Démonstration kholle 12

I Continuité de la composée avec quantificateurs

Propriété :
I,J intervalles non triviaux,$a \in I, b \in J$)
$f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$)
$f(I) \subset J$ et $b = f(a)$
f continue en a, g continue en b
Alors $g \circ f$ est continue en a
Démonstration :
Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, Alors :
$\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in J(|y - b| \leq \delta \Rightarrow |g(y) - g(b)| \leq \epsilon$
Ecrivons la continuité de f en a avec $\delta > 0$ au lieu d'epsilon :
$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \delta$
Alors pour $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$:
$|f(x) - f(a)| \leq \delta$
et $f(x) \in f(I) \subset J$
donc $|g(f(x)) - \underbrace{g(b)|}_{g(f(a))} \leq \epsilon$

II Théorème des valeurs intermédiaires (avec lemme)

Propriété :
Soit I un intervalle non trivial et $f \in \mathscr{C}^0(I)$.
Alors $f(I)$ est un intervalle
Démonstration :
Montrons le lemme du TVI :
Supposons $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$: (l'autre cas s'obtient avec (-f))
posons $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$
On a $A \subset \mathbb{R}$ et majorée par b $A \neq \emptyset$ car $a \in A$
Ainsi on peut poser $C = sup(a)$:
Comme b est majorant de a donc $c \leq b$. Comme $a \in A$ et C est un majorant de A : $a \leq c$
Ainsi: $c \in [a,b]$ donc $c \in I$, car $(a,b) \in I^2$ et I intervalle.
D'une part: comme $c = sup(A)$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to c$
La fonction f étant continue :
$f(x_n) \to f(c)$ or $\forall n \in \mathbb{N}$,$x_n \in A$
c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq 0$ donc $f(c) \leq 0$
D'autre part:
Si $f(b) > 0 : c < b$
Posons, pour $n \geq 1$: $u_n = c + \frac{b-c}{n} \in]c,b]$
Alors $u_n \in [a,b]$ mais $u_n \in A$ car $u_n > C = sup(A)$ donc $f(u_n) > 0$
Or $u_n \to c$ donc par continuité de f en c :$(f(c) \geq 0)$ donc $f(c) = 0$
Si $f(b) = 0 : b \in A$donc $b = max(A)$ donc b=c
Montrons le TVI :
Soit $(\alpha, \beta) \in (f(I))^2$ avec $\alpha \leq B$ soit $\gamma \in [\alpha,\beta]$.
Il existe $(a,b) \in I^2$ tel $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ si $a < b$ applique le lemme:
$g : I \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) - \gamma$
On a $g(a)g(b) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$
Donc si a>b: $\exists c \in [a,b] \subset I, g(c) = 0$ donc $\gamma = f(c)$ avec $c \in I$ et $\gamma \in f(I)$
si b<a : de même, $\exists c \in [b,a] \subset I, g(c) = 0$ $\gamma = f(c) \in f(I)$
si b=a : $\alpha = \beta$ donc $\gamma = \alpha = \beta$ on prend $c = a$ $\gamma = f(c) \in f(I)$.
Dans tous les cas, on a bien $\gamma \in f(I)$

III Théorème des valeurs extrêmes

Propriété :
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
C'est-à-dire elle possède un maximum et un minimum
Corrolaire : Ainsi, l'image d'un segment pour une fonction continue est un segment
Démonstration :
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ avec $a < b$.
1)Montrons que f est majorée
Si f n'était pas majorée : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a,b], f(x) > M$
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$: $\exists x_n \in [a,b], f(x_n) > n$
Ce qui définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) > n$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass:
Il existe une extractrice ϕ tel que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Notons $c = \lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)}$
Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\phi(n)} \leq b$ le passage à la limite donne :
$a \leq c \leq b$
Ainsi, f est définie et continue en c donc : $f(x_{\phi(n)}) \to_{n\to+\infty} f(c) \in \mathbb{R}$
Or par définition de la suite x_n :
$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{\phi(n)}) > \phi(n)$ donc $f(x_{\phi(n)}) \to +\infty$ contradiction
2)Montrons que f possède un maximum :
Soit $M = sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ qui existe car f est majorée
Si f n'a pas de maximum alors :
$\forall x \in [a,b], f(x) < M$
Posons $g : [a,b] \to \mathbb{R}$
$x \to \frac{1}{M - f(x)}$
Alors $g \in \mathscr{C}^0([a,b])$ et à valeurs > 0
Par 1, g est majorée :
$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b], g(x) \leq c$
En particulier, $c \geq g(a) > 0$
$\forall x \in [a,b], c \geq \frac{1}{M-f(x)} > 0$ donc $M - f(x) \geq \frac{1}{c}$ et $f(x) \leq M - \frac{1}{c}$
Or $M - \frac{1}{c} \leq M = sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ contradiction donc f possède un maximum
3) minorée et minimum : appliquons 1 et 2 à -f

IV Continuité de la réciproque

Propriété :
I intervalle non trivial : $f \in \mathscr{C}^0(I)$ strictement monotone
$J = f(I)$(intervalle par le TVI) Alors :
1) f réalise une bijection de I sur J
2) f^{-1} a même sens de variation que f
3) $f^{-1} \in \mathscr{C}^0(J)$
Démonstration :
on suppose f strictement croissante.
1) f est strictement croissante donc injective donc réalise une bijection sur image
2) Soit u et $v \in J$ tel que $u < v$:

si $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v)$:
$f(f^{-1}(u)) \geq f(f^{-1}(v))$ car f croissante
$u \geq v$ contradiction
ainsi f^{-1} strictement croissante
3) Soit $b \in J$(autre que le minimum éventuel de J).
Montrons que f^{-1} est continue à gauche en b c'est-à-dire :
$\lim_{y \to b^-} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$
Par le théorème de la limite monotone, $\lim_{y \to b^-} f^{-1}(y)$ existe est finie et $\leq f^{-1}(b)$
Notons $l = \lim_{y \to b^-} f^{-1}(y) \in \mathbb{R}$
Verifions que $l \in I$.
Puisque b n'est pas un minimum éventuel de J, il existe $u \in J$ tel que $u < b$
Par le théorème de la limite monotone :
$l : sup\{f^{-1}(y) : y \in J$ tel que $y < b\}$
En particulier : $f^{-1}(u) \leq l$ ainsi $\underbrace{f^{-1}(u)}_{\in I} \leq l \leq \underbrace{f^{-1}(b)}_{\in I}$
Or I est un intervalle donc $l \in I$
la fonction f est donc continue en l :
$\lim_{x \to l} f(x) = f(l)$
Par ailleurs : $l = \lim_{y \to b^-} f^{-1}(y)$ donc $b = f(l)$ et $l = f^{-1}(b)$
f^{-1} est bien continue à gauche de même à droite si b n'est pas le maximum éventuelle de J

V Dérivabilité implique continuité + dérivation du produit

Propriété :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ si f est dérivable alors f est continue en a
Démonstration : Pour $x \neq a$:
$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to_{x \to a} f(a) + 0 * f'(a)$ car $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ converge vers f'(a) quand x tend vers a
Propriété : Soit $a \in I$, f et g :$I \to \mathbb{R}$ dérivable en a alors :
fg dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
Démonstration : Pour $x \in I \backslash \{a\}$:
$(fg)(x) - (fg)(a) = f(x)g(x) - f(a)g(a)$
$= (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$
$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})g(x) + f(a)(\frac{g(x)-g(a)}{x-a})$
or g dérivable en a donc continue en a : $g(x) \to_{x \to a} g(a)$ d'où :
$\to_{x \to a} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

VI Dérivation composée

Propriété :
I,J intervalles non triviaux
$a \in I, b \in J$
$f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$
$b = f(a)$ f dérivable en a, g dérivable en b
Alors : $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$
Démonstration : Pour $x \in I \backslash \{a\}$:
Posons $\tau : J \to \mathbb{R}$
$y \neq b \to \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$
$b \to g'(b)$
On a alors :
τ continue en b (par définition de g'(b))
$\forall y \in J, g(y) = g(b) + (y-b)\tau(y)$
Ainsi pour $x \in I$:
$g(f(x)) = g(b) + (f(x) - b)\tau(f(x))$
pour $x \in I \backslash \{a\}$

$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\tau(f(x))$
Or : f est dérivable donc continue en a donc $f(x) \rightarrow_{x\rightarrow a} f(a) = b$
τ continue en b donc $\tau(f(x)) \rightarrow_{x\rightarrow a} \tau(b)$
Puis : $\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} \rightarrow_{x\rightarrow a} f'(a)\tau(b)$
Or $\tau(b) = g'(b) = g'(f(a))$

VII Formule de Leibniz

Propriété :
Soit $n \in \mathbb{N}$ $(f,g) \in (\mathscr{C}^n(I))^2$ alors :
$fg \in \mathscr{C}^n(I)$ et :
$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
Démonstration : pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :
H_n = si f et g sont $\mathscr{C}^n$, fg aussi et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
Initialisation : n=0 f et g sont $\mathscr{C}^0$ donc fg sont $\mathscr{C}^0$ connue
$(fg)^{(0)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-0)} = fg$ Vrai
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie :
Soit $(f,g) \in (\mathscr{C}^{n+1}(I))^2$
a fortiori f et g sont $\mathscr{C}^n$ donc : $fg \in \mathscr{C}^n$ et :
$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
Pour $k \in [[0,n]]$
$f^{(k)}\mathscr{C}^{n+1-k}(I) \subset \mathscr{C}^1(I)$
$f^{(n-k)}\mathscr{C}^{k+1}(I) \subset \mathscr{C}^1(I)$
Ainsi $(fg)^{(n)}$ est dérivable et :
$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{n-k+1}$ $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$
On remplace k par k-1 dans la première somme :
$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$
$$(fg)^{(n+1)} = \underbrace{f^{(0)} g^{(n+1)}}_{=\binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}} + \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{[\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}]}_{=\binom{n+1}{k} Pascal} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$
$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$
qui est bien continue car pour $k \in [[0; n+1]]$,
$f^{(k)} \in \mathscr{C}^{n+1-k}(I) \subset \mathscr{C}^0(I)$
$g^{n+1-k} \in \mathscr{C}^k(I) \subset \mathscr{C}^0(I)$