

Démonstration kholle 7

I Intégration : positivité, croissance, valeur absolue

Propriété : $(f; g) \in \mathcal{C}^0(I)$ et $(a, b) \in \mathbb{I}$

1) Si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$ et $a \leq b$

alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

2) Si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$ et $a < b$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$

alors $\forall t \in [a, b], f(t) = 0$

3) Si $\forall t \in [a, b], g(t) \leq f(t)$ et $a \leq b$

alors $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt$

4) Avec $a \leq b$ on a : $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

Démonstration : 1) Soit F tel que $F' = f$: $F \geq 0$ donc F croissante or $a < b$ donc :

$F(a) \leq F(b)$

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \geq 0$

3) en appliquant 1 à $f-g$:

$\int_a^b f(t) - g(t)dt \geq 0$

$\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \geq 0$ par linéarité

$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$

2) F croissante et $F(a) = F(b)$ donc F constante sur $[a, b]$,

$\forall t \in [a, b], f(t) = F'(t) = 0$

4) Notons $A = \int_a^b f(t)dt$, $B = \int_a^b |f(t)|dt$

Pour $t \in [a, b]$:

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

Puisque $a \leq b$:

$$-B \leq A \leq B$$

donc $|A| \leq B$

II Formule de changement de variable

Propriété : formule de changement de variable

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$ tel que :

$\phi(I) \subset I$ et $(a, b) \in I^2$:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur I

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = [F(x)]_{\phi(a)}^{\phi(b)}$$

$$= F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

$$= [F(\phi(t))]_a^b$$

$$= \int_a^b F'(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Comme $F' = f$

$$= \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

III Si f T-périodique : $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ puis $\int_{a+T}^a f(t)dt = \int_{b+T}^b f(t)dt$

Propriété : Soit f continue et T-périodique

$$1) \int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$$

$$2) \int_{a+T}^a f(t)dt = \int_{b+T}^b f(t)dt$$

Démonstration : 1) posons $x = t + T$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(x - T)dx$$

$$= \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$$

$$2) \int_b^{b+T} f(t)dt = \int_b^a f(t)dt + \int_a^{a+T} f(t)dt + \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$$

$$= -\int_a^b f(t)dt + \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt + \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{a+T}^a f(t)dt$$

$$\int_{a+T}^a f(t)dt = \int_{b+T}^b f(t)dt$$

IV Exploitation des invariances $f(a + b - x) = \pm f(x)$

Propriété :

$$a < b, f \in \mathcal{C}^0([a, b])$$

$$1) \text{ Si } \forall t \in [a, b], f(a + b - t) = -f(t)$$

$$\text{alors : } \int_a^b f(t)dt = 0$$

$$2) \text{ Si } \forall t \in [a, b], f(a + b - t) = f(t)$$

$$\text{alors : } \int_a^b f(t)dt = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt$$

Démonstration :

$$1) \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(a + b - x)dx \text{ car } (a + b - x)' = -1$$

$$= \int_a^b f(a + b - x)dx$$

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(x)dx \text{ nulle car égale à son opposé}$$

$$2) -\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a + b - x)dx$$

$$= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a + b - x)dx$$

$$= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

$$\text{Par Chasles : } \int_a^b f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt$$

$$\text{Or } \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt$$

$$\text{On a donc : } \int_a^b f(t)dt = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt = 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt$$

V Encadrement d'une somme pour une fonction décroissante, application à $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, monotone

Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ entiers

$$1) \text{ Si } f \text{ est décroissante } ((a-1) \in I \text{ et } (b+1) \in I)$$

$$\int_a^{b+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_{a-1}^b f(t)dt$$

Démonstration :

$$1) \text{ Pour } k \in [[a, b]] \text{ et } t \in [k, k+1]$$

$$f(t) \leq f(k)$$

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt$$

$$= f(k)(k+1-k) = f(k)$$

$$\sum_{k=a}^b \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^b f(k)$$

$$\int_a^{b+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^b f(k)$$

$$\text{De même, pour } t \in [k-1, k]$$

$$f(k) \leq f(t)$$

$$\int_{k-1}^k f(k)dt \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$$

$$\sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^b f(t)dt$$

Application : $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, décroissante

$$\int_{n+1}^{2n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq \int_n^{2n} f(t)dt$$

Comme $\int_n^{2n} f(t)dt = \ln(2)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$

VI Calcul $\int_0^x t \cos(t)dt$ et $\int_0^x t \sin(t)dt$ par les complexes

$$\int_0^x t e^{it} dt = [t \frac{1}{i} e^{it}]_0^x - \int_0^x \frac{1}{i} e^{it} dt = \frac{x}{i} e^{ix} - \frac{1}{i} e^{ix} + \frac{1}{i} = -ixe^{ix} + e^{ix} - 1$$

$$\text{et } \int_0^x e^{it} dt = [\frac{1}{i} e^{it}]_0^x = \frac{1}{i} (e^{ix} - 1) = -i(e^{ix} - 1)$$

$$\text{donc } \int_0^x t e^{it} dt = -ixe^{ix} + e^{ix} - 1$$

Partie réelle :

$$\int_0^x t \cos(t)dt = x \sin(x) + \cos(x) - 1$$

Partie imaginaire :

$$\int_0^x t \sin(t)dt = -x \cos(x) + \sin(x)$$