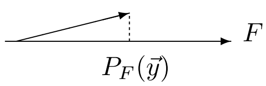
Démonstration kholle 27

I Distance d'un point à un sous-espace,atteinte en un unique point (le projeté orthogonal) Exemple : $d(X^2,\mathbb{R}_1[X])$ pour le produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

Propriété :
Soit F de dimension finie $d(\vec{y},F)$ est atteinte en un unique point qui est $p_F(\vec{y})$
Démonstration :
si $dim(E)=2$ et $dim(F)=1$:



$\|\vec{y}-\vec{x}\| > \|\vec{y}-p_F(\vec{y})\|$
Cas général : $p_F(\vec{y})-\vec{x} \in F$ car $\vec{x}$ et $p_F(\vec{y}) \in F$
et $\vec{y}-p_F(\vec{y}) \in F^\perp$ car p_F est la projection sur F parrallèle à $F^\perp$
donc par le théorème de Pythagore :
$\|\vec{y}-\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}-P_F(\vec{y})\|^2 + \|p_F(\vec{y})-\vec{x}\|^2$
$\|y-x\|^2 \geq \|\vec{y}-p_F(\vec{y})\|^2$ avec égalité si et seulement si $\|p_F(\vec{y})-\vec{x}\|=0$, c'est-à-dire $\vec{x}=p_F(\vec{y})$
Exemple :
$E=\mathbb{R}[X]$ $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$
Calculer $(d(X^2,\mathbb{R}_1[X]))^2$
où $\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt = \|X^2-(aX+b)\|^2$
Il est atteint pour (a,b) tel que $p_F(X^2)=aX+b$ uniquement :
$X^2-p_F(X^2) \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp$
donc :
$\langle X^2-p_F(X^2),1\rangle = 0$
$\langle X^2-p_F(X^2),X\rangle = 0$

$\langle aX+b,1\rangle = \langle X^2,1\rangle$
$\langle aX+b,X\rangle = \langle X^2,X\rangle$

$\langle X,1\rangle a + \langle 1,1\rangle b = \langle X^2,1\rangle$
$\langle X,X\rangle a + \langle 1,X\rangle b = \langle X^2,X\rangle$

$\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{-1/12} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$(a,b) = (1,\frac{-1}{6})$

Le minimum cherché est :
$\int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{4})^2 dt$
On peut écrire :
$X^2 = \underbrace{p_F(X^2)}_{\in F} + \underbrace{(X^2 - p_F(X^2))}_{\in F^\perp}$
donc par Pythagore :
$\|X^2\|^2 = \|p_F(X^2)\|^2 + \underbrace{\|X^2 - p_F(X^2)\|^2}_{m}$
$m = \|X^2\|^2 - \|aX + b\|^2$
$m = \int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 (t - \frac{1}{6})^2 dt$
ce qui est le plus simple à calculer
On obtient :
$m = \frac{1}{5} - [\frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{36}t]_0^1$
$m = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$

II Si E est un espace euclidien, isomorphisme $\phi : u \in E \mapsto \langle u, \cdot \rangle \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$

Théorème :
Soit E euclidien et $n = dim(E) \in \mathbb{N}^*$, l'application :
$\phi : E \to \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$
$\vec{u} \mapsto \langle \vec{u}, \cdot \rangle$
est un isomorphisme
Démonstration :
Montrons que ϕ **est linéaire** c'est-à-dire : $\phi \in \mathscr{L}(E,\mathscr{L}(E,\mathbb{R}))$
Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Pour $\vec{x} \in E$:
$\langle \vec{u} + \lambda \vec{v} n \vec{x} \rangle = \langle \vec{u},\vec{x} \rangle + \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
nombre réels donc : $\phi(\vec{u} + \lambda \vec{v})(\vec{x}) = \phi(\vec{u})(\vec{x}) + \lambda \phi(\vec{v})(\vec{x})$
Vrai pour tout $\vec{x}$ donc :
application de E dans $\mathbb{R}$ $\phi(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \phi(\vec{u}) + \lambda \phi(\vec{v})$
Soit $\vec{u} \in Ker(\phi)$:
$\phi(\vec{u}) = \tilde{0}$
$\forall \vec{x} \in E, \underbrace{\phi(\vec{u}, \vec{x})}_{\langle \vec{u},\vec{x} \rangle} = 0$
pour $\vec{x} = \vec{u}$: $\|\vec{u}\|^2 = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$
$Ker(\phi) = \{\vec{0}\}$
Théorème du rang :
$dim(Im(\phi)) = dim(E) - dim(Ker(\phi))$
$dim(Im(\phi)) = n = dim(\mathscr{L}(E,\mathbb{R}))$
or $Im(\phi) \subset \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ donc $Im(\phi) = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$

III Isométries vectorielles : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, équivalence entre conservation de la norme et conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormée

Propriété :
l'ensemble $O(E)$ des isometries vectorielles d'un espace euclidien E est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$. C'est le groupe orthogonal de E, les isometries sont aussi appelée automorphismes orthogonaux
Démonstration :
Montrons que **$O(E) \subset GL(E)$:**
Soit $f \in O(E)$: $f \in \mathscr{L}(E)$ et :

$\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$
Soit $\vec{x} \in Ker(f)$: $\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\| = \|\vec{0}\| = 0$ donc $\vec{x} = \vec{0}$
f est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie don f est bijectif (corrolaire du théorème du rang)
$\boldsymbol{O(E)} \neq \emptyset$ car $Id_E \in O(E)$
Soit $\boldsymbol{(f,g) \in (O(E))^2}$ **:**
Pour $\vec{x} \in E$:
$\|f(g(\vec{x}))\| = \|g(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ car $(f,g) \in (O(E))^2$
donc $fg \in O(E)$
Soit $f \in O(E)$:
Soit $\vec{x} \in E$
avec $\vec{y} = f^-1(\vec{x}) \in E$:
$\|f(\vec{y})\| = \|\vec{y}\|$ car $f \in O(E)$
$\|\vec{x}\| = \|f^{-1}(\vec{x})\|$ ainsi $\boldsymbol{f^{-1} \in O(E)}$
Propriété : soit $f \in \mathscr{L}(E)$ Les proposition suivante sont équivalentes :
1) $\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$
2) $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}$
Démonstration :
2 $\Rightarrow$ 1 ; Soit $\vec{x} \in E$: Avec $\vec{y} = \vec{x}$:
$\|f(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$
$\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ car les normes sont positives
1 $\Rightarrow$ 2 : Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$
polarisation :
$2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \|f(\vec{x}) + f(\vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x})\|^2 - \|f(\vec{y})\|^2$
comme $f \in \mathscr{L}(E)$, $2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \|f(\vec{x} + \vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x})\|^2 - \|f(\vec{y})\|^2$
Par hypothèse : $2\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$
par polarisation: $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$
Propriété : E euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ Les propriété suivante sont équivalentes :
1) $f \in O(E)$
2) Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E $f(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de E
3) Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E tel que $f(\mathscr{B})$ soient une base orthonormée de E
Démonstration :
notons $n = dim(E) \in \mathbb{N}^*$
1 $\Rightarrow$ 2 $f \in O(E)$
Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E
Alors pour $(i,j) \in [[1,n]]^2$:
$\langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j)\rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle$ car $f \in O(E)$
$\langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j)\rangle = \delta_{ij}$ car $\mathscr{B}$ orthonormée.
ainsi: $f(\mathscr{B})$ est une famille orthonormée donc libre.
Comme elle a $n = dim(E)$ vecteurs, c'est une base orthonormée de E
2 $\Rightarrow$ 3 : Il existe au moins une base orthonormée de E elle convient (par 2)
3 $\Rightarrow$ 1 : Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E tel que $f(\mathscr{B})$ le soit aussi on a donc:
$\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, \langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j)\rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle = \delta_{ij}$
Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$
On a : $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i\rangle \vec{e}_i$
$\vec{y} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{y}, \vec{e}_i\rangle \vec{e}_i$
donc comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée donc :
$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i\rangle \langle \vec{y}, \vec{e}_i\rangle$
en appliquant f à $\vec{x}$ et $\vec{y}$:
$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i\rangle f(\vec{e}_i)$ car $f \in \mathscr{L}(E)$
$f(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n \langle \vec{y}, \vec{e}_i\rangle f(\vec{e}_i)$
Or $f(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de E :
$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i\rangle \langle \vec{y}, \vec{e}_i\rangle$
$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$

IV Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ + description de $O_2(\mathbb{R})$ + commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$

Propriété :
$O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(Gl_n(\mathbb{R}), X\times)$
Démonstration :
$\boldsymbol{O_n}(\mathbb{R}) \subset \boldsymbol{GK_n}(\mathbb{R})$ par définition
$\boldsymbol{O_n}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ car $I_n \in O_n(\mathbb{R})$
Soit $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in (\boldsymbol{O_n}(\mathbb{R}))^{\boldsymbol{2}}$:
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB^tA = {}^t(AB)$
Propriété : soit $A \in O_2(\mathbb{R})$:
- si $det(A) = 1$:
$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ($\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π) et toute matrice de cette forme de $O_2^+(\mathbb{R})$
- si $det(A) = -1$:
$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
($\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π) et tout matrice de cette forme $\in O_2^-(\mathbb{R})$
Démonstration :
Il est clair que toute matrices de ces formes conviennent
Réciproquement, soit $A \in O_1(\mathbb{R})$:
$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ colonnes orthonormés donc :
$a^2 + b^2 = 1$
$c^2 + d^2 = 1$
$ac + bd = 0$
Il existe $(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2$ tel que:
$a = \cos(\theta), b = \sin(\theta)$
$c = \cos(\phi), d = \sin(\phi)$
or : $0 = ac + bd = \cos(\phi - \theta)$
donc $\phi - \theta \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$
Si $\phi - \theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$:
$c = \cos(\phi) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$
$d = \sin(\phi) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$
$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ du premier type
si $\phi - \theta \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$:
$c = \cos(\phi) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\theta)$
$d = \sin(\phi) = \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\theta)$
$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ du deuxième type
Propriété :
$SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif
Démonstration :
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix}$$

V Etude de $SO(E)$ (E plan vectoriel orienté)

Propriété :
E: plan euclidien orientée
$f \in SO(E)$
1) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique à 2π près tel que pour toute base orthonormée direct $\mathscr{B}$, $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
2) pour tout $\vec{u} \in E\backslash\{\vec{0}\}, \theta$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ f est appelée rotation vectorielle d'angle

θ
Démonstration :
1) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe :
$Mat_{\mathscr{B}}(f) \in SO_2(\mathbb{R})$ donc on a vu qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
Si $\mathscr{C}$ est une base orthonormée directe quelconque :
$Mat_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C}\mathscr{B}} Mat_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$
$(P_{\mathscr{C}\mathscr{B}}, P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}) \in SO_2(\mathbb{R})$ car $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ base orthonormée de même sens
$Mat_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C}\mathscr{B}} P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} Mat_{\mathscr{B}}(f) = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ car $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif
2) Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée directe de E
$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$
$f(\vec{u}) = (a\cos(\theta) - b\sin(\theta))\vec{i} + (a\sin(\theta) + b\cos(\theta))\vec{j}$
$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$ car $f \in O(E)$
$\langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle = a(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) + b(a\sin(\theta) + b\cos(\theta))$
$\langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle = (a^2 + b^2)\cos(\theta)$
$\langle \vec{u}, f(\vec{u}) \rangle = \|\vec{u}\| \|f(\vec{u})\| \cos(\theta)$
$[\vec{u}, f(\vec{u})] = \begin{vmatrix} a & a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ b & b\sin(\theta) + b\cos(\theta) \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)\sin(\theta) = \|\vec{u}\| \|f(\vec{u})\| \sin(\theta)$
donc l'angle orienté $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ a pour mesure θ

VI Etude de $O^-(E)$(E plan vectoriel orienté)

Propriété :
E: plan euclidien orienté
$f \in O(E)$
Alors f est une reflexion. Il existe une base orthonormée directe dans laquelle sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Démonstration :
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormés (direct) :
$Mat_{\mathscr{B}}(f) \in O_2^-(\mathbb{R})$
donc :
$\exists \theta \in \mathbb{R}, Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
On remarque que $(Mat_{\mathscr{B}}(f))^2 = I_2$
f est donc une symétrie orthogonale
Si $dim(Ker(f - Id)) = 2$: $f - Id = \tilde{0}$
$f = Id$
$det(f) = 1$ exclu si $dim(Ker(f - Id)) = 0$: $E = Ker(f - Id) \oplus Ker(f + Id)$
donc $f + Id = 0$ $f = -Id$
$det(f) = (-1)^2 = 1$ exclu
ainsi : $dim(Ker(f - Id)) = 1 = dim(E) - 1$ donc f est une reflexion
On a donc aussi $dim(Ker(f + Id)) = 1$
Soit $(\vec{u}_1)$ base orthonormée de $Ker(f - Id)$
$(\vec{u}_2)$ base othonormée de $Ker(f + Id)$
Comme f est une symetrie orthogonale , $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ donc $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base orthonormée de E.
Posons $\mathscr{B}_0 = \left\{ \begin{array}{l} (\vec{u}_1, \vec{u}_2) si \quad (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \quad directe \\ (-\vec{u}_1, \vec{u}_2) sinon \end{array} \right.$
Alors : $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée directe de E et $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$