Démonstration kholle 25

I Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique.

Propriété :
Soit $\phi \in A_n(E)$
$\forall(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n) \in E^n, \forall\sigma \in S_n, \phi(\vec{x}_{\sigma(1)},...,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\phi(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$
On dit que ϕ est antisymétrique
Démonstration :
cas où $\sigma = (i \quad j), i < j$ Comme ϕ est alternée :
$\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) = 0$
$0 = \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i + \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)$
$0 = \underbrace{\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n)}_{=0} + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n) + \phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n) + \underbrace{\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)}_{=0}$
$\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_j,..., \vec{x}_i,...,\vec{x}_n) = -\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_i,..., \vec{x}_j,...,\vec{x}_n)$
Or $\epsilon(\sigma) = -1$
Pour σ quelconque :
$\sigma = \sigma_1....\sigma_m$ avec σ_k transposition.
$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)},..., \vec{x}_{\sigma(n)}) = \underbrace{\epsilon(\sigma_1)...\epsilon(\sigma_m)}_{\epsilon(\sigma)}\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_m)$
$\phi(\vec{x}_{\sigma(1)},...,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\phi(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$

II $det_{\mathscr{B}}$ est alternée et vaut 1 sur $\mathscr{B}$.

Propriété :
Soit $\mathscr{B}$ une base de E .
Alors : $det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-alternée sur E et $det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$
Démonstration : **n-alternée :** si $\vec{x}_i = \vec{x}_k$ avec $i \neq k$: $\forall j \in [[1,n]], a_{ij} = a_{kj}$, $\tau = (i \quad k)$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),\tau(j)}$ car $\vec{x}_i = \vec{x}_k$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = \sum_{\gamma\in S_n} \underbrace{\epsilon(\gamma\tau)}_{=\epsilon(\gamma)\epsilon(\tau)=-\epsilon(\gamma)} \prod_{j=1}^{n} a_{\gamma(\tau(j)),\tau(j)}$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = -\sum_{\gamma\in S_n} \epsilon(\gamma) \prod_{l=1}^{n} a_{\gamma(l),l}$ en posant $l = \tau(j)$
$det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = -det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$ qui est donc nul
$\boldsymbol{det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1}$:
$a_{ij} = \delta_{ij}$
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \delta_{\sigma(j),j}$
si $\sigma \neq id$: il existe j tel que $\sigma(j) \neq j$ donc $\delta_{\sigma(j),j} = 0$ produit nul
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \epsilon(id) \prod_{j=1}^{n} \delta_{j,j}$
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$

III Formule de changement de base des déterminants, caractérisation des bases.

Propriété :
Fixons $\mathscr{B}$ base de E. Soit $\phi \in A_n(E)$, alors :
$\forall \mathscr{F} \in E, \phi(\mathscr{F}) = \phi(\mathscr{B}) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
Propriété :
formule de changement de base. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ bases de E. Alors :
$\forall \mathscr{F}, det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
Démonstration :
cas particulier de la propriété précédente avec $\phi = det_{\mathscr{C}} \in A_n$
Corrolaire :
$\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ bases de E. Alors :
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$ et $det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \frac{1}{det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})}$
Démonstration :
En prenant $\mathscr{F} = \mathscr{C}$: $\underbrace{det_{\mathscr{C}}(\mathscr{C})}_{=1} = det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$
Corrolaire :
Soit $\mathscr{B}$ base de E, $\mathscr{F} \in E^n$ quelconque . Alors :
$\mathscr{F}$ base de E $\Longleftrightarrow det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$
Démonstration :
$\Rightarrow$: propriété précédente
$\Leftarrow$: par contraposition.
Supposons que $\mathscr{F}$ ne soit pas une base de E. Comme elle a $n = dim(E)$ vecteurs, si elle était libre alors ce serait une base, elle est donc liée.
Commme $det_{\mathscr{B}} \in A_n(E)$:
$det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 0$

IV $det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$ + $det_{\mathscr{B}}(f(x_1),...,f(x_n)) = det(f) det_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$
1) Pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E
$det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = det_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{C}))$
On note cette valeur $det(f) \in \mathbb{K}$ c'est le déterminant de f
2) $\forall \mathscr{F} \in E^n, det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = det(f) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
Démonstration :
1) Soit $\phi : E^n \to \mathbb{K}$
$\quad (\vec{x}_1,...,\vec{x}_n) \mapsto det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{x}_n))$
Montrons que $\phi \in A_n(E)$:
$\phi : E^n \to \mathbb{K}$
n-linéarité Soit $i \in [[1,n]]$, fixons $\vec{x}_k \in E$ pour $k \neq i$.
Soit $\vec{y}$ et $\vec{z} \in E$, $\lambda \in K$.
$\phi(\vec{x}_1,...,\vec{y} + \lambda\vec{z},...,f(\vec{x}_n)) = det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{y}) + \lambda f(\vec{z}),..,f(\vec{x}_n))$ car $f \in \mathscr{L}(E)$
$\phi(\vec{x}_1,...,\vec{y} + \lambda\vec{z},...,f(\vec{x}_n)) = det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{y}),..,f(\vec{x}_n)) + \lambda det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),..., f(\vec{z}),..,f(\vec{x}_n))$ car $det_{\mathscr{B}} \in A_n(E)$
$\phi(\vec{x}_1,...,\vec{y} + \lambda\vec{z},...,f(\vec{x}_n)) = \phi(\vec{x}_1,...,\vec{y},...,f(\vec{x}_n)) + \lambda\phi(\vec{x}_1,..., \vec{z},...,f(\vec{x}_n))$
alternance : s'il existe $i \neq k$ tel que $\vec{x}_i = \vec{x}_k$:
$f(\vec{x}_i) = f(\vec{x}_k)$ donc comme $det_{\mathscr{B}}$ est alternée :
$det_{\mathscr{B}}(f(\vec{x}_1),...,f(\vec{x}_n)) = 0$
c'est-à-dire $\phi(\vec{x}_1,..., \vec{x}_n) = 0$
Conclusion : comme $\phi \in A_n(E)$ et $\mathscr{C}$ base de E on a :
$\forall \mathscr{F} \in E^n, \phi(\mathscr{F}) = \phi(\mathscr{C}) det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F})$ avec $\mathscr{F} = \mathscr{B}$:
$\phi(\mathscr{B}) = \phi(\mathscr{C}) det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$
donc, par définition de ϕ, $det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{C})) det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$

$det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = det_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{C}))$(formule de changement de base)
2) Si l'on écrit plutôt :
$\forall \mathscr{F} \in E^n, \phi(\mathscr{F}) = \phi(\mathscr{B}) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$
$\phi(\mathscr{F}) = det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$ c'est-à-dire $det(f)$ par 1
par définition de ϕ : $det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = det(f) det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$

V Propriété variées de $det(f)$ déduites de la question précédente.

Propriété :
$det(Id_E) = 1$
Démonstration :
Soit $\mathscr{B}$ base de E :
$det(Id_E) = det_{\mathscr{B}}(Id_E(\mathscr{B}))$
$det(Id_E) = det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$
Propriété :
$\forall f \in \mathscr{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, det(\lambda f) = \lambda^n det(f)$
Démonstration :
$\mathscr{B} = (\vec{e}_1,..,\vec{e}_n)$ base de E
Par définition : $det(\lambda f) = det_{\mathscr{B}}(\lambda f(\vec{e}_1),...,\lambda f(\vec{e}_n))$
$det(\lambda f) = \lambda det(f(\vec{e}_1), \lambda f(\vec{e}_2),..., \lambda f(\vec{e}_n))$ par linéarité par rapport à la première variable etc.
$det(\lambda f) = \lambda^n \underbrace{det_{\mathscr{B}}(f(\vec{e}_1),...,f(\vec{e}_n))}_{det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))=det(f)}$
Propriété :
$\forall (f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2, det(gf) = det(g)det(f)$
Démonstration :
Soit $\mathscr{B}$ base de E:
$det(gf) = det_{\mathscr{B}}(gf(\mathscr{B}))$
$det(gf) = det(g) \underbrace{det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))}_{=det(f)}$
Propriété : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$:
$f \in GL(E) \Leftrightarrow det(f) \neq 0$
Dans ce cas $det(f^{-1}) = \frac{1}{det(f)}$
Démonstration :
$f \in GL(E) \Leftrightarrow f(\mathscr{B})$ base de E
$\Leftrightarrow \underbrace{det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))}_{=det(f)} \neq 0$ si c'est le cas :
$ff^{-1} = Id_E$
$det(ff^{-1}) = det(Id_E)$
$det(f)det(f^{-1}) = 1$

VI $det({}^tA) = det(A)$

Propriété :
$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), det({}^tA) = det(A)$
Démonstration :
$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ ${}^tA = (a'_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$
$det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a'_{\sigma(j),j}$
$det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)}$
en posant $\sigma = \gamma^{-1}$ $det({}^tA) = \sum_{\in S_n} \underbrace{\epsilon(\gamma^{-1})}_{=\epsilon(\gamma)} \prod_{j=1}^n a_{j,\gamma^{-1}(j)}$
Dans le produit pour γ donnée, posons $j = \gamma(i)$:
$det({}^tA) = \sum_{\gamma \in S_n} \epsilon(\gamma) \prod_{i=1}^n a_{\gamma(i),i}$
$det({}^tA) = det(A)$

VII Déterminant triangulaire

Propriété : soit $A = (a_{ij}) \in M_n\mathbb{K}$ Si A est triangulaire (éventuellement diagonale) :
$det(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$
Démonstration :
Si $A \in \mathscr{T}_n^s(\mathscr{K})$:
pour $i > j, a_ij = 0$
$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$
Soit $\sigma \in S_n$ dès qu'il existe un $j \in [[1,n]]$ tel que $\sigma(j) > j$, le produit est nul. Les seules σ considéré sont ceux tel que $\sigma(j) \leq j$ pour $j \in [[1,n]]$:
$\sigma(1) \leq 1$ donc $\sigma(1) = 1$
$\sigma(2) \leq 2$ et $\sigma(1) \neq \sigma(2)$ (car σ injective) donc $\sigma(2) = 2$ etc.
donc $\sigma = id$
$det(A) = \epsilon(id) \prod_{j=1}^{n} a_jj$
Si $A \in \mathscr{T}_n^i$:
$det(A) = det(^tA)$ cas précédent.