

# Démonstration kholle 23

## I Produit matriciel : associativité, matrices identités.

**Propriété :**  $\forall (A, B, C) \in M_{np}(\mathbb{K}) \times M_{pr}(\mathbb{K}) \times M_{rs}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C$

**Démonstration :**

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}} C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} BC = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq s}} AB = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$  Pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq s$

d'une part, le coefficient i-j de  $A(BC)$  est :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj}$$

or  $d_{kj} = \sum_{l=1}^r b_{kl} c_{lj}$  donc c'est :  $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

d'autre part le coefficient de i-j de  $(AB)C$  est :

$$\sum_{l=1}^r e_{il} c_{lj}$$

Or  $e_{il} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl}$  donc c'est :  $\sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

même valeur par interversion des sommes rectangulaires.

**Propriété :**  $\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \underbrace{I_n}_{n \times n} \underbrace{A}_{n \times p} = \underbrace{A}_{n \times p} \underbrace{I_p}_{p \times p} = \underbrace{A}_{n \times p}$

**Démonstration :**

coefficient i-j de  $I_n A$  :

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$$

pour  $AI_p$  :  $\sum_{k=1}^p a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$

## II Matrice d'ordre 2 : caractérisation de l'inversibilité et formule pour l'inverse

**Propriété :**

La matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$  et on a alors :  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

**Démonstration :**

si  $ad - bc \neq 0$  alors :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & ad-bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= I_2 \text{ de même } \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$$

si  $ad - bc = 0$  alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$$

si A était inversible on aurait :

$$A^{-1}A \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} \times 0_2$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$$

$a = b = c = d = 0$  donc  $A = 0_2$  contradiction avec A inversible

- III Une matrice carrée  $A$  est inversible si, et seulement si, pour toute colonne  $C$ , il existe une unique colonne  $X$  telle que  $AX = C$**
- IV Transposition : produit, inverse  $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$**
- V Trace : définition et propriété  $tr(AB) = tr(BA)$ .**
- VI L'application  $\Phi : A \in M_{n,p} \longmapsto (\Phi_A : M \mapsto tr({}^tAM)) \in \mathcal{L}(M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$  est un isomorphisme**