Démonstration kholle 15

I unicité du neutre, unicité du symétrique , symetrisabilité et symetrique de x^{-1}, de $x * y$

Propriété :
Si le neutre existe, il est unique
Le magma est dit unifère ou unitaire
Démonstration :
Soit e et e' neutres :
$e * e' = e'$ car e est neutre
$e * e' = e$ car e' est neutre
donc $e' = e$
Propriété:
Soit $(M,*)$ un monoïde de neutre e
soit $x \in M$ symétrisable, c'est-à-dire :
$\exists y \in M, (x * y = e$ et $y * x = e)$
Cet élément est unique :
Démonstration :
si (y,y') conviennent :
$(y * x) * y' = e * y'$
$(y * x) * y' = y'$
et $y * (x * y') = y * e$
$y * (x * y') = y$
La loi étant associative :
$y' = y$
Propriété :
$\forall x \in U(m)$, ($x^{-1} \in U(M)$ et $(x^{-1})^{-1} = x$)
Pour une loi + : $-(-x) = x$
Démonstration : Notons $y = x^{-1} \in M$
alors : $x * y = e$ et $y * x = e$
donc : $y \in U(M)$ donc $y^{-1} = x$
Propriété :
$\forall (x,y) \in (U(M))^2, (x * y) \in U(M)$ et $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$
$U(M)$ est donc stable par $*$
Démonstration :
D'une part avec $u = x * y$ et $v = y^{-1} * x^{-1}$ $u * v = (x * y) * (y^{-1} * x^{-1})$
$u * v = x * (y * y^{-1}) * x^{-1}$
$u * v = x * e * x^{-1}$
$u * v = x * x^{-1}$
$u * v = e$
D'autre part :
$v * u = y^{-1} * x^{-1} * x * y$
$v * u = y^{-1} * e * y$
$v * u = y^{-1} * y$
$v * u = e$
Ainsi: $u \in U(M)$ et $u^{-1} = v$

II Caractérisation des sous-groupes (avec $x * y^{-1}$). Intersection de sous-groupes

Propriété:
Soit $(G, *)$ groupe et H sous-ensembles de G.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
1) H est un sous-groupe de $(G, *)$
2) $H \neq \emptyset$ et $\forall (x,y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$
Démonstration :
$1 \Rightarrow 2$
on a : $H \subset G, H \neq \emptyset$ de plus $(x,y) \in H$ comme $y^{-1} \in H$ car H stable par inverse :
$x * y^{-1} \in H$ car H stable par $*$
$2 \Rightarrow 1$
on a $H \subset G$ et $H \neq \emptyset$
Montrons que H est stavle par $*$ et stable par symétrique.
lemme: Montrons que $e \in H$ (e neutre de G)
Comme $H \neq \emptyset$ soit $u \in H$ On a donc :
$u * u^{-1} \in H, e \in H$
Alors pour $y \in H$, comme $e \in H$ on a de même :
$e * y^{-1} \in H, y^{-1} \in H$ donc H stable par inverse
puis pour $(x,y) \in H$ comme $y^{-1} \in H$:
$x * (y^{-1})^{-1} \in H, x * y \in H$ donc H stable par $*$
Propriété :
Soit $(G,*)$ un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une feuille de sous-groupes de $(G, *)$.
Alors : $(\cap_{i \in I} H_i)$ est un sous-groupe de $(G, *)$
Démonstration :
$\cap_{i \in I} H_i$ est bien une partie de G
Soit e le neutre de G alors : $\forall i \in I, e \in H_i$ (car H, sous groupe de $(G,*)$)
c'est-à-dire $e \in \cap_{i \in I} H_i$ donc $\cap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$
Soit $(x,y) \in (\cap_{i \in I} H_i)^2$ alors :
Pour $i \in I$, x et $y \in H_i$ or H_i sous-groupe de $(G, *)$ donc :
$x * y^{-1} \in H_i$
ainsi : $\forall i \in I, x * y^{-1} \in H_i$
c'est-à-dire : $x * y^{-1} \in \cap_{i \in I} H_i$ donc $\cap_{i \in I} H_i$ sous-groupe

III Règles de calcul dans un anneau (produit avec 0_A et -1_A, règles des signes)

Propriété :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau
1) $\forall x \in A, x \times 0_A = 0_A \times x = 0_A$ (0_A absorbant)
2) $\forall x \in A, (-1_A) \times x = x \times (-1_A) = -x$
3) $\forall (x,y) \in A^2, (-x) \times y = x \times (-y) = -x \times y$ et $(-x) \times (-y) = xy$
Démonstration :
1) Soit $x \in A$: $x \times 0_A = x \times (0_A + 0_A)$ car 0_A neutre de +
donc $x \times 0_A = (x \times 0_A) + (x \times 0_A)$ car $\times$ distributive sur +
Ajoutons $-(x \times 0_A)$ car tout élément a un opposé pour la loi + :
$0_A = x \times 0_A$ idem pour $0_A \times x$
2) $0_A = x \times 0_A = x \times (-1_A + 1_A)$
$0_A = (x \times (-1_A)) + (x \times 1_A) = (x \times (-1_A)) + x$ par distributive de $\times$ sur +
ajoutons $-x$:
$-x = x \times (-1_A)$ idem pour $(-1_A) \times x$
3) $x \times (-y) = x \times ((-1_A) \times y) = (x \times (-1_A)) \times y$ par 2 et associativité
$x \times (-y) = (-x) \times y$

On a donc par ce qu'on vient de démontrer :
$(-x) \times (-y) = (-(-x)) \times y = x \times y$ car $(-(-x)) = x$
Enfin :
$(-x) \times y = ((-1_A) \times x) \times y$ par 2
$(-x) \times y = (-1_A) \times (x \times y) = -(x \times y)$ par associativité et par 2

IV Formule du binôme de Newton dans un anneau

Propriété :
Soit $(A, \times, +)$ un anneau
Soit $(a,b) \in A^2$ tel que $ba = ab$ (c'est-à-dire a et b commutent) on a:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Démonstration :
Récurrence :
Initialisation : $n = 0$ $(a+b)^0 = 1_A$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^{-k} b^k = 1.1_A \times 1_A = 1_A$
Hérédité : On suppose la formule vrai au rang n alors :
$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
$(a+b)^{n+1} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ par distributivité de $\times$
$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b a^{n-k} b^k$ par distributivité
or $ba = ab$ donc par récurrence immédiate :
$\forall j \in \mathbb{N}, ba^j = a^j b$
d'où :
$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$
Comme $\binom{n+1}{n} = 0_A$ on a :
$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\binom{n+1}{0}} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}]}_{\binom{n+1}{k}} a^{n+1-k} b^k$$

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

V Identité géométrique (factorisation de $a^n - b^n$) dans un anneau

Propriété :
Soit $(A, \times, +)$ un anneau
Soit $(a,b) \in A^2$ tel que $ba = ab$ (c'est-à-dire a et b commutent) on a:
$a^n + b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$
$a^n + b^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k (a-b)$
Démonstration:
$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = a \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k - b \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$
$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} b a^{n-1-k} b^k$
Comme $ba = ab$ on a :
$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^{k+1}$
$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k - c_{k+1}$ avec $c_k = a^{n-k} b^k$
Par téléscopage :
$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = c_0 - c_n$
$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = a^n b^0 - a^0 b^n$
$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = a^n - b^n$