Demostudo

Feito por: Lucas Ferreira
Revisado por: Danilo de Sousa Prado

Progressão Geométrica

2020

Sumário

1 Roteiro de estudos

1.1 Conteúdo

Progressão Geométrica

1.2 Sugestões para complemento do estudo

https://www.youtube.com/watch?v=JxOhaVTkQR4 - Video aula sobre progressão geométrica (15 minutos)

https://www.youtube.com/watch?v=r8-1FosGBUI - Resolução de exercícios sobre pro- gressão geométrica (17 minutos)

1.3 Ações a serem tomadas:

I. Ler o material abaixo;

II. Fazer anotações sobre;

III. Realizar as sugestões acima.

2 Definição

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica na qual um termo, a partir do segundo, é igual ao seu antecessor multiplicado por uma constante q, chamada de razão.

3 Classificação

3.1 P.G crescente

Uma PG é crescente quando um termo, a partir do segundo, é sempre maior do que o seu anterior. Desse modo, existem condições de existência para uma progressão deste tipo:

$$a_1 > 0 \text{ e } q > 1$$
ou
$$\text{qualquer } a_1 \text{ e } q = 1$$

Exemplos:

- (2, 4, 8, 16, 32, ...): Neste caso, $a_1 = 2$ e $q = 2$.
- (-4, -2, -1, -0.5,- 0.25, ...) ou (4; 2; 1; 0,5; 0,25; ...): Neste exemplo, $a_1 = -4$ e $q = \frac{1}{2}$. Os valores são crescentes porque estão se aproximando de 0 (zero).

3.2 P.G Decrescente

Uma PG é decrescente quando um termo, a partir do segundo, é sempre menor do que o seu anterior. Desse modo, existem condições de existência para uma progressão deste tipo:

$$a_1 < 0 \text{ e } q > 1$$
ou
$$a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1$$

Exemplos:

- (100, 50, 25, 12.5) ou (100; 50; 25; 12,5): Neste caso, $a_1 = 100$ e $q = \frac{1}{2}$
- (-2, -10, -50, -250): Neste exemplo, $a_1 = -2$ e $q = 5$.

3.3 P.G Constante

Uma PG é constante quando todos os seus termos são iguais. Desse modo, independentemente do valor de a_1 (que seja diferente de 0 (zero)), se q = 1, essa PG será constante.

Exemplos:

- (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) : Neste caso, a_1 = 1 e q = 1.
- (-2, -2,-2, -2, ...): Neste caso, a_1 = -2 e q = 1.

3.4 P.G Alternada

Uma PG é alternada quando a sua razão tem valor negativo. Desse modo, os sinais dos termos da sequência sempre são alternados.

Exemplos:

- (2, -4, 8, -16, 32, -64): Neste caso, a razão é igual a -2, logo é uma PG alternada.
- (6, -6, 6, -6, 6, ...): Neste exemplo, a_1 = 6 e q = -1.

3.5 P.G Estacionária

É uma PG na qual o primeiro termo é diferente de zero e os outros termos são todos nulos. Desse modo, a razão será igual a zero.

Exemplos:

- (5, 0, 0, 0, ...): Neste exemplo, a_1 = 5 e q = 0.
- (-2020, 0, 0, 0, ...): Neste exemplo, a_1 = -2020 e q = 0.

3.6 P.G Finita

Uma PG finita é uma progressão geométrica determinada por um número limitado de termos.

Exemplos:

- (2, 4, 8, 16, 32, 64): Neste caso, a razão é igual a 2 e a PG possui 6 termos.
- (1, -1, 1, -1, 1): Neste exemplo, temos a_1 = 1, q = -1e a PG possui 5 termos.

3.7 P.G Infinita

Uma PG é infinita quando tem um número ilimitado de termos, ou seja, não se define a quantidade de termos.”

Exemplos:

- (1, 2, 4, 8, 16, ...): Neste caso, é uma PG com $a_1 = 1$, $q = 2$ e termos infinitos.
- (-2, -2, -2, -2, ...): Neste exemplo, temos uma PG com $a_1 = -2$, $q = 1$ e uma quantidade infinita de termos.

4 Termo Geral

1. Para se deduzir a fórmula do termo geral da progressão geométrica, analisaremos um exemplo e, em seguida, determinaremos algebricamente. Considere a P.G (10, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)
   Neste exemplo, a quantidade inicial de bactérias (10) é o primeiro valor da sequência. Iremos chamá-lo de a_1. Na segunda posição, temos a quantidade de bactérias origina- das após 1 hora, a qual chamaremos de a_2; e assim por diante.
   Desse modo, para solucionar a questão, podemos proceder da seguinte forma:

   $10 \times 2 = a_2$ (1^a hora)
   $a_2 \times 2 = a_3$ (2^a hora)
   $a_3 \times 2 = a_4$ (3^a hora)
   $a_4 \times 2 = a_5$ (4^a hora)
   $a_5 \times 2 = a_6$ (5^a hora)

   Assim, fazendo as devidas substituições, chega-se à resposta de que a quantidade de bactérias originadas da 4^a para a 5^a hora de reprodução é **igual a 320**.

   Conseguimos chegar a esse valor calculando o número de bactérias originadas a cada hora. Caso o exemplo pedisse o número de bactérias originadas da 48^a para a 49^a hora, teríamos um pouco de trabalho se procedêssemos da mesma forma.

   Assim, para formalizar o processo para calcular um termo qualquer (a_n) dessa PG, conhecidos o primeiro termo e a razão, podemos fazer o seguinte:

   $a_2 = 10 \times 2$ (1^a hora)
   $a_3 = a_2 \times 2 = 10 \times 2 \times 2 = 10 \times 2^2$ (2^a hora)
   $a_4 = a_3 \times 2 = 10 \times 2^2 \times 2 = 10 \times 2^3$ (3^a hora)
   $a_5 = a_4 \times 2 = 10 \times 2^3 \times 2 = 10 \times 2^4$ (4^a hora)
   $a_6 = a_5 \times 2 = 10 \times 2^4 \times 2 = 10 \times 2^5$ (5^a hora)
   .
   .
   .
   $a_{50} = a_{49} \times 2 = 10 \times 2^{48} \times 2 = 10 \times 2^{49}$ (49^a hora)
   .
   .
   .
   $a_{n-1} = a_{n-2} \times 2 = 10 \times 2^{n-2} \times 2 = 10 \times 2^{n-2}$ ((n-2)^a hora)
   $a_n = a_{n-1} \times 2 = 10 \times 2^{n-2} \times 2 = 10 \times 2^{n-1}$ ((n-1)^a hora)

Dessa forma, o termo geral deste exemplo é dado por $a_n = 10 \times 2^{n-2}$

Em que:
a_n: representa a quantidade de bacte´rias originadas da (n-2)ª para a (n- 1)ª hora; 10: primeiro termo (a_1);

2: raza˜o da PG (q).

Assim, $a_n = 10 \times 2^{n-1} = a_1 \times q^{n-1}$

2. Determinac¸a˜o alge´brica

Seja a PG (a_1, a_2, a_3, ... , a_n), de primeiro termo a_1 e razão q. Temos

$a_1 = a_2 \times q$

$a_3 = a_2 \times q = a_1 \times q \times q = a_1 \times q^2$

$a_4 = a_4 \times q = a_1 \times q^2 \times q = a_1 \times q^3$

.

.

.

$a_n = a_{n-1} \times q = a_1 \times q^{n-2} \times q = a_1 \times q^{n-1}$

Portanto, para encontrarmos um termo qualquer da PG, que ocupe a posição n, utilizamos a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 . q^{(n-1)}$$

3. Concluindo

A fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica pode ser escrita em função dos valores do 1° termo e da razão:

$$a_n = a_1 . q^{(n-1)}$$

Com a fórmula, podemos encontrar o termo que ocupa a posição n da sequência.

5 Soma dos termos de uma P.G finita

Analisando uma PG qualquer (a_1, a_2, a_3, ... , a_n), com n termos, pode-se deduzir que a soma desses termos seja dada pela expressa˜o abaixo:

$S_n = a_1 + a_2 + a_2 + ... + a_n$

Sabemos que:

$a_2 = a_1 \times q$

$a_3 = a_1 \times q^2$

.

.

.

$a_n = a_1 \times q^{n-1}$

Logo:

$S_n = a_1 + 1 \times q + a_1 \times q^2 + ... + a_1 \times q^{n-1}$

Podemos multiplicar os dois lados da equação (1) por q, a fim de produzir fatores semelhantes:

(1) - $q \, x \, S_n = (a_1 + a_1 \times q + a_1 \times q^2 + ... + a_1 \times q^{n-1}) \times q$

(2) - $q \, x \, S_n = a_1 \times q + a_1 \times q^2 + a_1 \times q^3 .... + a_1 \times q^n$

Ao realizarmos a subtração da equação (1) pela equação (2), teremos:

$S_n - q \times S_n = a_1 \times q^n$

Pois os fatores semelhantes das duas equações serão eliminados.

Colocando os termos comuns em evidência e isolando o termo S_n, teremos:

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Caso tivéssemos subtraído a equação (2) da equação (1), chegaríamos à fórmula

$$\mathrm{S} = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$$

- As duas fórmulas são equivalentes. Para verificarmos isso, basta multiplicarmos o numerador e o denominador de uma por (−1) para chegarmos à outra.
- Essa é a fórmula para a determinação da soma dos termos de uma PG finita.
- Essa fórmula é válida para todas as PGs com razão diferente de 1.

6 Soma dos termos de uma P.G infinita

Para se deduzir a fo´rmula dos termos de uma PG infinita, deve-se priorizar o caso em que a raza˜o q pertence ao intervalo (1, 1), ou seja, $1 < q < 1$. Essa prioridade deve-se ao fato de que, como estamos tratando de uma PG infinita, o nu´mero de termos (n) tende ao infinito, fazendo com que o fator qn tenda a zero.
Portanto, substituindo qn por zero na expressa˜o da soma dos termos de uma PG finita, teremos uma fo´rmula para determinar a soma dos termos de uma PG infinita, considerando sempre o caso em que 1 < q < 1:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(-1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por (−1), chegamos à fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$