LE Lectures Ⓢ 01

@denchik_cdo

Собрано 31.10.2025 в 22:30

Содержание

Предисловие

Предисловие будет дополнятся. Пока что документ только создается. Если захотите предложить внести правки - тг открыт. Спасибо ребятам, что предоставили открытый код по конспектам ЛА и МА. Суть этого документа отличается только тем, что здесь будет находиться вся информация с лекции, а не чистые теоремы и т.д. для успешной сдачи экзамена :) (Deniz, 26.10.25)

1 Введение

1.1 Аксиоматическое строение

Евклидова геометрия:

1. Точка
2. Прямая
3. Плоскость

Определение в математике (обычно):

Пример 1. $\underset{\text{(Определяемое понятие)}}{\text{Прямоугольник}}$ — это $\underset{\text{(родовое понятие)}}{\text{параллелограмм}}$, у которого $\underset{\text{(видовое свойство)}}{\text{есть прямой угол}}$

Пример 2. Через две точи проходит одна и только одна прямая — редукция

Пример 3. $0! = 1$ — данность

Виды определений:

1. Редукция
2. Аксиоматическое
3. Дополнение к основному

Замечание 1.1.1. Математическое высказывание — утверждение, допускающее проверку на истинность.
Определение - НЕ математическое высказывание!

Теорема 1.1.1. Виды, структура

"Если A, то B" или $\underset{\text{(Условие)}}{A} \implies \underset{\text{(Заключение)}}{B}$

"Тогда и только тогда, когда" $\longrightarrow A \Leftrightarrow B$

Необходимые и достаточные условия:

$\underset{\text{(достаточное условие)}}{\text{Мыслю}}$ — $\underset{\text{(необходимое условие)}}{\text{существую}}$

Критерий — необходимое и достаточное условия.

1.2 Множества, отношения, операции

Пример 1. $A = \{ -1, \sqrt{2}, \ \pi \}$ — перечисление

$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5 \}$ — задано свойством

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — множество чисел

$\emptyset$ — пустое множество; $\{ \emptyset \}$ — одноэлементное множество

! Множество не может быть своим элементом.

Понятие 1. Множество — совокупность элементов, взятая как целое.

Понятие 2. Отношение (между множествами) — соответствие, правило, сопоставление элементов множеств.

$$x \xrightarrow{R} y$$ R — Отношение

Запись: $(x; y)$ или xRy — упорядоченная пара

$\{ x; y \}$ — неупорядоченная пара $(x; y) \neq (y; x)$

Def 1.2.1. Отношение эквивалентности $(x \sim y)$ — отношение, заданное свойствами (— аксиоматические):

1. $x \sim y$ — рефлексивность
2. $y \sim x = x \sim y$ — симметричность
3. $\left.\begin{matrix} x \sim y \\ y \sim z \end{matrix}\right| x \sim z$ — транзитивность

Пример 1. Равенство:

$$x = x$$
$$x = y \Longrightarrow y = x$$
$$\left.\begin{matrix} x = y \\ y = z \end{matrix}\right| x = z$$

Пример 2. Параллельность:

$$l \parallel l$$
$$l \parallel a \Longrightarrow a = l$$
$$\left.\begin{matrix} l \parallel a \\ a \parallel p \end{matrix}\right| l \parallel p$$

Понятие 1. Алгебраическая операция — набору элементов множества M сопоставляется вполне определенный элемент множества M.

Пример 1. $\underset{\text{(операция сложения)}}{a + b = c}$ $a, b, c \in \mathbb{R} \leftarrow$ бинарная операция

унарная $(\sqrt{a} = b)$

Замечание 1.2.1. Унарная, бинарная, триарная, m-арная - по числу элементов $(1, 2, 3, ...m)$

Пример 1. $+, \times, \underline{\times\lambda \ (\lambda \in \mathbb{R})}$ — унарная (элемент, умноженное на число)

1.3 Алгебраические структуры (предмет алгебры)

Def 1.3.1. Алгебраическая структура — это множество, с определенной на нем операциями и их свойствами.

Def 1.3.2. Алгебраическая группа (G) — множество G: $\underline{+}$ — любая операция

1. $\forall a, b \in G \mid a + b \in G$ — замкнутость
2. $\forall a, b, c \in G : a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность
3. $\exists \theta \in G \mid \forall a \in G : a + \theta = \theta + a = a$ — наличие нейтрального элемента
4. $\forall a \in G \quad \exists!\ a' \in G \mid a + a' = \theta$ — наличие обратного элемента

Замечание 1.3.1. Если $\oplus$, то группа — аддитивная, θ — ноль $(\mathbb{0})$, а $a' = -a$
Если $\otimes$, то группа — мультипликативная, θ — единица $(\mathbb{1})$, а $a' = a^{-1}$ (обратный элемент)

θ — нейтральный
a' — обратный элемент

Замечание 1.3.2. Если к определению группы добавить $a \times b = b \times a$, то группа называется абелевой или коммутативной.

Def 1.3.3. Кольцо это коммутативная аддитивная группа, в которой

1. Определено умножение.
2. Относительно этого умножения выполняется дистрибутивность
$a + b \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ (т.к. коммутативность для умножения не гарантирована).

Def 1.3.4. Если кольцо обладает свойством коммутативности относительно умножения $\forall a, b \in G \mid a \cdot b = b \cdot a$, то оно называется коммутативным кольцом.

Def 1.3.5. Поле (F) это коммутативное ассоциативное кольцо, в котором

1. Есть нейтральный элемент по умножению $\exists \theta \mid \forall a \in F \mid a \cdot \theta = a$.
2. Для любого ненулевого элемента существует обратный элемент по умножению $\forall a \in F \mid \exists a^{-1} \mid a \cdot a^{-1} = \theta$.
3. $a \pm b \in F$
4. $a \times b \in F$
5. $\dfrac{a}{b} \in F \quad (b \neq 0)$

1.4 Поле комплексных чисел ($\mathbb{C}$–поле)

Замечание 1.4.1. Нужно задать множество и операции $\pm, \times, \div$, чтобы получить поле.

Def 1.4.1. Множество комплексных чисел — множество упорядоченных пар (a, b), где a и $b \in \mathbb{R}$.
Операции определяются следующим образом:

1. $z + z = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad z = (a, b)$ — комплексное число
2. $z \times z = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$
3. $\mathbb{0}_{\mathbb{C}} = (0, 0); \quad -z = (-a, -b)$
4. $\mathbb{1}_{\mathbb{C}} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}} = (1, 0)$

! (0, 1)

$i^2 = (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0-1)(0+0) = (-1,0) \overset{\text{обознач.}}{=\!=} -1_{\mathbb{R}}$
Таким образом, $i^2 = -1 \Longrightarrow i$ (мнимая единица) $= \sqrt{-1}$ (корень в комплексном поле)

Замечание 1.4.2. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ и $\forall z \in \mathbb{R}(a, 0)$
$z = (a, b);\ \ b \neq 0$ — мнимые числа
$z = (0, b);$ — чисто мнимые

Lab 1.4.1. Определить: $\dfrac{z_1}{z_2}$ и найти формулу z^{-1}

2 Линейное пространство (или векторное)

2.1 Определение, примеры

Def 2.1.1. Множество V, с операциями $+, \times\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, называется ЛП (над полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$), если

Ax 1. 1) - 4) аббелева аддитивная группа.

Ax 2. 5) $\exists \mathbb{1}_{\mathbb{R}(\mathbb{C})} \mid \mathbb{1} \times x = x \quad \forall x \in V$

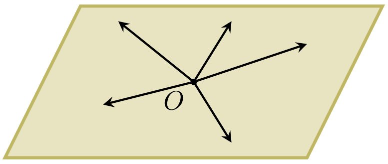
6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C});\ x \in V$

7) $(\lambda + \mu) \times x = \lambda x + \mu x$

8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;\ x, y \in V$

Модели (содержательные)

1. Пространство геометрических векторов (точнее — направленных отрезков с общим началом)
   На плоскости (для наглядности)



$+$: по правилу параллелограмма (так как векторы из одной точки)