

Démonstration kholle 23

I Produit matriciel : associativité, matrices identités.

Propriété : $\forall (A, B, C) \in M_{np}(\mathbb{K}) \times M_{pr}(\mathbb{K}) \times M_{rs}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C$

Démonstration :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}} \quad C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} \quad BC = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq s}} \quad AB = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$$

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq s$ d'une part, le coefficient i-j de $A(BC)$ est :

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} d_{kj}$$

or $d_{kj} = \sum_{l=1}^r b_{kl} c_{lj}$ donc c'est : $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^r a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

d'autre part le coefficient de i-j de $(AB)C$ est :

$$\sum_{l=1}^r e_{il} c_{lj}$$

Or $e_{il} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl}$ donc c'est : $\sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

même valeur par interversion des sommes rectangulaires.

Propriété :

$$\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \underbrace{I_n}_{n \times n} \underbrace{A}_{n \times p} = \underbrace{A}_{n \times p} \underbrace{I_p}_{p \times p} = \underbrace{A}_{n \times p}$$

Démonstration :

coefficient i-j de $I_n A$:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$$

pour AI_p : $\sum_{k=1}^p a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$

II Matrice d'ordre 2 : caractérisation de l'inversibilité et formule pour l'inverse

Propriété :

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$

on a alors : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration :

si $ad - bc \neq 0$ alors :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-dc & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= I_2 \text{ de même } \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$$

si $ad - bc = 0$ alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$$

si A était inversible on aurait :

$$A^{-1} A \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} \times 0_2$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$$

$a = b = c = d = 0$ donc $A = 0_2$ contradiction avec A inversible

III Une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, pour toute colonne C, il existe une unique colonne X telle que $AX = C$

Propriété :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a les équivalences :

1) $A \in GL_n(\mathbb{K})$

2) Pour toute matrice colonne $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = C$

3) Tout système dont la matrice des coefficient est A possède une unique solution

Démonstration :

3 \Leftrightarrow 2 est immédiate. On transpose le système en écriture matricielle.

1 \Rightarrow 3

On cherche $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = C$

Analyse : si une matrice X_0 convient alors comme A est inversible on aurait $X_0 = A^{-1}C$ d'où l'unicité de X_0

Synthèse : vérifions que $A^{-1}C$ convient :

$A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = I_n C = C$ il convient

2 \rightarrow 1

On va construire une matrice B tel que $AB = I_n$.

On vérifiera $BA = I_n$ pour $j \in [[1,n]]$, notons $E_j \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ la j-ième colonne de I_n

soit $B_j \in M_{n,1}$ telle que $AB_j = E_j$ (B_j existe et est unique par 2) considérons $B \in M_n(\mathbb{K})$ avec B_j l'ensemble des colonnes de B :

$$B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n)$$

alors $AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n) = I_n$ (propriété au calcul matriciel par colonne)

pour $j \in [[1,n]]$; on note A_j la j-ième colonne de A

par définition du produit matriciel : $AE_j = A_j$

Par ailleurs, on sait que $AB = I_n$ donc $(AB)A_j = A_j$ et $A(BA_j) = A_j$

donc par unicité $BA_j = E_j$ et par propriété du calcul matriciel :

$$BA = I_n$$

IV Transposition : produit, inverse $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$

Propriété :

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pr}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\underbrace{{}^t(AB)}_{\substack{n \times r \\ r \times n}} = \underbrace{{}^tB}_{r \times p} \underbrace{{}^tA}_{p \times n}$$

Démonstration :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$$

$$AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \quad {}^tB {}^tA = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$${}^tA = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ avec } a'_{ij} = a_{ji} \quad {}^tB = (b'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ avec } b'_{ij} = b_{ji} \quad {}^t(AB) = (c'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ avec } c'_{ij} = c_{ji}$$

Soit $(i,j) \in [[1,r]] \times [[1,n]]$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p b'_{ik} a'_{kj} \text{ par définition de } {}^tB {}^tA$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ki} a_{jk} \text{ déf de } {}^tA \text{ et } {}^tB$$

$$d_{ij} = c_{ji} \text{ définition de } AB$$

$$d_{ij} = c'_{ij} \text{ définition de } {}^t(AB)$$

Propriété :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Démonstration :

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ transposons :

$${}^t(A^{-1}) {}^tA = {}^tA {}^tA^{-1} = I_n \text{ car } {}^tI_n = I_n$$

donc ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ d'inverse ${}^t(A^{-1})$

Propriété :

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus AS_n(\mathbb{K})$$

Démonstration :

Soit $s : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$

$$A \mapsto {}^t A$$

Alors s est une involution linéaire ($s^2 = Id_{M_n(\mathbb{K})}$) donc :

$$M_n(\mathbb{K}) = \underbrace{Ker(s - Id_{M_n(\mathbb{K})})}_{S_n(\mathbb{K})} \oplus \underbrace{Ker(s + Id_{M_n(\mathbb{K})})}_{AS_n(\mathbb{K})}$$

V Trace : définition et propriété $tr(AB) = tr(BA)$.

Définition :

soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$

On pose $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{K}$ trace de A

Propriété :

$$\forall A \in M_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{pn}(\mathbb{K}), tr(\underbrace{AB}_{n \times n}) = tr(\underbrace{BA}_{p \times p})$$

Démonstration :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, BA = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki}$$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^p d_{ii}$$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$$

$$tr(BA) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik}$$

On échange les rôles des indices i et k :

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} = tr(AB)$$

VI L'application $\Phi : A \in M_{n,p} \mapsto (\Phi_A : M \mapsto tr({}^t AM)) \in \mathcal{L}(M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ est un isomorphisme

Propriété :

on fixe $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

1) Pour $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, l'application :

$$\phi_A : M_{np}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

$$M \mapsto tr(\underbrace{{}^t AM}_{p \times p})$$

est une forme linéaire sur $M_{np}(\mathbb{K})$

2) L'application :

$$\Phi : M_{np} \rightarrow \mathcal{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$$

$A \mapsto \phi_A$ est un isomorphisme

Démonstration :

1) $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ fixé

Pour M_1 et $M_2 \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = tr({}^t A(M_1 + \lambda M_2))$$

$$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = tr({}^t AM_1 + \lambda {}^t AM_2)$$

$$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = tr({}^t AM_1) + \lambda tr({}^t AM_2)$$

$$\phi_A(M_1 + \lambda M_2) = \phi_A(M_1) + \lambda \phi_A(M_2)$$

2) Montrons que $\Phi \in \mathcal{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathcal{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K}))$

Soit $(A, B) \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Pour $M \in M_{np}(\mathbb{K})$:

$$\phi_{A+\lambda B} = tr({}^t (A + \lambda B)M)$$

$$\phi_{A+\lambda B} = tr({}^t AM + \lambda {}^t BM)$$

$$\phi_{A+\lambda B} = tr({}^t AM) + \lambda tr({}^t BM)$$

$$\phi_{A+\lambda B} = \phi_A(M) + \lambda \phi_B(M)$$

ainsi : $\forall M \in M_{np}(\mathbb{K}), \phi_{A+\lambda B}(M) = \phi_A(M) + \lambda \phi_B(M)$

c'est-à-dire : $\phi_{A+\lambda B} = \phi_A + \lambda \phi_B$

Montrons que **Φ injective**, c'est-à-dire $\text{Ker}(\Phi) = \{0_{np}\}$

$\text{Ker}(\Phi) \supset \{0_{np}\}$ toujours vraie

$\text{Ker}(\Phi) \subset \{0_{np}\}$ Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ tel que : $\Phi(A) = \tilde{0}$

$\forall M \in M_{np}(\mathbb{K}), \phi_A(M) = 0$

en particulier :

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$

$$\phi_A(E_{ij}) = 0$$

donc $\text{tr}({}^t A E_{ij}) = 0$

$${}^t A E_{ij} = \begin{pmatrix} [[1, j-1]] & j & [j+1, p] \\ 0 & a_{i,1} & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{i,p} & 0 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$$

$$\text{tr}({}^t A E_{ij}) = a_{ij}$$

on a donc :

$$\forall (i,j) \in [[1,n]] \times [[1,p]], a_{ij} = 0$$

$$A = 0_{np}$$

Théorème du rang :

$$\dim(M_{np}) = \underbrace{\dim(\text{Ker}(\Phi))}_{=0} + \dim(\text{Im}(\Phi))$$

$$\dim(M_{np}) = \text{rg}(\Phi)$$

or : $\text{Im}(\phi) \subset \mathcal{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

et $\dim(\mathcal{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})) = \dim(M_{np}(\mathbb{K})) \times 1 = np = \text{rg}(\Phi)$

donc $\text{Im}(\phi) = \mathcal{L}(M_{np}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$