# Démonstration kholle 18

## I Composition d'application linéaires, linéarité de la réciproque d'un isomorphisme.

Propriété :
soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(G,H)$ avec E,F,G,H K espace-vectoriel tel que : $f(E) \subset G$
Alors : $g \circ f \in \mathscr{L}(E,H)$
Démonstration :
Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
$(g \circ f)(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = g(f(\vec{x} + \lambda\vec{y}))$
$(g \circ f)(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = g(f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y}))$ car f est linéaire.
$(g \circ f)(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = g(f(\vec{x})) + \lambda g(f(\vec{x}))$ car g est linéaire.
$(g \circ f)(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = (g \circ f)(\vec{x}) + \lambda(g \circ f)(\vec{y})$
Propriété :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective (isomorphisme de E dans F) alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(E,F)$
Démonstration :
Soit $(\vec{y_1}, \vec{y_2}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
Notons $\vec{x_1} = f^{-1}(\vec{y_1}) \in E$ et $\vec{x_2} = f^{-1}(\vec{y_2}) \in E$
On a : $f(\vec{x_1} + \lambda\vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + \lambda f(\vec{x_2})$ car $f \in \mathscr{L}(E,F)$
$f(\vec{x_1} + \lambda\vec{x_2}) = \vec{y_1} + \lambda\vec{y_2}$
Donc par définition de $f^{-1}$ :
$\vec{x_1} + \lambda\vec{x_2} = f^{-1}(\vec{y_1} + \lambda\vec{y_2})$
On a bien : $f^{-1}(\vec{y_1} + \lambda\vec{y_2}) = f^{-1}(\vec{y_1}) + \lambda f^{-1}(\vec{y_2})$

## II Théorème de structure : $\mathscr{L}(E,F)$ est sous-espace vectoriel de $F^E$.

Propriété :
$\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est un K espace-vectoriel pour les opérations point par point c'est-à dire $f + g$ et $\lambda \cdot f$
Démonstration :
Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $F^E$ :
$\mathscr{L}(E,F) \subset F^E$ par définition
$\tilde{0} \in \mathscr{L}(E,F)$ donc $\mathscr{L}(E,F) \neq \emptyset$
Soit $(f,g) \in (\mathscr{L}(E,F))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ :
Montrons que $\underbrace{f + \lambda g}_{h} \in \mathscr{L}(E,F)$
Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ :
$h(\vec{x} + \alpha\vec{y}) = (f + \lambda g)(\vec{x} + \alpha\vec{y})$
$h(\vec{x} + \alpha\vec{y}) = f(\vec{x} + \alpha\vec{y}) + \lambda g(\vec{x} + \alpha\vec{y})$ par définition des opérations point par point
$h(\vec{x} + \alpha\vec{y}) = \underbrace{f(\vec{x}) + \alpha f(\vec{y})}_{f \in \mathscr{L}(E,F)} + \underbrace{\lambda g(\vec{x}) + \lambda\alpha g(\vec{y})}_{g \in \mathscr{L}(E,F)}$
$h(\vec{x} + \alpha\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x}) + \alpha(f(\vec{y}) + \lambda g(\vec{y}))$
$h(\vec{x} + \alpha\vec{y}) = h(\vec{x}) + \alpha h(\vec{y})$

## III Bilinéarité de la composition.

Propriété :
Soit E,F,G K sous-espace
1)$\forall (f,g) \in (\mathscr{L}(E,F))^2, \forall h \in \mathscr{L}(G,E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, (f+\lambda g)\circ h = f\circ h + \lambda(g\circ h)$
2)$\forall (f,g) \in (\mathscr{L}(E,F))^2, \forall h \in \mathscr{L}(F,G), \forall \lambda \in \mathbb{K}, h\circ (f+\lambda g) = (h\circ f) + \lambda(h\circ g)$
Démonstration :
1) Soit $\vec{x} \in G$ :
$((f+\lambda g)\circ h)(\vec{x}) = (f+\lambda g)(h(\vec{x}))$
$((f+\lambda g)\circ h)(\vec{x}) = f(h(\vec{x})) + \lambda g(h(\vec{x}))$
$((f+\lambda g)\circ h)(\vec{x}) = f\circ h(\vec{x}) + \lambda(g\circ h)(\vec{x})$
2) Soit $\vec{x} \in E$ :
$(h\circ (f+\lambda g))(\vec{x}) = h((f+\lambda g)(\vec{x}))$
$(h\circ (f+\lambda g))(\vec{x}) = h(f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x}))$
$(h\circ (f+\lambda g))(\vec{x}) = h(f(\vec{x})) + \lambda h(g(\vec{x}))$ car $h \in \mathscr{L}(F,G)$
$(h\circ (f+\lambda g))(\vec{x}) = (h\circ f)(\vec{x}) + \lambda(h\circ g)(\vec{x})$

## IV Image directe d'un sous-espace par une application linéaire.

Propriété :
E,F : K espace-vectoriel
E' : sous-espace vectoriel de E,$f \in \mathscr{L}(E,F)$
Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
Démonstration :
$f(E') \subset F$, par définition
$\vec{0}_E \in E'$ donc $f(\vec{0}_E) \in f(E') \neq \emptyset$
Soit $(\vec{x},\vec{y}) \in (f(E'))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
$\exists (\vec{u},\vec{v}) \in (E')^2, \vec{x} = f(\vec{u})$ et $\vec{y} = f(v)$
$\vec{x} + \lambda\vec{y} = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{v})$
$\vec{x} + \lambda\vec{y} = f(\vec{u} + \lambda\vec{v})$ car $f \in \mathscr{L}(E,F)$
Or : $(\vec{u},\vec{v}) \in (E')^2$ qui est un sous-espace vectoriel de E donc $\vec{u} + \lambda\vec{v} \in E'$ donc $f(\vec{u} + \lambda\vec{v}) \in f(E')$

## V Image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Propriété :
soit $f \in \mathscr{L}(E,F), F'$ sous-espace vectoriel de F alors :
$f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E
Démonstration :
$f^{-1}(F') \subset E$ par définition
$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in F'$ donc $\vec{0}_E \in f^{-1}(F') \neq \emptyset$
Soit $(\vec{x},\vec{y}) \in (f^{-1}(F'))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
$f(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$ car $f \in \mathscr{L}(E,F)$
Or : $(f(\vec{x}),f(\vec{y})) \in F'$ par hypothèse
Comme F' est un sous-espace vectoriel $f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y}) \in F'$
$\vec{x} + \lambda\vec{y} \in f^{-1}(F')$

## VI Caractérisation de l'injectivité par le noyau.

Propriété :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$
$f$ injective $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$
Démonstration :
$\Rightarrow$ Montrons que $Ker(f) = \{0_E\}$

$\supset$ $Ker(f)$ sous-espace vectoriel de E donc $\vec{0}_E \in Ker(f)$ donc $\{\vec{0}_E\} \subset Ker(f)$
$\subset$ Soit $\vec{x} \in Ker(f)$ : $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ or $f(\vec{0_E}) = \vec{0_F}$ car f est linéaire
Par hypothèse, f est injective donc $\vec{x} = \vec{0}_E$
$\Leftarrow$ Montrons que f est injective :
Soit $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$ tel que $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ alors $f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}_F$
Or f linéaire donc $f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_F$ donc $\vec{x} - \vec{y} \in Ker(f)$
Or $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ par hypothèse donc $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_E$ c'est-à-dire $\vec{x} = \vec{y}$

# VII $g \circ f = \tilde{0} \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$, $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$, $Im(g \circ f) \subset Im(g)$, $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Ker(g))$, $Im(g \circ f) = g(Im(f))$.

Propriété :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ :
$g \circ f = \tilde{0} \Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$
Démonstration :
$g \circ f = \tilde{0} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, g(f(\vec{x})) = \vec{0}_G$
(définition de $Ker(g)$) $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) \in Ker(g)$
(définition de $Im(f)$) $\Leftrightarrow \forall \vec{y} \in Im(f), \vec{y} \in Ker(g)$
$\Leftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$
Propriété :
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$
1) $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$
2) $Im(g \circ f) \subset Im(g)$
Démonstration :
1) Soit $\vec{x} \in Ker(f)$ $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$. On a :
$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}_F) = \vec{0_G}$ car g linéaire donc $\vec{x} \in Ker(g \circ f)$
2) Soit $\vec{z} \in Im(g \circ f)$ :
$\exists \vec{x} \in E, \vec{z} = (g \circ f)(\vec{x})$
Posons $\vec{y} = f(\vec{x}) \in F$ : $g(\vec{y}) = \vec{z}$ donc $\vec{z} \in Im(g)$
Propriété :
1) $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Ker(g))$
2) $Im(g \circ f) = g(Im(f))$
Démonstration :
1) Soit $\vec{x} \in E$ :
$\vec{x} \in Ker(g \circ f) \Leftrightarrow g(f(\vec{x})) = \vec{0}_G \Leftrightarrow f(\vec{x}) \in Ker(g) \Leftrightarrow \vec{x} \in f^{-1}(Ker(g))$
2) $Im(g \circ f) = \{g(f(\vec{x})) : \vec{x} \in E\} = \{g(\vec{y}) : \vec{y} \in Im(f)\} = g(Im(f))$

# VIII Théorème de structure : $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre.

Propriété :
Soit E un K espace-vectoriel alors $(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une K algèbre
Le neutre de $\circ$ est $Id_E$
Démonstration :
a)$(\mathscr{L}(E),+,\cdot)$ est un K espace-vectoriel (démo II avec F=E)
b)Montrons que $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau :
1)$(\mathscr{L}(E),+)$ groupe abélien vu en a
2)$\circ$ loi de composition interne car la composée d'applications linéaires est linéaire
3)$\circ$ est associative car :
soit $x \in E$ :
D'une part : $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$
D'autre part : $(h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$
donc $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
4) $Id_E \in \mathscr{L}(E)$ est neutre par la loi $\circ$

5)$\circ$ est distributive sur + : bilinéarité de la composition avec $\lambda = 1$
c) Il faut enfin que :
$\forall (f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda (f \circ g)$
Bilinéarité de la compostion avec $f = \tilde{0}$ :
$\forall (g,h) \in (\mathscr{L}(E))^2, \lambda g \circ h = \lambda (g \circ h)$ et $h \circ \lambda g = \lambda (h \circ g)$