

Démonstration kholle 21

I Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$

Définition :

Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est une partie de I de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

1) I est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$

2) $\forall P \in I, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in I$

Propriété :

Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$ avec P unique à association près

Démonstration :

Unicité On sait que :

$$P_1\mathbb{K}[X] = P_2\mathbb{K}[X] \iff P_1 \text{ et } P_2 \text{ associé}$$

Existence : Soit I idéal de $\mathbb{K}[X]$:

Si $I = \{0\}$: $P = 0$ convient

Sinon, posons $E = \{\deg(B) : B \in I \setminus \{0\}\}$

Alors $E \subset \mathbb{N}$:

$E \neq \emptyset$ car $I \neq \{0\}$ et $0 \in I$

Ainsi E possède un minimum d :

Soit $B \in I \setminus \{0\}$, tel que $\deg(B) = d$

Montrons que $I = B\mathbb{K}[X]$:

$B\mathbb{K}[X] \subset I$:

$B \in I$ donc : $\forall Q \in \mathbb{K}[X], BQ \in I$

$I \subset B\mathbb{K}[X]$:

Soit $A \in I$ comme $B \neq 0$:

$\exists!(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2, (A = BQ + R)$ et $\deg(R) < \deg(B)$

$R = A - BQ$ donc $R \in I$ or $\deg(R) < \deg(B) = d$ donc comme $d = \min(E)$, $R = 0$

$A = BQ \in B\mathbb{K}[X]$

II En admettant le théorème de D'Alembert-Gauss: description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$

Propriété :

1) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1

2) Dans $\mathbb{R}[X]$:

-les polynômes de degré 1

-ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif

Démonstration :

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 :

D'une part, P n'est pas constant.

D'autre part, si $P = QR$ avec Q et R non constant :

$\deg(P) = \deg(Q) + \deg(R) \geq 2$ contradiction donc P est irréductible.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, P irréductible montrons que $\deg(P) = 1$

P irréductible donc non constant.

Par le théorème de D'Alembert-Gauss : $\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$

$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - z)Q$

Or P irréductible donc Q constant d'où $\deg(P) = 1$

2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, P irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ on a de même :

$$\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$$

1^{er} cas : $z \in \mathbb{R}$, idem que dans $\mathbb{C}[X]$, $P = (X - z)Q$ avec Q constant $\deg(P) = 1$

2^{eme} cas : $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ comme $P \in \mathbb{R}[X]$, \bar{z} aussi est racine de P

Comme $z \neq \bar{z}$:

$$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - z)(X - \bar{z})Q$$

$$P = \underbrace{(X^2 - 2 * \operatorname{Re}(z)X + |z|^2)}_{\in \mathbb{R}[X]} Q$$

On constate que Q est le quotient de la division euclidienne de $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X^2 - 2 * \operatorname{Re}(z)X + |z|^2) \in \mathbb{R}[X]$ donc $Q \in \mathbb{R}[X]$

Comme P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ Q est constante $\deg(P) = 2$ et P n'a pas de racine réelle donc son discriminant est strictement négatif

III Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ selon la parité de n

Factorisons $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

1^{er} cas : n paire, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{ik\pi}{p}}, 0 \leq k \leq 2p - 1$$

$z_0 = 1$ et $z_p = -1$, les autres $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Pour $k \in [[1, p-1]]$: $\bar{z}_k = e^{-\frac{ik\pi}{p}} = e^{\frac{i(2p-k)\pi}{p}} = z_{2p-k}$ avec $2p-k \in [[p+1, 2p-1]]$

$$X^{2p} - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{p-1} \underbrace{(X - z_k)(X - \bar{z}_k)}_{= X^2 - 2\operatorname{Re}(z_k)X + |z_k|^2}$$

$$X^{2p} - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{p-1} (X^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{p})X + 1)$$

2^{eme} cas : $n = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}^*$)

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}, 0 \leq k \leq 2p$$

$z_0 = 1$, les autres sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

pour $k \in [[1, p]]$, $\bar{z}_k = e^{-\frac{2ik\pi}{2p+1}} = e^{\frac{2i(2p+1-k)\pi}{2p+1}}$ avec $2p+1-k \in [[p+1, 2p]]$

$$X^{2p+1} - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^p (X - z_k)(X - \bar{z}_k)$$

$$X^{2p+1} - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^p (X^2 - 2\cos(\frac{2k\pi}{2p+1})X + 1)$$

IV Enoncer sans démonstration les relations coefficients-racines, les formules $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$. Exemple : somme des carrés, cubes et inverses des racines de $X^3 - 3X + 1$

Propriété :

soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ alors :

1) la somme des multiplicités de ses racines est $\leq n$

2) égalité si et seulement si P scindé (toujours le cas quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Propriété :

$$1) \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$$

Démonstration :

$$1) (\sum_{k=1}^n x_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j$$

2) Mise au même dénominateur.

Exemple :

$$P = X^3 - 3X + 1 = (X - a)(X - b)(X - c)$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$:

$$\sigma_1 = a + b + c = 0$$

$$\sigma_2 = ab + bc + ac = -3$$

$$\sigma_3 = abc = -1$$

- 1) $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6$
 2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 3$
 3) Comme (a, b, c) sont racines de $X^3 - 3X + 1$ on a :
 $a^3 + b^3 + c^3 = (3a - 1) + (3b - 1) + (3c - 1)$
 $a^3 + b^3 + c^3 = 3\sigma_1 - 3 = -3$

V Existence et unicité de la forme irréductibles d'une fraction rationnelle.

Propriété :

Tout $F \in \mathbb{K}(X)$ possède un couple de représentants premier entre eux .
 Il est unique à association près.

Démonstration :

Existence : Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0$ tel que $F = \frac{A}{B}$

Soit $D = A \wedge B \neq 0$ car $(B \neq 0)$

$\exists (U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2, A = DU$ et $B = DV$ $V \neq 0$ car $B \neq 0$

on a $F = \frac{U}{V}$ et $U \wedge V = 1$

Unicité : si $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$

avec $(A_1, A_2, B_1, B_2) \in (\mathbb{K}[X])^4$ B_1 et $B_2 \neq 0$

$A_1 \wedge B_1 = A_2 \wedge B_2 = 1$

On a :

$A_1 B_2 = A_2 B_1$ ainsi $B_1 | A_1 B_2$ or $A_1 \wedge B_1 = 1$ donc $B_1 | B_2$ de même $B_2 | B_1$:

$\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, B_2 = \lambda B_1$ puis :

$\lambda A_1 B_1 = A_2 B_1$

or $B_1 \neq 0$ donc $A_2 = \lambda A_1$ (intégrité de $\mathbb{K}[X]$)

VI Coefficients d'un pôle simple (formule $\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$), décomposition de $\frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$

Propriété :

Si α est un pôle simple de $F = \frac{A}{B}$ avec $A \wedge B = 1$.

Alors le coefficient de $\frac{1}{X - \alpha}$ dans la décomposition en élément simple est $\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$

Démonstration :

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = (X - \alpha)Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$ (en effet $A \wedge B = 1$ donc α pôle simple signifie α racine simple de B)

Soit λ le coefficient cherché :

D'une part : $\lambda = (X - \alpha)F(X)|_{\alpha} = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$

D'autre part : $B' = Q + (X - \alpha)Q'$ donc $B'(\alpha) = Q(\alpha)$

Exemple :

$\frac{1}{X^n - 1} (\mathbb{K} = \mathbb{C}, n \geq 1)$

on a la factorisation : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k), \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Donc $\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega^k}$

Avec $A = 1$ et $B = X^n - 1, B' = nX^{n-1}$

$\lambda_k = \frac{A(\omega^k)}{B'(\omega^k)} = \frac{1}{n(\omega^k)^{n-1}} = \frac{\omega^k}{n}$ car $(\omega^k)^n = 1$

On a donc : $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{X - \omega^k}$

VII Décomposition en élément simples de $\frac{P'}{P}$ lorsque P est scindé

Soit P scindé :

$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*, r \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$, racines distinctes de multiplicités (m_1, \dots, m_r)

alors $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{X - \alpha_k}$

Démonstration :

$P = \lambda P_1 \dots P_r$ avec $P_k = (X - \alpha_k)^{m_k}$ et $P' = \lambda \sum_{k=1}^r P_1 \dots P'_k \dots P_r$

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{P'_k}{P_k} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{X - \alpha_k}$$