Démonstration kholle 4

I Résolution des équations $\sin(x) = \sin(a)$ et $\cos(x) = \cos(a)$

Propriété : soit $a \in \mathbb{R}$:

1) Pour $x \in \mathbb{R}$

$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow (x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a[2\pi]$)

2) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$\cos(x) = cos(a) \Leftrightarrow (x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv -a[2\pi]$)

Démonstration :

1) $\sin(x) = sin(a) \Leftrightarrow \sin(x) - \sin(a) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin(\frac{x-a}{2})\cos(\frac{x+a}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(\frac{x-a}{2}) = 0$ ou $cos(\frac{x+a}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow (\frac{x-a}{2}) = 0[\pi]$ ou $x + a = \pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow x - a \equiv 0[2\pi]$ ou $x + a \equiv \pi[2\pi]$

$x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a[2\pi]$

2) $\cos(x) - \cos(a) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(\frac{x+a}{2})sin(\frac{x-a}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(\frac{x+a}{2}) = 0$ ou $\sin(\frac{x-a}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+a}{2} \equiv 0[\pi]$ ou $\frac{x-a}{2} \equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow x \equiv -a[2\pi]$ ou $x \equiv a[2\pi]$

II Tangente: dérivée, $\tan(a \pm b)$, expression de $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/2)$

Propriété :

$\forall x \in \mathscr{D}_{tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Démonstration :

$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - sin(x)cos'(x)}{\cos^2(x)}$

$= \frac{\sin^2(x) + cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Propriété : Lorsque cela a un sens :

$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$ ou $\tan(\theta) = \frac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2}}$

Démonstration : $\tan(a + b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

$\tan(a + b) = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$

$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

Propriété : formules d'angle moitié.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $t = \tan(\frac{\theta}{2})$

Alors :

$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$ (lorsque cela a un sens)

Démonstration :
$\sin(\theta) = 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$

$$= 2\tan(\tfrac{\theta}{2})\underbrace{\cos^2(\frac{\theta}{2})}_{\frac{1}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})}}$$

$$= \frac{2t}{1+t^2}$$

Comme $\cos(\theta) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1$
$\cos(\theta) = 2 * \frac{1}{1-t^2} - 1$
$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\tan(\theta)$: avec les formules précédentes et $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ donc $\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$

III Inégalité triangulaire complète dans $\mathbb{C}$

Propriété :
1) $\forall(u,v) \in \mathbb{C}^2, |u+v| \leq |u| + |v|$
2) $\forall(u,v) \in \mathbb{C}^2, |u-v| \leq |u| + |v|$
3) $\forall(u,v) \in \mathbb{C}^2, ||u| - |v|| \leq |u-v|$
4) $\forall(u,v) \in \mathbb{C}^2, ||u| - |v|| \leq |u+v|$
c'est-à-dire:$||u| - |v|| \leq |u \pm v| \geq |u| + |v|$

Démonstration :
1) $|u+v|^2 = (u+v)\overline{(u+v)}$
$= (u+v)(\overline{u} + \overline{v})$
$= u\overline{u} + u\overline{v} + v\overline{u} + v\overline{v}$
$= |u|^2 + 2\mathbf{Re}(u\overline{v}) + |v|^2$ car $v\overline{u} = \overline{u\overline{v}}$
or :
$\mathbf{Re}(u\overline{v}) \leq |\mathbf{Re}(u\overline{v})| \leq |u\overline{v}| = |u||\overline{v}| = |u||v|$
d'où :
$|u+v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2$
Comme $|u+v|$ et $|u| + |v| \geq 0$:
$|u+v| \leq |u| + |v|$

2) Avec u et -v :
$|u + (-v)| \leq |u| + |-v|$
$|u-v| \leq |u| + |v|$

3) Avec u-v et v dans 1) :
$|(u-v) + v| \leq |u-v| + |v|$
c'est-à-dire $|u| - |v| \leq |u-v|$
En échangeant les roles de u et v :
$|v| - |u| \leq |v-u| = |u-v|$
Comme $|v| - |u| \leq |u-v|$ et $|u| - |v| \leq |u-v|$ donc
$||u| - |v|| \leq |u-v|$
4) On applique 3 à u et -v

IV $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité

Propriété : (inégalité triangulaire)
Soit $(z_1, .., z_n) \in \mathbb{C}^n$ alors :

1) $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$
2) C'est une égalité si et seulement si :

$$\exists\theta \in \mathbb{R}, \forall k \in [[1,n]], z_k e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+$$

c'est-à-dire : tous les z_k non nuls et de même arguments

Démonstration : 1) Notons $S = \sum_{k=1}^n z_k \in \mathbb{C}$
$T = \sum_{k=1}^n |z_k| \in \mathbb{R}_+$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $S = |S|e^{-i\theta}$
Alors :
$|S| = Se^{-i\theta}$
$= \sum_{k=1}^n z_k e^{-i\theta}$
Partie réelle :
$\mathbb{R} \ni |S| = \sum_{k=1}^n \mathbf{Re}(z_k e^{-i\theta})$
$\leq \sum_{k=1}^n |z_k e^{i\theta|}$ car $\forall u \in \mathbb{C}, \mathbf{Re}(u) \leq |u|$
$= |z_k||e^{-i\theta} = |z_k|$
c'est-à-dire : $|S| \leq T$
2)
$\Longrightarrow$ on suppose $|S| = T$
différence : $\sum_{k=1}^n [|z_k e^{-i\theta}| - \mathbf{Re}(z_k e^{-i\theta})] = 0$
donc :

$$\forall k \in [[1,n]], |z_k e^{i\theta}| - \mathbf{Re}(z_k e^{-i\theta}) = 0$$

donc, pour $k \in [[1,n]]$, $z_k e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+$
$\Longleftarrow$ soit θ convient :
$|S| = |\sum_{k=1}^n z_k|$
$= |\sum_{k=1}^n (|z_k|e^{i\theta})$
$= |Te^{i\theta)}|$
$= T$ car $T \in \mathbb{R}_+$

V Formule $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$ puis exemples de linéarisation

Propriété :

$$\forall(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2, e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$$

Démonstration :
$e^{\theta+\phi} = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)$
$= \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) + i(\sin(\theta)cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi))$
$= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(cos(\phi) + i\sin(\phi))$
$= e^{i\theta}e^{i\phi}$

Propriété : (formules d'Euler)
Pour $\theta \in \mathbb{R}$
$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Définition : "linéariser" : transformer un produit de fonctions circulaires en somme de fonctions circulaires.
ex :
1) $\sin^3(t) = (\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i})^3$
$= \frac{1}{(2i)^3}[(e^{it})^3 - 3(e^{it})^2e^{-it} + 3e^{it}(e^{-it})^2 - (e^{-it})^3]$
$= \frac{1}{(2i)^3}[e^{3it} - e^{-3it} - 3(e^{it} - e^{-it})]$
$= \frac{1}{(2i)^2}[\sin(3t) - 3\sin(t)]$
$= \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)$
d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt = [-3/4\cos(t) + \frac{1}{12}\cos(3t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= 0 - (-\frac{3}{4} + \frac{1}{12}) = \frac{2}{3}$
2) $\cos(p)\cos(q) = \frac{e^{ip}+e^{-ip}}{2} \times \frac{e^{iq}+e^{-iq}}{2}$
$= \frac{1}{4}(e^{i(p+q)}e^{i(p-q)} + e^{-i(p-q)}e^{-i(p+q)})$
$= \frac{\cos(p+q)+\cos(p-q)}{2}$

VI Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$

Pour $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$ notons :

$C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$
$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$

Calculons plutôt :

$T_n = C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$
$T_n = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k$

Si $e^{ix} \neq 1$, c'est-à-dire $x \not\equiv 0[2\pi]$
On reconnait une suite géométrique donc :

$T_n = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}$
$= \frac{1-(e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$
$= \frac{1-(e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$
$= \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}(e^{\frac{-i(n+1)x}{2}}-e^{\frac{i(n+1)x}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}}(e^{\frac{-ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}})}$

$T_n = e^{\frac{in}{2}}\frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2i\sin(\frac{x}{2})}$

$T_n = e^{\frac{in}{2}}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

$C_n = \cos(\frac{n/2}{x})\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

$S_n = \sin(\frac{n/2}{x})\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

Si $e^{ix} = 1$ c'est-à-dire $x \equiv 0[2\pi]$
$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

$\sum_{k=0}^{n} 0 = 0$

VII Second degré complexe : forme canonique, racines, factorisation. Cas des coefficients réels

Définition : forme canonique du trinôme

$az^2 + bz + c = a((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$ où $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$

Démonstration :

$$az^2 + bz + c = a(\underbrace{z^2 + \frac{b}{a}z}_{debut\quad de\quad (z+\frac{b}{2a})^2} + \frac{c}{a})$$
$$= a((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$
$$= a((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$$

Propriété : racines et factorisation

$az^2 + bz + c = 0$

1) si $\Delta = 0$: l'unique solution est:

$z = \frac{-b}{2a}$

On a $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$
2) Si $\Delta \in \mathbb{C}^*$ l'équation possède deux solutions.
En notant δ, une racine carré complexe de Δ, ce sont :
$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$
On a : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(a - z_2)$
Démonstration :

1)$az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{2a})^2$ si $\Delta = 0$
$= a(z - z_0)^2$
nul si et seulement si $z = z_0$
2)$az^2 + bz + c = a((z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\delta}{2a})^2)$

$= a(z + \frac{b+\delta}{2a})(z + \frac{b-\delta}{2a})$
$= a(z - z_1)(z - z_2)$
nul si et seulement si $z = z_1$ ou $z = z_2$

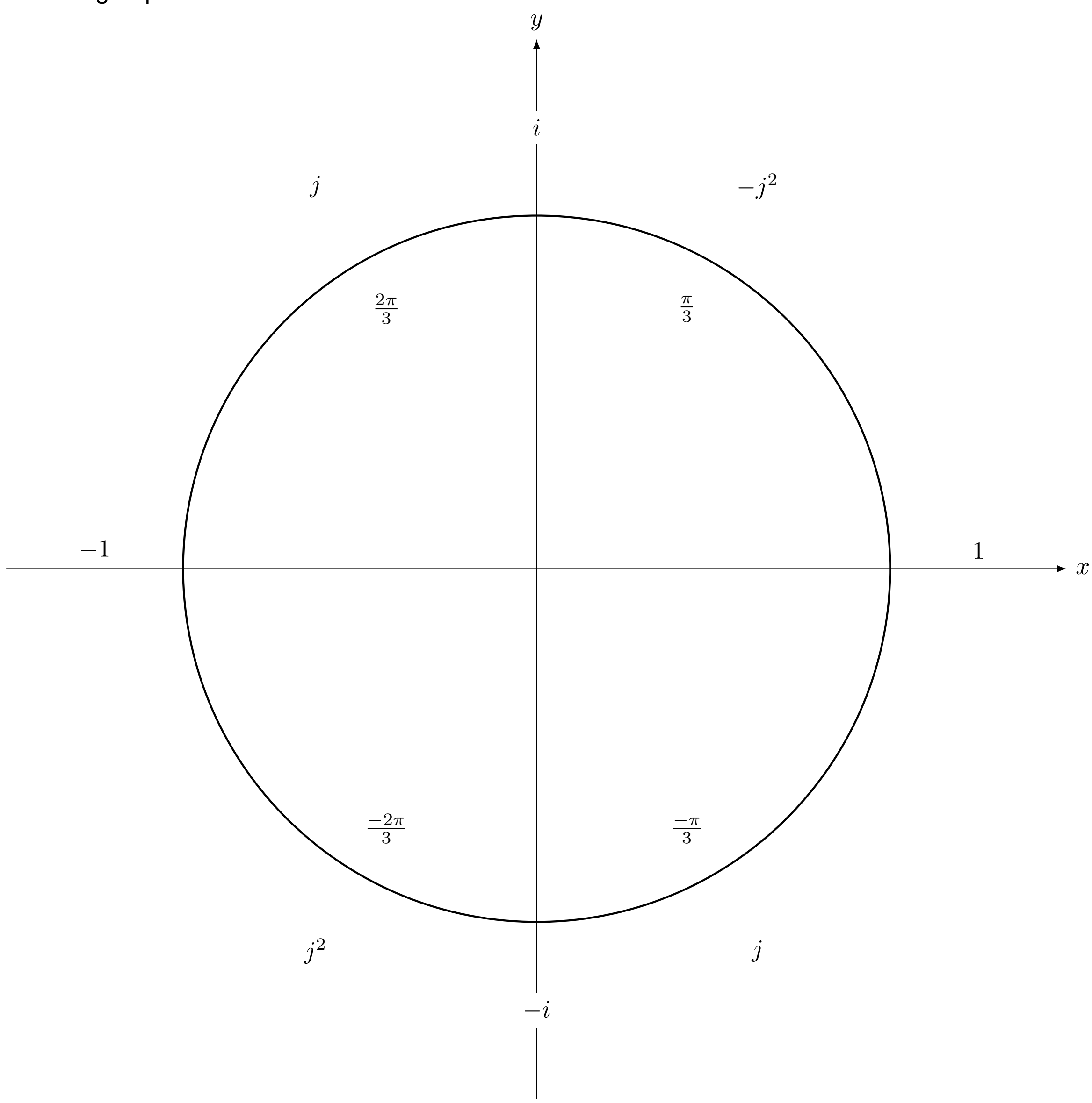
Propriété : cas des coefficients réels
$(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$
Si $\Delta > 0$, les deux racines sont réelles :
$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$ La racine double est réelle :
$z = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$ les racines sont complexes non réelles conjuguées :
$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}$

VIII Racines n-ièmes de l'unité (avec les cas $n \in \{2, 3, 4, 6\}$)

Définition : $\mathbb{U}_m = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$
C'est le groupe des racines n-ièmes de l'unité



Les éléments de $\mathbb{U}_m$ sont les affixes d'un poligone régulier de cotés n

$\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$
$\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$
$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$
$\mathbb{U}_6 = \{1, -j^2, j, j^2, -j, -1\}$