Démonstration kholle 17

I Sous-espace vectoriel définition, caractérisation, intersection

Propriété :
Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.
Alors F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si :
$F \neq \emptyset$ et $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x} + \lambda\vec{y} \in F$
Démonstration :
$\Rightarrow$: si F est un sous-espace vectoriel de E on a $F \neq \emptyset$ pour $(\vec{x},\vec{y}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda\vec{y} \in F$
$\vec{x} + \lambda\vec{y} \in F$ (stable par +)
$\Leftarrow$: F est par hypothèse une partie non vide de E .
Sous-groupe de (E,+)
Pour $(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + \lambda\vec{y}$ avec $\lambda = -1$
donc $\vec{x} - \vec{y} \in F$
Stabilité par $\cdot$
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\vec{y} \in F$ $\lambda\vec{y} = \vec{0} + \lambda\vec{y}$ or $\vec{0} \in F$ car F sous-groupe de (E,+) donc $\vec{0} + \lambda\vec{y} \in F$
Propriété :
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous espace vectoriel de E. Alors :
$\cap_{i\in I}F_i$ est un sous espace vectoriel de E.
Démonstration :
$\cap_{i\in I}F_i \subset E$ par définition et $\neq \emptyset$ car $\forall i \in I, \vec{0} \in F_i$
Soit $(\vec{x},\vec{y}) \in (\cap F_i)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour $i \in I$:
$\vec{x} \in F_i$ et $\vec{y} \in F_i$ donc $\vec{x} + \lambda\vec{y} \in F_i$(car sous-espace vectoriel)
Ainsi : $\forall i \in I, \vec{x} + \lambda\vec{y} \in F_i$ c'est-à-dire $\vec{x} + \lambda\vec{y} \in \cap_{i\in I}F_i$

II Sous-espace engendré par une partie, croissance

Propriété :
$Vect(X) = \cap F$ F sous-espace vectoriel de E tel que $X \subset F$
1) $Vect(X)$ est un sous-espace vectoriel de E et $X \subset Vect(X)$.
2) Pour tout sous-espace vectoriel G de E tel que $X \subset G$ on a $Vect(X) \subset G$. $Vect(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
Démonstration :
1) $Vect(X)$ est un intersection de sous-espace vectoriel de E c'est donc un sous-espace vectoriel de E.
De plus, X est inclus dans chaque facteur de cette intersection donc $X \subset Vect(X)$.
2) G est l'un des F de l'intersection donc $Vect(X) = \cap F \subset G$
Propriété :
1) $Vect(\emptyset) = \{\vec{0}\}$
2) Pour tout sous-espace vectoriel G de E, $Vect(G) = G$
Démonstration :
1) D'une part : $\emptyset \subset \{\vec{0}\}$ et $\{\vec{0}\}$ sous-espace vectoriel de E donc $Vect(\emptyset) \subset \{\vec{0}\}$.
D'autre part : $Vect(\emptyset)$ sous-espace vectoriel de E donc $\vec{0} \in Vect(\emptyset), \{\vec{0}\} \subset Vect(\emptyset)$ donc $Vect(\emptyset) = \{\vec{0}\}$
2) $G \subset Vect(G)$ par définition de Vect.
De plus : $G \subset G$ et G sous-espace vectoriel de E donc $Vect(G) \subset G$, $Vect(G) = G$
Propriété :
Soit $(E, +, \cdot)$ un K espace vectoriel. A et B deux parties de E.
Si $A \subset B$ alors $Vect(A) \subset Vect(B)$

Démonstration :
$A \subset B$ (hypothèse) et $B \subset Vect(B)$ (par définition de Vect) donc $A \subset Vect(B)$.
Or Vect(B) est un sous-espace vectoriel de E ainsi : $Vect(A) \subset Vect(B)$.
Or $Vect(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la partie A

III Vect(X) est l'ensemble des combinaisons linéaires d'élément de X

Propriété :
E un K espace vectoriel, $X \in \mathscr{P}(E)$, $Vect(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'élément de X
Démonstration :
Notons F l'ensemble des combinaisons linéaires d'élément de X
Montrons que $F \subset Vect(X)$
Soit $\vec{x} \in F$: $\exists(\vec{x_1},...,\vec{x_n}) \in X^n, \exists(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x_k}$
Comme $X \subset Vect(X)$ $\forall k \in [[1,n]], \vec{x_k} \in Vect(X)$
Or $Vect(X)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x_k} \in Vect(X)$ donc $\vec{x} \in Vect(X)$
Montrons que $Vect(X) \subset F$:
Montrons que $X \subset F$: Soit $\vec{x} \in X, \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} \in F$
Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E:
$F \subset E$ par définition et $\vec{0} \in F$ (combinaisons linéaires vide)
Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
$\exists(\vec{x_1},...,\vec{x_n}) \in X^n, \exists(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x_k}$
$\exists(\vec{y_1},...,\vec{y_p}) \in X^p, \exists(\mu_1,...,\mu_p) \in \mathbb{K}^n, \vec{y} = \sum_{k=1}^{p} \mu_k \vec{y_k}$
alors $\vec{x} + \lambda\vec{y} = \sum_{k=1}^{n+p} \alpha_k \vec{u_k}$
où $\vec{u_k} = x_k \in X$ si $1 \leq k \leq n$
$\vec{u_k} = y_{k-n} \in X$ si $n+1 \leq k \leq n+p$
et $\alpha_k = \lambda_k$ si $1 \leq k \leq n$
$\alpha_k = \lambda \times \mu_{k-n} \in X$ si $n+1 \leq k \leq n+p$
c'est-à-dire $\vec{x} + \lambda\vec{y} \in F$
Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de E tel que $X \subset F$ donc $Vect(X) \subset F$ donc $Vect(X) = F$

IV F + G : définition, c'est un sous-espace vectoriel.

Propriété :
Avec F et G sous-espace vectoriel on pose :
$F + G = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\}$
$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E
Démonstration :
$F + G \subset E$ par définition.
$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in F + G$ donc $F + G \neq \emptyset$
Soit $(\vec{x},\vec{y}) \in (F+G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
Comme $\vec{x} \in F + G$: $\exists(\vec{x_1},\vec{x_2}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$
Comme $\vec{y} \in F + G$: $\exists(\vec{y_1},\vec{y_2}) \in F \times G, \vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$
alors $\vec{x} + \lambda\vec{y} = (\vec{x_1} + \vec{x_2}) + \lambda(\vec{y_1} + \vec{y_2})$ $\vec{x} + \lambda\vec{y} = \underbrace{(\vec{x_1} + \lambda\vec{y_1})}_{\in F} + \underbrace{(\vec{x_2} + \lambda\vec{y_2})}_{\in G}$

donc $\vec{x} + \lambda\vec{y} \in F + G$

V $F + G = Vect(F \cup G)$

Propriété : $F + G = Vect(F \cup G)$ c'est-à-dire
Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \subset H$ et $G \subset H$ alors $F + G \subset H$
Démonstration :
$Vect(F \cup G) \subset F + G$
On a : $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$ donc $F \cup G \subset F + G$

De plus $F+G$ est une sous-espace vectoriel de E donc $Vect(F \cup G) \subset F+G$
Montrons que $F+G \subset Vect(F \cup G)$:
Soit $\vec{x} \in F+G$, $\exists(\vec{u},\vec{v}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{u}+\vec{v}$
Comme $(\vec{u},\vec{v}) \in F \cup G$ leur combinaison linéaire $\underbrace{\vec{u}+\vec{v}}_{\vec{x}} \in Vect(F \cup G)$

VI Somme directe : définition, caractérisation par l'intersection nulle. Illustration : fonctions paires et impaires.

Propriété Les propositions suivantes sont équivalentes :
1) F et G sont en somme directe
2) $F \cap G = \{\vec{0}\}$
Démonstration :
1) $\Rightarrow$ 2): $F \cap G$ sous-espace vectoriel de E donc $\vec{0} \in F \cap G$ donc $\vec{0} \in F \cap G$ c'est-à-dire $\vec{0} \subset F \cap G$.
Soit $\vec{x} \in F \cap G$ $\underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\vec{0}}_{\in G} = \underbrace{\vec{0}}_{\in F} + \underbrace{\vec{x}}_{\in G}$
Par hypothèse : décomposition unique c'est-à-dire $\vec{x} = \vec{0}$
$2 \Rightarrow 1$ Soit $\vec{x} \in F+G$:
Si $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{y_1} = \vec{x_2} + \vec{y_2}$
$\underbrace{\vec{x_1} - \vec{x_2}}_{\in F} = \underbrace{\vec{y_2} - \vec{y_1}}_{\in G}$ car F et G sous-espace vectoriel.
C'est donc un élément de $F \cap G = \{\vec{0}\}$
Ainsi : $\vec{x_1} - \vec{x_2} = \vec{0}$ $\vec{y_2} - \vec{y_1} = \vec{0}$
$\vec{x_1} = \vec{x_2}$ et $\vec{y_1} = \vec{y_2}$
Illustration : fonctions paires et impaires :
$D \subset \mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0
$E = \mathbb{R}^D$
$\mathscr{P} = \{f \in E : f$ paire $\}$
$\mathscr{I} = \{f \in E : f$ impaire $\}$
Montrons que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ supplémentaire sur E :
Montrons qu'ils sont bien des sous-espace vectoriel de E
Pour $\mathscr{P}$: $\mathscr{P} \subset E$ par définition
$\tilde{0} \in \mathscr{P}$ donc $\mathscr{P} \neq \emptyset$
Soit $(f,g) \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ pour $t \in D$:
$(f+\lambda g)(-t) = f(-t) + \lambda g(-t)$
$(f+\lambda g)(-t) = f(t) + \lambda g(t)$ car $(f,g) \in \mathscr{P}$
$(f+\lambda g)(-t) = (f+\lambda g)(t)$ donc $(f+\lambda g) \in \mathscr{P}$
Pour $\mathscr{I}$: idem
Montrons $E \subset \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$
Analyse : S'il existe $(f,g) \in \mathscr{P} \times \mathscr{I}$ tel que $u = f+g$ alors pour $t \in D$:
$u(t) = f(t) + g(t)$
donc $u(-t) = f(-t) + g(-t) = f(t) - g(t)$
car $f \in \mathscr{P}$ et $g \in \mathscr{I}$
$f(t) = \frac{1}{2}(u(t) + u(-t))$
$g(t) = \frac{1}{2}(u(t) - u(-t))$
unicité : le couple (f,g) unique candidat
Synthèse : Posons :
$f : D \to \mathbb{R}$
$t \to \frac{1}{2}(u(t) + u(-t))$
$g : D \to \mathbb{R}$
$t \to \frac{1}{2}(u(t) - u(-t))$
On a bien $f \in \mathscr{P}$ et $g \in \mathscr{I}$. De plus : $u = f+g$

VII Ajout à une famille libre finie d'un vecteur qui n'est pas combinaisons linéaires des autres

Propriété :
E: K espace vectoriel $(\vec{x_1},...,\vec{x_n}) \in E^n$ libre
Soit $\vec{x}_{n+1} \in E$, si $\vec{x}_{n+1} \notin Vect(\vec{x_1},...,\vec{x_n})$
Alors $(\vec{x_1},...,\vec{x}_{n+1})$ est libre
Démonstration :
Montrons que $(\vec{x_1},...,\vec{x}_{n+1}) \in E^{n+1}$ est libre.
Soit $(\lambda_1,...,\lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \vec{x_k} = \vec{0}$
si $\lambda_{n+1} \neq 0$: $x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}})\vec{x_k}$
$\vec{x}_{n+1} \in Vect(\vec{x_1},...,\vec{x_n})$ contradiction donc $\lambda_{n+1} = 0$
Il reste : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x_k} = \vec{0}$ or $(\vec{x_1},...,\vec{x_n})$ est libre donc $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$
On a bien : $\forall k \in [[1,n+1]], \lambda_k = 0$

VIII Famille de polynômes échelonné en degré : si $deg(P_k) = k$ pour $0 \leq k \leq n$ alors $(P_0,...,P_n)$ est libre (démonstration avec $max\{k \in [[0,n]] : \lambda_k \neq 0\}$)

Propriété :
Une famille $(P_0,...,P_n)$ de polynômes est échelonnés en degré si :
$\forall k \in [[0,n]], deg(P_k) = k$
Une telle famille est libre.
Démonstration :
Montrons que $(P_0,...,P_n)$ est libre :
Soit $(\lambda_0,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$
Posons $A = \{k \in [[0,n]] : \lambda_k \neq 0\}$
Si $A \neq \emptyset$: comme A est fini il a un maximum r :
$\sum_{k=0}^{r} \lambda_k P_k = 0$
$\lambda_r \neq 0$: $P_r = \sum_{k=0}^{r-1} -\frac{\lambda_k}{\lambda_r} P_k$
$deg(P_r) \leq max\{deg(P_k) : 0 \leq k < r\}$ donc $r < r$ absurde
donc $A = \emptyset$ c'est-à-dire $\lambda_0 = ... = \lambda_n = 0$