier :
pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$
$\phi_A(E_{ij}) = 0$
donc $tr({}^tAE_{ij}) = 0$

$${}^tAE_ij = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [[1,j-1]] & j & [j+1,p] \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{i,1} & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & a_{i,p} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in M_p(\mathbb{K})$$

$tr({}^tAE_{ij}) = a_{ij}$
on a donc :
$\forall (i,j) \in [[1,n]] \times [[1,p]], a_{ij} = 0$
$A = 0_{np}$
Théorème du rang :
$dim(M_{np}) = \underbrace{dim(Ker(\Phi))}_{=0} + dim(Im(\Phi))$
$dim(M_{np}) = rg(\Phi)$
or : $Im(\phi) \subset \mathscr{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$
et $dim(\mathscr{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})) = dim(M_{np}(\mathbb{K})) \times 1 = np$
donc $Im(\phi) = \mathscr{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$