# Démonstration kholle 21

## I Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$

Définition :
Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est une partie de I de $\mathbb{K}[X]$ tel que :
1) I est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X],+)$
2) $\forall P \in I, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in I$
Propriété :
Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme $P\mathbb{K}[X]$ avec $P$ unique à association près
Démonstration :
**Unicité** On sait que :
$P_1\mathbb{K}[X] = P_2\mathbb{K}[X] \iff P_1$ et $P_2$ associé
**Existence :** Soit $I$ idéal de $\mathbb{K}[X]$ :
Si $I = \{0\}$: $P = 0$ convient
Sinon, posons $E = \{deg(B) : B \in I \backslash \{0\}\}$
Alors $E \subset \mathbb{N}$ :
$E \neq \emptyset$ car $I \neq \{0\}$ et $0 \in I$
Ainsi E possède un minimum d :
Soit $B \in I\backslash\{0\}$, tel que $deg(B) = d$
Montrons que $I = B\mathbb{K}[X]$ :
$\boldsymbol{B\mathbb{K}[X] \subset I}$ :
$B \in I$ donc: $\forall Q \in \mathbb{K}[X], BQ \in I$
$\boldsymbol{I \subset B\mathbb{K}[X]}$ :
Soit $A \in I$ comme $B \neq 0$ :
$\exists!(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2, (A = BQ + R)$ et $deg(R) < deg(B)$
$R = A - BQ$ donc $R \in I$ or $deg(R) < deg(B) = d$ donc comme $d = min(E)$, $R = 0$
$A = BQ \in B\mathbb{K}[X]$

## II En admettant le théorème de D'Alembert-Gauss: description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$

Propriété :
1) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1
2) Dans $\mathbb{R}[X]$ :
-les polynômes de degré 1
-ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif
Démonstration :
1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}, P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 :
D'une part, P n'est pas constant.
D'autre part, si P=QR avec Q et R non constant :
$deg(P) = deg(Q) + deg(R) \geq 2$ contradiction donc P est irréductible.
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, P irréductible montrons que deg(P)=1
P irréductible donc non constant.
Par le théorème de D'Alembert-Gauss : $\exists z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$
$\exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - z)Q$
Or P irréductible donc Q constant d'où $deg(P) = 1$

2) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, P irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ on a de même :
$\exists z \in \mathbb{C}, P(z)=0$
**$1^{er}$ cas :** $z \in \mathbb{R}$, idem que dans $\mathbb{C}[X]$, $P=(X-z)Q$ avec Q constant $deg(P)=1$
**$2^{eme}$ cas :** $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ comme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{z}$ aussi est racine de P
Comme $z \neq \bar{z}$ :
$\exists Q \in \mathbb{C}[X]$,$P=(X-z)(X-\bar{z})Q$
$P=\underbrace{(X^2-2*Re(z)X+|z|^2)}_{\in\mathbb{R}[X]}Q$
On constate que $Q$ est le quotient de la division euclidienne de $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X^2-2*Re(z)X+|z|^2) \in \mathbb{R}[X]$ donc $Q \in \mathbb{R}[X]$
Comme P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ Q est constante $deg(P)=2$ et P n'a pas de racine réelle donc son discriminant est strictement négatif

# III Factorisation de $X^n-1$ dans $\mathbb{R}[X]$ selon la parité de n

Factorisons $X^n-1$ dans $\mathbb{R}[X]$
**$1^{er}$ cas :** n paire , $n=2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$
$e^{\frac{2ik\pi}{n}}=e^{\frac{ik\pi}{p}}$,$0 \leq k \leq 2p-1$
$z_0=1$ et $z_p=-1$, les autres $\in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$
Pour $k \in [[1,p-1]]$ : $\bar{z}_k=e^{\frac{-ik\pi}{p}}=e^{\frac{i(2p-k)\pi}{p}}=z_{2p-k}$ avec $2p-k \in [[p+1,2p-1]]$
$X^{2p}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\underbrace{(X-z_k)(X-\bar{z}_k)}_{=X^2-2Re(z)X+|z|^2}$
$X^{2p}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X^2-2cos(\frac{k\pi}{p})X+1)$
**$2^{eme}$ cas :** $n=2p+1(p \in \mathbb{N}^*)$
$z_k=e^{\frac{2ik\pi}{2p+1}}$,$0 \leq k \leq 2p$
$z_0=1$, les autres sont dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:
pour $k \in [[1,p]]$, $\bar{z}_k=e^{-\frac{2ik\pi}{2p+1}}=e^{\frac{2i(2p+1-k)\pi}{2p+1}}$ avec $2p+1-k \in [[p+1,2p]]$
$X^{2p+1}-1=(X-1)\prod_{k=1}^{p}(X-z_k)(X-\bar{z}_k)$
$X^{2p+1}-1=(X-1)\prod_{k=1}^{p}(X^2-2cos(\frac{2k\pi}{2p+1})X+1)$

# IV Enoncer sans démonstration les relations coefficients-racines, les formules $\sum_{k=1}^n x_k^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}=\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$. Exemple : somme des carrés, cubes et inverses des racines de $X^3-3X+1$

Propriété :
soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ alors :
1) la somme des multiplicités de ses racines est $\leq n$
2) égalité si et seulement si P scindé (toujours le cas quand $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)
Propriété :
1) $\sum_{k=1}^n x_k^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$

2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}=\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}$
Démonstration :
1) $(\sum_{k=1}^n x_k)^2=\sum_{k=1}^n x_k^2+2\sum_{i<j}x_ix_j$
2) Mise au même dénominateur.
Exemple :
$P=X^3-3X+1=(X-a)(X-b)(X-c)$
avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ :
$\sigma_1=a+b+c=0$
$\sigma_2=ab+bc+ac=-3$
$\sigma_3=abc=-1$

1) $a^2+b^2+c^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=6$
2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=3$
3) Comme $(a,b,c)$ sont racines de $X^2-3X+1$ on a :
$a^3+b^3+c^3=(3a-1)+(3b-1)+(3c-1)$
$a^3+b^3+c^3=3\sigma_1-3=-3$

# V Existence et unicité de la forme irréductibles d'une fraction rationnelle.

Propriété :
Tout $F\in\mathbb{K}(X)$ possède un couple de représentants premier entre eux .
Il est unique à association près.
Démonstration :
**Existence :** Soit $(A,B)\in(\mathbb{K}[X])^2$ avec $B\neq 0$ tel que $F=\frac{A}{B}$
Soit $D=A\wedge B\neq 0$ car $(B\neq 0)$
$\exists(U,V)\in(\mathbb{K}[X])^2, A=DU$ et $B=DV$ $V\neq 0$ car $B\neq 0$
on a $F=\frac{U}{V}$ et $U\wedge V=1$
**Unicité :** si $F=\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$
avec $(A_1,A_2,B_1,B_2)\in(\mathbb{K}[X])^4$ $B_1$ et $B_2\neq 0$
$A_1\wedge B_1=A_2\wedge B_2=1$
On a :
$A_1B_2=A_2B_1$ ainsi $B_1|A_1B_2$ or $A_1\wedge B_1=1$ donc $B_1|B_2$ de même $B_2|B_1$ :
$\exists\lambda\in\mathbb{K}^*, B_2=\lambda B_1$ puis :
$\lambda A_1B_1=A_2B_1$
or $B_1\neq 0$ donc $A_2=\lambda A_1$ (intégrité de $\mathbb{K}[X]$)

# VI Coefficients d'un pôle simple (formule $\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$), décomposition de $\frac{1}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$

Propriété :
Si $\alpha$ est un pôle simple de $F=\frac{A}{B}$ avec $A\wedge B=1$.
Alors le coefficient de $\frac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en élément simple est $\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$
Démonstration :
Soit $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $B=(X-\alpha)Q$ et $Q(\alpha)\neq 0$(en effet $A\wedge B=1$ donc $\alpha$ pôle simple signifie $\alpha$ racine simple de B)
Soit $\lambda$ le coefficient cherché :
D'une part : $\lambda=(X-\alpha)F(X)|_\alpha=\frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$
D'autre part : $B'=Q+(X-\alpha)Q'$ donc $B'(\alpha)=Q(\alpha)$
Exemple :
$\frac{1}{X^n-1}(\mathbb{K}=\mathbb{C}, n\geq 1)$
on a la factorisation : $X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega^k), \omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$
Donc $\frac{1}{X^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega^k}$
Avec $A=1$ et $B=X^n-1$, $B'=nX^{n-1}$
$\lambda_k=\frac{A(\omega^k)}{B'(\omega^k)}=\frac{1}{n(\omega^k)^{n-1}}==\frac{\omega^k}{n}$ car $(\omega^k)^n=1$
On a donc : $\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^k}{X-\omega^k}$

# VII Décomposition en élément simples de $\frac{P'}{P}$ lorsque P est scindé

Soit P scindé :
$P=\lambda\prod_{k=1}^{r}(X-\alpha)^{m_k}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}^*, r\in\mathbb{N}^*, (\alpha_1,...,\alpha_r)\in\mathbb{K}^r$, racines distinctes de multiplicités $(m_1,....,m_r)$

alors $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\alpha_k}$
Démonstration :
$P = \lambda P_1 ... P_r$ avec $P_k = (X-\alpha_k)^{m_k}$ et $P' = \lambda \sum_{k=1}^{r} P_1 ... P_k' ... P_r$
$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{P_k'}{P_k} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\alpha_k}$