Felipe Garrido Bernabeu

Profesor de Filosofía en el I.E.S. La Foia de Ibi (Alicante)

http://antesdelascenizas.blogspot.com

Índice

1 Lógica proposicional

1.1 El lenguaje de la lógica proposicional

1.1.1 Proposiciones atómicas y proposiciones moleculares

La lógica proposicional trata sobre la verdad o la falsedad de las proposiciones y de cómo la verdad se transmite de unas proposiciones (premisas) a otras (conclusión). Una proposición es la unidad mínima de significado susceptible de ser verdadera o falsa.

Una palabra aislada, por sí misma, no nos dice nada. La palabra ‘perro’ tiene una referencia, pero no nos da ninguna información si no es en el contexto de una proposición como ‘El perro está haciendo cosas raras’. Por ello una palabra, a menos que constituya una proposición, no es verdadera o falsa. Sólo tienen valor de verdad las proposiciones.

Debemos distinguir dos tipos de proposiciones: las proposiciones atómicas y las proposiciones moleculares. Las proposiciones atómicas son aquéllas que no se componen de otras proposiciones. La proposición

Todos los hombres son mortales

es una proposición atómica porque ninguno de sus elementos componentes es una proposición. Como podemos observar, una proposición atómica es verdadera o falsa, y su verdad o falsedad no depende de otras proposiciones, sino de cómo es la realidad. Si hubiera algún hombre inmortal, la proposición del ejemplo sería falsa.

Las proposiciones moleculares son aquéllas que están compuestas por proposiciones atómicas. Un ejemplo de proposición molecular sería:

Voy a comprar pan y a tomar un café

La proposición del ejemplo es molecular porque se compone de dos proposiciones atómicas:

Voy a comprar pan

Voy a tomar un café

Estas dos proposiciones atómicas están conectadas mediante la partícula 'y'. Una proposición molecular será verdadera o falsa, pero a diferencia de lo que ocurre con las proposiciones atómicas, su verdad o falsedad no depende directamente de la realidad, sino que depende *o es función de* la verdad o falsedad de las proposiciones atómicas que la componen. Esto significa que si quiero saber si es verdadero o falso que voy a comprar pan y a tomar un café, es necesario que conozca la verdad o falsedad de 'voy a comprar pan' y de 'voy a tomar un café' por separado.

1.1.2 Conectivas lógicas

Las proposiciones atómicas pueden combinarse de diferentes formas para dar lugar a proposiciones moleculares. Los elementos que sirven para conectar las proposiciones atómicas entre sí se llaman conectivas lógicas. Las conectivas lógicas nos dicen cómo afecta el valor de verdad de las proposiciones atómicas al valor de verdad de las proposiciones moleculares. Ya hemos visto que en el lenguaje natural, la conjunción 'y' funciona como una conectiva lógica. Así, cuando decimos:

Las flores son plantas y los erizos aves

estamos conectando la proposición atómica 'las flores son plantas' con la proposición atómica 'los erizos son aves' mediante la conectiva lógica 'y'. La 'y' nos está diciendo que la proposición molecular 'Las flores son plantas y los erizos aves' sólo es verdadera si las dos proposiciones atómicas que la componen son ambas verdaderas, y será falsa en caso de que, al menos una de ellas, sea falsa. Como sabemos que los erizos no son aves, podemos concluir que la proposición 'Las flores son plantas y los erizos aves' es falsa.

Probemos a cambiar la conectiva lógica del ejemplo, y conectemos las dos proposiciones atómicas del siguiente modo:

Las flores son plantas o los erizos son aves

La disyunción 'o' también funciona aquí como una conectiva lógica y nos está diciendo que la proposición molecular 'las flores son plantas o los erizos son aves' es verdadera si *al menos una* de las proposiciones atómicas que la componen es verdadera. Sabemos que los erizos no son aves, pero como las flores sí son plantas, concluimos que la proposición molecular del ejemplo es verdadera.

Como vemos, las conectivas lógicas funcionan como operadores matemáticos. En matemáticas hay símbolos como '+' y '-'. Decir '1+1' no es lo mismo que decir '1-1'. Cada operador asigna un valor distinto a la misma combinación de símbolos, de modo que a la primera combinación (1+1) le corresponde el 2 y a la segunda (1-1) le corresponde el 0. Del mismo modo, en lógica, a la proposición 'Las flores son plantas *y* los erizos aves' le corresponde el valor de verdad V (verdadero) y a la proposición 'Las flores son plantas *o* los erizos son aves' le corresponde el valor de verdad F (falso).

En el cálculo lógico que nosotros vamos a estudiar, hay cuatro conectivas lógicas. Ya hemos visto dos: la conjunción y la disyunción. Una tercera forma de conectar dos proposiciones atómicas sería:

Si las flores son plantas *entonces* los erizos son aves

Esta forma de conectar dos proposiciones nos indica que una de ellas es la condición de la otra y por eso la conectiva correspondiente se llama 'condicional' o 'implicador'. La primera proposición (Las flores son plantas) es la condición que se ha de cumplir, y nos referiremos a ella como *antecedente*; la segunda proposición (los erizos son aves) es lo condicionado, y nos referiremos a este elemento del condicional como *consecuente*.

En cuarto lugar tenemos la negación que, aplicada a una proposición atómica, simplemente invierte su valor de verdad, de modo que si la proposición atómica

Los erizos son aves

es falsa, entonces la proposición molecular

Los erizos no son aves

será verdadera. Quizá sorprenda que consideremos molecular la proposición 'los erizos no son aves', pues que no se compone de *dos* proposiciones atómicas, sino de *una*. La razón de que dicha proposición sea molecular y no atómica es que *uno de sus elementos componentes (*a saber, la proposición 'los erizos son aves'*) es* *una proposición atómica.* Obsérvese que la negación no modifica el significado de la proposición negada, sino únicamente su valor de verdad. Esta falta de significado es un rasgo esencial de las conectivas lógicas.

1.1.3 Símbolos de la lógica proposicional

Como ocurre en otras ciencias, es necesario en lógica utilizar un lenguaje simbólico especial que elimine los rasgos que no nos interesan y pongan de manifiesto los que sí nos interesan. En lógica nos interesa saber *cómo* están combinadas las proposiciones , y no nos interesa en absoluto su significado. Por ello necesitamos unos símbolos que, prescindiendo del significado de las proposiciones, nos indiquen *la forma* en que se combinan. Estos símbolos constituyen un *lenguaje formal*.

En primer lugar, las proposiciones atómicas pueden ser sustituidas por lo que llamaremos *variables proposicionales*, que serán las letras

p, q, r, s …

La operación consistente en sustituir las expresiones del lenguaje natural por símbolos lógicos se llama *formalización*. A la proposición debidamente formalizada la llamaremos *fórmula*. Según lo dicho, la formalización de la proposición atómica

Los erizos son aves

será, simplemente, la fórmula

p

Por su parte, a cada conectiva lógica le corresponde un símbolo, como queda resumido en la siguiente tabla:

Conectiva	Símbolo	Lenguaje natural	Formalización
Conjunción	$\wedge$	Pepe es bombero y María es camarera	$p \wedge q$
Diyunción	$\vee$	Pepe es bombero o María es camarera	$p \vee q$
Implicación	$\rightarrow$	Si Pepe es bombero, entonces María es camarera	$p \rightarrow q$
Negación	$\neg$	Pepe no es bombero	$\neg p$

1.2 Sintaxis: Fórmulas bien formadas (fbf)

Todos los lenguajes se componen de unos símbolos y de unas reglas sintácticas que nos indican qué combinaciones de símbolos son correctas y cuáles no lo son. Por ejemplo, en castellano no podemos decir:

Mis amigos y yo voy al cine

La oración del ejemplo está mal formada porque no hay la concordancia debida entre el número del sujeto (plural) y el número del verbo (singular). También en matemáticas hay unas reglas que nos indican qué combinaciones de símbolos podemos hacer, de modo que si nos presentaran lo siguiente:

%=4+(78-)

no sabríamos qué hacer simplemente porque la expresión está mal formada, no respeta las reglas de formación de fórmulas matemáticas. Del mismo modo, cualquier combinación de símbolos lógicos no constituye una fórmula bien formada. Así por ejemplo, no están bien formadas las fórmulas

$\wedge p$

$\vee p \vee q$

$p \rightarrow \neg$

etc…

No es difícil descubrir intuitivamente, a partir de ejemplos, qué fórmulas están bien formadas en lógicas y cuáles no, pero no está de más ofrecer las siguientes **reglas para la formación de fórmulas bien formadas** (fbf):

Regla 1: Toda proposición atómica es una fbf

Regla 2: Si A es una fbf, entonces $\neg A$ también es una fbf

Regla 3: Si A y B son fbf, entonces $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ y $(A \rightarrow B)$ también son fbf

1.3 Formalización de proposiciones

A continuación comentaremos algunos ejemplos de formalización. Comenzaremos por unos ejemplos sencillos, que agruparemos en cuatro bloques, según la conectiva lógica usada, y a continuación presentaremos algunos ejemplos más complejos en los que combinaremos varias conectivas.

1.3.1 Formalización de la conjunción

Proposición en lenguaje natural: Los perros son listos y los gatos egoístas.

p = los perros son listos

q= los gatos son egoístas

Formalización: $p \wedge q$ (se lee 'p y q')

Proposición en lenguaje natural: Estudiaré, pero también veré la tele

p = estudiaré

q = veré la tele

Formalización: $p \wedge q$

Comentario: Aunque en la proposición en lenguaje natural no aparece la partícula 'y', si entendemos el sentido de la misma, veremos que lo que nos está diciendo es que estudiaré *y* veré la tele. El 'pero también' es una conjunción, aunque los matices que tiene en el lenguaje natural (digamos que tiene un sentido _adversativo) se pierden al formalizarla.

Proposición en lenguaje natural: Además de comer tarta, beberé sidra.

p = comeré tarta

q = beberé sidra

Formalización: $p \wedge q$

Comentario: Vemos que aquí tampoco aparece la 'y', sin embargo la proposición nos está diciendo simplemente que comeré tarta y que beberé sidra. El 'además' añade un matiz que no nos interesa desde un punto de vista lógico. A la lógica sólo le interesa en qué condiciones es verdadera o falsa la proposición 'Además de comer tarta, beberé sidra', resulta que esa proposición sólo es verdadera si como tarta *y* bebo sidra. Eso es lo único que ha de quedar reflejado en la formalización.

Proposición en lenguaje natural: Es completamente cierto que voy a asistir a la reunión y que luego me iré de fiesta.

p= voy a asistir a la reunión

q= después de la reunión me iré de fiesta

Formalización: p ∧ q

Comentario: Como vemos, el 'es completamente cierto' que aparece en la proposición en lenguaje natural, no vuelve a aparecer. La razón de ello es que no añade nada al significado de las proposiciones atómicas, sino que simplemente sirve para reforzar la idea de que es cierto lo que digo. Pero desde el punto de vista de la lógica de enunciados, la proposición del ejemplo es equivalente a la proposición 'voy a asistir a la reunión y luego me iré de fiesta'.

Proposición en lenguaje natural: Pedro y María van al cine todos los sábados.

p= Pedro va al cine todos los sábados

q = María va al cine todos los sábados

Formalización: p ∧ q

Comentario: Aunque parece que sólo hay una proposición en el ejemplo, hay que advertir que en realidad son dos, pues para que sea verdadera tiene que ser verdad que Pedro va al cine los sábados y que María va al cine los sábados.

1.3.2 Formalización de la disyunción

Proposición en lenguaje natural: Voy al cine o voy al teatro

p = voy al cine

q= voy al teatro

Formalización: p ∨ q (se lee 'p o q')

Proposición en lenguaje natural: O bien voy al cine, o bien voy al teatro

p = voy al cine

q = voy al teatro

Formalización: p ∨ q

Comentario: A veces, cuando nos estamos iniciando en la formalización, puede que tengamos la tentación de formalizar la proposición de este ejemplo del siguiente modo: (∨ p ∨ q). Esto es un error garrafal, pues, como ya hemos dicho, no se trata de traducir palabra por palabra, sino de expresar la forma lógica de la proposición. En la proposición del ejemplo estamos diciendo que se me plantean dos opciones; una, ir al cine; otra, ir al teatro; y al menos una de ellas debe cumplirse. Esto es una disyunción de toda la vida, por más que la reforcemos con el 'O bien… o bien…', por lo tanto se formaliza exactamente igual que la del ejemplo anterior.

1.3.3 Formalización del condicional

Proposición en lenguaje natural: Si Misha es un gato, entonces escupirá bolas de pelo.

p= Misha es un gato

q= Misha escupirá bolas de pelo

Formalización: $p \rightarrow q$ (se lee 'si p entonces q' ó 'p implica q')

Proposición en lenguaje natural: Si vas a la playa, te broncearás.

p = vas a la playa

q = te broncearás

Formalización: $p \rightarrow q$

Comentario: Aunque no aparezca literalmente el 'entonces', como lo que estamos traduciendo no son las palabras, una por una, sino la forma lógica, es evidente que basta el 'si' inicial para indicarnos el condicional.

Proposición en lenguaje natural: Sólo si Misha es un gato, escupirá bolas de pelo

p= Misha es un gato

q = Misha escupirá bolas de pelo

Formalización: $q \rightarrow p$

Comentario: Obsérvese que este condicional se formaliza al revés que el del ejemplo anterior. En la proposición 'Si Misha es un gato, entonces escupirá bolas de pelo' no excluimos la posibilidad de que otros animales, a parte del gato, escupan bolas de pelo. Misha podría ser un tigre y escupir bolas de pelo. La proposición únicamente afirma que, independientemente de que haya otros animales que escupan bolas de pelo, si Misha es un gato, también lo hará. Ahora bien, si lo que digo es que *Solo si* Misha es un gato, escupirá bolas de pelo, *estoy excluyendo la posibilidad de que otros animales, a parte del gato, escupan bolas de pelo*. Para expresar esto formalmente, tengo que invertir el condicional, pues ahora, a diferencia del ejemplo anterior, estoy diciendo que *si Misha escupe bolas de pelo entonces es que es un gato*. Nótese que esta última proposición no implica que haya gatos *que no escupan bolas de pelo*.

Proposición en lenguaje natural: Pégame y tendrás tu merecido

p = pégame

q = tendrás tu merecido

Formalización: $p \rightarrow q$

Comentario: A veces el lenguaje natural puede confundirnos. En este caso la partícula 'y' no funciona como un condicional, pues la proposición no está afirmando que me hayas pegado y que además te haya dando tu merecido. La proposición del ejemplo puede ser verdadera sin que nadie sufra ningún daño, pues tiene un sentido condicional. En realidad está afirmando que *si* me pegas, *entonces* tendrás tu merecido.

Proposición en lenguaje natural: Asistir a clase es **condición necesaria** para aprobar.

p = se asiste a clase

q= se aprueba

Formalización: $q \rightarrow p$

Comentario: Probablemente la formalización está al revés de lo que esperábamos, pero es correcta. Si digo que algo es una *condición necesaria* para aprobar, estoy diciendo que es un requisito imprescindible –necesario-, pero que no es suficiente para aprobar, es posible que además de asistir a clase haya que hacer algún trabajo, por ejemplo, o aprobar un examen… Esto significa que aunque se cumpla una *condición necesaria*, no por ello se aprobará, pues puede que no se cumplan *otras condiciones necesarias*. Lo que está claro es que si no se cumple, aunque se cumplan todas las demás, se suspenderá. En el ejemplo decimos que asistir a clase es condición necesaria para aprobar. Esto no significa que si asisto a clase entonces apruebo ($p \rightarrow q$), pues es posible que asista a clase y no apruebe. Lo que significa la proposición es que *si* he aprobado, *entonces* tiene que ser verdad que he asistido a clase.

Proposición en lenguaje natural: Asistir a clase es **condición suficiente** para aprobar.

p = se asiste a clase

q = se aprueba

Formalización: $p \rightarrow q$

Comentario: A diferencia de una condición necesaria, una *condición suficiente* se basta por sí misma para que el consecuente del condicional sea verdadero. Si digo que estudiar es condición suficiente para aprobar estoy diciendo que basta estudiar para aprobar el curso, o lo que es lo mismo, que *si estudio entonces aprobaré el curso*. Por lo tanto la formalización correcta es ($p \rightarrow q$). Nótese que una condición suficiente no tiene por qué ser también necesaria, pues podría haber *otra condición suficiente* para aprobar. Podría ser que el profesor dijera que para aprobar basta venir a clase o hacer un trabajo. En ese caso tanto venir a clase como hacer un trabajo serían condiciones suficientes para aprobar, pero no necesarias, pues cualquiera de ellas podría no cumplirse y aprobar, siempre que se cumpla la otra. Por su parte, las condiciones necesarias no tienen tampoco por qué ser suficientes.

Proposición en lenguaje natural: Asistir a clase es condición necesaria y suficiente para aprobar.

p = se asiste a clase

q = se aprueba

Formalización: $p \leftrightarrow q$ (se lee 'p coimplica q')

Comentario: Decir que asistir a clase es condición necesaria y suficiente para aprobar significa que basta asistir a clase para aprobar, y que no hay otro modo de aprobar a parte de asistir a clase. En realidad la proposición es equivalente a afirmar ($p \rightarrow q$) y ($q \rightarrow p$) simultáneamente. Esto significa que

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] = (p \leftrightarrow q)$$

El símbolo '$\leftrightarrow$' sirve para indicar esta doble dirección del condicional y se llama *bicondicional*. También podría formalizarse con ayuda del bicondicional la proposición

Si estudias y sólo si estudias, aprobarás.

Proposición en lenguaje natural: Te besaré si me prometes amor eterno.

p= te besaré

q= me prometes amor eterno

Formalización: q → p

Comentario: La única dificultad de esta proposición es que para darle más efecto al consecuente, se sitúa en primer lugar, pero es perfectamente equivalente a la proposición 'si me prometes amor eterno, entonces te besaré'

1.3.4 Formalización de la negación

Proposición en lenguaje natural: No voy a solucionarte el problema

p= voy a solucionarte el problema

Formalización: ¬p

Proposición en lenguaje natural: No es cierto que haya estado en ese cine.

p= he estado en ese cine

Formalización: ¬p

Comentario: el 'no es cierto que' del ejemplo no es sino una forma reforzada de negar, por lo tanto se formaliza como una simple negación, que es lo que es.

Proposición en lenguaje natural: Ningún hombre puede volar

p= algún hombre puede volar

Formalización: ¬p

Comentario: En el ejemplo no aparece expresamente la partícula 'no', pero el 'ningún' expresa negación, de modo que la proposición del ejemplo no es sino la negación de la proposición atómica 'algún hombre puede volar'.

Proposición en lenguaje natural: No hay nada en el cajón

p= hay algo en el cajón

Formalización: ¬p

Comentario: No hay que entender el 'no hay nada' como una doble negación, que sería equivalente a afirmar, sino como una negación reforzada, por eso la proposición atómica es 'hay algo en el cajón' y la proposición del ejemplo ha de interpretarse como la negación de esa proposición atómica.

1.3.5 Formalizaciones combinando todas las anteriores

Proposición en lenguaje natural: Si estudias y vienes a clase, entonces aprobarás.

p= estudias

q= vienes a clase

r= aprobarás

Formalización: $(p \land q) \rightarrow r$

Comentario: La proposición del ejemplo dice que para aprobar hay que cumplir dos condiciones: asistir a clase y estudiar. Esto significa que tiene que ser verdad que estudias y que vas a clase para que sea verdad que apruebas. Esto se formaliza con ayuda del condicional. Nótese que no es lo mismo '$(p \land q)\rightarrow r$' que '$p \land (q \rightarrow r)$'. El significado de una proposición puede cambiar enormemente según cómo usemos los paréntesis. Aunque existen algunas reglas para simplificar el uso de los paréntesis, de momento es mejor usarlos siempre para evitar ambigüedades.

Proposición en lenguaje natural: No es cierto que vaya a ir a Polonia y que esté engordando.

p = voy a ir a Polonia

q = estoy engordando

Formalización: $\neg(p \land q)$

Comentario: Es importante darse cuenta de que en el ejemplo comentado no estoy diciendo que no voy a ir a Polonia y que no estoy engordando. Lo que estoy diciendo es que no es cierto que las dos proposiciones sean verdaderas, pero eso no significa que las dos sean falsas; puede que sea una verdadera y otra falsa. Lo que estoy negando no es cada una de las proposiciones atómicas, sino la conjunción de las dos.

Proposición en lenguaje natural: Ni yo bordo pañuelos ni tú rompes contratos

p = yo bordo pañuelos

q = tú rompes contratos

Formalización: $\neg p \wedge \neg q$

Comentario: A diferencia del ejemplo anterior, en este caso sí estamos negando cada una de las proposiciones atómicas de la conjunción, lo que en lenguaje natural se expresa con el 'ni… ni…'. Hay que observar que '$\neg(p \wedge q)$' no significa lo mismo que '$\neg p \wedge \neg q$', como tendremos ocasión de demostrar más tarde.

Proposición en lenguaje natural: Si copias en el examen, no aprobarás y, o bien serás expedientado o bien te quedarás castigado todos los días por la tarde.

p= copias en el examen

q = aprobarás

r = serás expedientado

s = te quedarás castigado todos los días por la tarde

Formalización: $p \rightarrow [\neg q \wedge (r \vee s)]$

Comentario: Antes de analizar la estructura de la proposición, conviene advertir que el uso de corchetes ([,]) o de paréntesis ((,)) obedece a razones de claridad expositiva. Simplemente la fórmula se lee más fácilmente si distinguimos los paréntesis más externos de los más internos mediante los corchetes. Quede dicho, no obstante, que pueden usarse sólo paréntesis, si se desea. Ciñéndonos a la proposición del ejemplo, observaremos que nos está advirtiendo de las consecuencias de copiar en el examen, por ello tiene una forma condicional. En efecto, la proposición nos dice que *si copias en el examen*, *entonces* te ocurrirá algo. Concretamente te ocurrirán al menos dos cosas, una de ellas la sabemos segura: no aprobarás ($\neg q$). La otra consecuencia, depende, pues hay dos opciones, pues puedes ser expedientado (r) o ser castigado (s) (o las dos cosas) la cuestión es que esa segunda consecuencia todavía no se ha concretado, por eso se expresa como una disyunción. Según lo dicho, si se cumple la condición de copiar en el examen, entonces no aprobarás *y* ocurrirá alguna de las dos opciones expuestas (serás expedientado *o* serás castigado).

Proposición en lenguaje natural: No voy a ir a París, pero si voy, me acordaré de ti y de tu madre.

p = voy a París

q = me acordaré de ti

r= me acordaré de tu madre

Formalización: $\neg p \wedge [p \rightarrow (q \wedge r)]$

Proposición en lenguaje natural: Si vas al cine, entonces, o compras palominas o me envidiarás si tienes hambre.

p = vas al cine

q = compras palomitas

r = me envidias

s = tienes hambre

Formalización: $p \rightarrow [q \vee (s \rightarrow r)]$

Comentario: La complejidad de esta proposición radica en el hecho de que el consecuente del condicional es una disyunción y uno de los términos de esa disyunción es un condicional, de modo que tenemos un condicional dentro de otro condicional.

Proposición en lenguaje natural: Me quieras o no, tendrás que soportarme

p = me quieres

q = tienes que soportarme

Formalización: $(p \vee \neg p) \wedge q$

1.4 Tablas de verdad

1.4.1 Tablas de verdad de las conectivas lógicas

Formalizar una proposición es sólo el primer paso. Ahora tenemos que analizar las fórmulas obtenidas en relación con su verdad o la falsedad. El valor de verdad de las proposiciones moleculares depende del valor de verdad de las proposiciones atómicas que la componen y de las conectivas lógicas. Una proposición atómica puede ser verdadera o falsa. Nosotros adoptaremos la convención de referirnos al valor de verdad 'Verdadero' con el símbolo '1' y al valor de verdad 'Falso' con el símbolo '0'. Podemos expresar los posibles valores de verdad de una proposición atómica mediante la siguiente tabla:

p
1
0

Esta tabla significa que la proposición atómica 'p' (que puede ser *cualquier* proposición atómica) puede ser verdadera (1) o falsa (2). En realidad no sabemos si es verdadera o falsa, porque eso depende de su significado, que desconocemos. Pero lo que sabemos con toda seguridad es que debe tener uno de esos valores de verdad.

La cosa se complica cuando pretendemos averiguar los posibles valores de verdad de una proposición molecular. En efecto, la proposición molecular

$$p \wedge q$$

puede ser verdadera o falsa, pero su verdad o falsedad depende de la verdad o falsedad de p y de q. Así pues, si p es verdadera pero q es falsa, (p ∧ q) será falsa, por ejemplo. A cada combinación de valores de verdad de p y de q, le corresponde un valor de verdad a la proposición compleja. Podemos expresar esto con la siguiente **tabla de verdad de la conjunción**:

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Como vemos en la tabla, la fórmula (p ∧ q) sólo es verdadera cuando p es verdadera y q es verdadera, siendo falsa en todos los demás casos. Podemos confeccionar una tabla semejante para todas las conectivas lógicas:

Tabla de verdad de la disyunción

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Como vemos, la disyunción sólo es falsa en caso de que sus dos términos lo sean, y es verdadera en todos los demás supuestos.

Tabla de verdad del condicional

p	q	p → q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La tabla de verdad del condicional siempre causa cierta inquietud y, de hecho, ha sido objeto de crítica por parte de muchos lógicos. Nosotros no entraremos en tales disquisiciones y nos conformaremos con comprenderla, lo que ya es bastante. Lo primero que observamos en la tabla del condicional es que sólo es falso en un caso: cuando el antecedente es verdadero y el consecuencia falso. En efecto, supongamos que a principio de curso un profesor dice a sus alumnos:

Si venís a clase entonces aprobaréis

Ahora supongamos que, al final de curso, un determinado alumno, tras asistir religiosamente a todas las clases, suspende. Diremos, en ese caso, que el profesor mintió al principio de curso pues la proposición 'si venís a clase entonces aprobaréis' es manifiestamente falsa, pues un alumno ha ido a clase y no ha aprobado.

Lo que sorprende de la tabla de verdad del condicional no es esto, sino los casos que lo hacen verdadero. En el primer caso no parece haber problema, pues si el antecedente es verdadero y también lo es el consecuente, no hay razón para negar el condicional: se ha cumplido la condición y también se ha cumplido lo condicionado.

El segundo caso merece algo más de atención. En efecto, como vemos en la tabla, si el antecedente es falso pero el consecuente es verdadero, el condicional es verdadero. La razón de esto es que el consecuente de un condicional puede ser verdadero independientemente del antecedente. Si es verdad que si Pepito estudia entonces aprueba, eso no excluye que apruebe sin estudiar, pues aun en ese caso seguiría siendo verdad que si hubiera estudiado, aprobaría.

El tercer caso en el que el condicional es verdadero no carece tampoco de interés. Si tanto el antecedente como el consecuente son falsos, el condicional es verdadero. Hay que recordar que un condicional no está describiendo un hecho actualmente existente del mundo, sino que establece una condición y dice que, en el caso de que se cumpliera, ocurriría tal o cual cosa. Que el antecedente y el consecuente sean falsos no excluye que si el antecedente *hubiera sido verdadero* también lo hubiera sido el consecuente. Si yo no estudio y no apruebo, no por eso es falso que si estudio, entonces apruebo.

Tabla de verdad de la negación

Como hemos visto en apartados anteriores, la negación invierte el valor de verdad de la proposición negada, tal y como se establece en la siguiente tabla:

p	¬p
1	0
0	1

Es decir, que cuando *p* es verdadera, ¬*p* es falsa, y cuando *p* es falsa, ¬*p* es verdadera.

1.4.2 Tablas de verdad de fórmulas en general

Cualquier fórmula tiene su propia tabla de verdad, que variará en función de la cantidad de proposiciones atómicas que la integran y de su propia complejidad lógica. Para realizar la tabla de verdad de una fórmula, hay que determinar, en primer lugar, de cuántas columnas (vertical) y filas (horizontal) constará.

Para determinar el número de columnas de una tabla, es necesario recurrir al concepto de *historia formacional* de una fórmula. La *historia formacional* de una fórmula es el conjunto de todas sus subfórmulas, incluyéndola a ella misma. Es algo así como desandar el camino que nos ha llevado desde las proposiciones atómicas a la proposición molecular a analizar.

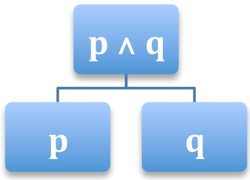
La historia formacional de una fórmula consistente en una letra proposicional es simple. La historia formacional de la fórmula

$$p$$

Es, simplemente, *p*. Ahora bien, si en vez de *p* tenemos la fórmula

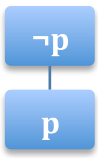
$$p \wedge q$$

su *historia formacional* será el conjunto {p, q, p∧q}. Podemos representar la *historia formacional* de una fórmula mediante un esquema:

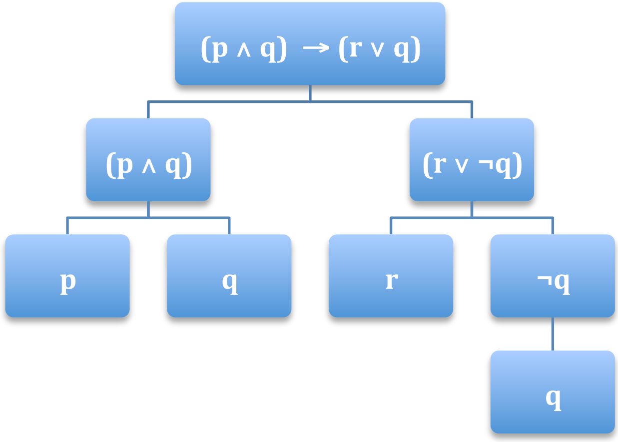


En cualquier caso, observamos que *la historia formacional* de la fórmula $p \wedge q$ consta de tres elementos: las dos proposiciones atómicas *p* y *q*, y la propia fórmula $p \wedge q$.

De manera análoga, la *historia formacional* de $p \vee q$ es { p, q, p ∨ q}, y la de $p \rightarrow q$ es {p, q, p→ q}. Por su parte, la *historia formacional* de una fórmula como $\neg p$ será {p, ¬p}, según el siguiente esquema:



Nótese que cada una de las ramas del árbol puede ser, a su vez, una fórmula compleja, en cuyo caso se volvería a ramificar tantas veces fuera necesario hasta llegar a las fórmulas atómicas. Así, por ejemplo en el caso de la fómula (p ∧ q) → (r ∨ ¬q), la *historia formacional* quedaría representada por el esquema:



Según este esquema, la *historia formacional* de (p ∧ q) → (r ∨ q), será el conjunto {p, q, r, ¬q, p∧q, r∨¬q, (p∧q)→(r∨q)} formado por 7 elementos. Nótese que aunque la fórmula atómica *q* se repite dos veces en la fórmula, a efectos de su *historia formacional* sólo se cuenta una vez.

Una vez hemos determinado la *historia formacional* de una fórmula, podemos continuar con la confección de su tabla de verdad, que tendrá tantas columnas como elementos tenga la historia formacional de la fórmula, y a cada columna le corresponderá uno de esos elementos, desde los más simples hasta los más complejos. Así, la tabla de verdad de la fórmula anterior *(p∧q) → (r∨¬q)* tendrá 7 columnas.

Determinar el número de filas de la tabla es fácil, pues sólo debemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\text{Número de filas de la tabla} = 2^n$$

donde *n* es el número de proposiciones atómicas de que consta la fórmula. Así, si observamos la *historia formacional* de la fórmula *(p∧q) → (r∨¬q)*, observaremos que consta de las 3 proposiciones atómicas *p, q* y *r* (recordemos que las proposiciones que se repiten sólo deben ser contadas una vez). Aplicando la fórmula arriba indicada obtenemos que nuestra tabla debe tener 2^3 filas, es decir, 8 filas. Por supuesto, a estas 8 filas habrá que añadir una, que será la primera, que rellenaremos con las subfórmulas de la *historia formacional*. La tabla quedará como sigue:

p	q	r	¬q	p∧q	r∨¬q	(p∧q)→(r∨¬q)

Ahora viene un momento peliagudo de la elaboración de la tabla, pues es hora de completarla. En primer lugar, tendremos que completar las columnas correspondientes a las proposiciones atómicas, pues el valor del resto de celdas de la tabla dependerá de los valores de las proposiciones atómicas. Olvidémonos, de momento, de las columnas correspondientes a fórmulas moleculares y fijémonos sólo en las columnas de las fórmulas atómicas:

p	q	r

En primer lugar, lo que haremos es dividir la primera columna en dos partes iguales y completar la primera de esas partes con '1' y la segunda con '0'. En este caso tenemos 8 filas, de modo que las 4 primeras filas de la columna correspondiente a *p* se completarán con '1' y las cuatro siguientes con '0'. Si en vez de 8 filas tuviéramos 16, la operación sería semejante, aunque en vez de dos grupos de 4, tendríamos dos grupos de 8, uno con '1' y el otro con '0'. En nuestro caso la tabla quedará así:

p	q	r
1		
1		
1		
1		
0		
0		
0		
0		

Si hemos dividido en 2 partes la primera columna, la segunda la dividiremos en 4 partes iguales y completaremos con '1' la primera, con '0' la segunda y así sucesivamente hasta agotarlas. En este caso, como tenemos 8 filas por columna y 8/4=2, dividiremos la columna correspondiente a *q* en cuatro partes de 2 celdas cada una y las completaremos como se ha indicado, de modo que obtendremos lo siguiente:

p	q	r
1	1	
1	1	
1	0	
1	0	
0	1	
0	1	
0	0	
0	0	

Dividida la primera columna en 2 partes y la segunda columna en 4, dividiremos la tercera en 8 partes y las completaremos con '1' y '0' alternativamente (nótese que las columnas han sido divididas, respectivamente por 2^1, 2^2 y 2^3, de modo que si hubiera una cuarta columna correspondiente a una cuarta fórmula atómica, sería dividida por 2^4, y así sucesivamente). Al final tendremos:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Como podemos observar, mediante este procedimiento hemos obtenido todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las fórmulas atómicas de nuestra tabla, que ahora tendrá este aspecto:

p	q	r	¬q	p∧q	r∨¬q	(p∧q)→(r∨¬q)
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

Queda ahora por completar las columnas correspondientes a las fórmulas moleculares. Como sabemos, el valor de verdad de estas fórmulas dependerá del valor de verdad de las fórmulas atómicas que las integran. Comencemos por la columna correspondiente a ¬q. Sabemos, por la tabla de verdad de la negación, que cuando q es 1, ¬q es 0, y viceversa. En consecuencia, asignaremos a cada celda de la columna ¬q un valor en relación con el valor que para esa fila tenga la columna q. La tabla quedará como sigue:

p	q	r	¬q	p∧q	r∨¬q	(p∧q)→(r∨¬q)
1	1	1	0			
1	1	0	0			
1	0	1	1			
1	0	0	1			
0	1	1	0			
0	1	0	0			
0	0	1	1			
0	0	0	1			

Como vemos, cuando q vale 1, asignamos un 0 a ¬q, y al revés, cuando q vale 0, asignamos un 1 a ¬q.

Para completar la columna correspondiente a *p∧q*, debemos aplicar la tabla de verdad de la conjunción a cada par de valores de las columnas correspondientes a *p* y a *q* de modo que obtenemos la siguiente distribución de valores de verdad:

p	q	r	¬q	p∧q	r∨¬q	(p∧q)→(r∨¬q)
1	1	1	0	1		
1	1	0	0	1		
1	0	1	1	0		
1	0	0	1	0		
0	1	1	0	0		
0	1	0	0	0		
0	0	1	1	0		
0	0	0	1	0		

Como vemos, sólo asignamos el valor 1 a *p∧q* cuando *p* vale 1 y *q* también vale 1. En los demás casos asignamos a *(p∧q)* el valor 0.

A continuación hay que completar la columna correspondiente a la fórmula *r∨¬q*. En primer lugar observamos que la fórmula es una disyunción, por lo que tendremos que aplicar la tabla de verdad de la disyunción que, si la recordamos, viene a decir que una disyunción sólo tiene el valor de verdad 0 si sus dos términos tienen ambos el valor de verdad 0, siendo 1 en el resto de casos. El primer término de la disyunción es *r*, por lo tanto deberemos atender a los valores de la columna *r* para establecer los de *(r∨¬q)*. Pero como vemos, el segundo término que hay que tener en cuenta es *¬q*, esto significa que tenemos que basarnos en los valores de la columna *¬q* y **no en los de la columna *q***. Siguiendo la tabla de verdad de la disyunción, quedará como sigue:

p	q	r	¬q	p∧q	r∨¬q	(p∧q)→(r∨¬q)
1	1	1	0	1	1	
1	1	0	0	1	0	
1	0	1	1	0	1	
1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	
0	1	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	1	
0	0	0	1	0	1	

Como era de esperar, sólo asignamos el valor 0 a la columna *(r∨¬q)* cuando las columnas correspondientes a *r* y a *¬q* coinciden en el valor 0, asignando 1 en caso contrario.

Para completar la última columna, correspondiente a la fórmula entera, aplicaremos la tabla de verdad del condicional, tomando como referencia las columnas correspondientes a *(p∧q)* y a *(r∨¬q)* de modo que obtenemos:

p	q	r	¬q	p∧q	r∨¬q	(p∧q)→(r∨¬q)
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Si recordamos la tabla de verdad del condicional, sabremos que sólo se asigna el valor de verdad 0 a un condicional cuando el antecedente es 1 y el consecuente 0. Esta es la razón de que en nuestra tabla, la fórmula *(p∧q)→(r∨¬q)* sólo tenga el valor de verdad 0 en la segunda fila, pues es la única en la que el antecedente *p∧q* es 1 y el consecuente *(r∨¬q)* es 0, en el resto de casos, de acuerdo con la tabla de verdad del condicional, la fórmula es verdadera.

Si estudiamos detenidamente la tabla de verdad que hemos obtenido, podemos extraer conclusiones interesantes acerca de nuestra fórmula. En primer lugar, sabemos que la fórmula puede ser verdadera o falsa, y que sólo es falsa en un caso. Lo que la tabla nos dice es qué es lo que tiene que ocurrir para que la fórmula sea falsa. Para ello debemos fijarnos en los valores de las celdas correspondientes a las fórmulas atómicas de la fila 2 de la tabla, que es la que hace a la fórmula falsa. A partir de dichos valores, podemos llegar a la conclusión de que nuestra fórmula sólo es falsa si p y q son verdaderas y r falsa, lo que constituiría un *contraejemplo* de nuestra fórmula.

1.4.3 Contingencias, tautologías y contradicciones

Consideremos las tablas de verdad de las fórmulas *(p→q), (p∨¬p)* y *(p∧¬p),* respectivamente:

p	q	p→ q
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

p	¬p	p ∨ ¬p
1	0	**1**
0	1	**1**

p	¬p	p ∧ ¬p
1	0	**0**
0	1	**0**

De las tres fórmulas analizadas, sólo podemos afirmar con absoluta certeza la verdad de *(p∨¬p),* pues, como observamos, sea cual sea el valor de sus componentes, la fórmula resulta ser siempre verdadera. A este tipo de fórmulas las llamamos **tautologías**, y son consideradas *verdades lógicas*. Se trata de proposiciones cuya verdad es completamente independiente de lo que ocurra en el mundo, y por lo tanto, no nos dan ninguna información sobre la realidad empírica. Las tautologías, más bien, tienen el valor de funcionar como principios lógicos, es decir, como condiciones que han de ser cumplidas por nuestro discurso si es que ha de ser consistente. La fórmula analizada aquí es, concretamente, el principio de *tercio excluso*, y afirma que una proposición o bien es verdadera o bien es falsa, y que no cabe una tercera posibilidad.

Por otra parte, la fórmula *(p∧¬p)* es el caso opuesto a la anterior, pues para todos los valores de sus subfórmulas, resulta ser falsa. A estas fórmulas las llamamos **contradicciones**. En efecto, diga *p* lo que diga, si afirmo *(p∧¬p)* me estoy contradiciendo y por lo tanto mi afirmación tiene que ser necesariamente falsa. Obsérvese que la negación de una contradicción será siempre una tautología, y viceversa, la negación de una tautología será una contradicción. En este caso, la negación de *(p∧¬p)* es *¬(p∧¬p)*, que es una tautología que dice que una contradicción no puede ser nunca verdadera. Éste es el famoso *principio de no contradicción*.

El tercer tipo de fórmulas son aquéllas cuya verdad o falsedad no puede decidirse simplemente por medios lógicos, como la tabla de verdad, sino que es necesario el recurso a la observación. Es el caso de la fórmula *(p→q)*. Sabemos que la fórmula *p∨¬p* es siempre verdadera, signifique *p* lo que signifique, y también sabemos que *p∧¬p* es siempre falsa, valga *p* lo que valga; y esto lo sabemos únicamente mediante el método lógico de la tabla de verdad. Pero la tabla de verdad de *p→q* nos dice que la fórmula puede ser verdadera o puede ser falsa, y nos indica en qué casos es verdadera y en qué casos es falsa, pero no nos resuelve el problema de si es efectivamente verdadera o falsa. Este tipo de fórmulas son **contingencias** porque no son ni necesariamente verdaderas ni necesariamente falsas, sino que su verdad o falsedad es relativa, depende del significado de las fórmulas atómicas y es, por lo tanto, contingente.

1.5 Argumentos

1.5.1 *Argumentos válidos*

Argumentar consiste en deducir una conclusión a partir de unas premisa que se tienen por verdaderas. Un argumento, por lo tanto, estará compuesto de unas premisas y de una conclusión. Un argumento puede ser válido o no serlo. El siguiente argumento, por ejemplo, no es válido:

Premisa 1) Si estudio entonces aprobaré

Premisa 2) No he estudiado

Conclusión: No aprobaré.

El argumento no es válido porque, aun siendo verdaderas las premisas 1) y 2), la conclusión no tiene por qué serlo, pues es posible que apruebe sin estudiar; copiando, por ejemplo. Así pues, aunque sea verdad que si estudio aprobaré, y aunque sea también verdad que no he estudiado, a partir de ahí no se puede deducir con absoluta certeza que vaya a aprobar, por lo que el argumento no es válido y puede considerarse *falaz*. No ocurre lo mismo en el siguiente ejemplo de argumento válido:

Premisa 1) Si Alicia llega tarde a casa, será castigada

Premisa 2) Alicia ha llegado tarde a casa

Conclusión: Alicia será castigada

Este argumento es válido porque si las premisas son verdaderas, y suponemos que lo son, entonces, *necesariamente*, la conclusión debe ser verdadera. La única forma de que Alicia no sea castigada es que, o bien la premisa 1) sea falsa, o lo sea la premisa 2); pero si *ambas* premisas son verdaderas, la conclusión también lo será.

De lo dicho podemos concluir la siguiente **definición de argumento válido**:

Un argumento es válido si y sólo si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

1.5.2 *Evaluación de argumentos mediante tablas de verdad*

Todos los argumentos pueden convertirse en un condicional, pues, después de todo, lo que un argumento está afirmando es que *si* las premisas son verdaderas, *entonces* la conclusión también lo es, o dicho de otro modo:

$$P_1 \land P_2 \land \ldots \land P_n \rightarrow C$$

Es decir, un argumento es, en realidad, un condicional en el que en antecedente es la conjunción de todas las premisas ($P_1 \land P_2 \land \ldots \land P_n$) y el consecuente es la conclusión (C).

Como sabemos, la tabla de verdad del condicional nos dice que éste sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, y verdadero en el resto de casos. Esto coincide completamente con la definición de argumento válido, según la cual, una argumento será válido exactamente en los mismos casos en que el condicional que le corresponde lo sea. Como un condicional no puede ser verdadero si el antecedente es verdadero y el consecuente falso, un argumento no podrá ser válido si las premisas son verdaderas y la conclusión falsa.

No siempre es fácil averiguar intuitivamente si un argumento es válido o no, por lo que en ocasiones es necesario recurrir a métodos más fiables que la intuición. Dado que podemos convertir cualquier argumento en un condicional, podemos usar el método de las tablas de verdad para averiguar si un argumento dado es válido o no. Evidentemente, **un argumento sólo será válido cuando el condicional correspondiente sea una tautología** y no será válido en el resto de casos (si es una contradicción o si es una contingencia). Veamos esto con los ejemplos anteriores.

Evaluando el primer ejemplo:

Premisa 1) Si estudio entonces aprobaré

Premisa 2) No he estudiado

Conclusión: No aprobaré.

Lo primero que debemos hacer para evaluar o *decidir* si el argumento es válido o no, es formalizarlo:

Formalización de la *premisa 1*): $p \rightarrow q$ (si estudio entonces aprobaré)

Formalización de la *premisa 2*): $\neg p$ (no estudio)

Formalización de la *concusión*: $\neg q$ (no apruebo)

En segundo lugar, tenemos que convertir el argumento en un condicional. Como hemos visto, el antecedente del condicional estará formado por la *conjunción* de todas las premisas, y el consecuente por la conclusión, de modo que obtenemos lo siguiente:

$$[(p\rightarrow q)\wedge\neg p]\rightarrow q$$

Éste es, en consecuencia, el condicional que le corresponde al argumento del ejemplo. Es el momento de hacer su tabla de verdad, que quedará como sigue:

p	q	¬p	p→q	(p→q)∧¬p	[(p→q)∧¬p]→q
1	1	0	1	0	**1**
1	0	0	0	0	**1**
0	1	1	1	1	**1**
0	0	1	1	1	**0**

Como vemos, la tabla de verdad nos revela que el condicional analizado es una **contingencia**, lo que significa que puede ser verdadero o no, es decir, que es posible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. Por lo tanto el argumento correspondiente no será válido, como dedujimos intuitivamente en el apartado anterior. Procedamos del mismo modo con el otro argumento propuesto:

Evaluando el segundo ejemplo:

Premisa 1) Si Alicia llega tarde a casa, será castigada

Premisa 2) Alicia ha llegado tarde a casa

Conclusión: Alicia será castigada

Como en el caso anterior, obtenemos el condicional que le corresponde al argumento que vamos a evaluar, que, tras formalizar cada una de las premisas y la conclusión, quedará como sigue:

$$[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$$

Y al realizar la tabla de verdad correspondiente obtenemos:

p	q	p→q	(p→q)∧p	[(p→q)∧p]→q
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	**1**
0	0	1	0	**1**

La tabla de verdad nos indica que la fórmula evaluada es una **tautología**, por lo tanto, podemos concluir que el argumento correspondiente es válido, y la tabla de verdad correspondiente es la *prueba* de su validez.

1.6 Derivaciones lógicas

1.6.1 Concepto de derivación lógica

Hemos definido más arriba el concepto de argumento válido afirmando que un argumento es válido si y sólo si es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Esta definición utiliza el concepto de verdad y falsedad, por lo que podemos decir que es una definición *semántica*. Pero la validez lógica puede definirse sin hacer referencia a la verdad o la falsedad. Se trataría, en este caso, de una definición *sintáctica*.

Desde el punto de vista *sintáctico* un argumento es válido si las premisas pueden ser transformadas en la conclusión aplicando unas reglas de transformación de fórmulas a las que denominaremos reglas de derivación. Veamos con un poco más de detalle a qué nos referimos cuando hablamos de ‘transformación’.

En el lenguaje natural es corriente transformar unas expresiones en otras que consideramos equivalentes. Esto lo hacemos, por ejemplo, cuando pasamos una frase de activa a pasiva:

a) El perro se come el hueso

b) El hueso es comido por el perro

La oración a) puede ser transformada en la oración b) siguiendo unas determinadas reglas. También en matemáticas transformamos unas expresiones en otras equivalentes:

c) x+5=y

d) x=y-5

Sabemos que la expresión c) puede ser transformada en la expresión d) (y viceversa) aplicando una regla conocida por todos.

La posibilidad de transformar unas expresiones en otras aplicando reglas fijas nos permite *derivar* unas de otras de modo que en la expresión final quizá se pongan de manifiesto cosas que en un principio no eran tan evidentes.

En el lenguaje formal de la lógica de proposiciones también hay unas reglas que nos permiten transformar unas fórmulas en otras, de modo que, dadas unas premisas, y aplicando esas reglas, podemos obtener una determinada conclusión (aunque no *cualquier* conclusión). Las reglas que nosotros estudiaremos constituyen lo que denominamos un *cálculo de deducción natural* y si una fórmula A puede ser transformada en otra fórmula B con ayuda de estas reglas, decimos que B *se sigue* de A y que el argumento en el que A es una premisa y B la conclusión, es *válido*.

1.6.2 Reglas de derivación del cálculo de deducción natural de la lógica de enunciados (o proposicional)

Como ya sabemos, hay cuatro conectores lógicos: la conjunción (∧), la disyunción (∨), la implicación (→) y la negación (¬). Cada uno de estos conectores puede ser **introducido** o **eliminado**, obteniendo, en consecuencia, una nueva fórmula. Así, para cada conector lógico habrá una regla de introducción y otra de eliminación.

Reglas de la conjunción (∧)

Eliminación de la conjunción (E∧) o Simplificación (Simp.)

La regla de eliminación de la conjunción, también llamada *Simplficación* (Simp.), dice que una conjunción puede ser transformada en otra fórmula consistente únicamente en uno de los miembros de dicha conjunción. En símbolos:

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \text{o bien} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

La línea que hay entre la fórmula A∧B y la fórmula A indica que la transformación sólo puede efectuarse desde la fórmula de arriba hacia la fórmula de abajo, de modo que aunque a partir de A∧B se puede deducir A, a partir de A **no se pude deducir** A∧B.

La eliminación de la conjunción es una regla tan evidente que requiere poco comentario. Diremos, sin embargo, que lo que significa es que si A y B son verdaderas, entonces también es verdadera cualquiera de ellas por separado. El siguiente sería un ejemplo de aplicación de esta regla:

1) p∧q |- q

2 p ________ Simp. 1

Este sencillo ejemplo de derivación lógica merece algunas explicaciones válidas para cualquier otra.

En primer lugar, las líneas de la derivación **van numeradas** para facilitar la lectura e interpretación de la derivación. Nótese, sin embargo, que el número de la primera línea va seguido de un paréntesis. Esto es una convención que significa que esa línea **es una premisa**, mientras que el resto son los pasos intermedios hasta la conclusión. El símbolo |- indica que lo que le sigue es la conclusión. Cuando nos pidan que realicemos una derivación sólo nos darán las premisas y la conclusión y nosotros deberemos poner los pasos intermedios aplicando las reglas.

En segundo lugar, el símbolo |- significa que la fórmula que le sigue **es la conclusión**, es decir es la fórmula que debemos obtener de las premisas aplicando las reglas de derivación.

En tercer lugar, vemos que la línea 2 va seguida de la indicación 'Simp.', seguida del número 1. Esto significa que la fórmula 'p' de la línea 2 la hemos obtenido mediante la aplicación de la regla 'Simplificación' o Eliminación de la conjunción (E∧), y que ésta regla ha sido aplicada en la línea 1.

La explicación de la derivación es sencilla. Nos piden que transformemos la fórmula p∧q (premisa) en la fórmula p (conclusión). Como la conclusión está contenida en la premisa y ésta es una conjunción, podemos aplicar la regla que dice que una conjunción puede ser simplificada en cualquiera de sus miembros. De este modo podemos escribir 'p' en la línea 2, aplicando E∧ en la línea 1. La derivación termina en la línea 2 porque ya hemos conseguido lo que nos pedían, a saber, convertir p∧q en p.

Introducción de la conjunción (I∧) o Producto (Prod.)

Según esta regla, dos fórmulas distintas pueden unirse formando una tercera fórmula, que será la conjunción de las mismas. En símbolos:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{A \wedge B}$$

Como vemos, esta fórmula nos permite formar una conjunción uniendo dos fórmulas **previamente afirmadas** en alguna de las líneas de la derivación. Un sencillo ejemplo de utilización de esta regla es el siguiente:

1) p |- p∧q
2) q
3. p∧q_______ Prod. 1,2

En este sencillo ejemplo tenemos dos premisas (indicadas por números con paréntesis), y la conclusión es p∧q. Es evidente que si las premisas afirman que tanto 'p' como 'q' son verdaderas por separado, también son verdaderas en conjunción. Como además la regla de introducción de la conjunción (I∧) o producto (Prod.) nos permite unir cualesquiera dos líneas mediante una conjunción, en el paso 3 podemos escribir ‘p∧q’, advirtiendo que esta fórmula procede de la aplicación de la regla Prod o I∧ (podemos utilizar cualquiera de estas denominaciones) en las líneas 1 y 2. Nótese que cuando utilizamos esta regla necesitamos recurrir a dos líneas distintas, que deben ser indicadas.

El siguiente es un ejemplo un poco más complicado (no mucho), en el que combinamos las dos reglas vistas hasta ahora:

1) p∧q |- p∧s
2) r∧s
3. p _______ Simp. 1
4. s _______ Simp. 2
5. p∧s____ Prod. 3,4

Reglas de la implicación (→)

Eliminación de la implicación (E→) o Modus Ponens (MP)

Sabemos que una implicación como A→B se compone de un antecedente (A) y de un consecuente (B). La regla de Eliminación de la implicación o Modus Ponens nos permite eliminar el condicional, dejando únicamente el consecuente, **siempre y cuando tengamos afirmado el alguna línea anterior el antecedente**. En símbolos:

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Esta regla dice algo tan sencillo que como si, dado un condicional, se cumple la condición, entonces también se cumplirá lo condicionado. Por ejemplo, si le decimos a alguien lo siguiente:

Si te vas, entonces me pondré triste

Y esa persona decide irse, podemos deducir que nos pondremos tristes. Igualmente, si un profesor nos promete que si vamos a clase, nos aprobará, y a final de curso podemos demostrar que hemos ido a clase, no tendrá más remedio que aprobarnos (o faltar a su palabra). Una aplicación sencilla de esta regla sería la siguiente derivación:

1) p→q |- q
2) p
3. q ________ MP 1, 2

El ejemplo es una aplicación inmediata de la regla. Como vemos, si una de las premisas afirma que si *p* es verdad, *entonces* también es verdad *q*, y la otra premisa nos dice que *p* es verdad, el paso 3 es claro: podemos afirmar *q* porque la regla del *Modus Ponens* nos permite afirmar el consecuente de un condicional si tenemos afirmado el antecedente. Una vez que hemos llegado a *q* se ha terminado la derivación porque es lo que se nos pedía en la conclusión.

Obsérvese que al indicar que hemos obtenido *q* mediante la aplicación de la regla Modus Ponens (MP), debemos indicar en qué línea está la implicación que tratamos de eliminar (en este caso la línea 1), y en qué otra línea está afirmado el antecedente (en este caso, la 2).

Un **error frecuente** consiste en tratar de 'sacar' el antecedente de un condicional. A partir de un condicional, **jamás podemos deducir el antecedente**; únicamente podemos 'sacar' el consecuente *si tenemos el antecedente afirmado en otra línea*. De modo que si tenemos un condicional del tipo (p→q) debemos abstenernos de la tentación de 'sacar' *p*, aunque tengamos q, pues la siguiente regla **NO ES VÁLIDA**, de hecho constituye una **FALACIA**:

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \end{array}}{A}$$

Esta regla

NO ES VÁLIDA

Un ejemplo sencillo combinando las reglas vistas hasta ahora podría ser el siguiente:

1) p→q |- q∧r
2) p∧r
3. p ____________ Simp. 2
4. q ____________ MP 1,3
5. r _____________ Simp. 2
6. q∧r __________ Prod. 4,5

Como vemos, hemos aplicado la regla de Eliminación de la conjunción (E∧) o Simplificación *dos veces a la misma línea*, y podríamos hacerlo tantas veces como fuera necesario, pues (p∧r) no deja de ser verdadero aunque lo simplifiquemos.

Introducción de la implicación (I→) o Teorema de Deducción (TD)

Esta regla nos permite introducir una fórmula condicional del tipo A→B siempre y cuando demostremos que *si* A es verdadera, también lo es B. En símbolos podemos expresarlo del siguiente modo:

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ . \\ . \\ B \end{array}\right.}{A \rightarrow B}$$

El corchete que une A con B indica que la fórmula A es un *supuesto* o *hipótesis* con una validez temporal. En efecto, para demostrar que A→B, hay que *suponer* que A es verdad, para comprobar que, en ese caso, B también lo es. Suponer que A es verdad no significa que lo sea, sino que de momento, y hasta que *se cierre el supuesto*, actuaremos *como si* A fuera verdad. En cuanto lleguemos a la fórmula B, *cerraremos el supuesto*, y afirmaremos que de A se sigue B, o lo que es lo mismo, A→B. Una vez que se ha cerrado el supuesto, ni la A que lo abre, ni la B que lo cierra, ni ninguna de las fórmulas intermedias pueden ser usadas de nuevo, pues su validez era sólo supuesta.

Esta regla puede parecer algo complicada, pero la usamos habitualmente; de hecho, somos afortunados por poder operar sobre supuestos. Se verá con el siguiente ejemplo. Imaginemos que quiero demostrar el siguiente condicional:

Si le corto la cabeza al gato Misha, el gato Misha morirá

En principio se nos puede ocurrir una forma bastante salvaje de comprobar semejante afirmación: cortarle la cabeza al gato y comprobar si muere. Afortunadamente la lógica casi nunca requiere que se derrame sangre y podemos ahorrarnos el sacrificio del gato aplicando la regla de introducción de la implicación. En vez de cortarle la cabeza a Misha, basta que *supongamos que se la cortamos*, y aplicando nuestros conocimientos sobre biología, saquemos consecuencias a partir de ese supuesto, hasta concluir que Misha morirá. En ese momento cerramos nuestro supuesto, olvidamos que en nuestra imaginación hemos matado al gato, y afirmamos con certeza que *si* le cortara la cabeza *a Misha*, *entonces* Misha moriría. Un sencillísimo ejemplo de aplicación de esta regla sería el siguiente:

1) p→q |- p→r
2) q→r
3. p
4. q ___________ MP 1,3
5. r ___________ MP 2,4
6. p→r _______ TD 3-5

Analicemos el ejemplo con detenimiento. **En primer lugar,** como el condicional que se nos pide en la conclusión no está contenido en ninguna de las premisas, ni podemos obtenerlo directamente de aplicando las otras reglas, necesitamos *introducirlo suponiendo el antecedente*, pues para demostrar que p→r, tenemos que demostrar que *si* p fuera verdad, también lo sería r, aunque ignoremos si p es verdad o no. En la línea 3 nos ponemos manos a la obra y suponemos p abriendo un supuesto en forma de corchete que, de momento, dejaremos abierto.

En segundo lugar, una vez que hemos supuesto el antecedente del condicional que queremos introducir, debemos tener claro *hacia dónde vamos*. En este caso queremos demostrar que de p se puede deducir r, así que no cerraremos el supuesto hasta que obtengamos r.

En tercer lugar, debemos plantearnos una estrategia para demostrar r. Observando las premisas veremos que la línea 2 dice que q→r, lo que significa que para poder demostrar r, hay que tener q, luego ahora nuestro objetivo es obtener q. Si seguimos observando las premisas descubrimos que en la línea 1 se afirma que p→q, es decir que si p fuera verdadera, entonces lo sería q. Si recapitulamos un poco, comprenderemos entonces que si *p* es verdad, entonces es verdad *q*, y que si *q* es verdad, entonces lo es *r*, que es lo que queremos demostrar de momento. Así que el problema de obtener *r* se reduce a averiguar si *p* es verdadera o no.

En cuarto lugar, resulta que *de momento p* es verdadera, pues está en la línea 3, en un supuesto que acabamos de abrir, y que todavía no se ha cerrado. Esto significa que en la línea 4 podemos escribir q aplicando el Modus Ponens en las líneas 1 y 3. Como ahora ya tenemos la *q* que necesitamos para afirmar *r*, podemos escribir *r* en la línea 5, aplicando el Modus Ponens en las líneas 2 y 4.

En quinto lugar, una vez llegados a *r* **cerramos el supuesto** y en la siguiente línea afirmamos lo que pretendíamos demostrar, a saber, que *si p* fuera verdad, entonces también lo sería *r*, o lo que es lo mismo: p→r. En este punto podemos dar el ejercicio por terminado porque hemos obtenido la fórmula que se nos pide en la conclusión. Obsérvese que cuando se indica que se ha usado la regla TD o (I→), los números de línea no se separan por comas, sino por un guión, pues no nos referimos a dos líneas aisladas, sino a todo el supuesto, desde que se abre hasta que se cierra.

Reglas de la disyunción ($\lor$)

Eliminación de la disyunción (E$\lor$) o Prueba por casos (Cas.)

A diferencia de las conjunciones, las disyunciones nos dan muy poca información. Por ejemplo, si sé que mañana lloverá o nevará, no sé realmente qué tiempo hará, simplemente sé que como mínimo una de esas opciones será verdadera. Si, en cambio, supiera que mañana lloverá *y* nevará, mi información sobre el clima de mañana sería bastante completa. Esta es la razón por la que la disyunción, no puede ser eliminada con facilidad. En el caso de la conjunción sabemos que sus dos términos son verdaderos, por lo tanto podemos afirmar cualquiera de ellos por separado. Pero en el caso de la disyunción, sabemos que, *al menos* uno de sus términos es verdadero, pero no sabemos cuál. La lógica no puede correr riesgos, y ante una disyunción como $A \lor B$, nos prohíbe hacer apuestas, de modo que **aunque sepamos que $A \lor B$ es verdad, ignoramos si A es verdadera o lo es B, o lo son ambas**. Entonces, ¿cómo podemos deshacernos de una disyunción?

Si no se nos da información adicional, no hay manera de saber cuál de los términos de una disyunción es verdadero. Sin embargo es posible que descubramos que **es irrelevante cuál de ellos sea verdadero**. Para comprender esto, imaginemos que estamos en una isla desierta (no importa cómo hemos llegado allí, simplemente estamos *Perdidos*). Descubrimos que en la isla no hay nada que comer, por lo que deducimos que si nos quedamos allí acabaremos muriendo de hambre. Decidimos entonces salir nadando. Pero cuando nos disponemos a saltar al agua observamos cientos de tiburones o otras bestias temibles esperando hincarnos el diente, de modo que concluimos con rapidez que si tratamos de salir de la isla moriremos devorados. Nos encontramos, en ese momento, ante la siguiente disyunción: o bien me quedo en la isla, o bien salgo nadando. No sabemos qué vamos a hacer, aunque sabemos que no hay otras opciones. De todos modos, concluimos, es **irrelevante** lo que hagamos, porque, de un modo u otro moriremos. Así que, aunque no sepamos cuál de los dos miembros de la disyunción se cumplirá, sí sabemos que ambos tienen una consecuencia común; concluimos, entonces, que vamos a morir.

La regla que tan dramáticamente nos ha librado de la disyunción es la eliminación de la disyunción (E$\lor$) o Prueba por Casos (Cas.), y afirma que si los miembros de una disyunción implican la misma fórmula, podemos sustituir dicha disyunción por la fórmula implicada por sus dos términos. En símbolos:

$A \lor B$

A

C

B

C

C

Salta a la vista, en primer lugar, que la eliminación de la disyunción (E∨) o Prueba por casos (Cas) **recure siempre a dos supuestos**. En efecto, para demostrar que de A∨B se sigue C, hay que demostrar que C se sigue de A, y que C se sigue *también* de B. Esto significa que, si suponemos que A es verdadera y llegamos a C, y luego suponemos que B es verdadera y también llegamos a C, podremos afirmar C, independientemente de que ignoremos cuál de las dos opciones es verdadera (o si lo son las dos). Si no pudiéramos alcanzar la misma fórmula desde A y desde B, la regla no podría ser aplicada. Un ejemplo sencillo de aplicación de la Prueba por Casos:

1) p∨q |- r
2) p→r
3) q→r
4. p
5. r ________________ MP 2,4
6. q
7. r ________________ MP 3,6
8. r ________________ Cas. 1, 4-5, 6-7

Como vemos, el ejercicio nos pide que lleguemos a la conclusión *r* a partir de las premisas dadas. Observamos en las líneas 2) y 3) que para que *r* sea verdadera, debe ser verdad *p* o *q*. En efecto, si *p* fuera verdad, por MP, podríamos obtener *r*, y silo fuera *q* también podríamos obtener *r* por el mismo procedimiento. El problema es que no sabemos si *p* es verdadera o lo es *q*, o lo son *ambas*. Lo único que sabemos es lo que nos dice la premisa 1), a saber que _al menos una de ellas es verdadera. La cuestión es ¿realmente importa cuál de ellas lo sea? La respuesta es no, pues independientemente de cuál de ellas sea verdad, *r* siempre lo será. Esto es lo que hay que demostrar.

Una vez que hemos comprendido que hay que demostrar que tanto de p como de q se sigue r, comenzamos una prueba por casos. En la línea 4 suponemos *p* porque es el primer miembro de la disyunción de la línea 1). Vamos a *probar* que *en caso* de que *p* fuera verdad (lo que ignoramos), también sería verdad r. Abierto el supuesto en p, no lo cerraremos hasta llegar a nuestro objetivo, que es *r*. Pero afortunadamente podemos escribir *r* ya en la línea 5, pues como *de momento* y *hasta que se cierre el supuesto*, *p* es verdadera, podemos aplicar la regla del Modus Ponens entre las líneas 2) y 4. Cerramos ahora el supuesto abierto en 4 y seguidamente pasamos a *probar* el *otro caso*. Suponemos q en la línea 6 porque es el segundo miembro de la disyunción de 1) y queremos mostrar que, al igual que su compañero *p*, *q* también nos conduce a *r*. Enseguida escribimos r en la línea 7 y cerramos el supuesto abierto en 6, por la misma razón que en el primer caso. Como tanto desde *p* como desde *q* hemos conseguido derivar *r*, en la línea 8 afirmamos sin temor *r*, indicando que hemos aplicado la regla Cas. (también podemos llamarla E∨). A continuación del nombre de la regla, indicamos en qué línea está la disyunción que eliminamos (en este caso en la línea 1), a continuación indicamos la línea que abre el primer caso y la línea que lo cierra, separadas por un guión, y finalmente escribimos la línea en que se abre el segundo caso y la línea en la que se cierra, también separadas por un guión. Y ya está.

Introducción de la disyunción (I∨) o Adición (Ad.)

La introducción de la disyunción (I∨), también denominada 'Adición' (Ad.) dice que, si sabemos que una fórmula A es verdadera, entonces podemos convertirla en cualquier disyunción, siempre y cuando esa misma fórmula sea una de los términos de dicha disyunción. En símbolos:

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

Para considerar verdadera a una disyunción, *basta* que sepamos que uno de sus miembros es verdadero (ver tabla de verdad de la disyunción). Así que si sabemos que la fórmula A es verdadera, entonces sabemos que es verdadera cualquier disyunción con tal de que A sea uno de sus miembros. Esto significa que a la fórmula A podemos *añadirle* cualquier otra fórmula siempre que las conectemos mediante el disyuntor (∨).

Un ejemplo cotidiano e informal de aplicación de esta regla sería el siguiente: supongamos que una tarde, al llegar Fulanito a casa, su madre le pregunta si ha estado estudiando en la biblioteca como prometió. Fulanito no ha estado estudiando en la biblioteca, sino jugando a las cartas, pero no se lo quiere decir a su madre porque sabe que se enfadará. Sin embargo Fulanito es incapaz de mentir a su madre pues se lo impide su noble naturaleza. Finalmente recurre a la introducción de la disyunción y le dice a su madre que ha estado estudiando *o* jugando a las cartas. Fulanito no miente, pues si es verdad que ha estado jugando a las cartas, también es verdad que ha estado estudiando *o* jugando a las cartas. La madre de Fulanito alaba su ingenio y, como recompensa, lo castiga *por listo*. Una aplicación más formal:

1) p |- p∨q
2. p∨q ________ Ad. 1

En el ejemplo obtenemos la conclusión p∨q inmediatamente en la línea 2 aplicando la regla de Adición o introducción de la disyunción a la línea 1. En efecto, si *p* es verdad, como afirma la premisa 1), entonces p∨q tiene que ser verdad también, pues para que p∨q sea verdad basta que uno de sus miembros lo sea.

Reglas de la negación (¬)

Eliminación de la negación (E¬) o Doble Negación (DN)

Según esta regla, si una fórmula aparece doblemente negada, podemos afirmarla. En símbolos:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

La regla es evidente: si no es verdad que no es verdad A, entonces A es verdad. En la práctica nos permite afirmar una fórmula siempre que esté negada una número *par* de veces. Una aplicación inmediata de la regla:

1) ¬¬p |- p

2. p ____________ DN, 1

Introducción de la negación (I¬) o Reducción al Absurdo (Abs.)

La introducción de la negación o Reducción al Absurdo, nos permite negar una fórmula A siempre que demostremos que, de ser verdadera tal fórmula, se seguiría una contradicción. En símbolos:

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ B\wedge\neg B \end{array}}{\neg A}$$

Como vemos, la aplicación de la fórmula nos exige *suponer lo contrario de lo que queremos demostrar*, de modo que si queremos demostrar ¬A, supondremos A, y si queremos demostrar A, supondríamos ¬A (cuya negación ¬¬A se convertiría en A aplicando DN).

En segundo lugar, si suponemos una fórmula con la intención de demostrar su contrario, tenemos que llegar, necesariamente a una contradicción, y no importa a qué contradicción lleguemos, pues todas son igualmente falsas. Una contradicción es siempre una conjunción formada por una fórmula cualquiera *y* por su negación. Las siguientes fórmulas son todas ellas contradicciones, de modo que cualquiera de ellas serviría para cerrar una reducción al absurdo:

$$p\wedge\neg p$$

$$(p\rightarrow q) \wedge \neg(p\rightarrow q)$$

$$(p\vee\neg p)\wedge\neg(p\vee\neg p)$$

$$[s\rightarrow(t\wedge\neg q)]\wedge\neg[s\rightarrow(t\wedge\neg q)]$$

Lo que está afirmando esta regla es que una fórmula que nos conduce a una contradicción, no puede ser verdadera y, por lo tanto, tiene que serlo su negación. También, en la vida cotidiana, en cuanto descubrimos que alguien se contradice, le negamos toda credibilidad. La lógica nos prohíbe admitir nada que nos lleve a contradicciones, pues si admitiéramos una contradicción, ¿qué no estaríamos dispuestos a admitir?

Un ejemplo sencillo de aplicación de esta regla:

1) $p \rightarrow \neg r$ $\vdash \neg p$
2) $q \wedge r$
3. p
4. r _______ Simp. 2
5. ¬r _______ MP 1, 3
6. r∧¬r_____Prod. 4,5
7. ¬p _____ Abs 3-6

En esta derivación se nos pide que demostremos *¬p*. Observando las premisas comprobamos que no podemos deducir *p* directamente de ninguna de ellas porque ninguna de ellas contiene a *¬p*. Puesto que la prueba «directa» es imposible, podemos ensayar una estrategia indirecta. Aplicar la regla de reducción al absurdo es como llegar a nuestro destino, pero por la puerta de atrás: negando lo que queremos demostrar. Así que en la línea 3 abrimos un supuesto con la negación de *¬p*, que es *p*. Hay que tener en cuenta que este supuesto no lo hemos abierto con la intención de introducir una implicación (I→ ó TD) ni estamos enfrascados en una prueba por casos. Es importante recordar esto porque sólo cerraremos el supuesto cuando hayamos llegado a una contradicción.

Vemos que en la premisa 1) aparece *¬r* como el consecuente del condicional *p→r*. Por otra parte, en la premisa 2) *r* aparece como uno de los términos de una conjunción. Si consiguiéramos afirmar *r* y *¬r* a la vez tendríamos la contradicción deseada. Pero para poder afirmarlas *a la vez*, tenemos antes que afirmarlas por separado.

En la línea 4 vemos que *r* puede ser afirmada sin mayor problema aplicando la eliminación de la conjunción o Simplificación en la línea 2. En efecto, si en la línea 2) se dice que *q* y *r* son verdaderas en conjunción, entonces no debemos tener reparos para afirmar *r* en solitario.

Afirmar *¬r* tampoco es ninguna proeza lógica, pues como en la línea 3 hemos supuesto *p* y este supuesto *todavía no está cerrado*, podemos actuar como si *p* fuera verdadera. Pero en la línea 1) dice que si *p* es verdadera, entonces también lo es *¬r*, por lo tanto, en la línea 5 afirmamos *¬r* sin remilgos, aplicando un oportuno Modus Ponens al condicional de la línea 1, cuyo antecedente se encuentra en la línea 3.

Una vez que hemos afirmado por separado *r* (en la línea 4) y *¬r* (en la línea 5), es hora de unir ambas fórmulas para obtener una flamante contradicción. Como la regla de introducción de la conjunción o producto nos permite unir cualesquiera dos fórmulas previamente afirmadas, aplicamos dicha regla en las líneas 4 y 5, de modo que en la línea 6 podemos escribir $r \wedge \neg r$.

Tenemos ya afirmada una contradicción en la línea 6. Pero una contradicción es una afirmación bastante insólita, pues nadie estaría dispuesto a creer que r y $\neg r$ son verdaderas *a la vez*. Llegados a este callejón sin salida, no podemos continuar, sino que estamos obligados a cerrar el supuesto en esa misma contradicción y negar la fórmula que nos condujo a él, que en este caso es p, por lo que, en la siguiente y última línea, escribimos $\neg p$, que era lo que queríamos demostrar. No olvidemos indicar que hemos obtenido $\neg p$ mediante una aplicación de la regla de introducción de la negación (I¬) o Reducción al Absurdo (Abs.). Hay que indicar, además, la línea en la que se abre el supuesto que nos lleva a la contradicción, y la línea en la que se cierra el supuesto por contener una fórmula contradictoria, ambas separadas por un guión.

Los supuestos: FAQ (*Frecuently Asked Questions*)

1.- ¿Qué puedo suponer?

- Se puede suponer cualquier fórmula, por compleja o simple que sea, esté o no en las premisas o en la conclusión, haya aparecido en alguna línea o no, incluso aunque ya haya sido supuesta antes; después de todo, suponer es gratis. Téngase en cuenta que al suponer una fórmula sólo estamos diciendo que *de momento* la consideraremos verdadera para comprobar qué se sigue de ella. Pero ese supuesto *siempre* ha de ser cerrado o cancelado en algún momento.

2.- ¿Qué debo suponer?

- Eso depende de qué regla pretendas aplicar y a dónde quieras llegar.
  - Si quieres demostrar un condicional, tendrás que aplicar el Teorema de Deducción o I→. En ese caso, debes suponer el antecedente del condicional que quieres demostrar.
  - Si quieres eliminar una disyunción, debes suponer los dos términos de la disyunción que tratas de eliminar.
  - Si quieres hacer una reducción al absurdo, supondrás lo contrario de lo que quieres demostrar, por paradójico que te parezca.

3.- ¿Cuándo debo suponer algo?

- Cuando lo necesites, pero teniendo en cuenta que siempre que suponemos algo es porque vamos a aplicar alguna de las reglas que nos exigen hacer un supuesto y que ese supuesto debe ser cerrado en algún momento.

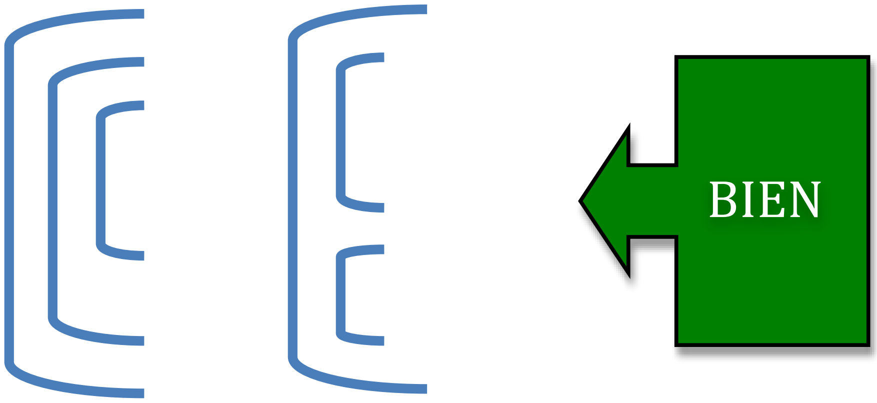
4.- ¿Cuándo debo cerrar un supuesto?

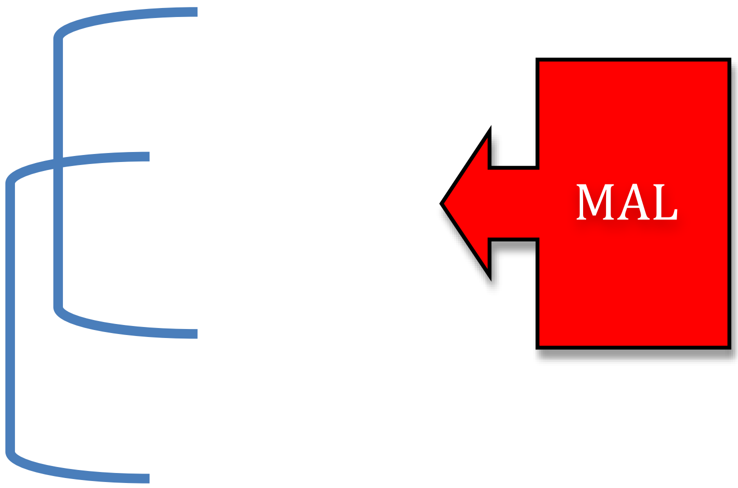
- Depende de por qué lo hayamos abierto. Sólo hay tres reglas que nos exigen abrir un supuesto, y cada una de ellas nos dice cuándo cerrarlo:
  - Si abrimos el supuesto para **introducir una implicación**, habremos supuesto el antecedente de la implicación que queremos, y cerraremos el supuesto cuando hayamos obtenido el consecuente de dicha implicación. De modo que el supuesto se abre en el antecedente y se cierra en el consecuente. En la siguiente línea, y *fuera del supuesto*, escribimos el condicional que hemos construido, por I→ o TD.
  - Si abrimos el supuesto porque estamos aplicando una prueba por casos, tenemos que tener en cuenta que dicho supuesto depende de una disyunción. Una disyunción siembre tiene la forma A∨B, siendo A y B dos fórmulas cualesquiera. Si estamos haciendo una prueba por casos, supondremos A, cerraremos ese supuesto, y luego supondremos B, supuesto que también cerraremos. Los dos supuestos deben ser cerrados al llegar a la misma fórmula, por lo tanto, no cerraremos el primer supuesto hasta que no lleguemos a una fórmula que también pueda ser alcanzada desde el segundo supuesto.

- Si abrimos el supuesto porque estamos aplicando la Reducción al Absurdo, habremos supuesto *lo contrario* de lo que queremos demostrar. En este caso nuestro objetivo es siempre una contradicción, por lo tanto no cerraremos hasta que la hayamos obtenido.

5.- ¿Puedo abrir un supuesto dentro de otro supuesto?

- Por supuesto. Los supuestos dentro de otros supuestos se llaman supuestos *anidados*. Lo único que hay que tener en cuenta es que los supuestos interiores deben cerrarse antes que los exteriores:





6.- ¿Puedo usar las líneas interiores de un supuesto?

- **Mientras el supuesto no ha sido cerrado**, tanto la línea que lo abre como cualquiera de las que siguen puede ser usada en la derivación. Pero **cuando el supuesto ha sido cerrado o cancelado**, ni la línea que lo abre, ni la que lo cierra ni ninguna de las interiores puede volver a usarse.