LE Lectures Ⓢ 01

@denchik_cdo

Собрано 31.10.2025 в 18:06

Содержание

Предисловие

Предисловие будет дополнятся. Пока что документ только создается. Если захотите предложить внести правки - тг открыт. Спасибо ребятам, что предоставили открытый код по конспектам ЛА и МА. Суть этого документа отличается только тем, что здесь будет находиться вся информация с лекции, а не чистые теоремы и т.д. для успешной сдачи экзамена :) (Deniz, 26.10.25)

1 Введение

1.1 Аксиоматическое строение

Евклидова геометрия:

1. Точка
2. Прямая
3. Плоскость

Определение в математике (обычно):

Пример 1. $\underset{\text{(Определяемое понятие)}}{\text{Прямоугольник}}$ — это $\underset{\text{(родовое понятие)}}{\text{параллелограмм}}$, у которого $\underset{\text{(видовое свойство)}}{\text{есть прямой угол}}$

Пример 2. Через две точи проходит одна и только одна прямая — редукция

Пример 3. $0! = 1$ — данность

Виды определений:

1. Редукция
2. Аксиоматическое
3. Дополнение к основному

Замечание 1.1.1. Математическое высказывание — утверждение, допускающее проверку на истинность.
Определение - НЕ математическое высказывание!

Теорема 1.1.1. Виды, структура

"Если A, то B" или $\underset{\text{(Условие)}}{A} \implies \underset{\text{(Заключение)}}{B}$

"Тогда и только тогда, когда" $\longrightarrow A \Leftrightarrow B$

Необходимые и достаточные условия:

$\underset{\text{(достаточное условие)}}{\text{Мыслю}}$ — $\underset{\text{(необходимое условие)}}{\text{существую}}$

Критерий — необходимое и достаточное условия.

1.2 Множества, отношения, операции

Пример 1. $A = \{\, -1, \sqrt{2},\ \pi \,\}$ — перечисление

$B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5 \,\}$ — задано свойством

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — множество чисел

$\emptyset$ — пустое множество; $\{\, \emptyset \,\}$ — одноэлементное множество

! Множество не может быть своим элементом.

Понятие 1. Множество — совокупность элементов, взятая как целое.

Понятие 2. Отношение (между множествами) — соответствие, правило, сопоставление элементов множеств.

$x \xrightarrow{R} y$ R — Отношение

Запись: $(\, x; y \,)$ или xRy — упорядоченная пара
$\{\, x; y \,\}$ — неупорядоченная пара $(x; y) \neq (y; x)$

Def 1.2.1. Отношение эквивалентности $(\, x \sim y \,)$ — отношение, заданное свойствами (— аксиоматические):

1. $x \sim y$ — рефлексивность
2. $y \sim x = x \sim y$ — симметричность
3. $\left.\begin{array}{l} x \sim y \\ y \sim z \end{array}\right|\ x \sim z$ — транзитивность

Пример 1. Равенство:

$$x = x$$
$$x = y \Longrightarrow y = x$$
$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ y = z \end{array}\right|\ x = z$$

Пример 2. Параллельность:

$$l \parallel l$$
$$l \parallel a \Longrightarrow a = l$$
$$\left.\begin{array}{l} l \parallel a \\ a \parallel p \end{array}\right|\ l \parallel p$$

Понятие 1. Алгебраическая операция — набору элементов множества M сопоставляется вполне определенный элемент множества M.

Пример 1. $\underset{\text{(операция сложения)}}{a + b = c}$ $a, b, c \in \mathbb{R} \leftarrow$ бинарная операция

унарная $(\sqrt{a} = b)$

Замечание 1.2.1. Унарная, бинарная, триарная, m-арная - по числу элементов $(1, 2, 3, ...m)$

Пример 1. $+, \times, \times\lambda\ (\lambda \in \mathbb{R})$ — унарная (элемент, умноженное на число)

1.3 Алгебраические структуры (предмет алгебры)

Def 1.3.1. Алгебраическая структура — это множество, с определенной на нем операциями и их свойствами.

Def 1.3.2. Алгебраическая группа (G) — множество G: $\underline{+}$ — любая операция

1. $\forall a, b \in G \mid a + b \in G$ — замкнутость
2. $\forall a, b, c \in G : a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность
3. $\exists \theta \in G \mid \forall a \in G : a + \theta = \theta + a = a$ — наличие нейтрального элемента
4. $\forall a \in G \quad \exists!\ a' \in G \mid a + a' = \theta$ — наличие обратного элемента

Замечание 1.3.1. Если $\oplus$, то группа — аддитивная, θ — ноль $(\mathbb{0})$, а $a' = -a$

Если $\otimes$, то группа — мультипликативная, θ — единица $(\mathbb{1})$, а $a' = a^{-1}$ (обратный элемент)

θ — нейтральный
a' — обратный элемент

Замечание 1.3.2. Если к определению группы добавить $a \times b = b \times a$, то группа называется абелевой или коммутативной.

Def 1.3.3. Кольцо это коммутативная аддитивная группа, в которой

1. Определено умножение.
2. Относительно этого умножения выполняется дистрибутивность
$a + b \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ (т.к. коммутативность для умножения не гарантирована).

Def 1.3.4. Если кольцо обладает свойством коммутативности относительно умножения $\forall a, b \in G \mid a \cdot b = b \cdot a$, то оно называется коммутативным кольцом.

Def 1.3.5. Поле (F) это коммутативное ассоциативное кольцо, в котором

1. Есть нейтральный элемент по умножению $\exists \theta \mid \forall a \in F \mid a \cdot \theta = a$.
2. Для любого ненулевого элемента существует обратный элемент по умножению $\forall a \in F \mid \exists a^{-1} \mid a \cdot a^{-1} = \theta$.