HÖHERE ZYKLEN IM (3N+1)-PROBLEM WIDERLEGT

KARL LINEK, PETER EBELSBERGER

Zusammenfassung. Der Ansatz besteht darin, die Regeln des Collatzproblems in ein homologes System zu transformieren, um Erkenntnisse zu gewinnen, die dann algebraisch nachvollzogen werden können. In einem ersten Schritt wurde das Collatzproblem verallgemeinert, indem die Grundmenge auf die binären rationalen Zahlen erweitert wurde und der $(3N + 1)$-Operator zu $(3N + 2^M)$ transformiert wurde. Dadurch wurden die Operatoren kommutativ. In einem zweiten Schritt wurde die Collatzvermutung neu formuliert, um keine Divisionen durchführen zu müssen. In einem dritten Schritt wurde das Collatzproblem in das Binärsystem transformiert. Durch Analyse der führenden Ziffer der Collatzfolgen konnte bewiesen werden, dass es keinen höheren Zyklus gibt.

1. Einleitung

Das (3n+1)-Problem besteht aus zwei Regeln, die eine Collatzfolge, ausgehend von einer beliebigen natürlichen Zahl größer als Null, erzeugen:

$$n_{n+1} := \begin{cases} 3n+1 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \\ \frac{n}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$

und einer Vermutung:

Vermutung 1. *Unabhängig von der Anfangszahl $n \in \mathbb{N}$ mündet die Collatzfolge in den unendlichen Zyklus 4-2-1.*

Trotz ihres simplen Aufbaus konnte die Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden. Die Collatzfolge könnte theoretisch zwei andere Ausgänge haben. Sie könnte in einen noch unbekannten Zyklus mit höheren Zahlen münden oder sie könnte unendlich wachsen.

2. Verallgemeinerung

Der $(3n + 1)$-Rechenschritt (im folgenden Text C-Operator genannt) und der Divisionsschritt (D-Operator) sind nicht kommutativ. Würde man den D-Operator vor einem C-Operator bei ungeraden Zahlen ausführen, ist das Ergebnis nicht mehr in der Grundmenge der natürlichen Zahlen enthalten.

Um die Operatoren kommutativ zu machen, wurde das Problem verallgemeinert. Die Verallgemeinerung besteht aus einer Erweiterung der Grundmenge und eine Anpassung des C-Operators.

Die Grundmenge wurde von den natürlichen Zahlen größer 0 auf die Untermenge der positiven rationalen Zahlen, welche im Binärsystem endlich viele Ziffern haben, erweitert. Solche Zahlen können in ein Produkt einer ungeraden natürlichen Zahl und einem Faktor 2^n, wobei $n \in \mathbb{Z}$ ist, zerlegt werden. Ergo darf n auch negativ sein und damit sind auch rationale Zahlen in der Grundmenge.

Der C-Operator wird verändert, sodass man anstatt 1 nach der Multiplikation mit 3 2^n addiert, wobei diese 2^n jene Zweierpotenz ist, welche in der Zahl vorhanden sind.

Der D-Operator wurde nicht verändert. Insgesamt ergibt sich folgendes System von Regeln:

$x = y \cdot 2^n$, $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{N}$, $\frac{y}{2} \notin \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$C(x) \equiv 3x + 2^n = 3y \cdot 2^n + 2^n = (3y + 1) \cdot 2^n$

$D(x) \equiv \frac{x}{2} = y \cdot 2^{n-1}$

Diese Verallgemeinerung macht die beiden Operatoren kommutativ: $C(D(x)) = D(C(x))$

Beweis:

$C(D(x_0)) = C(D(y_0 \cdot 2^n)) = C(y_0 \cdot 2^{n-1}) = 3y_0 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1}$

$D(C(x_0)) = D(C(y_0 \cdot 2^n)) = D(3y_0 \cdot 2^n + 2^n) = 3y_0 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1}$

Das Kommutativgesetz erlaubt es, zuerst alle C-Operatoren auszuführen, bis das Abbruchkriterium erreicht ist, und dann alle D-Operatoren folgen zu lassen. Um zu prüfen, ob das Abbruchkriterium erreicht ist, muss man aber trotzdem die D-Operatoren ausführen, sodass die Verallgemeinerung nichts bringt, solange man nicht auch die Collatz-Vermutung im Sinne der Verallgemeinerung neu formuliert:

Vermutung 2. *Unabhängig vom Anfangswert $x = y \cdot 2^n$, $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{N}$, $\frac{y}{2} \notin \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ führt eine endlich Anzahl von Anwendungen des C-Operators auf x dazu, dass y 1 wird.*

Mit anderen Worten: Wenn man auf eine Zahl endlich oft den C-Operator anwendet, ist das Ergebnis eine ganzzahlige Potenz von 2.

Diese Verallgemeinerung samt Neuformulierung der Collatzvermutung führt dazu, dass die Anwendung des D-Operators nicht nur später ausgeführt werden kann, sondern überhaupt nicht mehr notwendig ist.

3. Umwandlung ins Binärsystem

Die Verallgemeinerung hat zwar die Erleichterung gebracht, den D-Operator nicht mehr durchführen zu müssen, aber es bringt auch das Problem mit sich, überprüfen zu müssen, ob eine ganzzahlige Potenz von 2 erreicht ist.

Eine Brute-Force-Methode könnte das Ergebnis mit einer Folge der Potenzen von 2 vergleichen. Dazu muss man nicht nur eine Potenz von 2 berechnen, sondern auch noch die Folge der Zweierpotenzen so lange durchgehen, bis man feststellt, dass das Ergebnis kleiner oder gleich eines Gliedes ist. Das ist zeitaufwendiger, als den D-Operator sofort anzuwenden.

Alternativ könnte man nach der Anwendung eines C-Operators den Logarithmus zur Basis 2 nehmen und überprüfen, ob das Ergebnis ganzzahlig ist. Das erfordert jedoch den Einsatz einer transzendenten Funktion, welche per definitionem irgendwann abgebrochen werden muss. Dies könnte jedoch Scheinlösungen liefern.

Im vorliegenden Ansatz werden nicht nur die Regeln, sondern auch die Vermutung in das Binärsystem transformiert. Das bringt mehrere Vorteile. Der erste Vorteil betrifft das Abbruchkriterium. Im Binärsystem hat jede ganzzahlige Potenz von 2 eine einzige Ziffer 1. Es genügt festzustellen, ob die Anzahl der Ziffern 1 größer als 1 ist oder nicht. Der Einsatz der transzendenten Funktion Logarithmus ist nicht notwendig und man muss das Ergebnis eines C-Operators auch nicht mit der Folge der Zweierpotenzen vergleichen.

Ein weiterer Vorteil besteht in dem Umstand, dass aus der Sicht des C-Operators egal ist, wo das Komma steht. Damit werden Zahlen, welche in anderen Zahlensystemen verschieden sind aus dieser Perspektive gleich.

Um diesem Umstand gerecht zu werden, wurde der Begriff der Collatzidentität geprägt.

Definition 3. Zwei Zahlen $a = y_a \cdot 2^n$ und $b = y_b \cdot 2^m$, y_a, $y_b \in \mathbb{N}$; $\frac{y_a}{2}$, $\frac{y_b}{2} \notin \mathbb{N}$; n, $m \in \mathbb{Z}$ sind collatzident, wenn $y_a = y_b$. Als Zeichen der Collatzidentität wird $\stackrel{C}{=}$ benutzt.

Diese Definition ist zwar unabhängig vom Zahlensystem, aber nur im Binärsystem ändert sich die Collatzidentität nicht, wenn man das Komma verschiebt.

Beispiele im Binärsystem: $101 \stackrel{C}{=} 1010 \stackrel{C}{=} 101000 \stackrel{C}{=} 1,01$. Die gleiche Beziehung im Dezimalsystem: $5 \stackrel{C}{=} 10 \stackrel{C}{=} 40 \stackrel{C}{=} 1,25$. Dagegen sind z. B. die Zahlen 50,5 und $0,5$ des Dezimalsystems nicht collatzident.

Daher ist es vorteilhaft Untersuchungen im Binärsystem vorzunehmen. Entsprechend sei die Collatzlänge einer Zahl definert

Definition 4. Die Collatzlänge L_C einer Zahl ist die Anzahl der Ziffern von der führenden Eins bis zur letzten Eins einschließlich.

Lemma 5. *Wenn man auf zwei collatzidente Zahlen dieselbe Anzahl an C-Operatoren anwendet, sind beide Ergebnisse wieder Collatzident.*

Im Binärsystem ist der C-Operator äquivalent mit einem sehr einfachen Algorithmus: 1. Verschiebe die Zahl um eine Stelle nach links. Addiere diese Zahl zur ursprünglichen Zahl. 3. Addiere zur letzten (rechten) Einser-Ziffer 1.

Dieser Algorithmus lässt sich leicht in einer Turing-Maschine verarbeiten. Die Turingmaschine fängt an der Einerstelle an und arbeitet die Zahl von rechts nach links ab.

Sie liest jede Stelle aus, legt sie auf einen Zwischenspeicher ab und berechnet diese neu, wobei ein Übertrag entsteht, der auch zwischengespeichert wird und geht eine Ziffer nach links. Eine Ziffer wird berechnet, indem die Ziffer der Stelle, die Ziffer im Speicher und der Übertrag, der ebenfalls im Speicher ist, addiert werden. Zusätzlich wird zur ersten Stelle, bei der ein Einser auftritt, 1 addiert.

Die Implementierung als Turing-Maschine hat den Vorteil, unabhängig von Fehlern in der Hardware oder Software von Computern zu sein. Außerdem lassen sich der y-Teil und der 2^n -Teil direkt aus der Zahl ablesen. Der y-Teil geht von der führenden Eins bis zur letzten Eins. Ergo, wenn man nach der letzten Eins ein neues Komma setzte, wäre diese neue Zahl der y-Teil.

Wenn man die Zahlen einer Collatzfolge untereinander schreibt, verschieben sich die führende Eins und die letzte Eins immer weiter nach links. Es sei $\overline{v}_1$ die durchschnittliche Geschwindigkeit der führenden Eins und $\overline{v}_2$ die durchschnittliche Geschwindigkeit der letzten Eins so ergeben sich folgende Fälle

$$\begin{cases} \overline{v}_1 < \overline{v}_2 & \text{die Folge konvergiert bis beide Geschwindigkeiten gleich sind} \\ \overline{v}_1 = \overline{v}_2 & \text{ein Zyklus ist erreicht} \\ \text{If } \overline{v}_1 > \overline{v}_2 & \text{die Folge divergiert} \end{cases}$$

Die mittlerweile dritte Version der Collatzvermutung lautet daher

Vermutung 6. *Wendet man auf eine beliebigen Zahl $x = y \cdot 2^n$, $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{N}$, $\frac{y}{2} \notin \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ den Collatzoperator an, ist im Binärsystem die durchschnittliche Geschwindigkeit der führenden Eins kleiner als die durchschnittliche Geschwindigkeit der letzten Eins bis beide die Geschwindigkeit von zwei Ziffern pro Collatzoperator erreichen.*

4. Analyse von $\overline{v}_1$

Der Collatzoperator ist eine Funktion ersten Grades. Daher bewegt sich die führende Eins entlang einer Geraden. Die Momentangeschwindigkeit v_1 der führenden Eins kann 1 oder 2 sein. Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist der Grenzwert gegen unendlich der Differenz der Längen der Zahlen im Binärsystem dividiert durch die Anzahl s der Collatzoperatoren:

$$v_1 = \lim_{s\to\infty} \frac{\lfloor \log_2(C^s(x))+1\rfloor - \lfloor \log_2(x)+1\rfloor}{s} := \begin{cases} 2 & \text{wenn } L_C = 1 \text{ (Fall 1)} \\ \log_2 3 & \text{wenn } L_C > 1 \text{ (Fall 2)} \end{cases}$$

Der Fall 1 entspricht dem Zyklus 1-2-4. Im Fall 2 ist zu prüfen, ob ein unendliches Wachstum oder ein Zyklus erreicht werden kann. Der genaue Wert des Grenzwerts ist weniger wichtig als der Umstand, dass der Logarithmus zur Basis 2 nur für ganzzahlige Potenzen von 2 rationale Werte liefert. Zwischen 1 und 2 gibt es somit keine rationalen Werte für rationale Argumente.

Wenn es einen höheren Zyklus gibt, müsste die Durchschnittsgeschwindigkeit der führenden Eins rational sein, da bei einem Zyklus nach immer der gleichen Anzahl der C-Operatoren die führende Eins um die gleiche Anzahl von Stellen nach links bewegt.

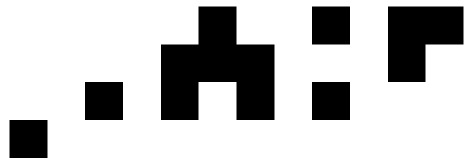
Da die Bedingung eines rationalen Anstiegs für höhere Zyklen dem irrationalen Anstieg für Fall 2 widerspricht, ist die Existenz von höheren Zyklen widerlegt.

5. Analyse von v_2

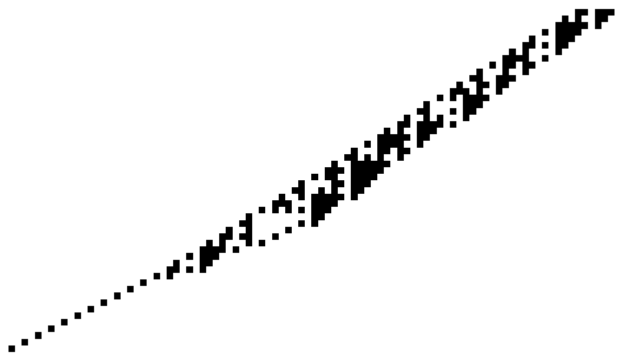
Zum Unterschied von $\overline{v}_1$ folgt $\overline{v}_2$ keiner bekannten Funktion. Auch die Momentangeschwindigkeit v_2 weist kaum eine Einschränkung auf. Vielmehr hängt v_2 von den letzten Ziffern ab.

Das untere Limit für v_2 ist 1, welches durch mindestens zwei auf einander folgende Einser verursacht wird.

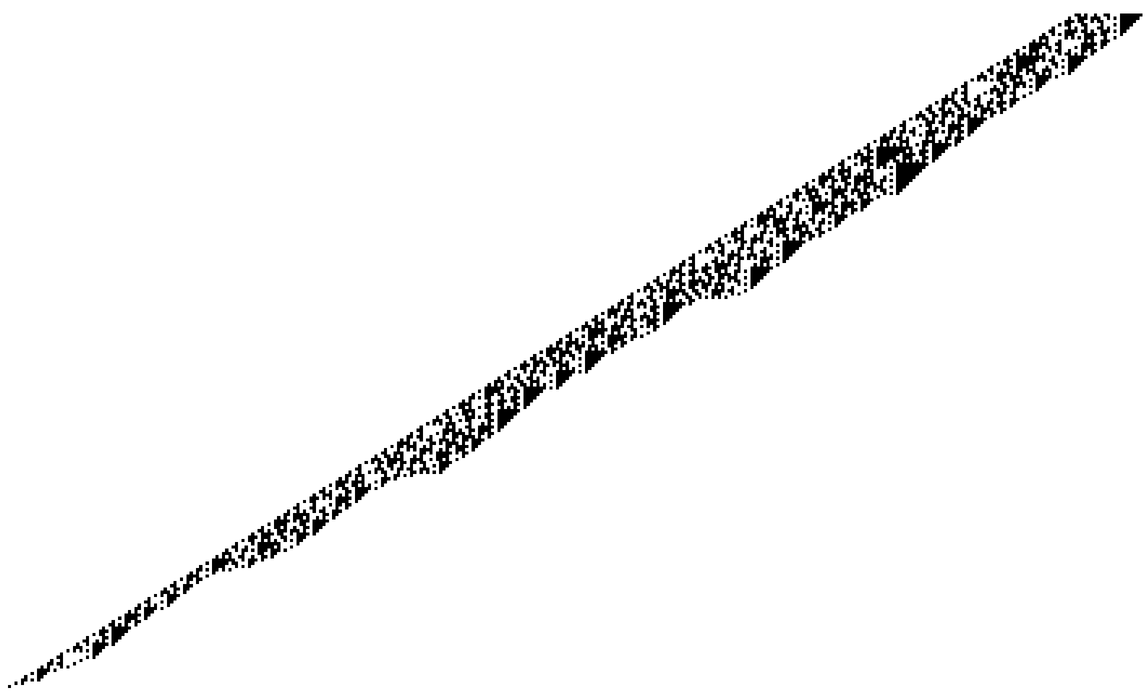
Nach oben hin gibt es keine Grenze. Eine beliebig lange Folge von alternierenden Einsen und Nullen wird durch einen einzigen C-Operator zu einer einzigen Eins. Dies gilt für alle Zahlen $x = \sum_{n=0}^{n} 2^{2n}$.



(A) Die Darstellung der Binärzahl 1001011 und ihrer Collatzfolge bis zum Abbruchkriterium.



(B) Die Darstellung der Binärzahl 1111 und ihrer Collatzfolge über das Abbruchkriterium hinaus.



(C) Die Binärzahl 110100100110001111111 ist der Rekordhalter für Zahlen bis 21 Binärziffern.

ABBILDUNG 5.1. Beispiele

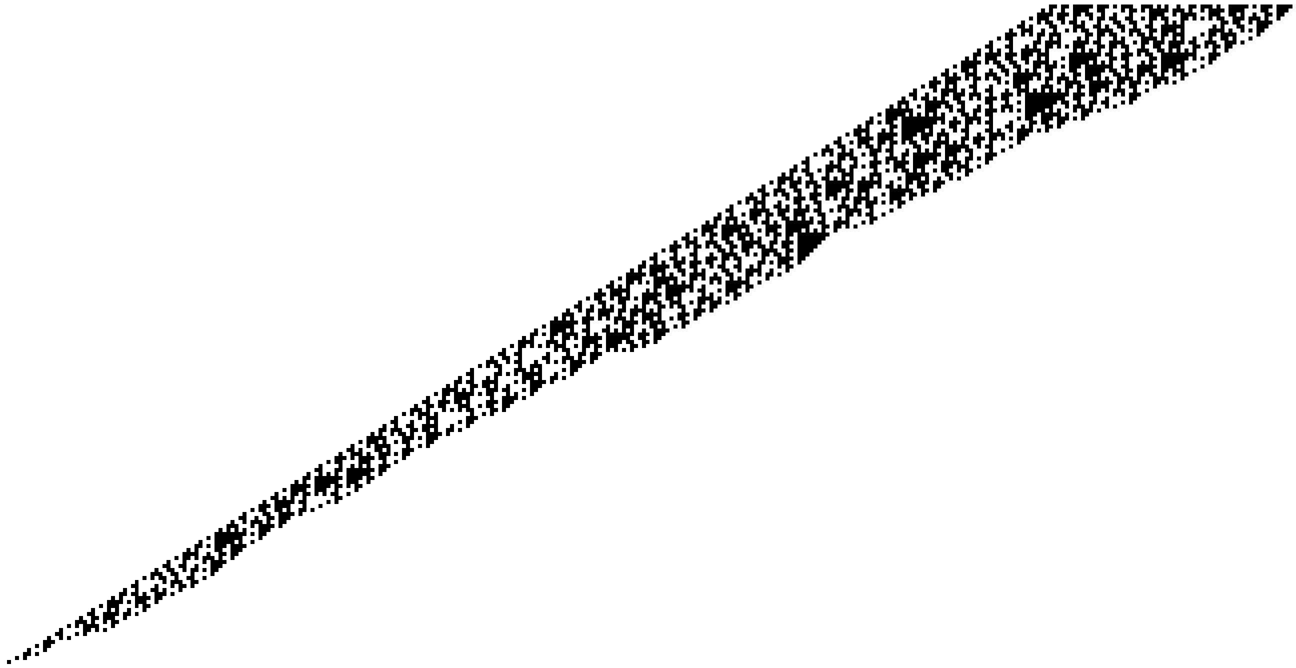


ABBILDUNG 5.2. Die Zahl 1980976057694878447 ist der Rekordhalter bis 10^{18}. Sie hat die Collatzlänge 61 und lautet binär:1101101111101110101110011101010010011011101001111101011101111