Esercizi d'esame Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie informatiche
Dennis Antonio Amiranda

Introduzione

Questo progetto vuole essere una trascrizione e revisione di alcuni esercizi che sono attinenti al corso di Analisi Matematica 1, con il fine di arricchire e raffinare la comprensione degli argomenti trattati. Gli esercizi svolti sono tre, due concernono la dimostrazione di due disuguaglianze, la prima e la seconda sono un caso specifico della inequality of arithmetic and geometric means (AM-GM inequality). Il terzo esercizio riguarda una funzione fratta, e uno studio estensivo delle sue proprietà.

Esercizio 6

Dimostrare la seguente disuguaglianza

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \qquad (6)$$

Proof. Possiamo riscrivere la (6) nel seguente modo:

$$a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

che è sempre positivo perché è un quadrato. □

Esercizio 7

Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza

$$\sqrt{n!} < \frac{n+1}{2} \qquad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$$

Proof. Dalla definizione di $n!$, possiamo riscriverlo come

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{1} \cdot \sqrt{1} \times \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \times \ldots \times \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \\ &= \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cdot \sqrt{k} \\ &= (\sqrt{1} \cdot \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{n} \cdot \sqrt{1}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1 \cdot n} \times \sqrt{2(n-1)} \times \ldots \times \sqrt{2(n-1)} \times \sqrt{1 \cdot n}$$

Possiamo utilizzare adesso la disuguaglianza (6), infatti per ogni radice singola dell'equazione scritta poc'anzi, vale la seguente disuguaglianza

$$n! = x < \frac{1+n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1+n}{2} = \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$$

Adesso, poiché vale la diseguaglianza tra x e l'espressione posta sopra, possiamo prendere la radice n-esima di entrambi i membri, ottenendo:

$$\sqrt{n!} < \frac{n+1}{2}$$

$\square$

Esercizio 15

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la seguente famiglia di funzioni:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b|x| + c}{d - x} \quad \text{con } a, b, c, d \in R$$

I Determinare in modo tale che la curva che rappresenta la funzione abbia

- Asintoto verticale $x = 2$;
- Asintoto obliquo con coefficiente angolare $m = -1$;
- Passi per $A(3, 0)$, $B(-6, 0)$.

II Studiare la funzione richiesta in I) nel suo campo di esistenza e tracciare il grafico γ, dopo aver classificato eventuali punti di non derivabilità.

III Dopo aver dimostrato che il punto A d'intersezione di γ con l'asse delle ordinate è un punto angoloso, scrivere le equazioni delle tangenti in A.

IV Calcolare l'area del dominio piano delimitato da γ, l'asse delle ascisse e le rette $x = -2$ e $x = -1$.

V Dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{x^2+9|x|+18}{2-x}$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 1]$ e determinare i "punti di Lagrange". Perché non verifica Lagrange nell'intervallo $[-3, 1]$?

Svolgimento
PARTE I. Per avere un asintoto in $x = 2$, dobbiamo avere che 2 sia nel dominio, cioè

$$d - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2.$$

Per l'obliquo invece,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + b|x| + c}{d - x} \cdot \frac{1}{x} \sim \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{-x} \cdot \frac{1}{x} = -a.$$

Allora deve essere che $a = 1$. Poiché $A(3,0) \in \gamma$ e $B(-6,0) \in \gamma$, otteniamo:

$$\begin{cases} A(3;0) \in \gamma \\ B(-6;0) \in \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9+3b+c}{2-3} = 0 \\ \frac{36+6b+c}{2+6} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3b - 9 = c \\ 3b + 36 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3b - 9 = \quad c \\ \quad 3b = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 * -9 - 9 = \quad c \\ \quad b = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \ 18 \\ b = -9 \end{cases}$$

PARTE II. studiamo $f(x) = \frac{x^2-9|x|+18}{2-x}$, il suo campo di esistenza è $R - \{2\}$. La funzione ha un valore assoluto, dobbiamo allora studiarne l'andamento in due casi: per $x \in]-\infty, 0[$ e $x \in [0, \infty[-\{2\}$. Nel caso 1 abbiamo che $f(x) = \frac{x^2+9x+18}{2-x}$, studiamo il segno, abbiamo che

$$x^2 + 9x + 18 \geq 0$$

$$2 - x > 0$$

che ci danno, come soluzioni, $x \leq -6 \wedge x \geq -3$ e $x < 2$, studiando il grafico, otteniamo

		-6		-3		0		
$x^2 + 9x + 18 \geq 0$	+	•	-	•	+	•		
$2 - x > 0$	+		+		+			
$f(x) \geq 0$	+		-		+		$\nexists x$	

quindi abbiamo che $x \in]-\infty, -6]$ e $x \in [-3, 0[$ abbiamo che interseca l'asse y in 9, perché $f(0) = 9$. Inoltre, non ha asintoti orizzontali, poiché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

per l'asintoto obliquo abbiamo m = -1 per ipotesi, ci basta calcolare in questo caso

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 9x + 18}{2 - x} - \frac{2x - 4}{2 - x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x + 18}{2 - x} \sim \lim_{x\to-\infty} \frac{11x}{-x} = -11$$

quindi $y = -x - 11$ è l'asintoto obliquo per $-\infty$.

derivata prima, per la regola di derivazione di una frazione abbiamo che:

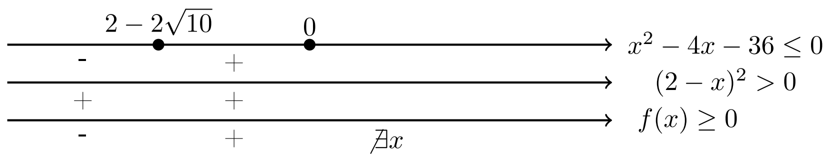
$$f'(x) = \frac{(2x + 9)(2 - x) + x^2 + 9x + 18}{(2 - x)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 36}{(2 - x)^2}$$

per il segno,

$$x^2 - 4x - 36 \leq 0$$

$$(2-x)^2 > 0$$

che hanno soluzione $x \geq 2 - 2\sqrt{10} \wedge x \leq 2 + 2\sqrt{10}$ e $\forall x \in R - \{2\}$, quindi



per la derivata seconda, per la regola di derivazione di una frazione abbiamo che:

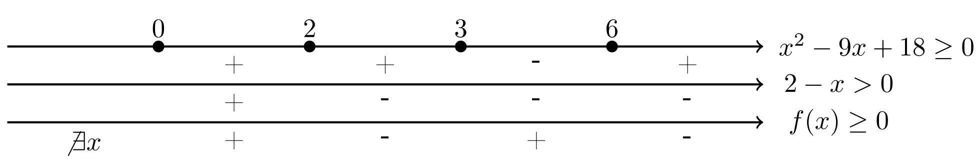
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x+4)(2-x)^2 + 2(2-x)(-x^2+4x+36)}{(2-x)^4} \\ &= \frac{2(2-x)(x^2-4x+4-x^2+4x+36)}{(2-x)^4} = \frac{80}{(2-x)^3} \end{aligned}$$

la quale si vede chiaramente in base al dominio non positivo, essere positiva per ogni x: la funzione è sempre convessa.
studiamo ora $f(x) = \frac{x^2-9x+18}{2-x}$ in $x \in [0, \infty[-\{2\}$. per il segno,

$$x^2 - 9x + 18 \geq 0$$

$$2 - x > 0$$

abbiamo che $f(0) = 9$, allora abbiamo che la funzione è continua in 0. Per il segno $x \leq 3 \wedge x \geq 6$ e $x < 2$, quindi



Non possiede asintoti orizzontali,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9x+18}{2-x} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-1} = -\infty$$

Invece ha asintoti obliqui, infatti,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9x+18}{2-x} \cdot \frac{1}{x} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9x+18}{2-x} + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9x+18+(2x-x^2)}{2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-7x+18}{2-x} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x}{-x} = 7$$

allora $y = -x + 7$ è asintoto obliquo. La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{(2x-9)(2-x) + x^2 - 9x + 18}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$$

Studiamone il segno:

$$x^2 - 4x \leq 0$$
$$(2-x)^2 > 0$$

le due equazioni danno soluzioni: $0 \leq x \leq 4 \wedge \forall x \in R - \{2\}$ quindi, usando la tabella dei segni

	0		2		4		
		+		+		-	$x^2 - 4x \leq 0$
		+		+		+	$(2-x)^2 > 0$
$\nexists x$		+		+		-	$f(x) \geq 0$

Abbiamo che $f(4) = 1$, che è un punto di massimo. Inoltre il punto 0 è angoloso, infatti

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 9 \neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

Infatti f è definita come $f'(x) = \frac{-x^2+4x+36}{(2-x)^2}$ da sinistra, e $f'(x) = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$ da destra. Per la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{('2x+4)(2-x)^2 + 2(2-x)(-x^2+4x)}{(2-x)^2} = \frac{2(2-x)(4)}{(2-x)^4}$$

$$= \frac{8}{(2-x)^3}$$

della quale, calcolando il segno banalmente vale,

	0		2		
		+		+	$8 \geq 0$
		+		-	$(2-x)^3 > 0$
$\nexists x$		+		-	$f(x) \geq 0$

PARTE III. Come dimostrato nel punto II. 0 appartiene a f, abbiamo $A(0,9)$ e quindi interseca l'asse delle ordinate in 9. La retta tangente in A sarà: $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0) \implies y = 9(x-0) + 9 \implies y = 9x + 9$.

PARTE IV. dobbiamo calcolare l'integrale

$$A(D) = \int_{-2}^{1} \frac{x^2 - 9|x| + 18}{2-x} dx = \int_{-2}^{0} \frac{x^2 + 9x + 18}{2-x} dx + \int_{0}^{1} \frac{x^2 - 9x + 18}{2-x} dx$$

per il primo, possiamo dividere per ruffini, e otteniamo

	1	9	18
		12	22
2			
	1	11	40

$$\int \frac{x^2+9x+18}{2-x}dx = -\int \frac{(2-x)(x+11)}{(2-x)}dx - 40\int \frac{1}{x-2}dx$$
$$= -\int (x+11)dx - 40ln|x-2| = -\frac{(x+11)^2}{2} - 40ln|x-2|$$

Parimente per il secondo abbiamo

	1	-9	18
		2	-14
2			
	1	-7	4

$$\int \frac{x^2-9x+18}{2-x}dx = -\int \frac{(2-x)(x-7)}{(2-x)}dx - 4\int \frac{1}{x-2}dx$$
$$= -\int (x-7)dx - 4ln|x-2| = -\frac{(x-7)^2}{2} - 4ln|x-2|$$

Ricordiamo il

Theorem 1 (Formula fondamentale del calcolo integrale)**.** *L'integrale di una funzione integranda f(x) è uguale alla differenza della primitiva di f calcolata ai due estremi dell'integrale:* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\left[-\frac{(x+11)^2}{2} - 40ln|x-2|\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{(x-7)^2}{2} - 4ln|x-2|\right]_{0}^{1} =$$
$$-\frac{121}{2} - 40ln(2) + \frac{81}{2} + 40ln(4) - 18 + \frac{49}{2} + 4ln(2) =$$
$$\frac{9}{2} - 18 - 35ln(2) + 80ln(2) \implies A(D) = 44ln(2) - \frac{27}{2}$$

PARTE V. abbiamo dimostrato nel punto II che è $f(x)$ è continua in tutto $R - \{2\}$, in particolare $f(x)$ è continua in $]0,1[$ sicché per il teorema di lagrange $\exists c \in]0,1[$ infatti, ricordiamo il

Theorem 2 (Di lagrange)**.** *Se f è una funzione continua in $[a,b]$ e f è derivabile in (a,b), allora $\exists c \in (a,b) | f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*

Sicché il nostro integrale si riduce a calcolare

$$\frac{-c^2+4c}{(2-c)^2} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \implies$$

$$-c^2+4c = 4-4c+c^2,$$

$$2c^2-8c+4=0 \implies c^2-4c+2=0$$

dalla quale otteniamo $c = 2 \pm 2\sqrt{2}$ nell'intervallo $]0,1[$ ci da $c = 2-\sqrt{2}$ la funzione non è derivabile in $[-3;1]$, non sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, infatti $f(x)$ non è derivabile in $0 \in]-3,1[$.

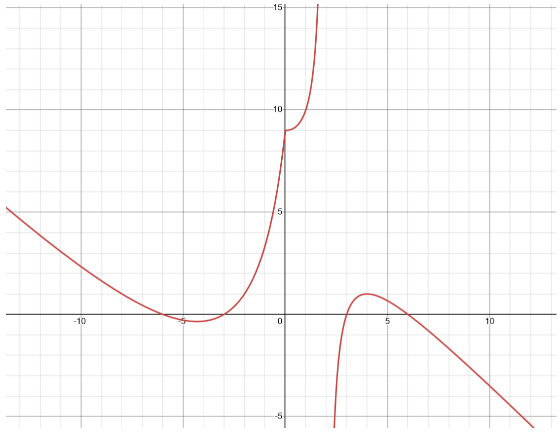


Figure 1: grafico della funzione

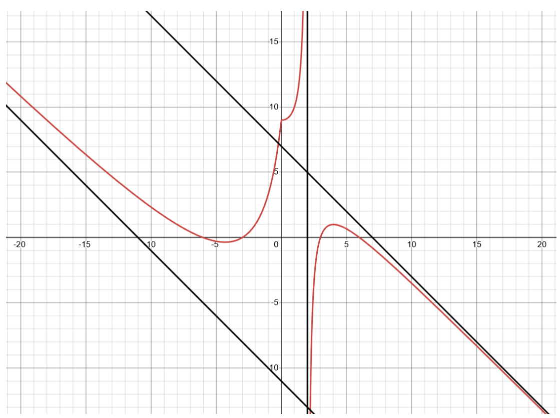


Figure 2: asintoti

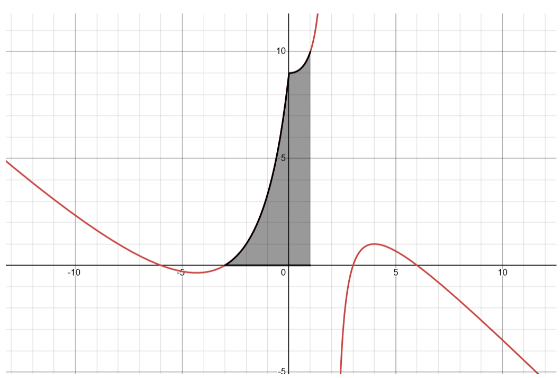


Figure 3: area dell'integrale