

Démonstration kholle 27

I Cardinal d'un produit, extension à $\bigcup_{x \in A} \{x\} B_x$ avec tous les B_x de même cardinal (principe des bergers)

Propriété :

Si E et F sont finis $E \times F$ aussi et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F)$

Démonstration : Si E ou $F = \emptyset$ alors $E \times F = \emptyset$ $0 = 0$

Si $E = \{x_0\}$, singleton

Soit $f : F \rightarrow \{x_0\} \times F$

$y \mapsto (x_0, y)$ et $g : \{x_0\} \times F \rightarrow F$

$(x_0, y) \mapsto y$

Ces applications sont trivialement réciproques.

ainsi : f est bijective $\{x_0\} \times F$ est finie et $\text{Card}(\{x_0\} \times F) = \text{Card}(F)$ Si x_1, \dots, x_n sont les éléments distincts de E :

Notons $F_k = \{x_k\}$ et $F(1 \leq k \leq n)$

Alors : (F_1, \dots, F_n) est une partition de $E \times F$ en effet : $F_k \subset E \times F$ pour tout k donc $\bigcup_{k=1}^n F_k \subset E \times F$

Soit $(x, y) \in E \times F$

Alors : $\exists k \in [1, n], x = x_k$

Or $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ donc $(x, y) \in F_k$

A fortiori $E \times F \subset \bigcup_{k=1}^n F_k$

si $i \neq j$ et $(x, y) \in F_i \cap F_j$:

$x = x_i$ et $x = x_j$

or $x_i \neq x_j$

ainsi : $F_i \cap F_j = \emptyset$

On a bien ;

$E \times F = \bigcup_{k=1}^n F_k$ avec les F_k disjoint

$E \times F$ est fini et :

$\text{Card}(E \times F) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(F_k)$

Or on a vu précédemment : $\forall k \in [1, n], \text{Card}(F_k) = \text{Card}(F)$

donc $\text{Card}(E \times F) = n\text{Card}(F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F)$

Propriété :

Si on effectue un 1^{er} choix parmi n options puis un second ayant p options (pouvant dépendre du 1^{er} choix), il y a np couples de choix possibles

Formellement : A fini de cardinal $n \geq 1$

F ensemble quelconque et, pour tout $x \in A$

Soit $B_x \subset F$ fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ (indépendant de x)

Alors :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{x \in A} \underbrace{(\{x\} \times B_x)}_{\{(x, y), y \in B_x\}}\right) = np$$

Démonstration :

Soit $G = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times B_x)$

l'union est disjointe car, si $x \neq x'$:

$\{x\} \times B_x = \{(x, y) : y \in B_x\}$

$\{x'\} \times B_{x'} = \{(x', z) : z \in B_{x'}\}$

pas d'élément commun car la première composante diffère toujours

De plus :

$$\forall x \in A, \text{Card}(\{x\} \times B_x) = \underbrace{\text{Card}(B_x)}_p$$

donc G est fini de cardinal np

II Dénombrement des arrangements, des injections

Propriété :

pour $0 \leq p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

si $p = 0$: $A_n^0 = 1$ (liste vide)

si $p \geq 1$: on a n choix pour la première composante

puis $n-1$ choix pour la seconde composante

⋮
⋮
⋮

puis $n - p - 1$ choix pour la p -ième composante

donc : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Propriété :

E fini de cardinal p et F fini de cardinal n alors $\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = A_n^p$

Démonstration:

Notons x_1, \dots, x_p les éléments distincts on a vu que :

$$\Phi : F^E \rightarrow F^p$$

$f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_p))$ est une bijection

ainsi : $\psi = \Phi|_{\text{Inj}(E, F)}$

ψ est une injection de $\text{Inj}(E, F)$ vers F^p , elle réalise donc une bijection sur son image ainsi :

$$\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = \text{Card}(\text{Im}(\psi))$$

Or $\text{Im}(\psi)$ est l'ensemble des p -arrangements de f :

$$\text{Card}(\text{Inj}(E, F)) = A_n^p$$

III Expression des combinaisons avec des factorielles

IV Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

V Formule du triangle de Pascal.

VI Démonstration combinatoire de $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$

VII Exercice : calcul combinatoire de $\sum_{k=p}^n \binom{p-1}{k-1}$

VIII Exercice : Formule de Vandermonde