

Démonstration kholle 22

I Théorème de la base incomplète (cas $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$).

Théorème de la base incomplète :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie :

Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ tel que \mathcal{L} soit libre.

Alors il existe une base \mathcal{B} de E tel que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$

Démonstration :

Posons : $\Omega = \{ \mathcal{H} \text{ famille libre de E} : \mathcal{L} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G} \}$

$A = \{ \text{Card}(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \in \Omega \}$

A est une partie de \mathbb{N} majorée par $\text{Card}(\mathcal{G})$ et $A \neq \emptyset$ car $\mathcal{L} \in \Omega$ donc $\text{card}(\mathcal{L}) \in A$

Soit $p = \max(A)$ et $B \in \Omega$ tel que $\text{Card}(B) = p$.

On a bien $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ et \mathcal{B} libre car $\mathcal{B} \in \Omega$

Supposons que B n'engendre pas E :

Si tous les vecteurs de \mathcal{G} appartiennent à $\text{Vect}(\mathcal{B})$:

$E = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$, ce qu'on a exclu.

Soit $\vec{x} \in \mathcal{G}$ tel que $\vec{x} \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{M} = \mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$ alors :

$\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ et \mathcal{M} libre car \mathcal{B} libre et $x \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$

donc $\mathcal{M} \in \Omega$ et $\text{Card}(\mathcal{M}) > \max(A)$ absurde

II Lemme de Steinitz.

Lemme de Steinitz :

Dans un K-espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille d'au moins n+1 vecteurs est liée

Démonstration :

récurrence sur n :

Initialisation : n=0, l'espace est noté $\{\vec{0}\}$

Seule la famille $(\vec{0})$ convient qui est liée car $\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les propriétés soit vraie au rang n :

Soit E engendré par n+1 vecteurs

$E = \text{Vect}(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n+1})$

Soit une famille de n+2 vecteurs : $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2})$

Il existe des scalaires $\alpha_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n+2, 1 \leq j \leq n+1$) tel que :

$\forall i \in [1, n+2], \vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{i,j} \vec{g}_j$ car $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n+1})$ engendre E :

Notons :

$\vec{v}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \vec{g}_k$ ($1 \leq i \leq n$)

$\beta_i = \alpha_{i,n+1}$

$F = \text{Vect}(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n)$

Alors : $\forall i \in [1, n+2], \vec{u}_i = \vec{v}_i + \beta_i \vec{g}_{n+1}$

1^{er} cas : Si $\beta_1 = \dots = \beta_{n+2} = 0$

Alors : $\forall i \in [1, n+2], \vec{u}_i = \vec{v}_i \in F$ ainsi $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2})$ est une famille d'au moins n+1 vecteurs de F qui est engendré par n vecteurs per hypothèse de récurrence, elle est liée.

2^{er} cas : $\exists i_0 \in [1, n+2], \beta_{i_0} \neq 0$ sans perte de généralité supposons $\beta_{n+2} \neq 0$

On a donc : $\vec{g}_{n+1} = \frac{1}{\beta_{n+2}} (\vec{u}_{n+2} - \vec{v}_{n+2})$

Donc pour $1 \leq i \leq n+1$:

$$\vec{u}_i = \vec{v}_i + \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}(\vec{u}_{n+2} - \vec{v}_{n+2})$$

Posons $\vec{w}_i = \vec{u}_i - \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}\vec{u}_{n+2}$ ($1 \leq i \leq n+1$)

Ainsi : $\forall i \in [1, n+1], \vec{w}_i = \vec{v}_i - \frac{\beta_i}{\beta_{n+2}}\vec{v}_{n+2} \in F$

Par hypothèse de récurrence :

$(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n+1})$ est liée

ainsi $\exists (\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \vec{w}_i = \vec{0}$ et $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$

c'est-à-dire : $\mu_1 \vec{u}_1 + \dots + \mu_{n+1} \vec{u}_{n+1} + (-\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mu_i \beta_i}{\beta_{n+2}}) \vec{u}_{n+2} = \vec{0}$

Comme au moins l'un des $n+1$ premiers coefficients $\neq 0$,
cela montre que : $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2})$ est liée.

III Conséquences du lemme de Steinitz : les bases sont finies et de même cardinal, cardinaux des familles libres et cas d'égalité.

Propriétés :

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Toutes ses bases sont finies et ont toutes même cardinal. Ce cardinal est la dimension de E, noté $\dim(E)$

Démonstration :

On sait qu'il existe une base finie \mathcal{B}_0 . Soit \mathcal{B} une base de E, elle est libre donc finie et \mathcal{B}_0 engendre E donc $\text{Card}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{B}_0)$. De même : \mathcal{B}_0 est libre et \mathcal{B} génératrice de E donc $\text{Card}(\mathcal{B}_0) \leq \text{Card}(\mathcal{B})$ on a donc $\text{Card}(\mathcal{B}) = \text{Card}(\mathcal{B}_0)$

Propriété :

Soit \mathcal{L} une famille libre de E alors :

1) \mathcal{L} est finie et $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$

2) $\text{Card}(\mathcal{L}) = \dim(E) \iff \mathcal{L}$ base de E

Démonstration :

1) Soit \mathcal{B} une base de E. Lemme de Steinitz : \mathcal{L} libre et \mathcal{B} génératrice finie donc \mathcal{L} finie et $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \underbrace{\text{Card}(\mathcal{B})}_{=\dim(E)}$

2) \Rightarrow définition de $\dim(E)$ par le fait que toutes les bases ont même cardinal

\Leftarrow Notons $n = \dim(E)$

Si $n=0$: $E = \{0\}$ et $\mathcal{L} = ()$

Si $n \geq 1$: Notons $\mathcal{L} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

Si \mathcal{L} n'engendrait pas E :

Considérons $\vec{x}_{n+1} \in E$ tel que $\vec{x}_{n+1} \notin \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

Alors $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1})$ est encore libre mais son cardinal est $n+1 > \dim(E)$: contradiction

Donc \mathcal{L} engendre E et est libre c'est donc une base E

IV Sous-espaces : inégalité des dimensions et cas d'égalité.

Propriété :

Soit E K-espace vectoriel, F sous-espace vectoriel de E

1) F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$

2) $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$

Démonstration :

1) $\Omega = \{\mathcal{L} : \text{famille libre de F}\}$

$A = \{\text{Card}(\mathcal{L}) : \mathcal{L} \in \Omega\}$. Pour $\mathcal{L} \in \Omega$: \mathcal{L} est aussi une famille libre de E donc \mathcal{L} est finie et $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$

Ainsi : $A \subset \mathbb{N}$ et majoré par $\dim(E)$ $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$ (car $() \in \Omega$) donc A possède un maximum p :

Soit $\mathcal{L}_0 \in \Omega$ tel que $\text{Card}(\mathcal{L}_0) = p$:

On a : \mathcal{L}_0 libre car $\mathcal{L} \in \Omega$, $\text{Vect}(\mathcal{L}_0) \subset F$ par définition de Ω

Si $\text{Vect}(\mathcal{L}_0) \subsetneq F$:

Soit $\vec{x} \in F \setminus \text{Vect}(\mathcal{L}_0)$:

Alors $\mathcal{L}_0 \cup (\vec{x})$ est une famille libre de F donc $\mathcal{L}_0 \cup (\vec{x}) \in \Omega$ mais $\text{Card}(\mathcal{L}_0 \cup (\vec{x})) = p+1 > p$ contradiction

Ainsi : $Vect(\mathcal{L}_0) = F$

Conclusion : \mathcal{L}_0 est une base de F donc: F est de dimension finie et $\dim(F) = p \leq \dim(E)$ car $\dim(E)$ est un majorant de A.

2) Soit \mathcal{B} une base de F

En particulier : \mathcal{B} est une famille libre de F donc \mathcal{B} est une famille de E.

De plus: $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(F)$ car \mathcal{B} base de F $\text{MCard}(\mathcal{B}) = \dim(E)$ par hypothèse donc \mathcal{B} base de E
 $F = Vect(\mathcal{B}) = E$

V Si $E = F \oplus G, \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Propriété :

E K-espace vectoriel de dimension finie, F et G sous-espace vectoriel supplémentaire de E ($E = F \oplus G$) alors :

1) Si \mathcal{B} base de F et \mathcal{C} une base de G, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E

2) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Démonstration :

Si $F = \{0\}, G = E, \mathcal{B} = ()$ propriété trivialement vérifiée

Idem si $G = \{0\}, F = E, \mathcal{C} = ()$

Sinon, notons : $p = \dim(F) \geq 1, q = \dim(G) \geq 1$

$\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ et $\mathcal{C} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_q)$

Montrons que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E

libre : soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ tel que :

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p + \mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_q \vec{y}_q = \vec{0}$$

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p}_{\in F} = - \underbrace{(\mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_q \vec{y}_q)}_{\in G}$$

or $F \cap G = \{\vec{0}\}$ donc :

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}$$

$$\mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_q \vec{y}_q = \vec{0}$$

or \mathcal{B} libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

et \mathcal{C} libre donc $\mu_1 = \dots = \mu_q = 0$

génératrice : on a trivialement $Vect(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \subset E$:

Soit $\vec{x} \in E$

comme $E = F + G$

$$\exists (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

Or $F = Vect(\mathcal{B})$ donc :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{y} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k$$

de même $G = Vect(\mathcal{C})$ donc :

$$\exists (\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q, \vec{z} = \sum_{k=1}^q \mu_k \vec{y}_k$$

$$\text{ainsi : } \vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{x}_k + \sum_{k=1}^q \mu_k \vec{y}_k \in Vect(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

donc $Vect(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = E$

2) $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$

$$\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{B}) + \text{Card}(\mathcal{C}) = \dim(F) + \dim(G)$$

VI Existence de supplémentaires, formule de Grassmann.

Propriété :

Soit E : K-espace vectoriel de dimension finies $n \geq 2$

$\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de E

$$p \in [1, n-1]$$

$$\mathcal{B}_1 = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$$

$$\mathcal{B}_2 = (\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n)$$

Posons $F = Vect(\mathcal{B}_1)$ et $G = Vect(\mathcal{B}_2)$

Alors : \mathcal{B}_1 base de F, \mathcal{B}_2 base de G et $E = F \oplus G$

Démonstration :

\mathcal{B}_1 engendre F par définition et $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ qui est libre donc \mathcal{B}_1 est libre. Idem pour \mathcal{B}_2

$F + G \subset E$ trivial $E \subset F + G$ Soit $\vec{x} \in E$:

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k$$

$$\text{ainsi } \vec{x} = \underbrace{\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k}_{\in F} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^n \lambda_k \vec{u}_k}_{\in G}$$

donc $\vec{x} \in F + G$

$\{\vec{0}\} \subset F \cap G$ trivial

$F \subset \{\vec{0}\}$ Soit $\vec{x} \in F \cap G$ alors :

$$\vec{x} \in F \text{ donc : } \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{x} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k$$

$$\vec{x} \in G \text{ donc : } \exists(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}, \vec{x} = \sum_{k=p+1}^n \lambda_k \vec{u}_k$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p + (-\lambda_{p+1}) + \dots + (-\lambda_n \vec{u}_n) = \vec{0}$$

Or \mathcal{B} libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ d'où $\vec{x} = \vec{0}$

Propriété :

Formule de Grassmann :

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finies, F et G sous-espace vectoriel de E alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration :

$F \cap G$ sous-espace vectoriel de G qui est de dimension finie :

Il existe H , sous-espace vectoriel de G tel que : $G = (F \cap G) \oplus H$

Montrons que $F + G = F \oplus H$

Par hypothèse $F \cap G \cap H = \{\vec{0}\}$ or $H \subset G$ donc : $F \cap H = \{\vec{0}\}$ $F \oplus H \subset F + G$ évident car $nH \subset G$

$F + G \subset F \oplus H$ soit $\vec{x} \in F + G$:

$$\exists(\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

Comme $\vec{z} \in G$ par hypothèse :

$$\exists(\vec{u}, \vec{v}) \in (F \cap G) \times H, \vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{y} + \vec{u}}_{\in F} + \underbrace{\vec{v}}_{\in H}$$

donc $\vec{x} \in F \oplus H$

On a donc :

$$\dim(G) = \dim(F \cap G) + \dim(H)$$

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(H)$$

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

VII Dimension de $E \times F$, de $\mathcal{L}(E, F)$.

Propriété :

E, F : K -espace vectoriel de dimension finie $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

Alors $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

Si n et $p \geq 1$:

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de E et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ base de F :

$((\vec{u}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{u}_n, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{v}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{v}_p))$ est une base de $E \times F$

Démonstration :

libre : soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que :

$$\lambda_1(\vec{u}_1, \vec{0}_F) + \dots + \lambda_n(\vec{u}_n, \vec{0}_F) + \lambda_{n+1}(\vec{0}_E, \vec{v}_1) + \dots + \lambda_{n+p}(\vec{0}_E, \vec{v}_p) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F)$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n + \lambda_{n+1} \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{n+p} \vec{v}_p = (\vec{0}_E, \vec{0}_F)$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}_F$$

$$\lambda_{n+1} \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{n+p} \vec{v}_p = \vec{0}_F$$

Comme $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de E et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ base de F :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+p} = 0$$

génératrice Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$:

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de E donc $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$

$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ base de F donc $\exists(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p, \vec{y} = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_p \vec{v}_p$

d'où : $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{0}_F) + (\vec{0}_E, \vec{y})$
 $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\vec{u}_k, \vec{0}_F) + \sum_{k=1}^p \mu_k (\vec{0}_E, \vec{v}_k)$

Propriété :

Si E et F sont de dimensions finies, $\mathcal{L}(E, F)$ aussi et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Démonstration :

soit $p = \dim(E)$.

Si $p = 0 : E = \{\vec{0}\}$, $\mathcal{L}(E, F) = \{\vec{0}\}$

Sinon, soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base de E.

Posons : $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F$

$$f \rightarrow (f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p))$$

Φ est bien linéaire : pour f et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\Phi(f + \lambda g) = (f(\vec{u}_1) + \lambda g(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p) + \lambda g(\vec{u}_p))$$

$$\Phi(f + \lambda g) = (f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)) + \lambda (g(\vec{u}_1), \dots, g(\vec{u}_p))$$

$$\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda \Phi(g)$$

De plus, Φ est bijective : c'est le théorème de détermination des applications linéaires.

Ainsi, Φ est un isomorphisme, or F^p est de dimension finie égale à $p \times \dim(F)$ donc $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à $p \times \dim(F) = \dim(E) \times \dim(F)$

VIII Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base (énoncé complet + démonstration de la caractérisation de l'injectivité).

Propriété : E: K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de E

$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ famille quelconque de n vecteurs de F, K-espace vectoriel quelconque

1) $\exists! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall k \in [[1, n]], f(\vec{u}_k) = \vec{v}_k$

2) f injective $\iff (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ libre

Démonstration :

1)

Existence : Soit $\vec{x} \in E$:

Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ l'unique n-uplet de scalaires tel que :

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k$$

On pose: $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k$. Cela définit bien une application :

$f : E \rightarrow F$ car une seule valeur est posée pour $f(\vec{x})$ (car $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ unique).

Montrons que $f \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$\text{Soit } \vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k \in E$$

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^n \mu_k \vec{u}_k \in E$$

$$\alpha \in \mathbb{K}$$

Alors par définition de f : $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k$

$$f(\vec{y}) = \sum_{k=1}^n \mu_k \vec{v}_k$$

$$\text{Par ailleurs : } \vec{x} + \alpha \vec{y} = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \alpha \mu_k) \vec{u}_k$$

$$\text{donc : } f(\vec{x} + \alpha \vec{y}) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \alpha \mu_k) \vec{v}_k = f(\vec{x}) + \alpha f(\vec{y})$$

Enfin pour $j \in [[1, n]]$:

$$f(\vec{u}_j) = f(\sum_{k=1}^n \delta_{k,j} \vec{u}_k)$$

$$f(\vec{u}_j) = \sum_{k=1}^n \delta_{k,j} \vec{v}_k = \vec{v}_j$$

Unicité : si f et g conviennent :

$$\forall k \in [[1, n]], \vec{u}_k \in \text{Ker}(f - g) \text{ car } f(\vec{u}_k) = g(\vec{u}_k)$$

$$\text{Or } \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = E \text{ d'où } E \subset \text{Ker}(f - g)$$

$$\text{donc } f - g = \vec{0}, f = g$$

2) \Rightarrow Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

$$f(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k) = \vec{0} \text{ car } f \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$\text{or } \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\} \text{ (car } f \text{ injective)}$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0} \text{ or } (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \text{ libre donc } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \text{ donc } (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \text{ est libre}$$

$$\iff \text{On suppose } (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \text{ libre.}$$

Montrons que f est injective, c'est-à-dire $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$

\supset : toujours vraie

\subset : soit $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$:

Ecrivons \vec{x} dans la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k$$

Par définition de f :

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k$$

Or $f(\vec{x}) = \vec{0}$ et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ puis $\vec{x} = \vec{0}$

IX Théorème du rang (avec énoncé et démonstration du lemme)

Propriété :

Soit E K -espace vectoriel de dimension finie

F K -espace vectoriel

Il est équivalent de dire :

1) E et F sont isomorphe

2) F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$

Démonstration :

1 \Rightarrow 2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective

Si $E = \{\vec{0}_E\}$: $F = \{\vec{0}_F\}$

Si $\dim(E) = n \geq 1$, soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E .

Comme f est un isomorphisme: $(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n))$ est une base de F donc F est de dimension finie et $\dim(F) = n$

2 \Rightarrow 1 si dimension nulle : $E = \{\vec{0}_E\}$ et $F = \{\vec{0}_F\}$ $f : \vec{0}_E \rightarrow \vec{0}_F$ est un isomorphisme si $\dim(E) = \dim(F) = n \geq 1$:

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ base de F .

Soit f l'unique élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$\forall k \in [1, n], f(\vec{u}_k) = \vec{v}_k.$$

Puisque $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de F , f est un isomorphisme

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie

1) Tout supplémentaire S de $\text{Ker}(f)$ dans E est un isomorphisme à $\text{Im}(f)$.

Plus précisément :

$$g : S \rightarrow \text{Im}(f)$$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

est un isomorphisme $g = f|_S^{\text{Im}(f)}$

$$2) \dim(\text{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{\text{rg}(f)} = \dim(E)$$

Démonstration :

1) un tel S existe bien

On a : $*g \in \mathcal{L}(S, \text{Im}(f))$

$*\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f) \cap S = \{\vec{0}\}$ donc g injective

$*\text{Im}(g) = f(S) \subset \text{Im}(f)$

Par ailleurs, pour $\vec{y} \in \text{Im}(f)$:

$\exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f(\vec{x})$ or $E = \text{Ker}(f) \oplus S$ donc :

$$\exists (\vec{u}, \vec{v}) \in \text{Ker}(f) \times S, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\text{alors : } \vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$\vec{y} = f(\vec{v}) \in f(S)$$

Ainsi : $\text{Im}(g) = \text{Im}(f)$ g surjective

2) On a donc :

$$\dim(S) = \dim(\text{Im}(f))$$

$$\text{or : } E = \text{Ker}(f) \oplus S$$

donc $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(S)$ d'où le résultat