Démonstration kholle 14

I Inégalité de Lagrange

Propriété :
En notant M un majorant $|f^{n+1}|$ sur $[a,b]$ si $b \leq a$ (il existe par le TVE) :
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$
Démonstration :
si $a < b$:
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| = |\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt|$
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| \leq \int_a^b |\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)|dt$
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| \leq M\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt$
Car pour $t \in [a,b]$:
$|f^{(n+1)}(t)| \leq M$
et $\frac{(b-t)^n}{n!} \geq 0$ donc : $\frac{(b-t)^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{(b-t)^n}{n!}M$
on intègre de a à b ave $a \leq b$:
$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt = [-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}]_a^b$
$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
si $b \leq a$:
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| = |\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt|$
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| = |\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt|$
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| \leq \int_b^a \frac{|b-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|dt$
Comme $b \leq a$ et $t \in [b,a]$:
$|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| \leq M\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}dt$
enfin : $\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}dt = [\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}]_b^a$
$\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}dt = \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}$
$\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}dt = \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

II Unicité et produit du D.L

Propriété :
1) Si on a :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x-a)^k + o_{x\to a}(x^n)$
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(x-a)^k + o_{x\to a}(x^n)$
Alors : $\forall k \in [[0,n]], \alpha_k = \beta_k$
Démonstration :
posons $E = \{k \in [[0,n]] : \alpha_k \neq \beta_k$
si $E \neq \emptyset$: comme $E \subset \mathbb{N}$, il a un minimum p :
On a :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x-a)^k + (x-a)^n\epsilon_1(x)$ où $\epsilon_1(x) \to_{x\to a} 0$
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(x-a)^k + (x-a)^n\epsilon_2(x)$ où $\epsilon_2(x) \to_{x\to a} 0$
ainsi pour tout $x \in d_f$:
$\sum_{k=p}^{n}(\alpha_k - \beta_k)(x-a)^k + (x-a)^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x))$

la somme commence à partir de p car $\alpha_k - \beta_k = 0$ si $k < p$
On divise par $(x-a)^p$:
$\sum_{k=p}^{n}(\alpha_k - \beta_k)(x-a)^{k-p} + (x-a)^{n-p}(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x))$
limite $x \to a$:
$\alpha_p - \beta_p = 0$
Or $p = min(E) \in E$ contradiction
Propriété :
Si f et g admettent des DL à l'ordre n en a alors fg aussi, sa partie régulière est le produit de f et g en ne retenant que les exposants $\leq n$
Démonstration :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon_1(x)$ où $\epsilon_1(x) \to_{x\to a} 0$
$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon_2(x)$ où $\epsilon_2(x) \to_{x\to a} 0$
4 types de termes dans le produit :
1) $\alpha_i \beta_j (x-a)^{i+j}$ pour $0 \leq i,j \leq n$ qui est $o(x-a)^n$ si $i+j > n$
2) $\alpha_k (x-a)^{k+n} \epsilon_2(x) = (x-a)^n \underbrace{(\alpha_k (x-a)^k \epsilon_2(x))}_{\to_{x\to a} 0} = o(x-a)^n$
3) $\beta_k (x-a)^{k+n} \epsilon_1(x) = (x-a)^n \underbrace{(\beta_k (x-a)^k \epsilon_1(x))}_{\to_{x\to a} 0} = o(x-a)^n$
4)$(x-a)^{2n} \epsilon_1(x)\epsilon_2(x) = (x-a)^n \underbrace{((x-a)^n \epsilon_1(x)\epsilon_2(x))}_{\to_{x\to a} 0}$
donc :
$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$
où $\gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i}$

III Etablir les DL en 0 à tout ordre de $1/(1 \pm x)$, puis de $\ln(1+x)$ et $arctan(x)$(primitivation admise)

On a :
$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 0$
donc :
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$
$\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x} \to_{x\to 0} 0$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_{x\to 0}(x^n)$
De même en remplaçant x par -x on obtient :
$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
On primitive l'expression trouvée afin d'avoir le DL de $\ln(1+x)$:
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1})$
On remplaçant x par x^2 on dans le DL de $\frac{1}{1+x}$ on trouve :
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$
On primitive cette expression pour obtenir l'arctangente :
$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$

IV $DL_5(0)$ de $\tan(x)$ par produit. Retrouver cela par division selon les puissances croissantes

$tan(x) = sin(x) \times \frac{1}{cos(x)}$ On a donc :
$sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)$
$\frac{1}{cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$
$sin(x) \times \frac{1}{cos(x)} = (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6))(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5))$
$tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ on trouvera aussi cela en posant la division euclidienne de sin(x) par $cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$:

$$
\begin{array}{r|l}
x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5 & 1-\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 \\ \cline{2-2}
-(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5) & x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5 \\ \hline
\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{20}x^5 & \\
-(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^5) & \\ \hline
\frac{2}{15}x^5 & \\
-(\frac{2}{15}x^5) & \\ \hline
o(x^5) &
\end{array}
$$

V $DL_8(0)$ de $\tan(x)$ en exploitant $tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

Comme $\tan(x) \to_{x\to 0} 0 \tan(x) = o(1)$
donc :
$1 + tan^2(x) = 1 + o(1)$ c'est-à-dire : $tan'(x) = 1 + o(1)$
primitivons (tan(0)=0)
$tan(x) = tan(0) + x + o(x)$
Par parité : $tan(x) = x + o(x^2)$
Recommençons :
$1 + tan^2(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$
Primitivons :
$tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$
à nouveau :
$1 + tan^2(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 o(x^4)$
Primitivons :
$tan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
Enfin:
$1 + tan^2(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^6)$
$tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$

VI $DL_4(0)$ de $\frac{sh(x)-sin(x)}{1-\cos(x)}$

On a :
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = \frac{x^3(...+o(x^p))}{x^2(...+o(x^p))}$
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = x\frac{(...+o(x^p))}{(...+o(x^p))}$
calcul de composé et produit d'ordre identiques :
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = x(... + o(x^p))$
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = ... + o(x^{p+1})$
$p + 1 = 4$ donc $p = 3$ ordre du numérateur $p + 3 = 6$ du dénominateur $p + 2 = 5$
Calculons :
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = \frac{(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5)-(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6))}{1-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}+o(x^6))}$
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = \frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^6)}{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}$
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = \frac{x^3}{x^2}\frac{\frac{1}{3}+o(x^3)}{\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2+o(x^3)}$
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = 2x(\frac{1}{3} + o(x^3)) \times \frac{1}{1-\frac{1}{12}x^2+o(x^3)}$
avec $u(x) = \frac{1}{12}x^2 + o(x^3)$ on applique la composé :
$\frac{1}{1-\frac{1}{12}x^2+o(x^3)} = \frac{1}{1-u(x)}$
$\frac{1}{1-\frac{1}{12}x^2+o(x^3)} = 1 + \frac{1}{12}x^2 + 0 + 0 + o(x^3)$
d'où :
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = (1 + \frac{1}{12}x^2 + o(x^3))2x(\frac{1}{3} + o(x^3))$
$\frac{sh(x)-sin(x)}{1-cos(x)} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}x^3 + o(x^4)$