Demostudo

Por: Fernando Corrêa Vieira e Paulo Estevão

Funções Trigonométricas

2020

Sumário

1 Roteiro de estudos

1.1 Conteúdo

Definição e gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

1.2 Sugestões para complemento do estudo

https://www.geogebra.org/calculator - Aplicativo/Site para visualização de gráficos

https://www.youtube.com/watch?v=aZwiSteCpck - Video aula sobre função tangente - (15 minutos)

https://www.youtube.com/watch?v=esmjzKWY-yU - Vídeo aula sobre função cosseno (10 minutos)

https://www.youtube.com/watch?v=o0xUiH93siU - Video aula sobre função seno - (10 minutos)

https://www.youtube.com/watch?v=8x76A_XDhRE - Vídeo aula sobre função seno e cos- seno (10 minutos)

1.3 Ações a serem tomadas:

I. Ler o material abaixo;

II. Fazer a lista de exercícios após o material;

III. Conferir o gabarito e as resoluções;

IV. Realizar as sugestões acima.

2 Definição

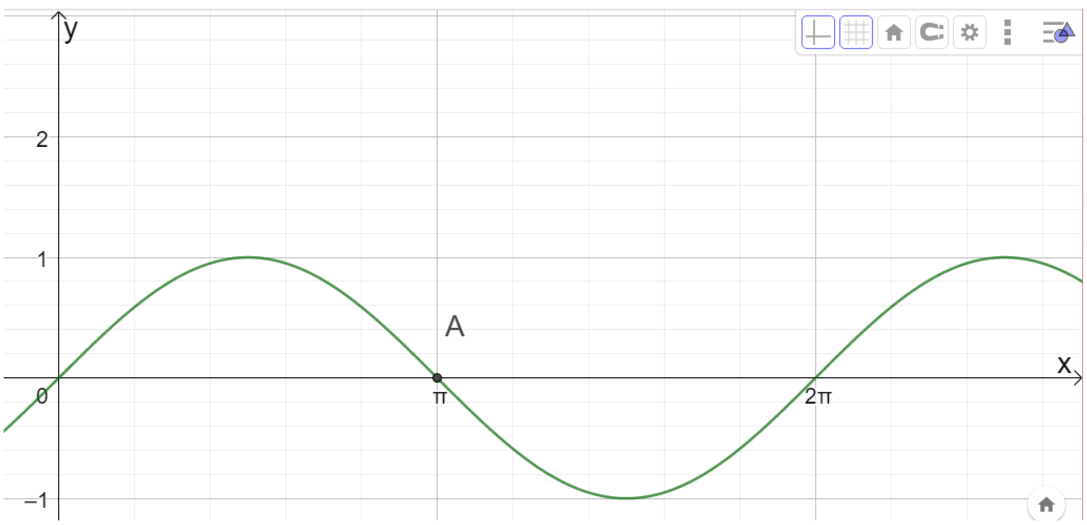
As Funções Trigonométricas são funções periódicas, ou seja, que apresentam um período que se repetirá ao longo do gráfico. Além disso, as funções trigonométricas podem ser consi- deradas uma representação gráfica do Ciclo Trigonométrico.
As funções que compõem este tópico são: **Função Seno, Função Cosseno e Função Tan- gente.**

3 Funções e seus Gráficos

3.1 Seno

A função seno é definida pela expressão $fx = sinx$ e este é o seu gráfico.

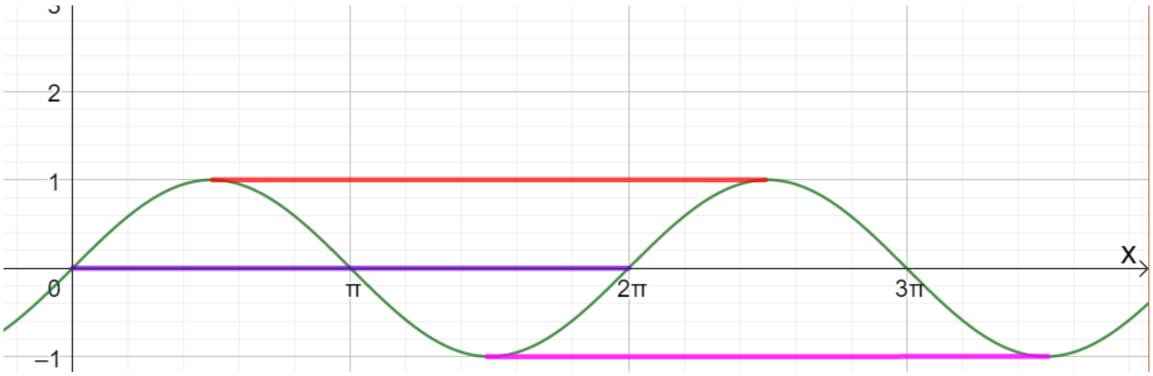
Gráfico 1: Gráfico da função $y = sinx$



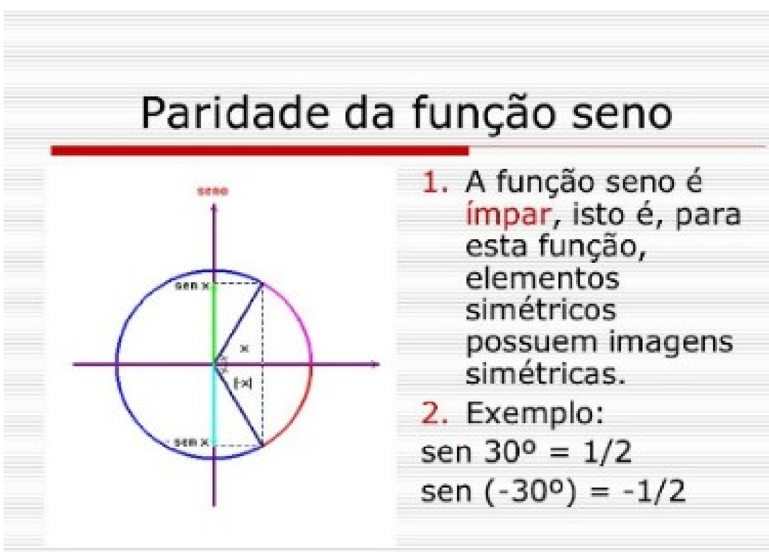
Características da função:

- **Domínio:** $x \in \mathbb{R}$ - Corresponde aos valores que X pode assumir na função);
- **Imagem:** $y \in \mathbb{R}/-1 \leq y \leq 1$ - Corresponde aos valores que Y pode assumir na função);
- **Período:** 2π - Corresponde ao intervalo que se repetirá ao longo do gráfico($-¿\infty;\ \infty$). Um período completo é formado por duas cristas (o ponto mais alto em y), dois vales (o ponto mais baixo em – y) ou uma crista e um vale entre dois pontos.

Gra´fico 2: Gra´fico da func¸a˜o $y = sinx$, com representac¸a˜o do per´ıodo da func¸a˜o:



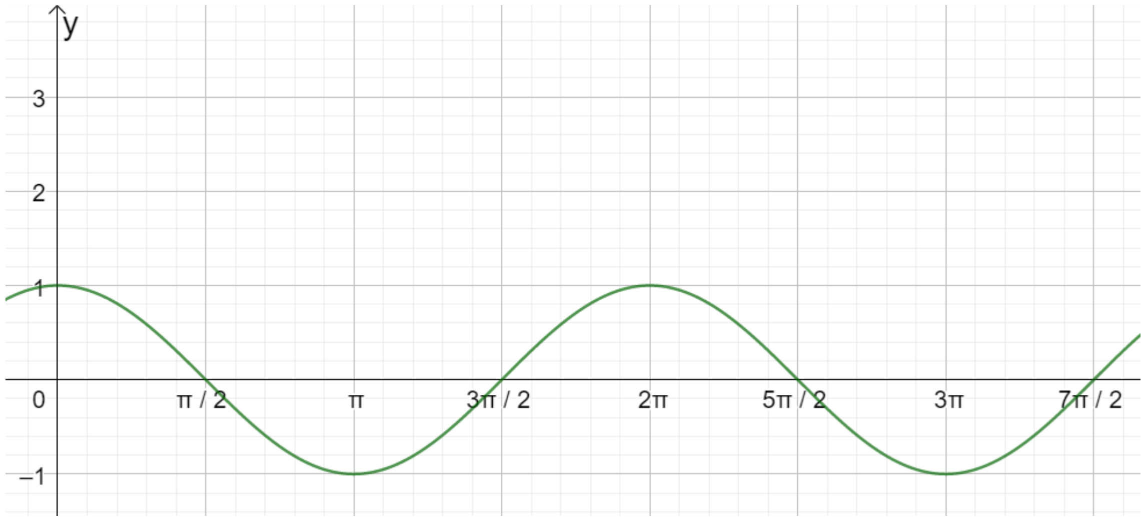
- Cada linha destacada mostra uma forma de encontrar o per´ıodo da func¸a˜o **(2π).**
- **Paridade da func¸ a˜o: I´mpar (** $sin(x) = sin(x)$ **).**



3.2 Cosseno

A func¸a˜o cosseno e´ definida pela expressa˜o $fx = cosx$ e este e´ o seu gra´fico.

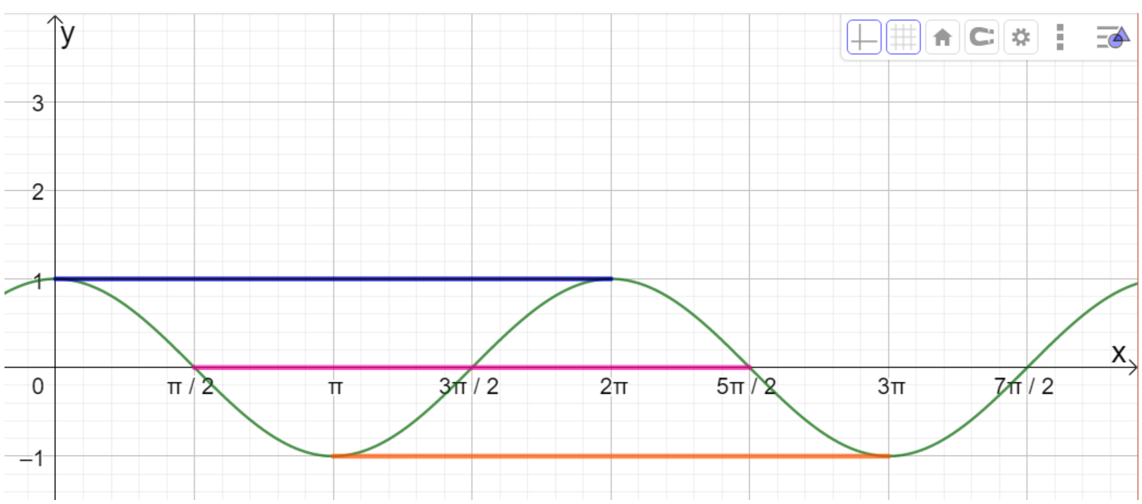
Gra´fico 3: Gra´fico da func¸a˜o *y=cosx*



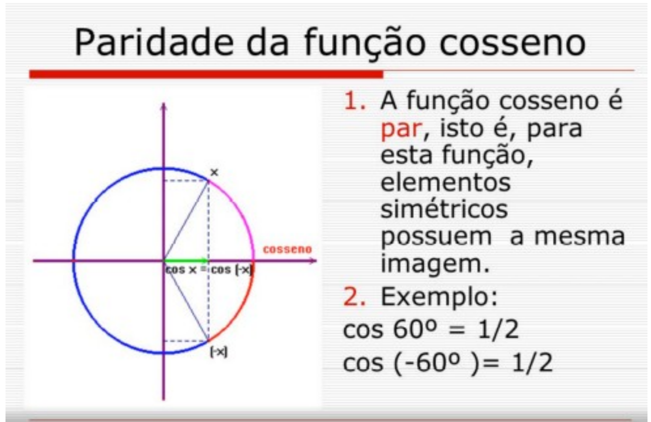
Caracter´ısticas da func¸a˜o:

- **Dom´ınio:** $x \in \mathbb{R}$ - Corresponde aos valores que X pode assumir na func¸a˜o);
- **Imagem:** $y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1$ - Corresponde aos valores que Y pode assumir na func¸a˜o);
- **Per´ıodo:** 2π - Corresponde ao intervalo que se repetira´ ao longo do gra´fico($-¿\infty$; ∞). Um per´ıodo completo e´ formado por duas cristas (o ponto mais alto em y), dois vales (o ponto mais baixo em – y) ou uma crista e um vale entre dois pontos.

Gra´fico 4: Gráfico da função y=cos(x), com representação do período da função.



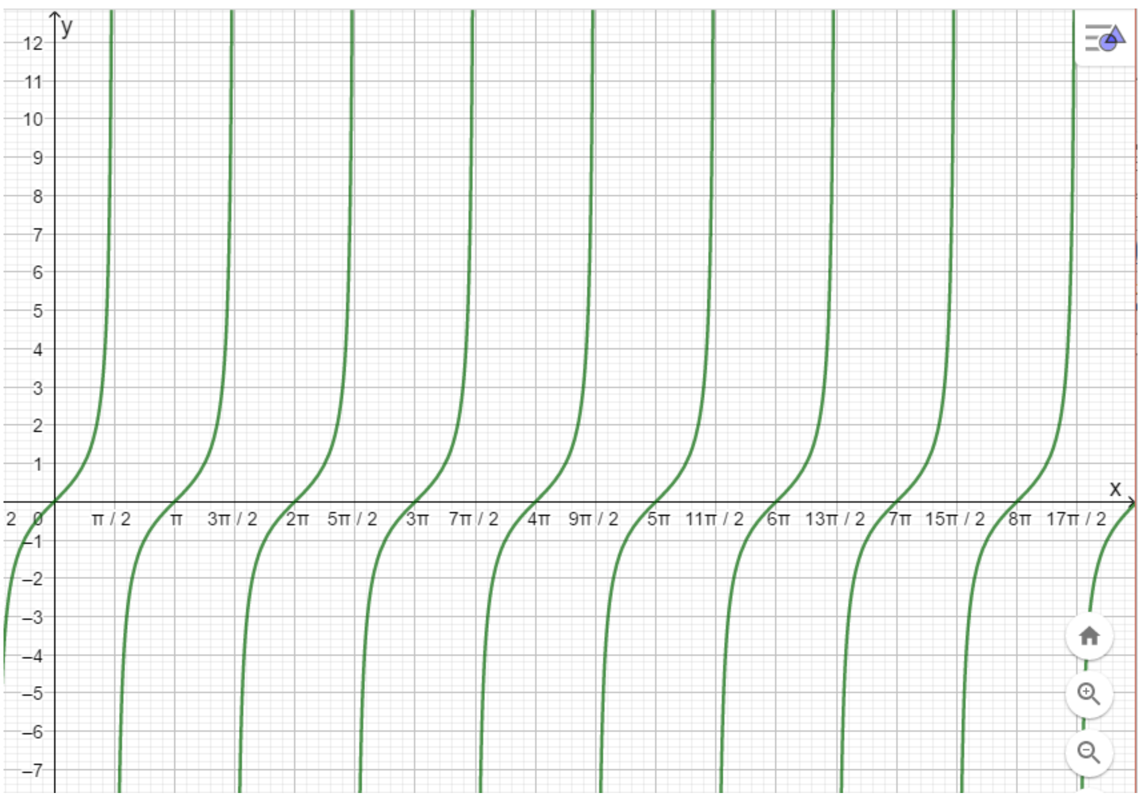
- Cada linha destacada mostra uma forma de encontrar o período da função **(2π).**
- **Paridade da func¸ a˜o: par (** $cos(-x) = cos(x)$ **).**



3.3 Tangente

A func¸a˜o tangente e´ definida pela expressa˜o $f x = \tan(x)$ e este e´ o seu gra´fico:

Gra´fico 5: Gra´fico da func¸a˜o *y=tan(x)*



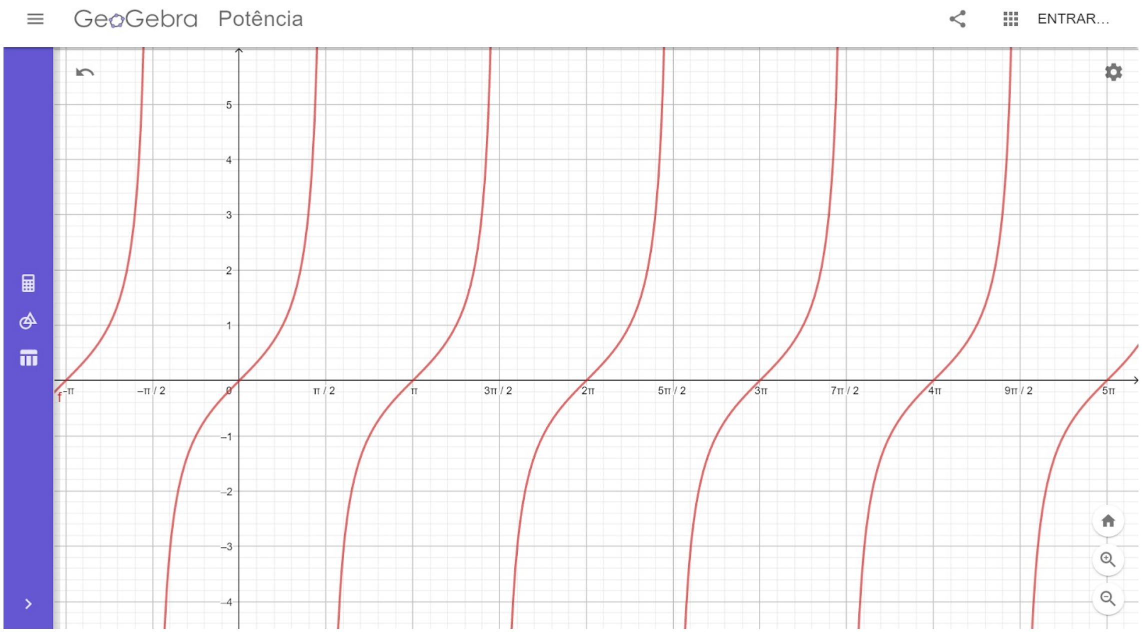
Caracter´ısticas da func¸a˜o:

- **Dom´ınio:** $\{x \in R \;/\; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ - Corresponde aos valores que X pode assumir na func¸a˜o). **Perceba que a função tende ao infinito sempre que x se aproxima de**

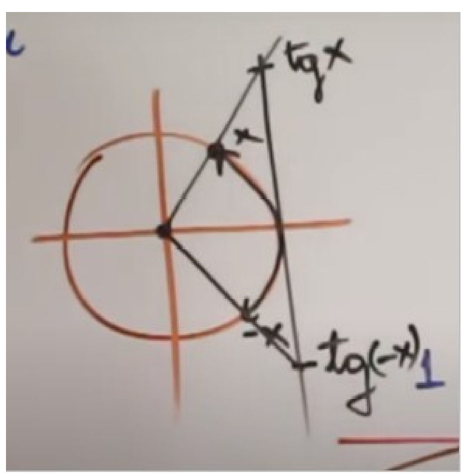
$$\frac{\pi}{2}+k\pi=\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},....\}$$

- **Imagem:** $y \in R$- Corresponde aos valores que Y pode assumir na func¸a˜o);
- **Per´ıodo:** π - Corresponde ao intervalo que se repetira´ ao longo do gra´fico(−¿∞; ∞).

Gra´fico 5: Gra´fico da func¸a˜o *y=tan(x) e* a representação do período



- A cada intervalo de π temos um período, composto por uma parte acima e outra abaixo do Eixo x.
- **Paridade da func¸ a˜o: impar (** *tan(-x) = -tan(x)* **).**



X = 45º → tan45º =1
–X = –45º → –X = 315º → tan315º=−1 → −tan315º =1

3 FUNÇÕES E SEUS GRÁFICOS

A função tangente possui uma peculiaridade. Seu gráfico não possui valores de y para x = π/2 + kπ, ou seja, os valores correspondentes a 90° (270°) nas diversas voltas do Ciclo Trigonométrico. Isso ocorre, porque o valor da tangente desses ângulos é zero. Exemplificando: 90° → sin90°=1; cos90°=0 → tan90°=sin90°cos90° → tan90°=10 → tan90°= ∄ (não existe).

4 Variac¸ o˜ es nos Gra´ficos das Func¸ o˜ es Seno e Cosseno

As func¸o˜es Trigonome´tricas seno e cosseno podem ser escritas, de uma forma geral, deste modo:

$$f(x)=a+b\sin(cx+d)\ e\ f(x)=a+b\cos(cx+d)$$

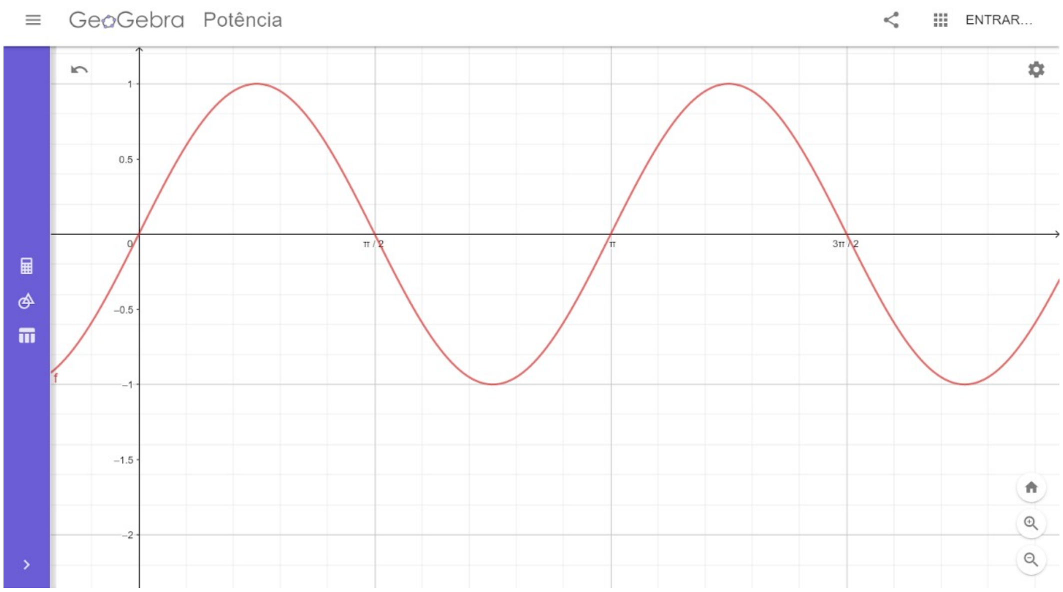
A seguir observaremos como os gráficos dessas funções se comportam na alteração dos parâmetros a, b, c e d.

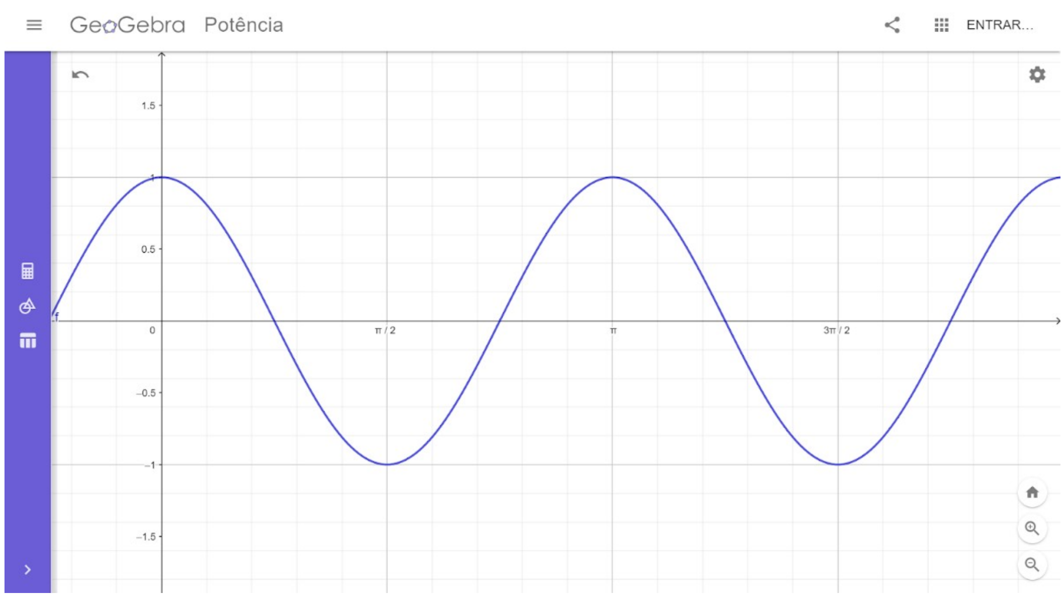
- **Parâmetro “c”:**

  Usaremos as funções y=sin(x) e y=cos(x) (observar os gráficos 1 e 3). Nessas funções o valor de “c” é 1. Agora observe o que acontece se alterarmos o valor do parâmetro:

  c >1.

  Gráficos 7 e 8: Gráficos das funções *y=sin2xey* = *cos2x*, respectivamente.



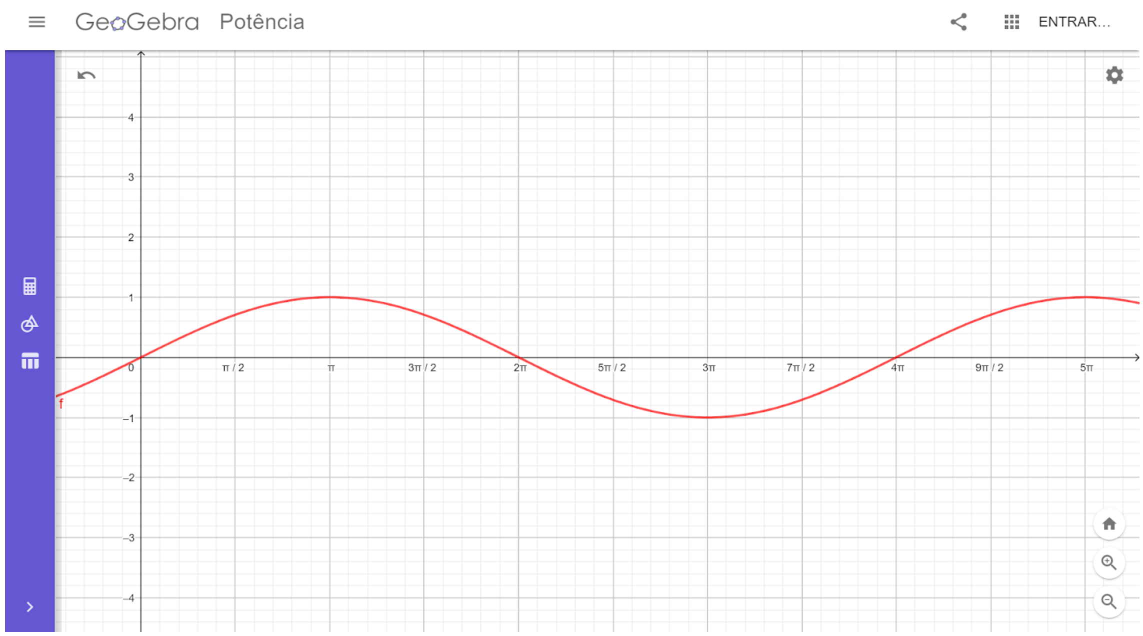


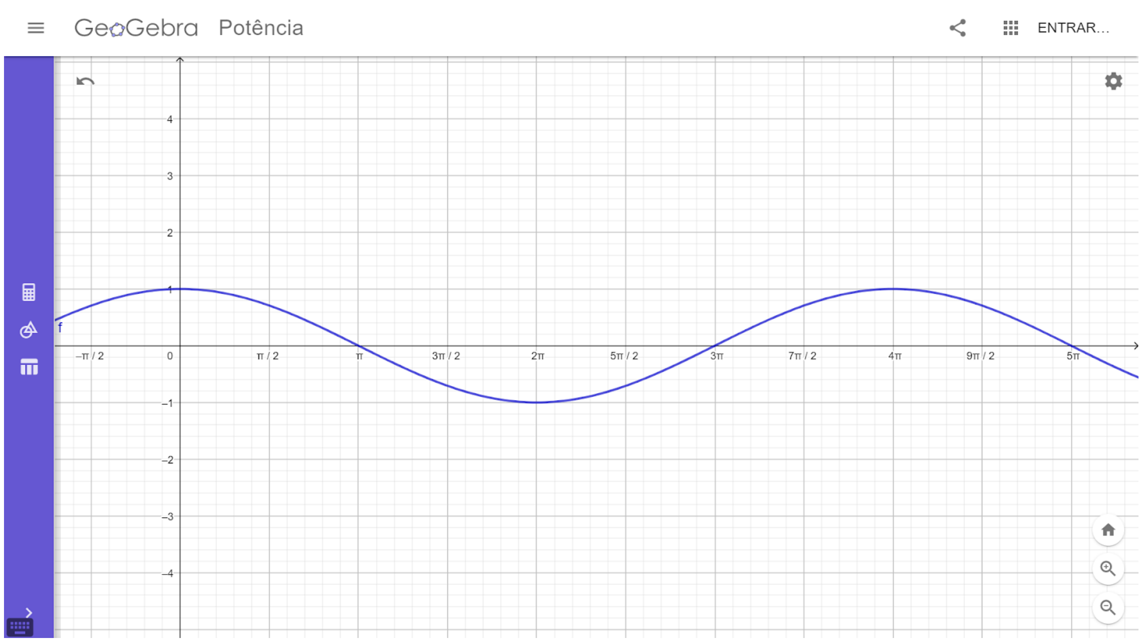
Podemos observar que o período das funções diminuiu metade, de 2π para π. Porém domínio e imagem se mantiveram**:**

c < 1

Gráficos 9 e 10: Gráficos das funções $y=\sin\frac{1}{2}x$ e $y = \cos\frac{1}{2}x$, respectivamente.

4 VARIAC¸ O˜ ES NOS GRA´ FICOS DAS FUNC¸ O˜ ES SENO E





Podemos observar que o período das funções dobrou, de 2π para 4π. Porém domínio e imagem se mantiveram.**Concluindo, o período das funções seno e cosseno são inversamente proporcionais aos valores do parâmetro “c”.**

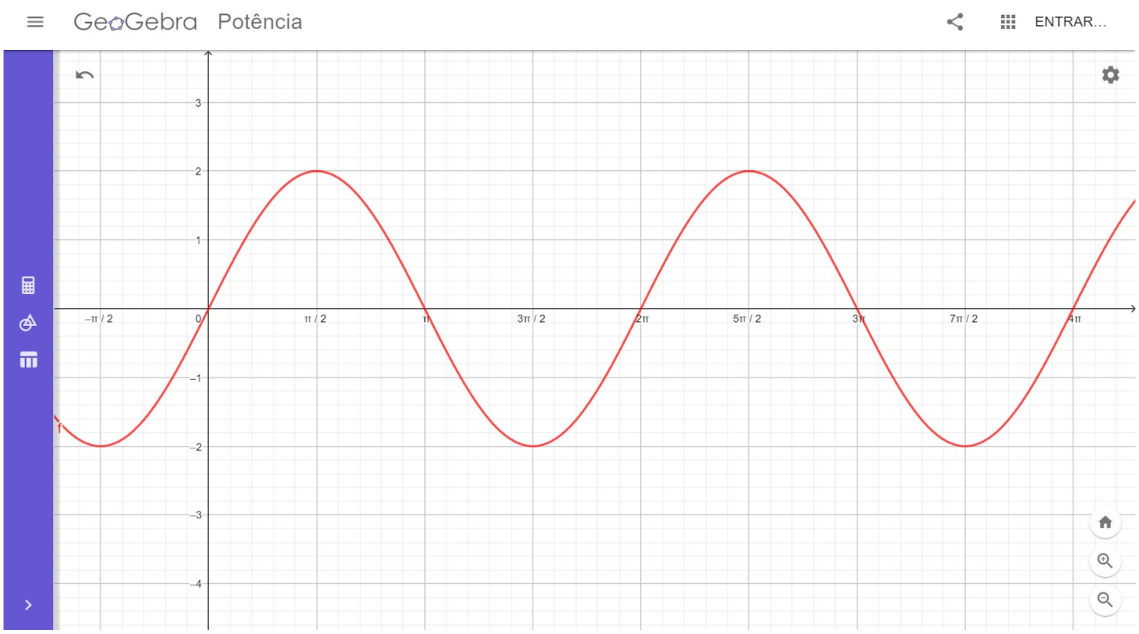
- **Parâmetro “b”**

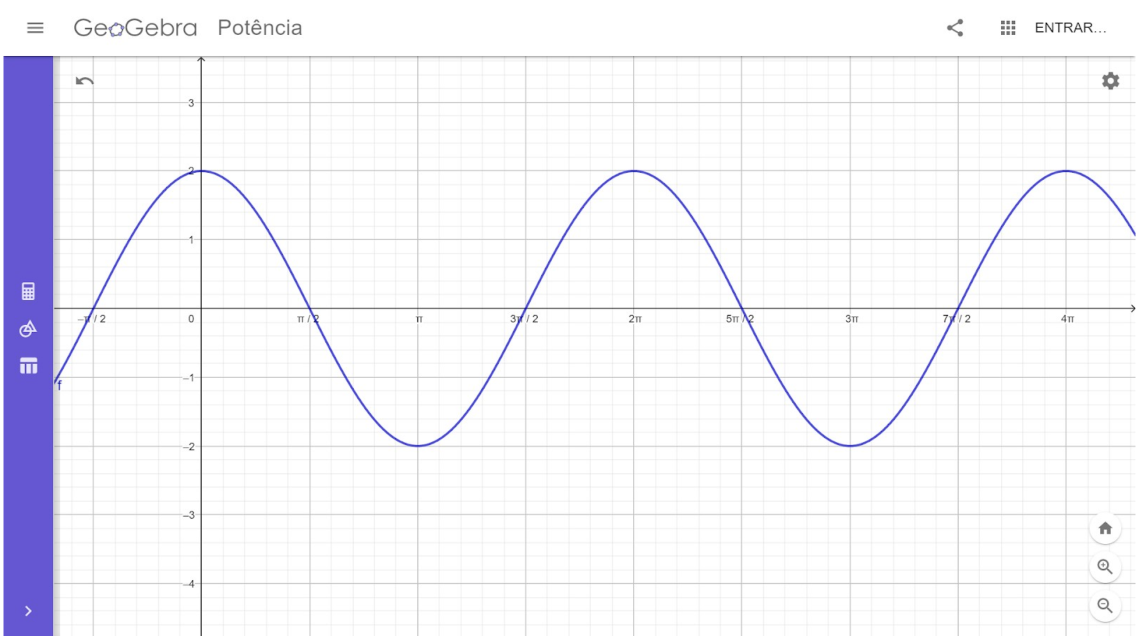
Usaremos as funções *y=sin(x) e y=cos(x*) (observar os gráficos 1 e 3). Nessas funções o valor de “b” é 1. Porém, observe o que acontece se alterarmos o valor do parâmetro:

b > 1

Gráficos 11 e 12: Gráficos das funções *y=2sinxey=2cosx*, respectivamente.

4 VARIAC¸ O˜ ES NOS GRA´ FICOS DAS FUNC¸ O˜ ES SENO E



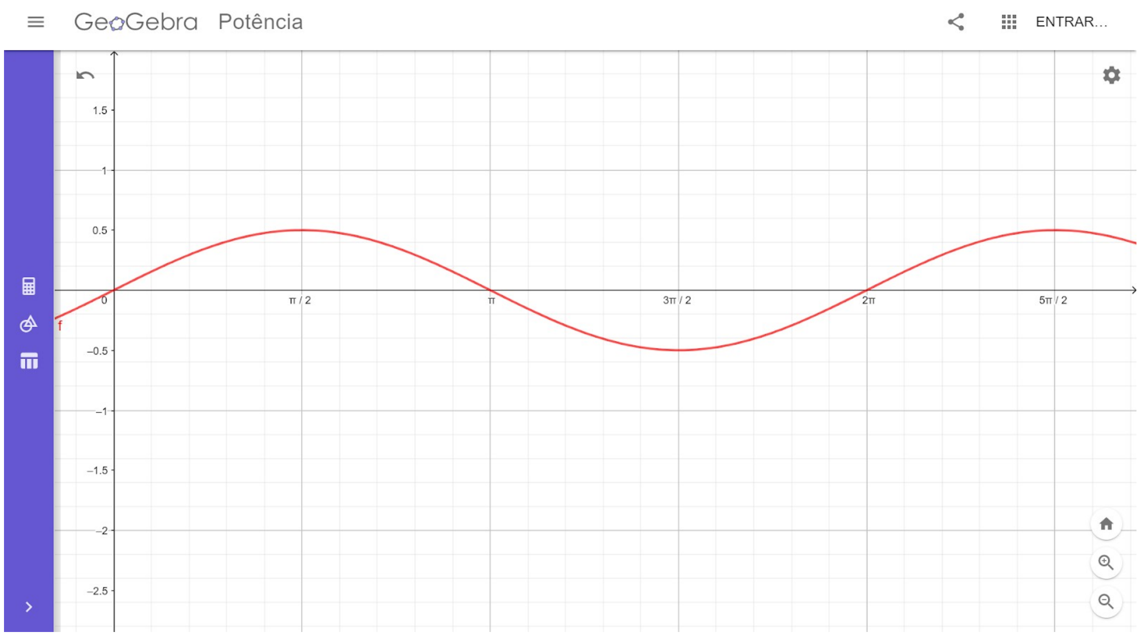


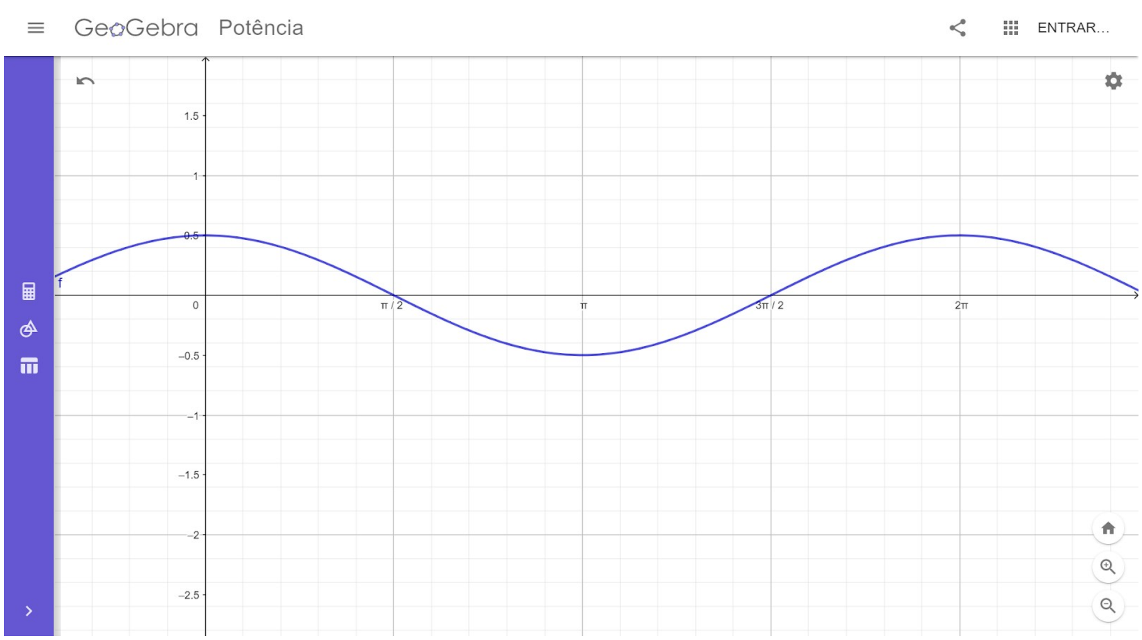
Podemos observar que a amplitude da onda, no eixo y (a distância entre uma crista e um vale) ampliou, de 2 para 4, alterando a imagem, de {y ϵ R / –1 ≤ y ≤ 1} para {y ϵ R / –2 ≤ y ≤ 2}. Porém o período e o domínio se mantiveram.

b < 1

Gráficos 13 e 14: Gráficos das funções y=$\frac{1}{2}$sin(x) ey = cos(x)$\frac{1}{2}$, respectivamente.

4 VARIAÇÕES NOS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES SENO E





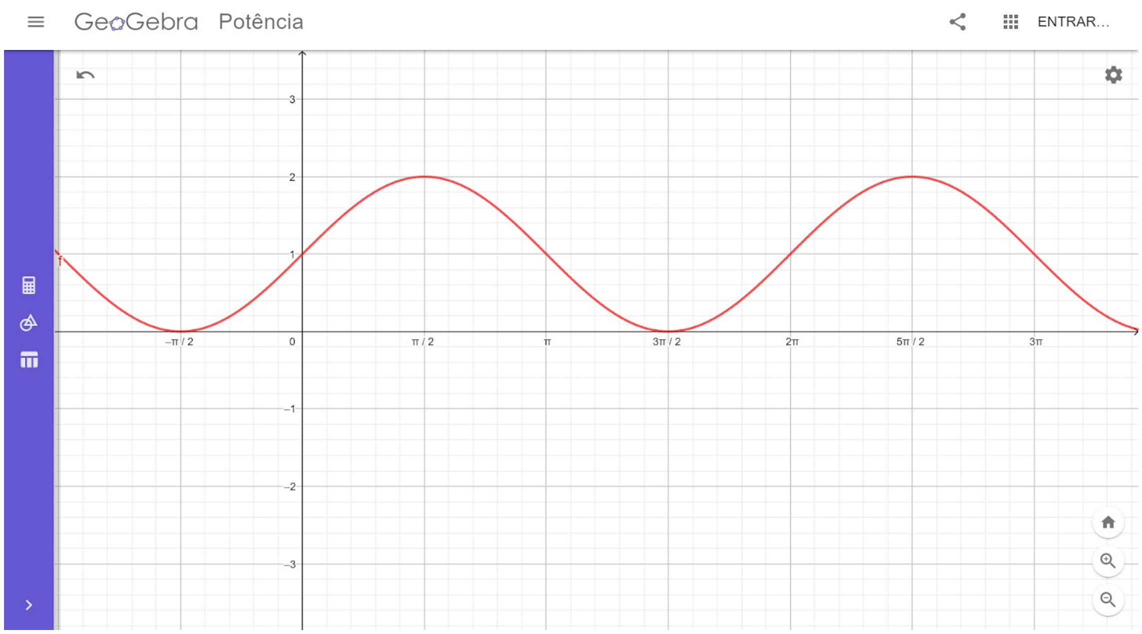
Podemos observar que a amplitude da onda, no eixo y (a distância entre uma crista e um vale) reduziu, de 2 para 4, alterando a imagem, de {y ϵ R / –1 ≤ y ≤ 1} para {y ϵ R / –0,5 ≤ y ≤ 0,5}. Porém o período e o domínio se mantiveram. **Concluindo: O período das funções seno e cosseno são diretamente proporcionais aos valores do parâmetro “b”. A nova imagem será [–b; b].**

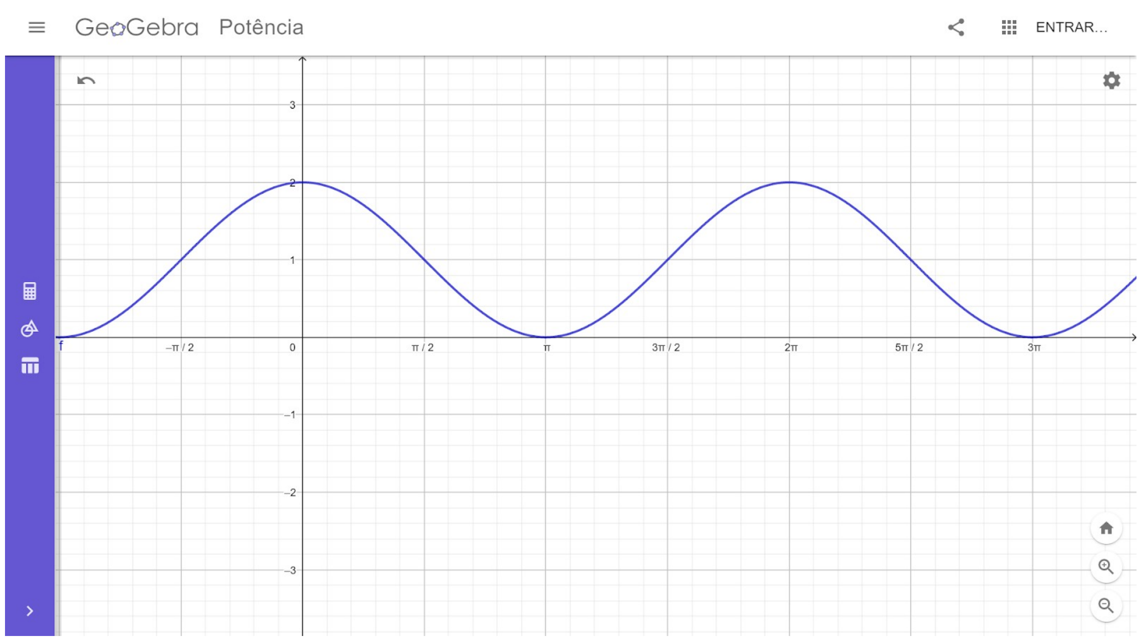
- **Parâmetro *“a”***

Usaremos as funções y=sin(x) e y=cos(x) (observar os gráficos 1 e 3). Nessas funções o valor de “a” é 0. Agora observe o que acontece se alterarmos o valor do parâmetro:

a > 0

Gráficos 15 e 16: Gráficos das funções y=1+sinxey=1+cosx, respectivamente

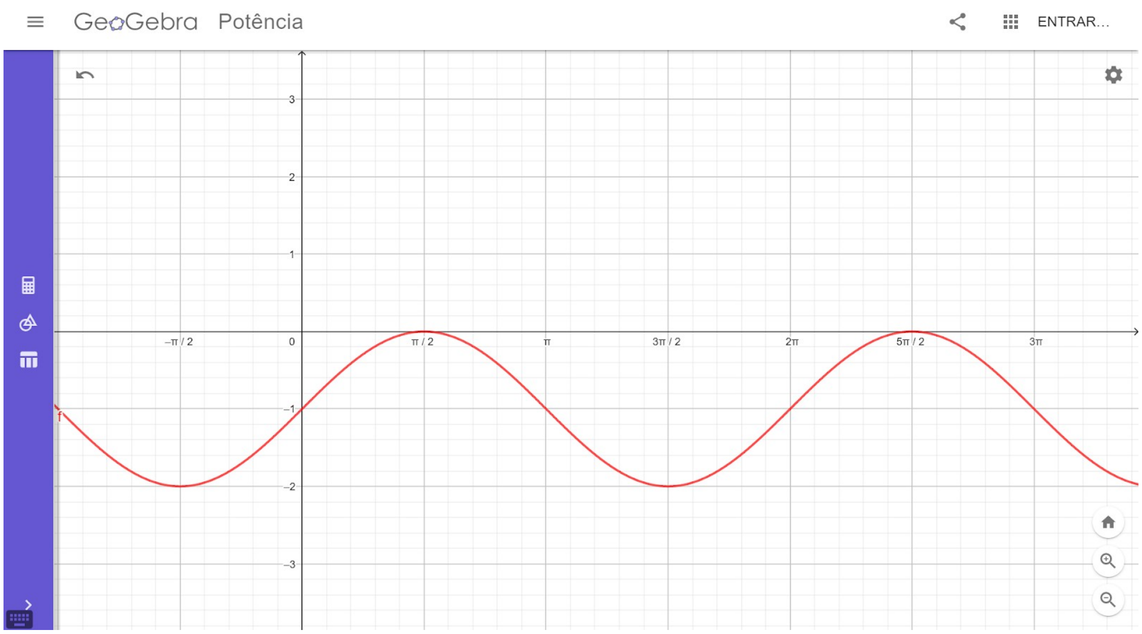


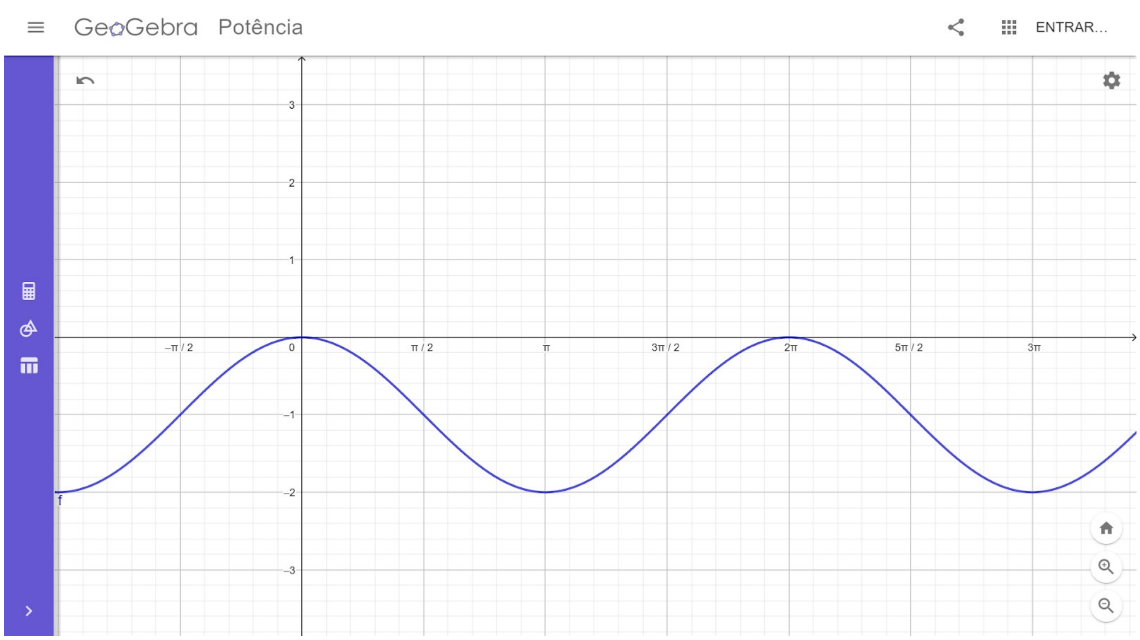


Podemos perceber que as funções se movimentaram verticalmente para cima, proporcionalmente com o valor somado (*1*), alterando a imagem, de **{y ϵ *R* / −1 ≤ y ≤ 1}** para **{y ϵ *R* / 0 ≤ y ≤ 2}.** Porém o domínio e o período se mantiveram.

a* < *0

Gráficos 17 e 18: Gráficos das funções *y=−1+sin(x) ey=−1+cos(x),* respectivamente





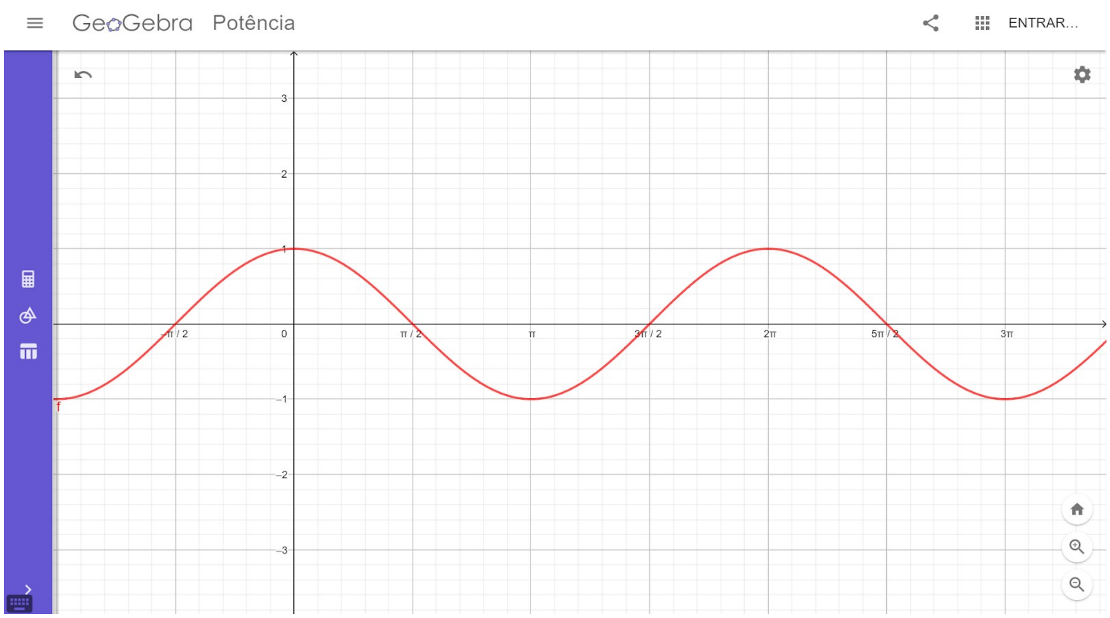
Podemos perceber que as funções se movimentaram verticalmente para baixo, proporcionalmente com o valor somado (1), alterando a imagem, de {y ϵ R / –1 ≤ y ≤ 1} para {y ϵ R / –1 ≤ y ≤ –2}. Porém o domínio e o período se mantiveram. **Concluindo, o parâmetro "a" desloca as funções verticalmente para cima (a > 0) e para baixo (a < 0), proporcionalmente ao valor somado.**

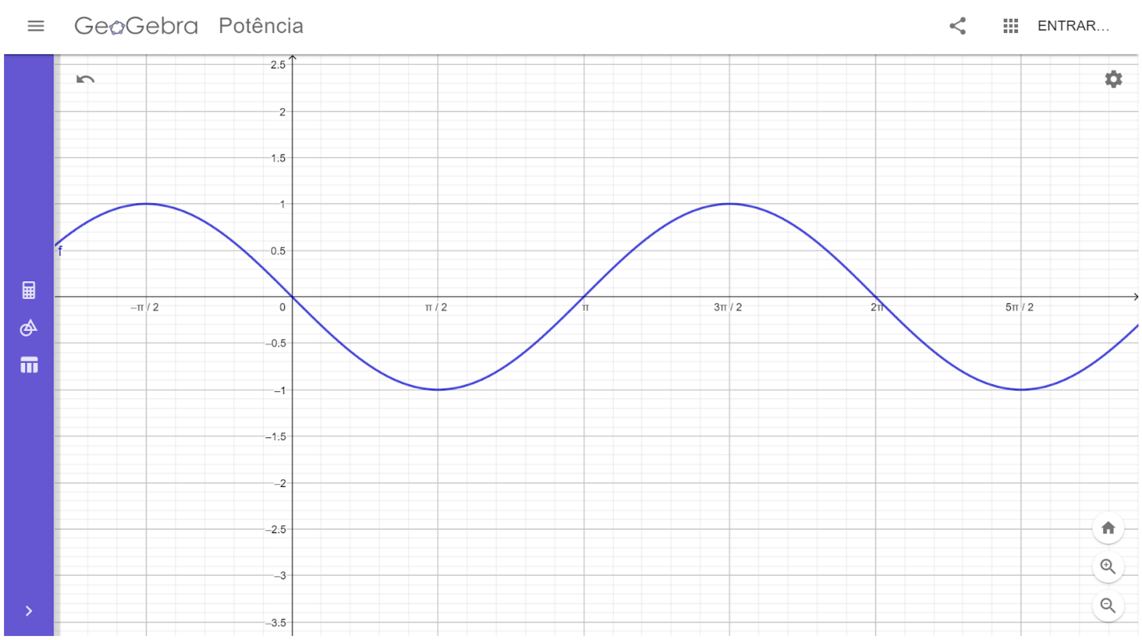
- **Parâmetro *"d"***

Usaremos as funções *y=sin(x) e y=cos(x)* (observar os gráficos 1 e 3). Nessas funções o valor de *"d"* é 0. Agora observe o que acontece se alterarmos o valor do parâmetro:

d > 0

Gráficos 19 e 20: Gráficos das funções y=sinx+2ey=cosx+2, respectivamente.

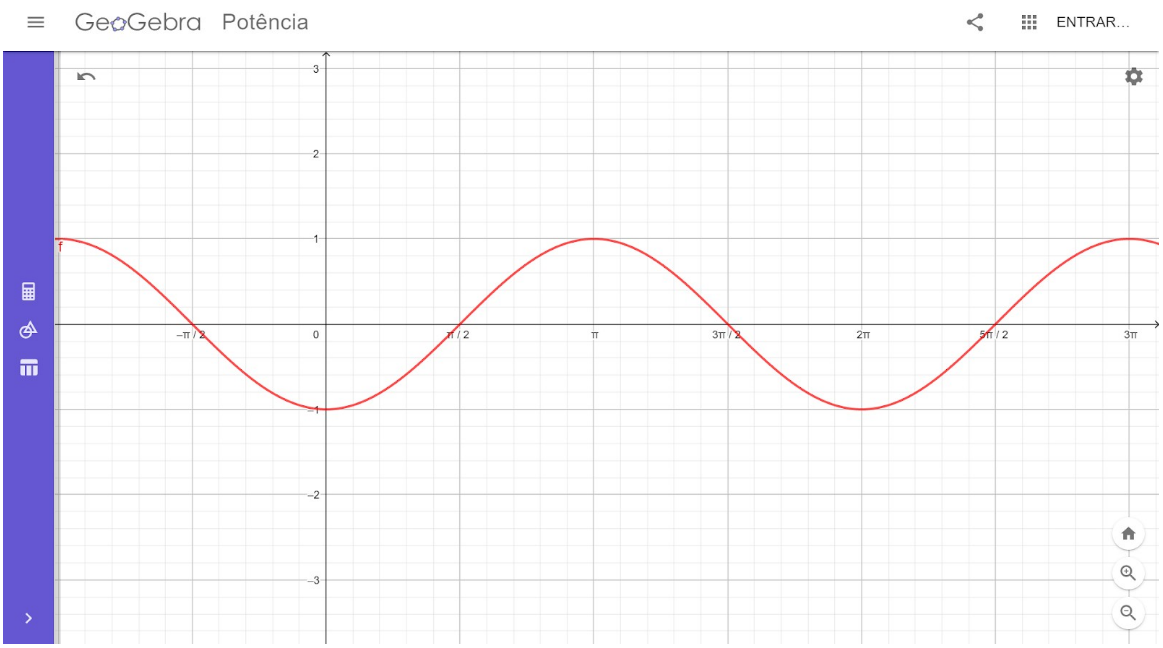


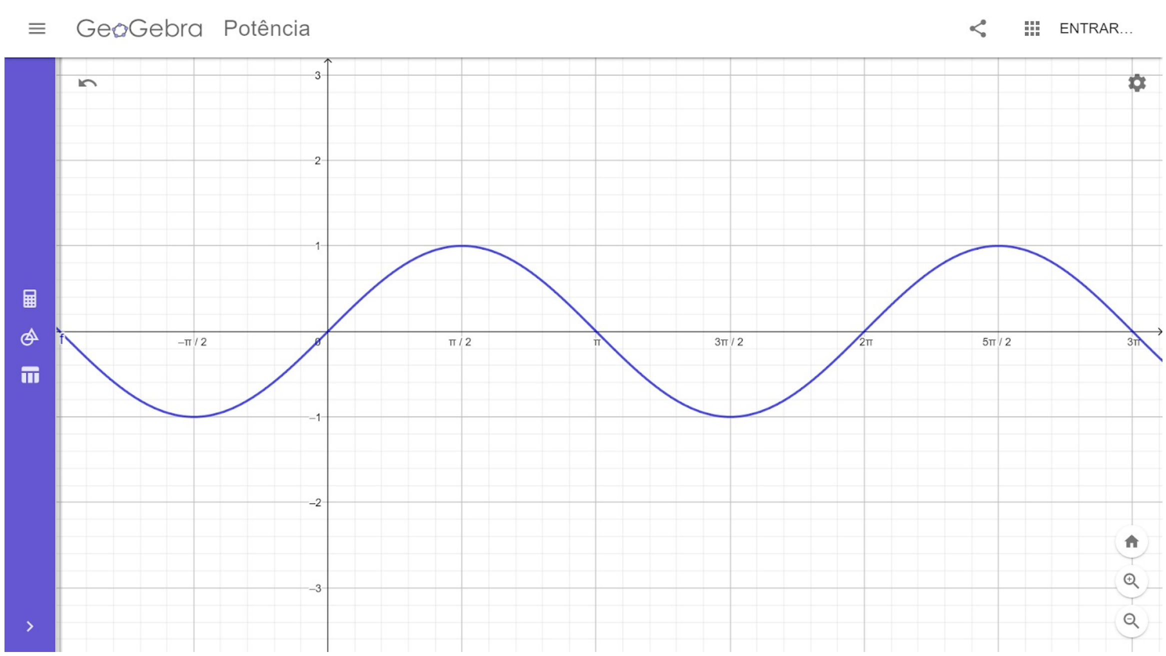


Aparentemente, não houve nenhuma mudança nos gráficos, pois o domínio, o período e a imagem se mantiveram. Entretanto a função teve um deslocamento horizontal para esquerda de acordo com o valor somado, alterando as raízes das funções.

d < 0

Gráficos 21 e 22:





Aparentemente, não houve nenhuma mudança nos gráficos, pois o domínio, o período e a imagem se mantiveram. Entretanto a função teve um deslocamento horizontal para direita de acordo com o valor somado, alterando as raízes das funções. **Concluindo, o parâmetro "d" desloca as funções horizontalmente para esquerda (d > 0) ou para direita (d < 0), de acordo com o valor somado (π). Alterando as raízes das funções.**

- **Macete**

- Domínio = *R*

- Imagem = [a – b; a + b] (ou [a + b; a – b], a a – b > a + b)

4 VARIAC¸O˜ES NOS GRA´FICOS DAS FUNC¸O˜ES SENO E

- Período = $\frac{2\pi}{¿c\vee¿¿}$

4 VARIAC¸ O˜ ES NOS GRA´ FICOS DAS FUNC¸ O˜ ES SENO E

5 Exerc´ıcios sobre func¸ o˜ es trigonome´tricas

1) Determine o domínio, período e a imagem das funções a seguir:

a) $f(x) = -3\sin(x)$
b) $g(x) = 2 + \sqrt{2\sin(4x+1)}$
c) $h(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
d) $i(x) = 1{,}3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
e) $j(x) = 2 + \cos(3x)$
f) $k(x) = 4\cos(x - \pi)$
g) $l(x) = -3 - \cos(x)$
h) $m(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\cos$ ¿
i) $n(x) = \tan(x)$
j) $o(x) = 34 - 17\cos\left(\frac{-4}{9}x\right)$

6 Gabarito

a) D = *R ;* Imagem = {y ϵ *R* / –3 ≤ y ≤ 3}; Período = 2π
b) D = *R ;* Imagem = {y ϵ *R* / $2-\sqrt{2} \le Y \le 2+\sqrt{2}$} ; Período = $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
c) D = *R* ; Imagem = {x ϵ *R* / –1 ≤ y ≤ 1}; Período = $\frac{2\pi}{2} = \pi$
d) D = *R* ; Imagem = {y ϵ *R* / –1,3 ≤ y ≤ 1,3; Período = 2π
e) D = *R* ; Imagem = {y ϵ *R* / 1 ≤ y ≤ 3}; Período = $\frac{2\pi}{3}$
f) D = *R* ; Imagem = {y ϵ *R* / –4 ≤ y ≤ 4}; Período = 2π
g) D = *R* ; Imagem = {y ϵ *R* / –3 ≤ y ≤ –1}; Período = 2π
h) D = {x ϵ *R* / x ≠ $\frac{\pi}{2}$+kπ} ; Imagem = *R;* Período = π
i) D = *R ;* Imagem = {y ϵ *R*// 17 ≤ y ≤ 51}; Período = $\frac{2\pi}{\frac{4}{9}} = \frac{9\pi}{2}$

7 Refereˆncia

s

[1] Paridade func¸a˜o cosseno. 2020. URL:

https://slideplayer.com.br/slide/1230361/3/images/7/Paridade+da+fun%C3%A7%C3%A3o+seno.jpg

[2] Paridade Função seno. 2020. URL: https://slideplayer.com.br/slide/1230361/67/video/SENO+E+COSSENO+NO+CICLO+TRIGONOM%C3%89TRICO.mp4

[3] Paridade função tangente. 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=aZwiSteCpck