Démonstration kholle 27

I Cardinal d'un produit, extension à $\bigcup_{x\in A}\{x\}B_x$ avec tous les B_x de même cardinal (principe des bergers)

Propriété :
Si E et F sont finis $E\times F$ aussi et $Card(E\times F)=Card(E)Card(F)$
Démonstration : **Si E ou F $=\emptyset$** alors $E\times F=\emptyset$ $0=0$
Si $E=\{x_0\}$, singleton
Soit $f:F\to\{x_0\}\times F$
$y\mapsto(x_0,y)$ et $g:\{x_0\}\times F\to F$
$(x_0,y)\mapsto y$
Ces applications sont trivialements réciproques.
ainsi : f est bijective $\{x_0\}\times F$ est finie et $Card(\{x_0\}\times F)=Card(F)$ Si $x_1,...,x_n$ sont les éléments distincts de E :
Notons $F_k=\{x_k\}$ et $F(1\leq k\leq n)$
Alors : $(F_1,...,F_n)$ est une partition de $E\times F$ en effet : $F_k\subset E\times F$ pour tout k donc $\bigcup_{k=1}^n F_k\subset E\times F$
Soit $(x,y)\in E\times F$
Alors : $\exists k\in[[1,n]],x=x_k$
Or $E=\{x_1,..,x_n\}$ donc $(x,y)\in F_k$
A fortiori $E\times F\subset\bigcup_{k=1}^n F_k$
si $i\neq j$ et $(x,y)\in F_i\cap F_j$:
$x=x_i$ et $x=x_j$
or $x_i\neq x_j$
ainsi : $F_i\cap F_j=\emptyset$
On a bien ;
$E\times F=\bigcup_{k=1}^n F_k$ avec les F_k disjoint
$E\times F$ est fini et :
$Card(E\times F)=\sum_{k=1}^n Card(F_k)$
Or on a vu prédemment : $\forall k\in[[1,n]],Card(F_k)=Card(F)$
donc $Card(E\times F)=nCard(F)=Card(E)Card(F)$
Propriété :
Si on effectue un 1^{er} choix parmi n options puis un second ayant p options (pouvant dépendre du 1^{er} choix), il y a np couples de choix possibles
Formellement : A fini de cardinal $n\geq 1$
F ensemble quelconque et, pour tout $x\in A$
Soit $B_x\subset F$ fini de cardinal $p\in\mathbb{N}^*$ (indépendant de x)
Alors :
$Card(\bigcup_{x\in A}\underbrace{(\{x\}\times B_x))}_{\{(x,y),y\in B_x\}}=np$
Démonstration :
Soit $G=\bigcup_{x\in A}(\{x\}\times B_x))$
l'union est disjointe car, si $x\neq x'$:
$\{x\}\times B_x=\{(x,y):y\in B_x\}$
$\{x'\}\times B_{x'}=\{(x',z):z\in B_{x'}$
pas d'élément commun car la première composante diffère toujours
De plus :

$\forall x \in A, Card(\{x\} \times B_x) = \underbrace{Card(B_x)}_{p}$

donc G est fini de cardinal np

II Dénombrement des arrangements, des injections

Propriété :
pour $0 \leq p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Démonstration :
si $p = 0$: $A_n^0 = 1$ (liste vide)
si $p \geq 1$: on a n choix pour la première composante
puis n-1 choix pour la seconde composante
⋮
⋮
puis $n-p-1$ choix pour la p-ième composante
donc : $A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)$
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Propriété :
E fini de cardinal p et F fini de cardinal n alors $Card(Inj(E,F)) = A_n^p$
Démonstration:
Notons $x_1,...,x_p$ les éléments distincts on a vu que :
$\Phi : F^E \to F^p$
$f \mapsto (f(x_1),...,f(x_p))$ est une bijection
ainsi : $\psi = \Phi_{|Inj(E,F)}$
ψ est une injection de $Inj(E,F)$ vers F^p, elle réalise donc une bijection sur son image ainsi :
$Card(Inj(E,F)) = Card(Im(\psi))$
Or $Im(\psi)$ est l'ensembles des p-arrangements de f :
$Card(Inj(E,F)) = A_n^p$

III Expression des combinaisons avec des factorielles

IV Cardinal de $\mathscr{P}(E)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Propriété :
Si E est fini, $\mathscr{P}(E)$ aussi et $Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)}$ Démonstration :
Posons $\Phi : (E) \to \{0,1\}^E$
$A \mapsto 1|_A$
$\Psi : \{0,1\}^E \to \mathscr{P}(E)$
$f \mapsto \{x \in E : f(x) = 1\} = f^{-1}(\{1\})$
Elles sont réciproques ainsi :
$\mathscr{P}(E)$ est fini de cardinal : $Card(\{0,1\}^E) = 2^{Card(E)}$
Propriété :
$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
Démonstration :
Soit E de cardinal n :
$\mathscr{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$ avec $\mathscr{P}_k(E)$ disjoints donc :
$Card(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} Card(\mathscr{P}_k(E)$
$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

V Formule du triangle de Pascal.

Propriété :
pour $1 \leq p \leq n$
$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$
Démonstration : $E = [[1,n]]$
$\mathscr{U} = \{A \in \mathscr{P}(E) : Card(A) = p$ et $n \in A\}$
$\mathscr{V} = \{A \in \mathscr{P}(E) : Card(A) = p - 1$ et $n \notin A\}$
Alors : $\mathscr{P}(E) = \mathscr{U} \cup \mathscr{V}$
donc $\binom{n}{p} = Card(\mathscr{U}) + Card(\mathscr{V})$
on a $\mathscr{V} = \{A \subset [[1,n-1]] : Card(A) = p\}$
donc $Card(\mathscr{V}) = \binom{n-1}{p}$
Pour $\mathscr{U}$ posons :
$\phi : \mathscr{U} \to \mathscr{P}_{p-1}([[1,n-1]])$
$A \mapsto A \backslash \{n\}$
$\psi : \mathscr{P}_{p-1}([[1,n-1]]) \to \mathscr{U}$
$A \mapsto A \cup \{n\}$
Ces applications sont réciproques ainsi :
$Card(U) = \binom{n-1}{p-1}$

VI Démonstration combinatoire de $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

VII Exercice : calcul combinatoire de $\sum_{k=p}^{n} \binom{p-1}{k-1}$

VIII Exercice : Formule de Vandermonde