Démonstration kholle 25

I Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique.

Propriété :
Soit $\phi \in A_n(E)$
$\forall(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n) \in E^n, \forall\sigma \in S_n, \phi(\vec{x}_{\sigma(1)},...,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\phi(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$
On dit que ϕ est antisymétrique
Démonstration :
cas où $\sigma = (i \quad j), i < j$ Comme ϕ est alternée :
$\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) = 0$
$0 = \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)$
$0 = \underbrace{\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n)}_{=0} + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) + \underbrace{\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)}_{=0}$
$\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n) = -\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)$
Or $\epsilon(\sigma) = -1$
Pour σ quelconque :
$\sigma = \sigma_1....\sigma_m$ avec σ_k transposition.
$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)},..., \vec{x}_{\sigma(n)}) = \underbrace{\epsilon(\sigma_1)...\epsilon(\sigma_m)}_{\epsilon(\sigma)}\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_m)$
$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)},...,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\phi(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$

II $det_{\mathscr{B}}$ est alternée et vaut 1 sur $\mathscr{B}$.

III Formule de changement de base des déterminants, caractérisation des bases.

IV $det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$ + $det_{\mathscr{B}}(f(x_1),...,f(x_n)) = det(f)det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$.

V Propriété variées de $det(f)$ déduites de la question précédente.

VI $det(^tA) = det(A)$

VII Déterminant triangulaire