Démonstration kholle 13

I Dérivation de f^{-1} en $b = f(a)$ tel que $f'(a) \neq 0$, cas $f'(a) = 0$

Propriété :
Cas $f'(a) \neq 0$
Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$, strictement monotone, dérivable en a :
Notons $J = f(I)$ et $b = f(a)$
On sait que f réalise une bijection I sur J.
Alors f^{-1} est dérivable en b et :
$(f^{-1})(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$
Démonstration :
On a $f^{-1}(y) = a \Leftrightarrow y = b$
Par ailleurs :
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to_{x\to a} f'(a)$
Et comme f^{-1} est continue :
$f(f^{-1}(y)) \to_{y\to b} f^{-1}(b) = a$
d'où : $\frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a} \to_{y\to b} f'(a)$ Comme $f(a) = b$ et $f(f^{-1}(y)) = y$
$\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)} \to_{y\to b} f'(a) \in \mathbb{R}^*$
d'où : $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} \to_{y\to b} \frac{1}{f'(a)}$
Propriété :
Cas $f'(a) = 0$ alors $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ a une tangente verticale en b.
Démonstration :
$\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)} \to_{y\to b} 0$
0^+ si f^{-1} strictement croissante 0^- si f^{-1} strictement décroissante.
$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} \to_{y\to b} +\infty$

II CN d'extremum local + théorème de Rolle

Propriété : condition nécessaire d'extremum local.
I: intervalle non trivial $a \in \mathring{I}$ $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a
On suppose que f possède un extremum local en a :
Alors $f'(a) = 0$, c'est-à-dire : a est un point critique
Démonstration : cas d'un maximum local
Par hypothèse :
$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \cap [a-\delta_1, a+\delta_1], f(x) \leq f(a)$
Comme $a \in \mathring{I}$, qui est ouvert :
$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^*, [a-\delta_2, a+\delta_2] \subset \mathring{I} \subset I$
Posons $\delta = min(\delta_1, \delta_2) > 0$:
$\forall x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$
Pour $x \in]a, a+\delta]$: $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a > 0$ on a donc :
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$
limite $x \to a$: $f'(a) \leq 0$
Pour $x \in [a-\delta, a[$: $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$
D'où quand x tend vers a : $f'(a) \geq 0$

Donc $f'(a) = 0$
Propriété :
Théorème de Rolle :
Soit $a < b$ réels $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a) = f(b)$ alors :
$$\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$$
Démonstration :
f est continue sur le segment $[a,b]$
Elle possède un minimum et un maximum :
$\exists (u,v) \in [a,b]^2, \forall x \in [a,b], f(u) \leq f(x) \leq f(v)$
Premier cas : $u \in]a,b[$:
Par la condition neccessaire d'extremum local, comme f est dérivable en u :
$f'(u) = 0$
Deuxième cas : $v \in]a,b[$. Pour la même raison : $f'(v) = 0$
Troisième cas : sinon $u = a$ ou b et $v = a$ ou b
Or $f(a) = f(b)$ donc: $f(u) = f(v)$
donc f est constante :
$\forall c \in]a,b[, f'(c) = 0$

III Egalité des accroissements finis + inégalité (deux versions: sans et avec valeur absolue)

Propriété :
Egalité des accroissements finis :
Soient $a < b$ réels :
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$
f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors :
$\exists c \in]a,b[, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Démonstration :
Soit $g : x \in [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
Alors : $g \in \mathscr{C}^0([a,b])$ $g \in \mathscr{D}^1(]a,b[)$ $g(a) = g(b) = f(a)$
donc par le théorème de Rolle :
$\exists c \in]a,b[, g'(c) = 0$
Or : $\forall x \in]a,b[, g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
donc: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Propriété : inégalité des accroissements finis deux énoncés :
1) $a < b, f \in \mathscr{C}^0([a,b]) \cap \mathscr{D}^1(]a,b[)$ on suppose f' bornée sur $]a,b[$
Notons $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$\forall x \in]a;b[, m \leq f'(x) \leq M$
Alors: $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
2) I intervalle non trivial, $(a,b) \in I^2, f \in \mathscr{D}^1(I)$
on suppose f' bornée sur I, notons $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ Alors :
$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$
Démonstration :
1) Les hypothèse de l'égalité des accroissements finis sont vérifiées :
$\exists c \in]a,b[, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
de plus :
$m \leq f'(c) \leq M$ on multiplie par $(b-a) > 0$
$m(b-a) \leq f'(c) \leq M(b-a)$
2) si $a < b$: on applique 1 avec $M = k$ et $m = -k$
$-k(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq k(b-a)$ donc :
$|f(b) - f(a)| \leq k(b-a) = k|b-a|$ car $b - a > 0$

si $a > b$: on applique le premier cas à(b,a) :
$|f(a) - f(b)| \leq k|a - b|$
c'est-à-dire : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$
Si $a = b$: $0 \leq 0$

IV Sens de variation (large et strict) en fonction du signe de la dérivée

Propriété : soit I intervalle non trivial
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable $\mathring{I}$
1) f croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \geq 0$
2) f décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \leq 0$
3) f constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) = 0$
4) $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante sur I
5)$\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strictement décroissante sur I
Démonstration : 1) $\Rightarrow$ Soit $x \in \mathring{I}$ pour $y \in I \backslash \{x\}$
$f(y) - f(x)$ et $y - x$ ont même signe car f est croissante
ainsi: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$
limite $y \to x$:
$f'(x) \geq 0$
$\Leftarrow$: soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ alors :
$[a,b] \subset I,]a,b[\subset \mathring{I}$
ainsi f est $\mathscr{C}^0([a,b]), \mathscr{D}^1(]a,b[)$ Par l'égalité des accroissements finis :
$\exists c \in]a,b[, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \underbrace{\geq 0}_{hypothese}$
Comme $b - a > 0$:
$f(b) - f(a) \geq 0$ $f(a) \leq f(b)$
2) appliquons 1 à $-f$
3) 1 et 2
4) Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$:
$[a,b] \subset I,]a,b[\subset \mathring{I}$
Egalité des accroissements finis :
$\exists c \in]a,b[, \frac{f(a)-f(b)}{b-a} = f'(c) > 0$
or $b - a > 0$
donc $f(b) - f(a) > 0$ $f(a) < f(b)$
5) Appliquons 4 à $-f$

V Théorème de la limite de la dérivée

Propriété :
I intervalle non trivial, $a \in I$
$f : I \to \mathbb{R}, \mathscr{C}^0(I)$ dérivable sur $I \backslash \{a\}$
On suppose : $f'(x) \to_{x \to a} l \in \bar{\mathbb{R}}$
Alors : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to_{x \to a} l$
Démonstration :
Soit $x \in I \backslash \{a\}$:
Si $a < x$: f est $\mathscr{C}^0([a,x]), \mathscr{D}^1(]a,x[)$
Donc par l'égalité des accroissements finis :
$\exists c \in]a,b[, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$
Si $x < a$: de même: $\exists c \in]a,b[, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$
Dans chaque cas c dépend de x : notons c $c(x)$
On a donc pour $x \in I \backslash \{a\}$:
$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c(x))$
De plus : $\forall x \in I \backslash \{a\}, |c(x) - a| \leq |x - a|$

Car suivant le signe de $x-a$ on a $c(x)-a \leq x-a$ ou $a-c(x) \leq a-x$
Ainsi : $c(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} a$
par limite de composée : $f'(c(x)) \rightarrow_{x \rightarrow a} l$
c'est-à-dire : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \rightarrow_{x \rightarrow a} l$

VI Formule de Taylor avec reste intégral

Propriété :
I, intervalle non trivial :
$n \in \mathbb{N}, f \in \mathscr{C}^{n+1}, (a,b) \in I^2$
Alors : $f(b) = \sum_{k=0}^{n}[\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k] + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ (Formule à l'ordre **n**)
Démonstration :
Récurrence sur n :
n=0 : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$
Hérédité : Si vraie à un certain rang n :
On suppose $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I)$ alors
$f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ donc, on a :
$f(b) = \sum_{k=0}^{n}[\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k] + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$
Comme $f^{(n+1)} \in \mathscr{C}^1(I)$, intégrons par parties :
$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = [-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)(t)dt}]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t)dt$
$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t)dt$
d'où :
$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1}[\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k] + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$