Démonstration kholle 25

I Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique.

Propriété :
Soit $\phi \in A_n(E)$
$\forall(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n) \in E^n, \forall\sigma \in S_n, \phi(\vec{x}_{\sigma(1)},...,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\phi(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$
On dit que ϕ est antisymétrique
Démonstration :
cas où $\sigma = (i \quad j), i < j$ Comme ϕ est alternée :
$\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) = 0$
$0 = \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)$
$0 = \underbrace{\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n)}_{=0} + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) + \underbrace{\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)}_{=0}$
$\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n) = -\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)$
Or $\epsilon(\sigma) = -1$
Pour σ quelconque :
$\sigma = \sigma_1....\sigma_m$ avec σ_k transposition.
$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)},..., \vec{x}_{\sigma(n)}) = \underbrace{\epsilon(\sigma_1)...\epsilon(\sigma_m)}_{\epsilon(\sigma)}\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_m)$
$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)},...,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\phi(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$

II $det_{\mathscr{B}}$ est alternée et vaut 1 sur $\mathscr{B}$.

Propriété :
Soit $\mathscr{B}$ une base de E .
Alors : $det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-alternée sur E et $det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$
Démonstration : **n-alternée :** si $\vec{x}_i = \vec{x}_k$ avec $i \neq k$: $\forall j \in [[1,n]], a_{ij} = a_{kj}$, $\tau = (i \quad k)$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),\tau(j)}$ car $\vec{x}_i = \vec{x}_k$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = \sum_{\gamma\in S_n} \underbrace{\epsilon(\gamma\tau)}_{=\epsilon(\gamma)\epsilon(\tau)=-\epsilon(\gamma)} \prod_{j=1}^n a_{\gamma(\tau(j)),\tau(j)}$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = -\sum_{\gamma\in S_n} \epsilon(\gamma) \prod_{l=1}^n a_{\gamma(l),l}$ en posant $l = \tau(j)$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = -det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$ qui est donc nul
$\boldsymbol{det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1}$:
$a_{ij} = \delta_{ij}$
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n \delta_{\sigma(j),j}$
si $\sigma \neq id$: il existe j tel que $\sigma(j) \neq j$ donc $\delta_{\sigma(j),j} = 0$ produit nul
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \epsilon(id) \prod_{j=1}^n \delta_{j,j}$
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$

III Formule de changement de base des déterminants, caractérisation des bases.

Propriété :
Fixons $\mathscr{B}$ base de E. Soit $\phi \in A_n(E)$, alors :
$\forall \mathscr{F} \in E, \phi(\mathscr{F}) = \phi(\mathscr{B})det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
Propriété :
formule de changement de base. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ bases de E. Alors :
$\forall \mathscr{F}, det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
Démonstration :
cas particulier de la propriété précédente avec $\phi = det_{\mathscr{C}} \in A_n$
Corrolaire :
$\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ bases de E. Alors :
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$ et $det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \frac{1}{det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})}$
Démonstration :
En prenant $\mathscr{F} = \mathscr{C}$: $\underbrace{det_{\mathscr{C}}(\mathscr{C})}_{=1} = det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$
Corrolaire :
Soit $\mathscr{B}$ base de E, $\mathscr{F} \in E^n$ quelconque . Alors :
$\mathscr{F}$ base de E $\Longleftrightarrow det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$
Démonstration :
$\Rightarrow$: propriété précédente
$\Leftarrow$: par contraposition.
Supposons que $\mathscr{F}$ ne soit pas une base de E. Comme elle a $n = dim(E)$ vecteurs, si elle était libre alors ce serait une base, elle est donc liée.
Commme $det_{\mathscr{B}} \in A_n(E)$:
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$

IV $det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$ + $det_{\mathscr{B}}(f(x_1),...,f(x_n)) = det(f)det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$
1) Pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E
$det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = det_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{C}))$
On note cette valeur $det(f) \in \mathbb{K}$ c'est le déterminant de f
2) $\forall \mathscr{F} \in E^n, det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = det(f)det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
Démonstration :
1) Soit $\phi : E^n \to \mathbb{K}$
$(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n) \mapsto det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{x}_n))$
Montrons que $\phi \in A_n(E)$:
$\phi : E^n \to \mathbb{K}$
n-linéarité Soit $i \in [[1,n]]$, fixons $\vec{x}_k \in E$ pour $k \neq i$.
Soit $\vec{y}$ et $\vec{z} \in E$, $\lambda \in K$.
$\phi(\vec{x}_1,...,\vec{y} + \lambda\vec{z},...,f(\vec{x}_n)) = det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{y}) + \lambda f(\vec{z}),..,f(\vec{x}_n))$ car $f \in \mathscr{L}(E)$
$\phi(\vec{x}_1,...,\vec{y} + \lambda\vec{z},...,f(\vec{x}_n)) = det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{y}),..,f(\vec{x}_n)) + \lambda det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),..., f(\vec{z}),..,f(\vec{x}_n))$ car $det_{\mathscr{B}} \in A_n(E)$
$\phi(\vec{x}_1,...,\vec{y} + \lambda\vec{z},...,f(\vec{x}_n)) = \phi(\vec{x}_1,...,\vec{y},...,f(\vec{x}_n)) + \lambda\phi(\vec{x}_1,..., \vec{z},...,f(\vec{x}_n))$
alternance : s'il existe $i \neq k$ tel que $\vec{x}_i = \vec{x}_k$:
$f(\vec{x}_i) = f(\vec{x}_k)$ donc comme $det_{\mathscr{B}}$ est alternée :
$det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{x}_n)) = 0$
c'est-à-dire $\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = 0$
Conclusion : comme $\phi \in A_n(E)$ et $\mathscr{C}$ base de E on a :
$\forall \mathscr{F} \in E^n, \phi(\mathscr{F}) = \phi(\mathscr{C})det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F})$ avec $\mathscr{F} = \mathscr{B}$:
$\phi(\mathscr{B}) = \phi(\mathscr{C})det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$
donc, par définition de ϕ, $det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{C}))det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$

$det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = det_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{C}))$(formule de changement de base)
2) Si l'on écrit plutôt :
$\forall \mathscr{F} \in E^n, \phi(\mathscr{F}) = \phi(\mathscr{B}) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
$\phi(\mathscr{F}) = det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ c'est-à-dire $det(f)$ par 1
par définition de ϕ : $det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = det(f) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$

V Propriété variées de $det(f)$ déduites de la question précédente.

VI $det({}^t A) = det(A)$

VII Déterminant triangulaire