

Démonstration kholle 22

I Théorème de la base incomplète (cas $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$).

Théorème de la base incomplète :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie :

Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ tel que \mathcal{L} soit libre.

Alors il existe une base \mathcal{B} de E tel que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$

Démonstration :

Posons : $\Omega = \{ \mathcal{H} \text{ famille libre de E} : \mathcal{L} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G} \}$

$A = \{ \text{Card}(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \in \Omega \}$

A est une partie de \mathbb{N} majorée par $\text{Card}(\mathcal{G})$ et $A \neq \emptyset$ car $\mathcal{L} \in \Omega$ donc $\text{card}(\mathcal{L}) \in A$

Soit $p = \max(A)$ et $B \in \Omega$ tel que $\text{Card}(B) = p$.

On a bien $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ et \mathcal{B} libre car $\mathcal{B} \in \Omega$

Supposons que B n'engendre pas E :

Si tous les vecteurs de \mathcal{G} appartiennent à $\text{Vect}(\mathcal{B})$:

$E = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$, ce qu'on a exclu.

Soit $\vec{x} \in \mathcal{G}$ tel que $\vec{x} \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{M} = \mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$ alors :

$\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ et \mathcal{M} libre car \mathcal{B} libre et $x \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$

donc $\mathcal{M} \in \Omega$ et $\text{Card}(\mathcal{M}) > \max(A)$ absurde

II Lemme de Steinitz.

Lemme de Steinitz :

Dans un K-espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille d'au moins n+1 vecteurs est liée

Démonstration :

récurrence sur n :

Initialisation : n=0, l'espace est noté $\{\vec{0}\}$

Seule la famille $(\vec{0})$ convient qui est liée car $\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les propriétés soit vraie au rang n :

Soit E engendré par n+1 vecteurs

$E = \text{Vect}(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n+1})$

Soit une famille de n+2 vecteurs : $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2})$

Il existe des scalaires $\alpha_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n+2, 1 \leq j \leq n+1$) tel que :

$\forall i \in [1, n+2], \vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{i,j} \vec{g}_j$ car $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n+1})$ engendre E :

Notons :

$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \vec{g}_k$ ($1 \leq i \leq n$)

$\beta_i = \alpha_{i,n+1}$

$F = \text{Vect}(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n)$

Alors : $\forall i \in [1, n+2], \vec{u}_i = \vec{v}_i + \beta_i \vec{g}_{n+1}$

1^{er} cas : Si $\beta_1 = \dots = \beta_{n+2} = 0$

Alors : $\forall i \in [1, n+2], \vec{u}_i = \vec{v}_i \in F$ ainsi $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2})$ est une famille d'au moins n+1 vecteurs de F qui est engendré par n vecteurs per hypothèse de récurrence, elle est liée.

2^{er} cas : $\exists i_0 \in [1, n+2], \beta_{i_0} \neq 0$ sans perte de généralité supposons $\beta_{n+2} \neq 0$

On a donc : $\vec{g}_{n+1} = \frac{1}{\beta_{n+2}} (\vec{u}_{n+2} - \vec{v}_{n+2})$

Donc pour $1 \leq i \leq n+1$:

$$\vec{u}_i = \vec{v}_i + \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}(\vec{u}_{n+2} - \vec{v}_{n+2})$$

Posons $\vec{w}_i = \vec{u}_i - \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}\vec{u}_{n+2} (1 \leq i \leq n+1)$

Ainsi : $\forall i \in [1, n+1], \vec{w}_i = \vec{v}_i - \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}\vec{v}_{n+2} \in F$

Par hypothèse de récurrence :

$(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n+1})$ est liée

ainsi $\exists (\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \vec{w}_i = \vec{0}$ et $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$

c'est-à-dire : $\mu_1 \vec{u}_1 + \dots + \mu_{n+1} \vec{u}_{n+1} + (-\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mu_i \beta_i}{\beta_{n+2}}) \vec{u}_{n+2} = \vec{0}$

Comme au moins l'un des $n+1$ premiers coefficients $\neq 0$,
cela montre que : $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2})$ est liée.

III Conséquences du lemme de Steinitz : les bases sont finies et de même cardinal, cardinaux des familles libres et cas d'égalité.

Propriétés :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Toutes ses bases sont finies et ont toutes même cardinal. Ce cardinal est la dimension de E, noté $\dim(E)$

Démonstration :

On sait qu'il existe une base finie \mathcal{B}_0 . Soit \mathcal{B} une base de E, elle est libre donc finie et \mathcal{B}_0 engendre E donc $\text{Card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{B}_0)$. De même : \mathcal{B}_0 est libre et \mathcal{B} génératrice de E donc $\text{Card}(\mathcal{B}_0) \leq \text{Card}(\mathcal{B})$ on a donc $\text{Card}(\mathcal{B}) = \text{Card}(\mathcal{B}_0)$

Propriété :

Soit \mathcal{L} une famille libre de E alors :

1) \mathcal{L} est finie et $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$

2) $\text{Card}(\mathcal{L}) = \dim(E) \iff \mathcal{L}$ base de E

Démonstration :

1) Soit \mathcal{B} une base de E. Lemme de Steinitz : \mathcal{L} libre et \mathcal{B} génératrice finie donc \mathcal{L} finie et $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \underbrace{\text{Card}(\mathcal{B})}_{=\dim(E)}$

2) \Rightarrow définition de $\dim(E)$ par le fait que toutes les bases ont même cardinal

\Leftarrow Notons $n = \dim(E)$

Si $n=0$: $E = \{0\}$ et $\mathcal{L} = ()$

Si $n \geq 1$: Notons $\mathcal{L} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

Si \mathcal{L} n'engendrait pas E:

Considérons $\vec{x}_{n+1} \in E$ tel que $\vec{x}_{n+1} \notin \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

Alors $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1})$ est encore libre mais son cardinal est $n+1 > \dim(E)$: contradiction

Donc \mathcal{L} engendre E et est libre c'est donc une base E

- IV Sous-espaces : inégalité des dimensions en cas d'égalité.**
- V Si $E = F \oplus G$, $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$**
- VI Existence de supplémentaires, formule de Grassmann.**
- VII Dimension de $E \times F$, de $\mathcal{L}(E, F)$.**
- VIII Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base
(énoncé complet + démonstration de la caractérisation de l'injectivité).**
- IX Théorème du rang (avec énoncé et démonstration du lemme)**