Démonstration kholle 7

I Intégration : positivité,croissance,valeur absolue

Propriété : $(f;g) \in \mathscr{C}^0(I)$ et $(a,b) \in \mathbb{I}$
1)Si $\forall t \in [a,b], f(t) \geq 0$ et $a \leq b$
alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$
2) Si $\forall t \in [a,b], f(t) \geq 0$ et $a < b$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$
alors $\forall t \in [a,b], f(t) = 0$
3) Si $\forall t \in [a,b], g(t) \leq f(t)$ et $a \leq b$
alors $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt$
4) Avec $a \leq b$ on a : $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$
Démonstration : 1) Soit F tel que F'=f : $F \geq 0$ donc F croissante or $a < b$ donc :
$F(a) \leq F(b)$
$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \geq 0$
3) en appliquant 1 à f-g :
$\int_a^b f(t) - g(t)dt \geq 0$
$\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \geq 0$ par linéarité
$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$
2) F croissante et F(a)=F(b) donc F constante sur [a,b],
$\forall t \in [a,b], f(t) = F'(t) = 0$
4) Notons $A = \int_a^b f(t)dt$, $B = \int_a^b |f(t)|dt$
Pour $t \in [a,b]$:

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

Puisque $a \leq b$:

$$-B \leq A \leq B$$

donc $|A| \leq B$

II Formule de changement de variable

Propriété : formule de changement de variable
Si $f \in \mathscr{C}^0(I)$ et $\phi \in \mathscr{C}^1(I)$ tel que :
$\phi(I) \subset I$ et $(a,b) \in I^2$:
$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$
Démonstration : Soit F une primitive de f sur I
$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = [F(x)]_{\phi(a)}^{\phi(b)}$
$= F(\phi(b)) - F(\phi(a))$
$= [F(\phi(t))]_a^b$
$= \int_a^b F'(\phi(t))\phi'(t)dt$
Comme $F' = f$
$= \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$

III Si f T-périodique : $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ puis $\int_{a+T}^{a} f(t)dt = \int_{b+T}^{b} f(t)dt$

Propriété : Soit f continue et T-périodique
1) $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$
2) $\int_{a+T}^{a} f(t)dt = \int_{b+T}^{b} f(t)dt$
Démonstration : 1) posons $x = t + T$
$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(x-T)dx$
$= \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$
2)$\int_b^{b+T} f(t)dt = \int_b^a f(t)dt + \int_a^{a+T} f(t)dt + \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$
$= -\int_a^b f(t)dt + \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt + \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{a+T}^{a} f(t)dt$
$\int_{a+T}^{a} f(t)dt = \int_{b+T}^{b} f(t)dt$

IV Exploitation des invariances $f(a+b-x) = \pm f(x)$

Propriété :
$a < b, f \in \mathscr{C}^0([a,b])$
1) Si $\forall t \in [a,b], f(a+b-t) = -f(t)$
alors : $\int_a^b f(t)dt = 0$
2) Si $\forall t \in [a,b], f(a+b-t) = f(t)$
alors : $\int_a^b f(t)dt = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t)dt$
Démonstration :
1)$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(a+b-x)dx$ car $(a+b-x)' = -1$
$= \int_a^b f(a+b-x)dx$
$\int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(x)dx$ nulle car égale à son opposé
2) $-\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a+b-x)dx$
$= \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(a+b-x)dx$
$= \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx$
Par Chasles : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t)dt$
Or $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t)dt$
On a donc : $\int_a^b f(t)dt = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t)dt$

V Encaderment d'une somme pour une fonction décroissante, application à $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Propriété : Soit $f \in \mathscr{C}^0(I), monotone$
Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ entiers
1) Si f est décroissante $((a-1) \in I et (b+1) \in I)$
$\int_a^{b+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^{b} \leq \int_{a-1}^{b} f(t)dt$
Démonstration :
1) Pour $k \in [[a,b]]$ et $t \in [k, k+1]$
$f(t) \leq f(k)$
$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt$
$= f(k)(k+1-k) = f(k)$
$\sum_{k=a}^{b} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^{b} f(k)$
$\int_a^{b+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^{b} f(k)$
De même, pour $t \in [k-1, k]$
$f(k) \leq f(t)$

$\int_{k-1}^{k} f(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$
$\sum_{k=a}^{b} f(k) \leq \int a - 1^{b} f(t)dt$
Application : $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, décroissante
$\int_{n+1}^{2n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq \int_{n}^{2n} f(t)dt$
Comme $\int_{n}^{2n} f(t)dt = ln(2) \lim_{n\to+\infty} S_n = ln(2)$

VI Calcul $\int_0^x t\cos(t)dt$ et $\int_0^x t\sin(t)dt$ par les complexes

$\int_0^x te^{it}dt = [t\frac{1}{i}e^{it}]_0^x - \int_0^x \frac{1}{i}e^{it}dt \ \frac{x}{i}e^{ix} = -ixe^{ix}$
et $\int_0^x e^{it}dt = [\frac{1}{i}e^{it}]_0^x = \frac{1}{i}(e^{ix} - 1) = -i(e^{ix} - 1)$
donc $\int_0^x te^{it}dt = -ixe^{ix} + e^{ix} - 1$
Partie réelle :
$\int_0^x t\cos(t)dt = x\sin(x) + \cos(x) + 1$
Partie imaginaire :
$\int_0^x t\sin(t)dt = -xcos(x) + sin(x)$