Demostudo
Por: Giovanna Mendes

MMC e MDC

2020

1. Roteiro de Estudos

Conteúdo:

Mínimo Múltiplo Comum – MMC e Maior Divisor Comum – MDC

Sugestões para complemento do estudo:

Sugestão de leitura – Números primos: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-numero-primo.htm
Sugestão de leitura – Decomposição em fatores primos: https://escolakids.uol.com.br/matematica/decomposicao-em-fatores-primos.htm
Sugestão de leitura – Métodos de cálculo do MMC e do MDC: http://educacao.globo.com/matematica/assunto/matematica-basica/mmc-e-mdc.html
Sugestão de leitura – Múltiplos e Divisores:
https://edu.gcfglobal.org/pt/multiplos-e-divisores/os-numeros-primos/1/
Videoaula sobre MDC (9 minutos): https://www.youtube.com/watch?v=BKaxAFAPuS4
(9 minutos) : https://www.youtube.com/watch?v=8Ygmq398AfY
Videoaula sobre MMC (8 minutos): https://www.youtube.com/watch?v=qPd9PnJSPd8
(9 minutos): https://www.youtube.com/watch?v=0xrfG45Vh30&t=377s

Ações a serem tomadas:

I. Ler o material abaixo.
II. Fazer a lista de exercícios após o material.
III. Conferir o gabarito e as resoluções.
IV. Realizar as sugestões acima.

2. Números primos

Um número inteiro positivo é PRIMO quando tem exatamente dois divisores positivos: **o número 1 e ele mesmo.**

Os dez primeiros números primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

3. Decomposição em fatores primos

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito como um produto de fatores primos.

Esse produto é obtido pela chamada decomposição em fatores primos ou, simplesmente, FATORAÇÃO do número. Nela, o número é dividido sucessivamente por vários números primos, até que o resultado dessa divisão seja igual a 1.

3.1. Exemplos

Fatoração ou Decomposição em fatores primos dos números 50, 210 e 360.

50	2
25	5
5	5
1	

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
	1

$50 = 2 \,.\, 5 \,.\, 5 = 2 \,.\, 5^2$ $210 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7$ $360 = 2 \,.2 \,.2 \,.3 \,.3 \,.5 = 2^3 .\, 3^2 .\, 5$

4. MDC – Maior Divisor Comum

O Maior Divisor Comum de dois ou mais números naturais, é o MAIOR número que é divisor de todos esses números.

Após decompor cada número em fatores primos, o MDC é calculado pelo produto dos fatores primos comuns com o menor expoente.

4.1. Exemplos

a) Calcular o MDC dos números 12 e 20.

I. Decompor em fatores primos

$12 = 2^2 . 3$ $20 = 2^2 . 5$

II. Separar os fatores primos comuns com menores expoentes

O fator em comum entre 12 e 20, com o menor expoente, é 2^2.

III. Efetuar a multiplicação desses fatores.

Como só há 2^2, então o MDC (12,20) = $2^2 = 4$

b) Calcular o MDC dos números 90, 96 e 54.

I. Decompor em fatores primos

$90= 2.3^2.5$ $96= 2^5.3$ $54= 2.3^3$

II. Separar os fatores primos comuns com menores expoentes

Os fatores primos comuns, com menores expoentes, são: 2 e 3

III. Efetuar a multiplicação desses fatores.

Com isso, temos que o MDC (90, 96, 54) = 2 . 3 = **6**

5. MMC – Mínimo Múltiplo Comum

Mínimo Múltiplo Comum de dois ou mais números naturais é o MENOR número natural, excluindo o zero, que é múltiplo desses números.

Após fatorar cada um dos números, o MMC é calculado pelo produto dos fatores comuns e não-comuns com maiores expoentes.

5.1. Exemplos

a) Calcular o MMC dos números 12 e 20.

IV. Decompor em fatores primos

$12 = 2^2 . 3$ $\qquad$ $20 = 2^2 . 5$

V. Separar os fatores primos comuns e não comuns com maiores expoentes

Os fatores são: 2^2, 3 e 5

VI. Efetuar a multiplicação desses fatores.

Temos então o MMC (12,20) = $2^2 . 3 . 5 =$ **60**

b) Calcular o mínimo múltiplo comum dos números 90, 96 e 54.

I. Decompor em fatores primos

$90= 2.3^2.5$ $\qquad$ $96= 2^5.3$ $\qquad$ $54= 2.3^3$

II. Separar os fatores primos comuns e não comuns com seus maiores expoentes.

Os fatores são: 2^5, 3^3 e 5

III. Efetuar o produto desses fatores.

Com isso, temos que o MMC (90, 96, 54) = $2^5 . 3^3 . 5 =$ **4320**

Lista de Exercícios

1. (UNESP) Três viajantes partem num mesmo dia de uma cidade A. Cada um desses três viajantes retorna à cidade A exatamente a cada 30, 48 e 72 dias, respectivamente. O número mínimo de dias transcorridos para que os três viajantes estejam juntos novamente na cidade A é:

a) 144

b) 240

c) 360

d) 480

e) 720

2. (UFPB) Um terreno plano, de forma retangular, medindo 720 m de comprimento por 540 m de largura, foi dividido em lotes quadrados, com dimensões iguais. Considerando que esses lotes tenham lados com dimensões iguais. Considerando que esses lotes tenham lados com maior comprimento possível, conclui-se que o terreno foi dividido em:

a) 21 lotes
b) 12 lotes
c) 7 lotes
d) 4 lotes
e) 3 lotes

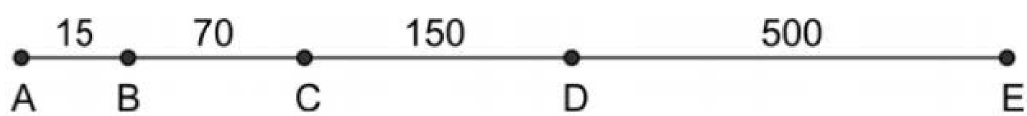
3. (PUCMG) O piso retangular de uma sala, com 8,75 m de comprimento e 4,20 m de largura, deve ser coberto com ladrilhos quadrados. Admitindo-se que não haverá perda de material e que será utilizado o menor número de ladrilhos inteiros, pode-se estimar que serão colocados:

a) 49 ladrilhos.
b) 147 ladrilhos.
c) 245 ladrilhos.
d) 300 ladrilhos.

4. (UFPE) No nosso calendário os anos têm 365 dias com exceção dos anos bissextos que têm 366 dias. Um ano é bissexto quando é múltiplo de 4, mas não é múltiplo de 100, a menos que também seja múltiplo de 400. Quantas semanas completas possuem 400 anos consecutivos?

a) 20.871
b) 20.870
c) 20.869
d) 20.868
e) 20.867

5-(EPCAR – 2010 - modificada) Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.



Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância **d** entre todos eles fosse a mesma e a maior possível. Se **x** representa o número de vezes que a distância **d** foi obtida pelo agricultor, então **x** é igual a (a original dizia: ‘**x** é um número divisível por’)

a) 145

b) 146

c) 147

d) 148

e) 149

6.(ENEM) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é:

a) 2
b) 4
c) 9
d) 40
e) 80

7.(ENEM) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a) 105
b) 120
c) 210
d) 243
e) 420

Gabarito

1. Alternativa correta: E

Na questão, temos que prever quando os viajantes estarão JUNTOS, estarão AO MESMO TEMPO, na cidade A. Então vamos encontrar um número em COMUM entre os 30, 48 e 72 dias de viagem de cada um.
Sendo assim, calculamos o Mínimo Múltiplo Comum entre eles:

I. Decompor em fatores primos

$30 = 2 . 3 . 5$ $48 = 2^4 .3$ $72 = 2^3 . 3^2$

II. Separar os fatores primos comuns e não comuns com seus maiores expoentes.

Os fatores são: 2^4, 3^2 e 5

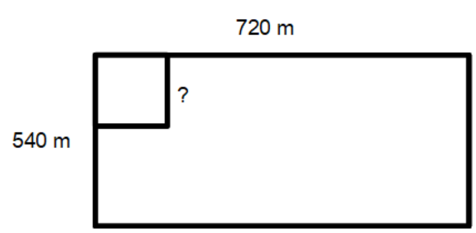
III. Efetuar o produto desses fatores.

$MMC (30,48,72) = 2^4 . 3^2 . 5 = 16 . 9 . 5 = 720$

Então, somente após 720 dias os viajantes se encontrarão na cidade A.

2. Alternativa correta: B

Abaixo temos uma ilustração do terreno e de um dos lotes. A interrogação (?), representa a medida da dimensão dos lotes, que tem que ser a MAIOR possível e IGUAL.

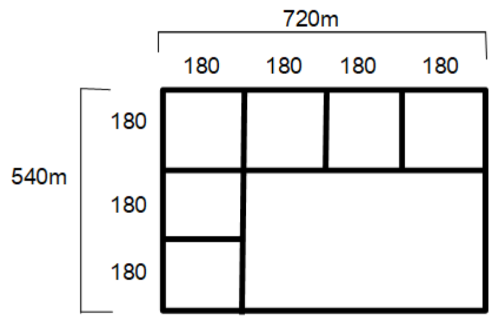


Precisamos então achar uma medida que dívida tanto 720 e 540, e ainda seja a maior possível. O que, em outras palavras, significa calcular o Maior Divisor Comum entre os dois números.

Logo,
Fatoração de 720 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
Fatoração de 540 = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

MDC (720,540) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ m
Agora já descobrimos que serão lotes de 180m por 180m.

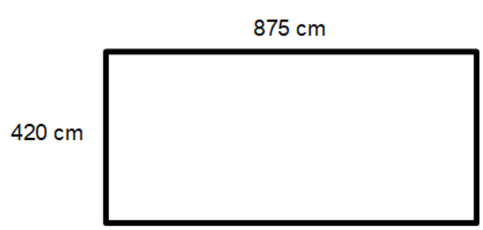
Então nos perguntamos: quantas vezes 180 m cabe em 540? 540 / 180 = 3
E a mesma pergunta para 720 m. 720 / 180 = 4
Então temos uma nova ilustração.



Analisando o desenho e preenchendo o resto do terreno, vemos que cabem 4.3 = 12 lotes de 180mx180m.

3. Alternativa correta: D
Seja:

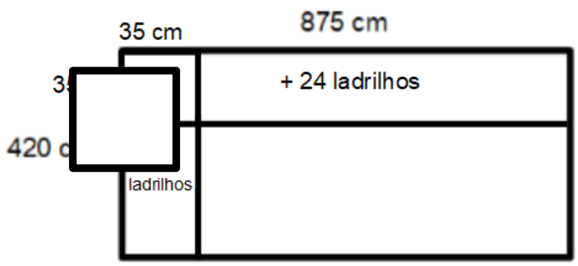
8,75 m = 875 cm e 4,20 m = 420 cm, as dimensões, em cm, do piso da sala.



Para descobrir quantos ladrilhos caberão no piso, temos que determinar, primeiramente, quanto vale o lado do ladrilho. Lembrando que ele é um quadrado, logo tem lados iguais.
- Para termos o menor número de ladrilhos, o lado do ladrilho tem que ser o **maior** possível.
- Para não haver perda de material, o lado do ladrilho tem que **dividir**, **sem deixar resto**, 875 e 420.

- Além do mais, esse tamanho é **comum** aos dois lados do piso, justamente porque o ladrilho é um quadrado.
Então o tamanho do lado do ladrilho será o Maior Divisor Comum de 875 e 420.
Suponho, já que estás no nível médio, que saibas o método de encontrá-lo, caso não, explico a você, é só sinalizar.
- MDC(875,420) é igual a 35.

- Para calcularmos quantos ladrilhos haverá em cada lado do piso, precisamos dividir cada dimensão dele pelo MDC.
875 cm / 35 cm = 25 ladrilhos
420 cm / 35 cm = 12 ladrilhos



- Agora, se cada um dos lados possui 25 e 12 ladrilhos, o total, para esse piso, é dado pela multiplicação desses valores.
25 . 12 = 300 ladrilhos.

4. Alternativa correta: A

O número de semanas dependerá do número total de dias, que, por sua vez, dependerá do número de anos bissextos.

Considerando primeiramente os anos bissextos múltiplos de 4, temos que há 400 / 4 = 100 anos bissextos múltiplos de 4.
Em seguida, temos que excluir os anos 100, 200 e 300, que são múltiplos de 4, mas também são de 100.
Mantemos o ano 400, por ser múltiplo de 400.
Temos, então 100 – 3 = 97 anos bissextos em 400 anos.
Consequentemente, temos 303 anos ‘normais’.

Número de dias dos anos bissextos: 366 . 97 = 35 502
Número de dias dos anos bissextos: 365 . 303 = 110 595

Totalizando 35 502 + 110 595 = 146 097 dias

Dividimos então por 7, o número de dias de uma semana, e temos:

146 097 / 7 = 20 871 semanas completas

5. EPCAR – Alternativa C

Temos que dividir as distâncias entre os pontos, pelo MESMO valor. Ou seja, a distância **d** tem que dividir 15, 70, 150 e 500. E esse valor tem que ser o MAIOR possível.
Então vamos encontrar o MAIOR DIVISOR COMUM de 15, 70, 150 e 500.

Fatorando cada um:
15 = 3 . 5 70 = 2 . 5 . 7 150 = 2 . 3 . 5^2 500 = 2^2 . 5^3

Escolhemos então os fatores comuns com os menores expoentes:
MDC (15,70,150,500) = 5

Então, as sementes serão plantadas a cada 5 cm.
Como o comprimento total do canteiro é 15+70+150+500=735 cm
Temos 735 / 5 = 147 locais de plantação, logo, x = 147 distâncias **d**.

6. **Alternativa correta: C**

Temos que garantir que DIVIDIREMOS entre as escolas o MESMO número de ingressos.
Também devemos garantir que seja o **mínimo** de escolas. Para isso, podemos pensar que, quanto maior for o número de ingressos por escola, menos escolas receberão ingressos.
O que nos leva a calcular o Maior Divisor Comum entre 400 e 320, que é 80. O maior número que divide 400 e 320 ao mesmo tempo.
Logo, cada escola terá 80 ingressos.
Assim os 400 + 320 = 720 ingressos serão distribuídos entre 720 / 80 = 9 escolas.

7. **Alternativa correta: E**

Precisamos encontrar um tamanho de tábua que seja um DIVISOR COMUM MÁXIMO entre todos os tamanhos.
Então vamos encontrar, primeiramente, o MDC entre os números 540, 810 e 1080, que é 270. Assim, o maior comprimento que cada peça pode ter é 270 cm.
Mas elas não podem exceder 2 m (200 cm). Então procuramos o próximo maior valor para elas. Ora, esse próximo maior valor tem que dividir 270, pois assim ele continuará sendo um divisor das outras tábuas.

Entre os divisores de 270, excluindo-se o 270, o maior é 135.
Logo, a quantidade de peças obtidas é de: 40 . (540/135) + 30 . (810/135) + 10. (1080/135) = 420 peças.

Revisor: Paulo Estevão