

Démonstration kholle 24

I Matrice de $f(\vec{x})$, de $g \circ f$

Propriété :

E: \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base de E

F: \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$

$\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ base de F

$f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\vec{x} \in E$

$$\underbrace{Mat_{\mathcal{C}}(f(\vec{x}))}_{n \times 1} = \underbrace{Mat(f)_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}_{n \times p} \underbrace{Mat(\vec{x})_{\mathcal{B}}}_{p \times 1}$$

Démonstration :

Notons : $Mat(\vec{x})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $\vec{x} = \sum_{k=1}^p x_k \vec{u}_k$

et $Mat(f)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (a_{ij})$ $Mat(f(\vec{x}))_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n y_i \vec{v}_i$

Or : $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p x_k f(\vec{u}_k)$ car $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p x_k (\sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{v}_i)$ par définition de $Mat(f)_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$

$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n x_k a_{ik} \vec{v}_i$

$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^p a_{ik} x_k) \vec{v}_i$

on a $(\sum_{k=1}^p a_{ik} x_k) = y_i$ donc le coefficient de i de $Mat(f)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} Mat(\vec{x})_{\mathcal{B}} = y_i$

Propriété : E : \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $r \geq 1$

F : \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$

G : \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ base de E

$\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ base de F

$\mathcal{D} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ base de G

Alors :

$$\underbrace{Mat(g \circ f)_{\mathcal{D}\mathcal{B}}}_{n \times r} = \underbrace{Mat(g)_{\mathcal{D}\mathcal{C}}}_{n \times p} \underbrace{Mat(f)_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}_{p \times r}$$

Démonstration :

Notons : $Mat(g)_{\mathcal{D}\mathcal{C}} = (a_{ij})$ $Mat(f)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (b_{ij})$ $Mat(g \circ f)_{\mathcal{D}\mathcal{B}} = (c_{ij})$

Par définition :

$\forall j \in [[1, r]]$, $f(\vec{u}_j) = \sum_{k=1}^p b_{kj} \vec{v}_k$

et $\forall k \in [[1, p]]$, $g(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{w}_i$

Alors pour $j \in [[1, r]]$:

$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{k=1}^p b_{kj} g(\vec{v}_k)$ car g linéaire

$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{k=1}^p (b_{kj} \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{w}_i)$

$$g(f(\vec{u}_j)) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)}_{=c_{ij}} \vec{w}_i$$

II Définition des matrices de passage et démonstration des formules de changement de base (vecteurs, applications linéaires en général, endomorphisme)

Définition :

On note la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \text{Mat}(\mathcal{C})_{\mathcal{B}} = \text{Mat}(Id_E)_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

Propriété : Pour $\vec{x} \in E$:

$$\text{Mat}(\vec{x})_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \text{Mat}(\vec{x})_{\mathcal{C}}$$

Démonstration :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \text{Mat}(\vec{x})_{\mathcal{C}} = \text{Mat}(Id_E)_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \text{Mat}(\vec{x})_{\mathcal{C}}$$

Propriété :

$E : \mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$

$F : \mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

\mathcal{B} et \mathcal{C} , bases de E

et, bases de F alors :

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \underbrace{P}_{n \times n} \underbrace{\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}}}_{n \times p} \underbrace{P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}_{p \times p}$$

Démonstration :

$$P \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \text{Mat}(Id_F) \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} \text{Mat}(Id_E)_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

$$P \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \text{Mat}(Id_F \circ f \circ Id_E)_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

$$P \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \text{Mat}(f)_{\mathcal{C}}$$

Corrolaire cas d'un endomorphisme

$$\dim(E) = n \in \mathbb{N}^* \quad (p = n)$$

\mathcal{B}, \mathcal{C} bases de E $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

III Relation de similitude : c'est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$, invariance de la trace, trace d'un projecteur.

Propriété :

la similitude est une relation d'équivalence.

Démonstration :

reflexivité : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $P = I_n \in Gl_n(\mathbb{K})$:

$$A = P^{-1}AP$$

symétrie : s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$:

$$A = Q^{-1}BQ \text{ avec } Q = P^{-1} \in Gl_n(\mathbb{K})$$

transitivité :

si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$ avec $(B, Q) \in Gl_n(\mathbb{K})$

alors $C = R^{-1}AR$ où $R = PQ \in Gl_n(\mathbb{K})$

Propriété :

si A et B sont semblables : $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

Démonstration :

Soit $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$B = P^{-1}AP$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP)$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(AP^{-1}P)$$

$$\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$$

Propriété :

$\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$

$p \in \mathcal{L}(E)$ projecteur et $r = \text{rg}(p)$

Alors : il existe une base de E tel que :

$$\text{Mat}(p)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{ En particulier } \text{tr}(p) = r$$

Démonstration :

si $r = 0 : p = \tilde{0}$, si $r = n : p = \text{Id}_E$

si $1 \leq r \leq n - 1$ on a :

$E = \text{Inv}(f) \oplus \text{Ker}(f)$

et $\dim(\text{Ker}(f)) = n - r$ (théorème du rang) $\dim(\text{Inv}(f)) = r$

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ base de $\text{Inv}(f)$

$(\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n)$ base de $\text{Ker}(f)$

Posons $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ c'est une base de E car concaténation de bases de sous-espace vectoriel supplémentaires :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ (0) & & & 1 & & \\ \hline & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right)$$

IV si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe \mathcal{U} base de E et \mathcal{V} base de F telles que $\text{Mat}_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{n,p,r}$

Propriété :

$\dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ $\dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r . Alors :

il existe une base \mathcal{U} de E et une base \mathcal{V} de F tel que : $\text{Mat}_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{npr} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

Démonstration :

si $r = 0, f = \tilde{0}$, toutes bases conviennent.

sinon :

soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ base de $\text{Im}(f)$

pour $1 \leq j \leq r$, soit \vec{u}_j , un antécédent de \vec{v}_j de f

$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ est en particulier libre : par le théorème de la base incomplète, il existe $(\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n) \in F^{n-r}$ tel que $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ soit une base de F .

Théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(f)) = p - r$.

Soit $(\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_p)$ base de $\text{Ker}(f)$ et montrons que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est base de E

Montrons qu'elle est libre :

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, tel que $\sum_{j=1}^p \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E$

appliquons f : on a $f(\vec{u}_j) = \vec{v}_j$ si $j \leq r$ ou $\vec{0}_F$ sinon donc $\sum_{j=1}^r \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0}_F$

Or $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$

Si $r = p$, c'est triviale

sinon, il reste alors : $\sum_{j=r+1}^p \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}_E$

$(\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_p)$ libre (car base de $\text{Ker}(f)$) donc $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0$

avec $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base de E et $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ base de F :

$$\text{Mat}_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ (0) & & & 1 & & \\ \hline & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right)$$

V Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et s'il existe \mathcal{U} base de E et \mathcal{V} base de F telles que $Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{n,p,r}$, $rg(f) = r$

Propriété :

$dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ $f \in \mathcal{L}(E, F)$

S'il existe une base \mathcal{U} de E et une base \mathcal{V} de F tel que $Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = J_{npr} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ alors $rg(f) = r$

Démonstration :

Notons $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ et $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

Si $r = 0$: $Mat_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f) = 0_{np}$, $f = \vec{0}$, $rg(f) = 0 = r$

Sinon : on a :

$$Im(f) = Vect(\underbrace{f(\vec{u}_1)}_{=\vec{v}_1}, \dots, \underbrace{f(\vec{u}_r)}_{=\vec{v}_r}, \underbrace{f(\vec{u}_{r+1})}_{=\vec{0}_F}, \dots, \underbrace{f(\vec{u}_p)}_{=\vec{0}_F})$$

VI Une matrice $n \times p$ est de rang r si et seulement si, elle est équivalente à $J_{n,p,r}$. Application au rang de la transposée