

第 1 回 演習課題

1026-30-8137

多田 拓生^{*1}

2020 年 10 月 29 日

^{*1} tada.takumi.34w@st.kyoto-u.ac.jp

電気電子計算工学及演習

1026-30-8137

多田 拓生

説明日

2020/10/8

このレポートで示すコードは、全て Rust で書いている。

課題 1.1

二分法およびニュートン法を用いて非線形方程式を解くプログラムをそれぞれソースコード 1、ソースコード 2 に示す。

まず二分法を用いたソースコード 1 について説明する。

bisection_method 関数は、引数として range、e、f、expected_value を受け取る。これらはそれぞれ範囲、許容誤差、関数、真値である。まず初期区間を range として与えると、bisection_method は bisection_method_inner 関数に range、e、f、expected_value を渡し、さらに回数として times に 1 を、また反復回数と近似解のデータを書き込むバッファ data を渡す。bisection_method_inner 関数は範囲を半分に区切り、解が存在すると思われる範囲を再帰的に渡して times を一つ進める。この時その範囲が許容誤差内に収まったなら、半分に区切った時の値を近似解として返す。

次にニュートン法を用いたソースコード 2 について説明する。

まず、ニュートン法で非線形方程式を解くには関数を微分する必要がある。関数の微分には、微分係数の定義である

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

を用いて微分した関数を返す differential_f 関数を作成した。

newton_raphson_method 関数は次のようなアルゴリズムで方程式を解く。まず、関数には $f(x)$ と初期近似解を与える。すると、その関数を微分し、

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2)$$

となる $g(x)$ を計算する newton_transform 関数に $f(x)$ 、 $f'(x)$ を渡し、また閾値と回数として 1、反復回数上限として 1,000,000、バッファとしての data、真値 expected_value とともに newton_method 関数に渡す。

newton_method 関数では、 $g(x)$ を用いて近似解の候補を求め、元の x との距離が閾値よりも小さい時、その計算した値を近似解として返す。閾値よりも大きかった場合は計算した値を再帰的に newton_method に渡す。それを繰り返すことで非線形方程式を解く。最初に next の値をチェックしているのは、 $g(x)$ の値が想定していない値になった時の処理をまとめてあるだけであり、アルゴリズムに直接は影響しない。これについては後で言及する。

なお、バッファに保存した data は gnuplot を用いて描画する。

ソースコード 1 bisection_method.rs

```
#![allow(dead_code)]

pub use std::ops::Range;
pub use std::rc::Rc;

pub fn bisection_method(
    range: Range<f64>,
    e: f64,
    f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64>,
    expected_value: f64,
) -> (f64, Vec<(f64, f64)>) {
    let data: Vec<(f64, f64)> = Vec::new();
    bisection_method_inner(
        range, e, f, 1, expected_value, data
    )
}

fn bisection_method_inner(
    mut range: Range<f64>,
    e: f64,
    f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64>,
    times: usize,
    expected_value: f64,
    mut data: Vec<(f64, f64)>,
) -> (f64, Vec<(f64, f64)>) {
    let x_new = (range.end + range.start) / 2.;
```

```

    if f(x_new) * f(range.start) >= 0. {
        range.start = x_new;
    } else {
        range.end = x_new;
    }
    data.push((times as f64, (x_new - expected_value).abs()));
    if range.end - range.start <= e {
        (x_new, data)
    } else {
        bisection_method_inner(
            range, e, f, times + 1, expected_value, data
        )
    }
}

```

```

#[cfg(test)]
mod tests_bisection_method {
    use crate::bisection_method::*;

    #[test]
    fn tests_bisection_method() {
        let f = Rc::new(|x: f64| {
            x.powf(5.) - 3. * x.powf(4.) + x.powf(3.)
            + 5. * x.powf(2.) - 6. * x + 2.
        });
        assert_eq!(
            (bisection_method(
                -2f64..0f64, 1e-3, f.clone(), -1.414213566237)
            ).0,
            -1.4150390625
        );
        assert_eq!(
            (bisection_method(
                -2f64..0f64, 1e-4, f.clone(), -1.414213566237)
            ).0,
            -1.4150390625
        );
    }
}

```

```

        ).0,
        -1.41424560546875
    );
    assert_eq!(
        (bisection_method(
            -2f64..0f64, 1e-5, f.clone(), -1.414213566237)
        ).0,
        -1.4142074584960938
    );
}
}

```

ソースコード 2 newton_raphson_method.rs

```

#![allow(dead_code)]

// pub mod newton_raphson_method {
pub use std::rc::Rc;
pub use std::result::Result;

pub fn newton_raphson_method(
    f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64>,
    init: f64,
    expected_value: f64,
) -> Result<(f64, Vec<(f64, f64)>), String> {
    let threshold = 0.1e-10;
    let f_dir = differential_f(f.clone());
    let data: Vec<(f64, f64)> = Vec::new();
    newton_method(
        newton_transform(f, f_dir),
        init,
        threshold,
        1,
        1_000_000,
        expected_value,
        data,
    )
}
}

```

```

    )
}

fn differential_f(
    f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64>
) -> Rc<dyn Fn(f64) -> f64> {
    let dx = 0.1e-10;
    let f_dir = move |x: f64| -> f64 { (f(x + dx) - f(x)) / dx };
    Rc::new(f_dir)
}

unsafe fn partial_derivative(
    f: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>,
    i: usize,
) -> Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> {
    let dx = 0.1e-10;
    let f_der = move |v: Vec<f64>| -> f64 {
        let mut v_dx = v.clone();
        v_dx[i] += dx;
        (f(v_dx) - f(v)) / dx
    };
    Rc::new(f_der)
}

fn newton_transform(
    f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64>,
    f_dir: Rc<dyn Fn(f64) -> f64>,
) -> Rc<dyn Fn(f64) -> f64> {
    Rc::new(move |x: f64| -> f64 { x - f(x) / f_dir(x) })
}

fn newton_method(
    f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64>,
    guess: f64,

```

```

    threshold: f64,
    times: usize,
    limit: usize,
    expected_value: f64,
    mut data: Vec<(f64, f64)>,
) -> Result<(f64, Vec<(f64, f64)>), String> {
    let next = f(guess);
    if next == f64::NEG_INFINITY
    || next == f64::INFINITY
    || next.is_nan() {
        return Err(format!(
            "x^(k+1) is not a number: last value is {}. ", guess
        ));
    }
    if limit == times + 1 {
        return Err(format!(
            "solution doesn't converge: last value is {}. ",
            next
        ));
    }
    data.push((times as f64, (next - expected_value).abs()));
    if (next - guess).abs() <= threshold {
        Ok((next, data))
    } else {
        newton_method(
            f, next, threshold, times + 1,
            limit, expected_value, data
        )
    }
}

```

```

#[cfg(test)]
mod tests_newton_raphson_method {
    use crate::newton_raphson_method::newton_method;

```

```

use crate::newton_raphson_method::*;

#[test]
fn test_newton_raphson_method_newton_raphson_method() {
    let f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64> = Rc::new(|x: f64| -> f64 {
        x.powf(5.) - 3. * x.powf(4.) + x.powf(3.)
        + 5. * x.powf(2.) - 6. * x + 2.
    });
    assert_eq!(
        newton_raphson_method(f, -1., -1.414213566237).unwrap().0,
        -1.4142135623730951
    );
}

#[test]
fn test_newton_raphson_method_newton_method_neg_inf() {
    let f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64> = Rc::new(|x: f64| -> f64 { x });
    assert_eq!(
        newton_method(
            f,
            f64::NEG_INFINITY,
            0.1e-10,
            1,
            10000,
            -1.41,
            vec![(0 f64, 0 f64)]
        ),
        Err("x^(k+1) is not a number: last value is -inf.".to_string())
    );
}

#[test]
fn test_newton_raphson_method_newton_method_inf() {
    let f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64> = Rc::new(|x: f64| -> f64 { x });

```



```

    assert_eq!(
        newton_method(
            f,
            f64::INFINITY,
            0.1e-10,
            1,
            10000,
            -1.41,
            vec![(0f64, 0f64)]
        ),
        Err("x^(k+1) is not a number: last value is inf.".to_string())
    );
}

#[test]
fn test_newton_raphson_method_newton_method_nan() {
    let f: Rc<dyn Fn(f64) -> f64> = Rc::new(|x: f64| -> f64 { x });
    assert_eq!(
        newton_method(f, f64::NAN, 0.1e-10, 1, 10000, -1.41, vec![(0f64, 0f64)]
        Err("x^(k+1) is not a number: last value is NaN.".to_string())
    );
}
}

```

1 課題 1.1.1

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 2 \quad (3)$$

とする。5 次方程式 $f(x) = 0$ の解を最初に説明した二分法およびニュートン法を用いたプログラムを実行して解く。

二分法の初期期間を $[-2, 0]$ とし、ニュートン法の初期近似解を -1 とする。そして反復回数を横軸に、それぞれの手法で得られた近似解と真値 $(-\sqrt{2})$ との誤差の絶対値を縦軸にとった片対数グラフをそれぞれ図 1 に作成し、示す。

図 1 より、二分法 (青色) は収束にこそ時間がかかるが比較的誤差の大きさは小さいので初めからある程度は真値近くの値を示すのに対し、ニュートン法では収束の速さが速いが収束する前は真

値とよりかけ離れた値を解の候補として提示することがわかる。

これは、二分法がもともと限られた範囲を二分していくためそこまで誤差が大きくなり安定して解に収束していくのに対し、ニュートン法では関数の形に依存する。今回のグラフでは収束の様子が図 2 のように観測できた。このグラフでは候補の点の接線が x 軸と交わった点が次の候補点になる様子がわかった。

なお得られた最終値は、許容誤差 $1.0\text{e-}11$ の元で -1.4142135623730951 であり、これは $-\sqrt{2}$ を示すと考えた。実際、得られた解を $f(x)$ に代入すると等式は成り立つので、有効な解が得られたと言えると考えた。

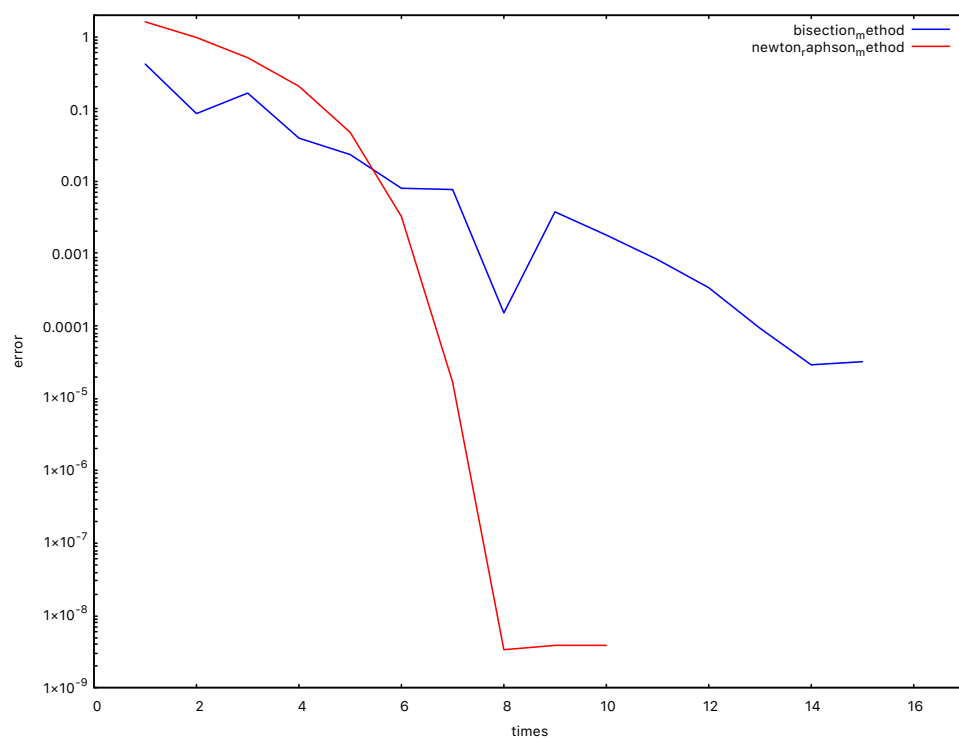


図 1 二分法・ニュートン法の収束の速さ

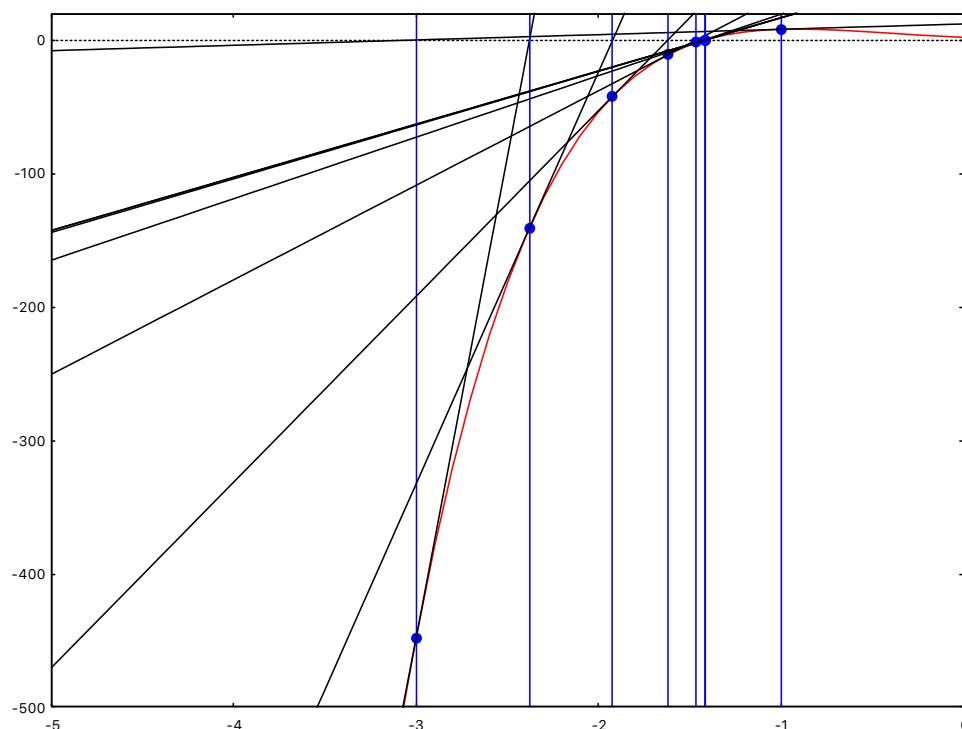


図2 ニュートン法による収束の様子

2 課題 1.1.2

二分法の初期区間を $[0, 1.2]$ 、ニュートン法の初期近似解を -0.6 として課題 1.1.1 と同様のグラフを作成しようとしたところ、`newton_raphson_method` が、`"x(k+1) is not a number: last value is 0.9964477602428009."` というエラーを吐いて以上終了した。これは 0 除算を行う等の演算により、値が正常な値にならない時に Rust では値が NaN になるため、その時に吐き出すように設定したエラーメッセージである。ここで、エラー時にエラーメッセージを吐くのではなく、バッファの data を返すようにして値をプロットしたグラフが図 3 になる。

これは、ニュートン法の暗黙の仮定を破ったことによるエラーだと考えた。求めるべき解の真値は -1 だが、これは $f(x)$ の重解になっている。したがって解の近傍では $f(x)$ 、 $f'(x)$ の双方が共にゼロに近づき、今回は $f'(x)$ の方が 0 に収束するのが速く、値が不正なものになってしまったのだと考えた。

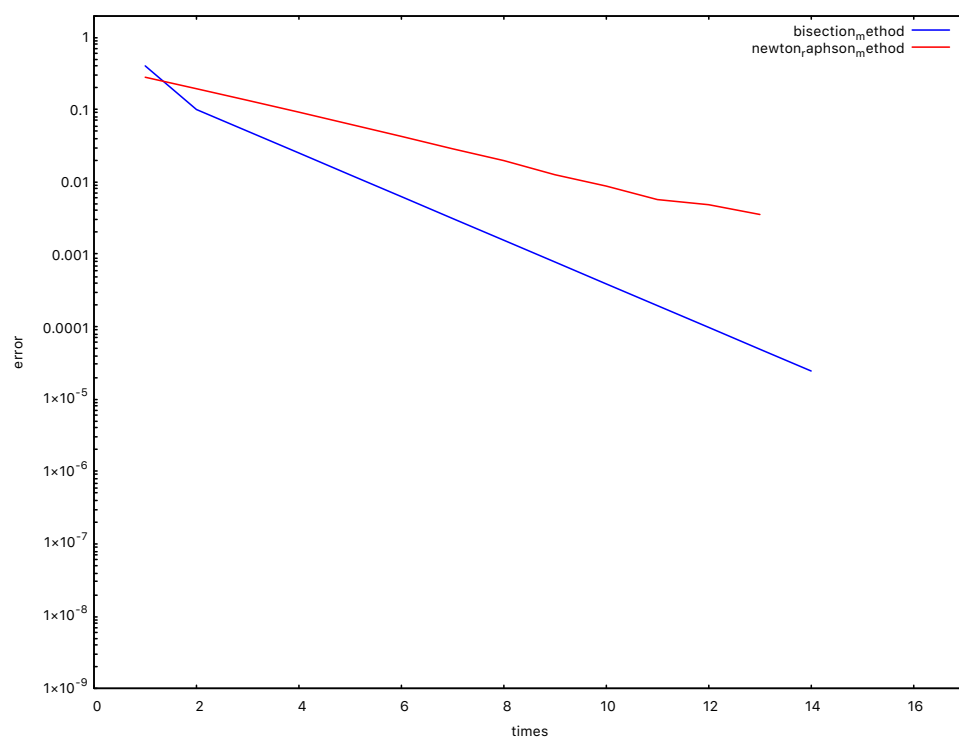


図3 エラー終了するまでの値

電気電子計算工学及演習

1026-30-8137

多田 拓生

説明日

2020/10/*

課題 1.2

3 課題 1.2.1

与えられたアルゴリズムを実行するプログラムを作成した。コードをソースコード 3 に示す。ソースコード 3 中では、自作行列演算ライブラリである `matrix` を使用している。このコードは 3,000 行を越えるためここに示すことはできないが、ソースコード 3 中で使用している `Matrix` の定義、`append_line`、内積計算、スカラー倍、ベクタとみなして L2 ノルムを求める `norm2` をソースコード 4 に示し説明する。

ソースコード 3 では、まず行列 A を生成し、ループさせる関数を定義し、初期値からベクトル x を行列として生成し、30 回ループさせている。関数内では、まずベクトル y を行列演算 $A \cdot x$ をして行列として計算し、L2 ノルムを求め、繰り返し回数と求めたノルムをバッファに保存し、次の x の値を生成している。

ソースコード 4 では行列に関するコードを示した。

まず `Matrix` が行列の定義である。次に、`append_line` 関数が入れ子になっているベクタを元に行列を生成する関数である。`MulSelf` に示してあるのが行列の内積を計算する関数である。内積の定義通りに各行各列の要素を計算している。演算子のオーバーロードにより行列*行列をするとこの関数が呼ばれる。`MulOutput=T` に示すのがスカラー倍をする関数で、各要素にスカラー倍をしている。これも演算子オーバーロードにより行列*スカラと呼ばれる。`Div` は各要素に除算を行う。行列/スカラにより呼ばれる。`norm2` 関数は各要素を 2 乗し、全て足し合わせた後ルートを取っている。これにより L2 ノルムが計算できる。

さて、以上のコードを用いて収束を確かめたグラフを図 4 に示す。概ね 3.7 に収束していることがわかる。最終的な収束値は 3.682506 であった。

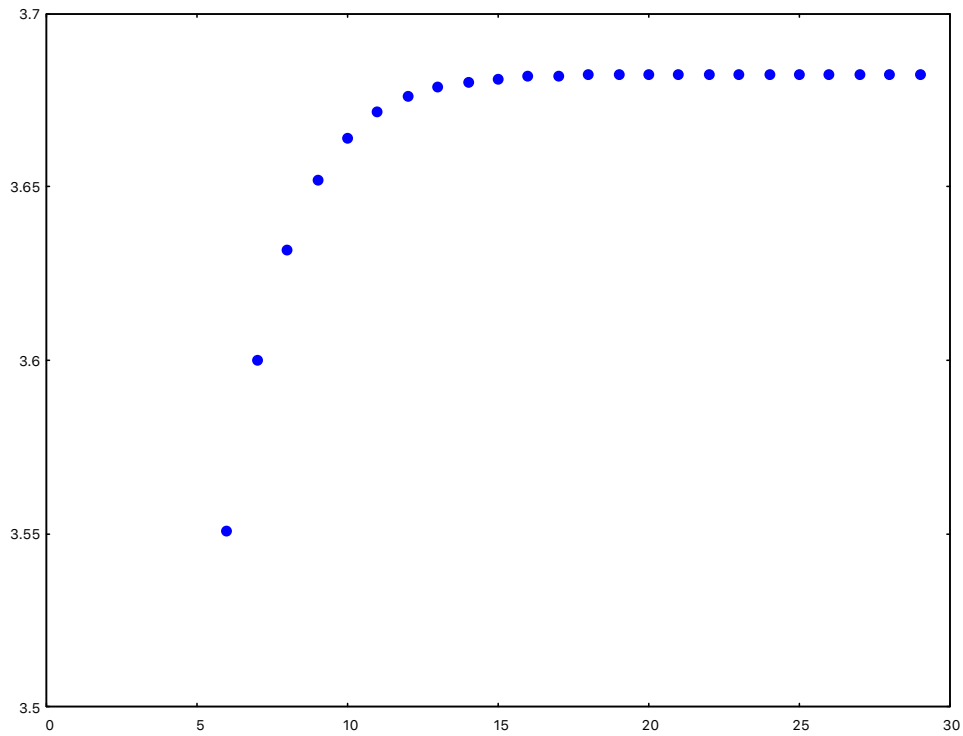


図4 試行30回での収束

ソースコード 3 main.rs

```
fn kadai123(init: f32, times: usize) -> Vec<(f64, f64)> {
    let a = Matrix::append_line(vec![
        vec![2.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
        vec![-1.0, 2.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
        vec![0.0, -1.0, 2.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
        vec![0.0, 0.0, -1.0, 2.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
        vec![0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 2.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
        vec![0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 2.0, -1.0, 0.0, 0.0, 0.0],
        vec![0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 2.0, -1.0, 0.0, 0.0],
        vec![0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 2.0, -1.0, 0.0],
        vec![0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 2.0, -1.0],
        vec![0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 2.0],
    ]);

    let mut data = Vec::new();
```

```

let mut f = |x: Matrix<f32>, i: usize| -> Matrix<f32> {
    let y = &a * &x;
    let y_norm = y.norm2();
    println!("M: {}, y_norm: {}", i, y_norm);
    data.push((i as f64, y_norm as f64));
    &y / y_norm
};

let mut x = Matrix::new(10, 1);
x += init;

for i in 0..times {
    x = f(x, i);
}

data
}

fn main() {
    let s0 =
        Plot::new(kadai123(1.0, 30))
            .point_style(
                PointStyle::new().marker(PointMarker::Circle)
            );

    let v0 = ContinuousView::new()
        .add(s0)
        .x_range(0., 30.)
        .y_range(3.5, 4.)
        .x_label("times")
        .y_label("value");

    println!(

```

```

        "{}",
        Page::single(&v0).dimensions(80, 10).to_text().unwrap()
    );
}

```

ソースコード 4 matrix_dash.rs

```

#[derive(Clone, Debug, PartialEq, PartialOrd)]
pub struct Matrix<T> {
    n: usize,          // line          [* * * * *]
    m: usize,          // column        [* * * * *] -> n = 3, m = 5
    array: Vec<T>,     //              [* * * * *]
}

impl<T> Matrix<T>
where
    T: Clone,
{
    pub fn append_line(vec: Vec<Vec<T>>) -> Self {
        let n = vec.len();
        let m = vec[0].len();
        if !vec.iter().all(|e| e.len() == m) {
            panic!(
                "Matrix::append_line ' needs appropriatly sized Vec<Vec<T>>.'"
            );
        }
        Matrix {
            n,
            m,
            array: vec.concat(),
        }
    }
}

impl<T> Mul<Self> for &Matrix<T>
where

```



```

T: Mul<Output = T> + Add<Output = T> + Clone + Zero,
{
    type Output = Matrix<T>;
    fn mul(self, rhs: Self) -> Self::Output {
        // TODO: use Strassen algorithm
        if !(self.m == rhs.n) {
            panic!(
                "Matrix::mul needs n * m Matrix<T> and m * k Matrix<T>."
            )
        }
        Matrix {
            n: self.n,
            m: rhs.m,
            array: {
                let mut v = Vec::<T>::new();
                for i in 0..self.n {
                    for j in 0..rhs.m {
                        let mut sum = T::zero();
                        for k in 0..self.m {
                            sum = sum
                                + self.array[i * self.m + k].clone()
                                  * rhs.array[j + k * rhs.m].clone()
                        }
                        v.push(sum)
                    }
                }
                v
            },
        }
    }
}

impl<T> Mul<T> for &Matrix<T>
where

```

```

T: Mul<Output = T> + Clone ,
{
    type Output = Matrix<T>;
    fn mul(self , rhs: T) -> Self::Output {
        Matrix {
            n: self.n,
            m: self.m,
            array: {
                let mut v = Vec::new();
                for i in 0..self.n * self.m {
                    v.push(self.array[i].clone() * rhs.clone())
                }
                v
            },
        }
    }
}

```

```

impl<T> Div<T> for &Matrix<T>
where
    T: Div<Output = T> + Clone ,
{
    type Output = Matrix<T>;
    fn div(self , rhs: T) -> Self::Output {
        Matrix {
            n: self.n,
            m: self.m,
            array: {
                let mut v = Vec::new();
                for i in 0..self.n * self.m {
                    v.push(self.array[i].clone() / rhs.clone())
                }
                v
            },
        }
    }
}

```

```

    }
  }
}

impl<T> Matrix<T>
where
  T: Zero
    + Clone
    + ToPrimitive
    + One
    + Sub<Output = T>
    + Mul<Output = T>
    + Add<Output = T>
    + Div<Output = T>,
{
  pub fn norm2<F>(&self) -> F
  where
    F: Float + Zero + FromPrimitive + Add<Output = F>,
    {
      let mut size = F::zero();
      for i in 0..self.n * self.m {
        size = size.clone()
          + F::from(self.array[i].clone())
            .unwrap()
            .powf(F::from_f32(2.0).unwrap())
      }
      size.sqrt()
    }
}

```

4 課題 1.2.2

べき乗法はある行列 A の固有値が互いにすべて異なる时候を考える。固有ベクトルが一次独立なので各固有ベクトルを基底として x を表現できるので、繰り返し Ax を求めることで最大の固有値を持つ固有ベクトルの影響が大きくなりその係数のみが残る、固有値が求まるという方法である。

この時、各ベクトルの係数は最大係数の固有値を λ_0 、その他の固有値を λ_i としたときに、 (λ_i/λ_0) の大きさに依存しながら収束する。そのため最大の大きさを持つ固有値と二番目の大きさを持つ固有値に近い値を持つときは、収束に時間がかかると考えられる。したがって、求めた約 3.7 という値が絶対値最大固有値に近いと考えて良いかは、さらに試行回数を増やさなければ断言できないと考えた。

5 課題 1.2.3

反復回数を 1000 回、初期値をそれぞれ 0.1、1.0、3.0、4.0、300.0 にして同様にプロットしたグラフを図 5 に示す。

図より、初期値に依らず、試行回数 300 回程度で近似解が 3.9 の近くまで跳ね上がることがわかる。したがって課題 1.2.1 で求めた値は絶対値最大の固有値ではなかったことがわかった。なお、(<https://keisan.casio.jp/exec/system/1505174268>) を用いて固有値を求めると絶対値最大の固有値は 3.9189 と求まるので、試行回数 1000 回で得られた値 (3.918986) が求めたい固有値の値に近いと考えて良いと考えた。

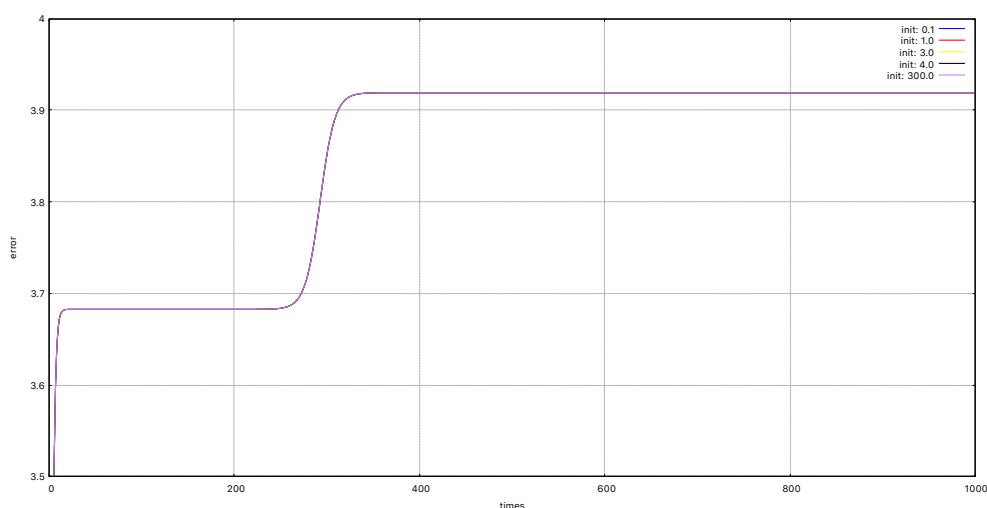


図 5 初期値、繰り返し回数を変えたべき乗法

電気電子計算工学及演習

1026-30-8137

多田 拓生

説明日

2019/*/*

課題 1.3

n 元連立非線形方程式の求解をニュートン法によって行うプログラムを作成した。そのコードをソースコード 5 に示す。

このコードでも `matrix` ライブラリを使用している。説明が必要な関数についてはソースコード 6 にコードを示し説明する。

まず、`jacobian_newton_raphson_method` は、関数のベクトル `vec.f` と初期近似解ベクトル `vec_init` を受け取る。真値との誤差を知りたいければ `vec.expected` に真値を、値が欲しければ 0 ベクトルを与えれば良い。

関数の中では、まず `dif_jacobi` に関数のベクトルを与え、ヤコビアンを計算する。`dif_jacobi` は、その中で `partial_dirivative` 関数を用いて偏微分する。この関数は、割線法を応用して偏微分導関数を求めている。これにより、 n 次元の関数のベクトルさえ与えればプログラムでヤコビアンを求められるように工夫した。そのあと、各ベクトルを演算しやすいように `Matrix` に変換し、またデータを保存するように `data` という変数をバッファとして宣言している。そしてそれらを再帰的な関数 `jacobian_newton_method` に与えている。

`jacobian_newton_method` では、関数のベクトル、ヤコビアン (値適用前)、解の候補、閾値、反復回数、最大反復回数、バッファを受け取る。この関数では、まず解の候補をヤコビアンに適用するために n^2 にしている。そして、それを `matrix` ライブラリの `apply` 関数を用いてヤコビアンに適用し、その行列と関数のベクトルに解候補を適用したベクトルを使い、`matrix` の `solve_eqn` 関数を用いて修正量 Δx を求めている。`apply` 関数と `solve_eqn` 関数はあとで説明するが、解を求めるのに LU 分解を行なっている n

そして、その修正量の絶対値が閾値よりも少なければ試行回数と解候補を記録し続けている `data` を返し、条件を満たさなければ再帰的に以上の処理を繰り返すようにしている。

次にソースコード 6 に示した `matrix::apply` と `matrix::solve_eqn` について説明する。

`apply` 関数は `Rc<dyn Fn(R) -> T>>` 型の値をもつ行列からのみ呼び出せる。この行列と要素数の等しいベクトルが与えられた時、その関数に一つ一つ値を適用し、適用した値を行列の要素にもつ新しい行列を生成する。

`solve_eqn` 関数は $n \times n$ 正方行列 `a` と n 次元ベクトル `b` を受け取る。まず、変数 `lu` に `a` を LU 分

解した結果を保存する。ここで使っている `lu.decompose` 関数はソースコード 6 に共に示してある。この関数では L の対角行列を 1 に固定し、元の行列の対角行列の要素で割ることで値を縦に求めていく。求まると同時にコードにあるように他の要素との積を求めて横方向にひいていくことで、縦向けに到達した要素の値は L および U の値として適切なものになるようにしてある。そのようにして求めた LU それぞれを用いて、前進代入、交代代入を順に行うことで求解している。

以上が作成したプログラムの説明である。

ソースコード 5 newton_raphson_method.rs

```
#![allow(dead_code)]

pub use crate::matrix::*;
pub use std::rc::Rc;
pub use std::result::Result;

pub fn jacobian_newton_raphson_method(
    vec_f: Vec<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>>,
    vec_init: Vec<f64>,
    vec_expected: Vec<f64>
) -> Result<Vec<(f64, Vec<f64>)>, String> {
    let n = vec_f.len();
    if n != vec_init.len() {
        panic!(
            "‘jacobian_newton_raphson_method’ needs
             vec_f and vec_init the same size."
        );
    }
    let threshold = 0.1e-10;
    let jacobian = dif_jacobi(vec_f.clone());
    let init = Matrix::append(n, 1, vec_init);
    let f_n: Matrix<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>> =
        Matrix::append(n, 1, vec_f);
    let data: Vec<(f64, Vec<f64>)> = Vec::new();
    let mtrx_expected =
        Matrix::append(vec_expected.len(), 1, vec_expected);
    jacobian_newton_method(f_n, jacobian, init,
```

```

        threshold, 1, 1_000_000, vec_expected, data)
    }

fn dif_jacobi(
    vec_f: Vec<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>>
) -> Matrix<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>> {
    Matrix::append_line({
        let mut v = Vec::new();
        for i in 0..vec_f.len() {
            let mut u = Vec::new();
            for j in 0..vec_f.len() {
                unsafe {
                    u.push(partial_derivative(vec_f.index(i).clone(), j))
                }
            }
            v.push(u);
        }
        v
    })
}

unsafe fn partial_derivative(
    f: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>,
    i: usize,
) -> Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> {
    let dx = 0.1e-10;
    let f_der = move |v: Vec<f64>| -> f64 {
        let mut v_dx = v.clone();
        v_dx[i] += dx;
        (f(v_dx) - f(v)) / dx
    };
    Rc::new(f_der)
}

```

```

fn jacobian_newton_method(
    vec_f: Matrix<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>>,
    jacobian: Matrix<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>>,
    v_guess: Matrix<f64>,
    threshold: f64,
    times: usize,
    limit: usize,
    mtrx_expected: Matrix<f64>,
    mut data: Vec<(f64, Vec<f64>)>
) -> Result<Vec<(f64, Vec<f64>)>, String> {
    let x_k_ = vec![
        vec![v_guess.to_vec().clone(); v_guess.to_vec().len()];
        v_guess.to_vec().len()
    ];
    let x_k = x_k_.concat();
    let jacobian_appliated = jacobian.apply(&x_k);
    let f_x_k = vec_f.apply(
        &vec![v_guess.to_vec().clone(); v_guess.to_vec().len()]
    );
    let v_next = Matrix::solve_eqn(&jacobian_appliated, &f_x_k);
    if limit == times + 1 {
        return Err(format!(
            "solution doesn't converge: last value is {:?}.",
            v_next.to_vec()
        ));
    }
    let dx: f64 = v_next.norm2();
    println!("dx : {}", dx);
    data.push((times as f64,
        (&(v_guess - v_next) - &mtrx_expected).to_vec()));
    if dx <= threshold {
        Ok(data)
    } else {
        println!("{}", "{:?}", times, (&(v_guess - v_next).to_vec()));
    }
}

```



```

        jacobian_newton_method(
            vec_f,
            jacobian,
            &v_guess - &v_next,
            threshold,
            times + 1,
            limit,
            vec_expected,
            data
        )
    }
}

#[cfg(test)]
mod tests_newton_raphson_method {
    use crate::newton_raphson_method::newton_method;
    use crate::newton_raphson_method::*;

    #[test]
    fn test_newton_raohson_jacobi_newton_raphson() {
        let f1: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> =
            Rc::new(|x1: Vec<f64>| -> f64 {
                x1[0] * x1[0] + x1[1] * x1[1] - 2.0
            });
        let f2: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> =
            Rc::new(|x2: Vec<f64>| -> f64 {
                x2[0] - x2[1] * x2[1]
            });
        let mut vec_f: Vec<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>> =
            Vec::new();
        vec_f.push(f1.clone());
        vec_f.push(f2.clone());

        assert_eq!(

```

```

        jacobian_newton_raphson_method(vec_f,
            vec![2.0 f64.sqrt(); 2],
            vec![0 f64, 0 f64]).unwrap().pop().unwrap().1,
        vec![1.0 f64, 1.0 f64]
    );
let f3: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> =
    Rc::new(|x1: Vec<f64>| -> f64 {
        x1[0] * x1[0] + x1[1] - 5.0
    });
let f4: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> =
    Rc::new(|x2: Vec<f64>| -> f64 {
        x2[0] - x2[1] * x2[1] - 1.0
    });

let mut vec_f: Vec<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>> = Vec::new();
vec_f.push(f3.clone());
vec_f.push(f4.clone());

assert_eq!(
    jacobian_newton_raphson_method(vec_f,
        vec![2.0 f64.sqrt(); 2],
        vec![0 f64, 0 f64]).unwrap().pop().unwrap().1,
    vec![2.0 f64, 1.0 f64]
);
}

#[test]
#[should_panic(
    expected = "‘jacobian_newton_raphson_method‘ needs
        vec_f and vec_init the same size."
)]
fn test_newton_raohson_jacobi_newton_raphson_panic() {
    let f1: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> =
        Rc::new(|x1: Vec<f64>| -> f64 {

```

```

        x1[0] * x1[0] + x1[1] * x1[1] - 2.0
    });
let f2: Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64> =
    Rc::new(|x2: Vec<f64>| -> f64 {
        x2[0] - x2[1] * x2[1]
    });
let mut vec_f: Vec<Rc<dyn Fn(Vec<f64>) -> f64>> = Vec::new();
vec_f.push(f1.clone());
vec_f.push(f2.clone());
let _ = jacobian_newton_raphson_method(vec_f, vec![2.0 f64.sqrt()]);
}
}

```

ソースコード 6 matrix_dash_dash.rs

```

impl<R, T> Matrix<Rc<dyn Fn(R) -> T>>
where
    R: Clone,
{
    pub fn applicate(&self, x: &Vec<R>) -> Matrix<T> {
        if !(self.n * self.m == x.len()) {
            panic!(format!(
                "Matrix<R>::applicate needs {} elements",
                self.n * self.m
            ));
        }
        let mut mapped_array = Vec::new();
        for i in 0..self.n * self.m {
            mapped_array.push(self.array[i](x[i].clone()))
        }
        Matrix {
            n: self.n,
            m: self.m,
            array: mapped_array,
        }
    }
}

```

```

    }
}

impl<F> Matrix<F>
where
    F: Float,
{
    pub fn solve_eqn(a: &Self, b: &Self) -> Self {
        if !(a.is_square() && a.n == b.n) {
            panic!(
                "Matrix::solve_eqn ' needs n * m matrix and n vector."
            );
        }
        let mut b_mut = b.clone();
        let lu = a.lu_decompose();
        for i in 0..a.n - 1 {
            for j in i + 1..a.n {
                b_mut[j] = b_mut[j].clone()
                    - lu.0[j * a.n + i].clone() * b_mut[i].clone()
            }
        }
        for i in (0..a.n).rev() {
            b_mut[i] = b_mut[i].clone() / lu.1[i * a.n + i].clone();
            for k in (0..i).rev() {
                b_mut[k] = b_mut[k].clone()
                    - lu.1[k * a.n + i].clone() * b_mut[i].clone();
            }
        }
        b_mut.m = lu.size;
        b_mut.n = b_mut.array.len();
        b_mut
    }
}

```

```

impl<T> Matrix<T>
where
    T: Zero
        + Clone
        + ToPrimitive
        + One
        + Sub<Output = T>
        + Mul<Output = T>
        + Add<Output = T>
        + Div<Output = T>,
{
    pub fn is_square(&self) -> bool {
        self.n == self.m
    }

    pub fn lu_decompose(&self) -> (Matrix<T>, Matrix<T>) {
        // use Crout method
        if !self.is_square() {
            panic!("‘Matrix::lu_decompose‘ needs square matrix");
        }
        let mut l = vec![vec![T::zero(); self.n]; self.n];
        let mut u = vec![vec![T::zero(); self.n]; self.n];
        for i in 0..self.n {
            l[i][i] = T::one();
        }
        let mut dec = self.array.clone();

        for j in 0..self.n - 1 {
            let w = T::one() / dec[j * self.n + j].clone();
            for i in j + 1..self.n {
                dec[i * self.n + j] = w.clone() * dec[i * self.n + j].clone();
                for k in j + 1..self.n {
                    dec[i * self.n + k] = dec[i * self.n + k].clone()
                        - dec[i * self.n + j].clone() * dec[j * self.n + k]

```

```

        .clone();
    }
}

for j in 0..self.n {
    for i in 0..j + 1 {
        u[i][j] = dec[i * self.n + j].clone();
    }
    for i in j + 1..self.n {
        l[i][j] = dec[i * self.n + j].clone()
    }
}
(Matrix::append_line(l), Matrix::append_line(u))
}
}

```

6 課題 1.3.1

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \quad (4)$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 \quad (5)$$

とする。以上で説明したプログラムを用いて、 $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$ 求解を初期近似解を $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ として求めた。

試行回数と真値との誤差をプロットしたものを図 6 に、近似解の各点をプロットしたものを図 7 に示す。近似解が $(1, 1)$ に収束してくのがわかる。得られた最終の近似解は $(x_1, x_2) = (1.0, 1.0)$ であり、これは上の連立方程式に代入すると成立するので有効な解であると考えた。なお図 6 を見ると、この方程式のこの解については急速に近似解に収束して行くのがわかった。

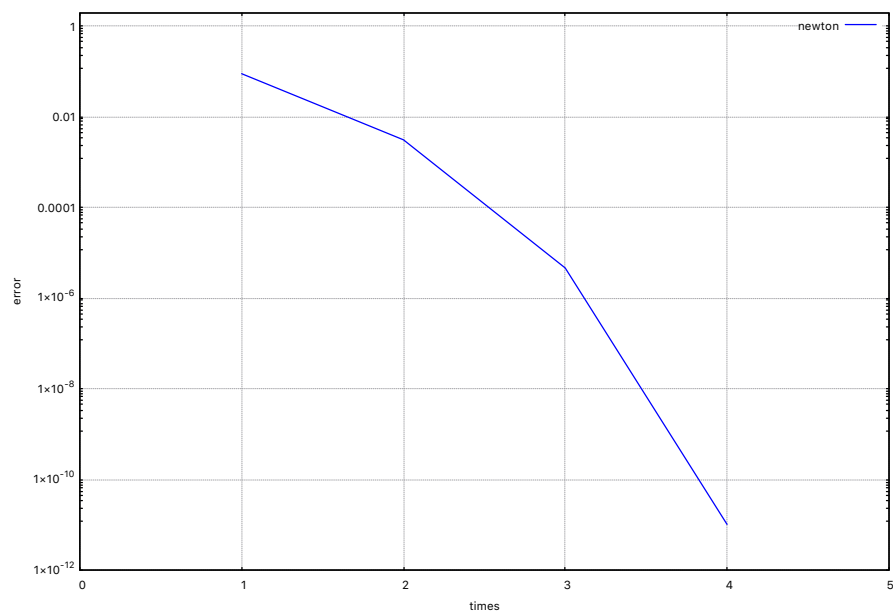


図 6 真値と多変数ニュートン法の近似値との誤差

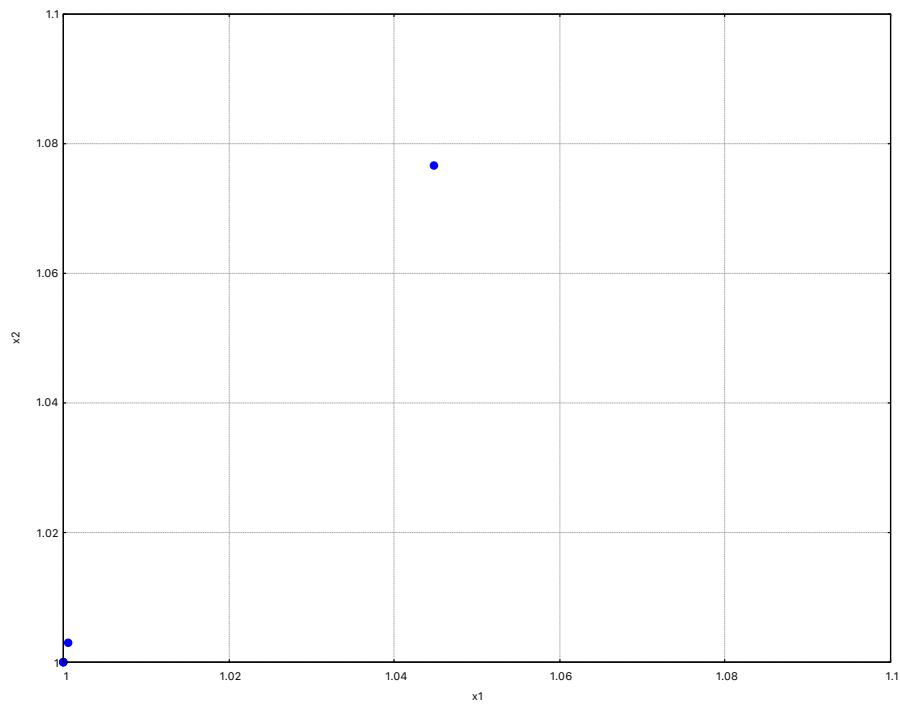


図 7 多変数ニュートン法の近似値

7 課題 1.3.2

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \quad (6)$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 - 1 \quad (7)$$

とし、上で説明したプログラムに二つの関数を与え求解する。試行回数と誤差をプロットしたものを図 8 に作成し、示す。また近似解の各点をプロットしたものを図 9 に示す。近似解が極めて高い精度で (2.0, 1.0) と求まるのがわかる。これは連立方程式に代入すると成立するので有効な解であると考えた。

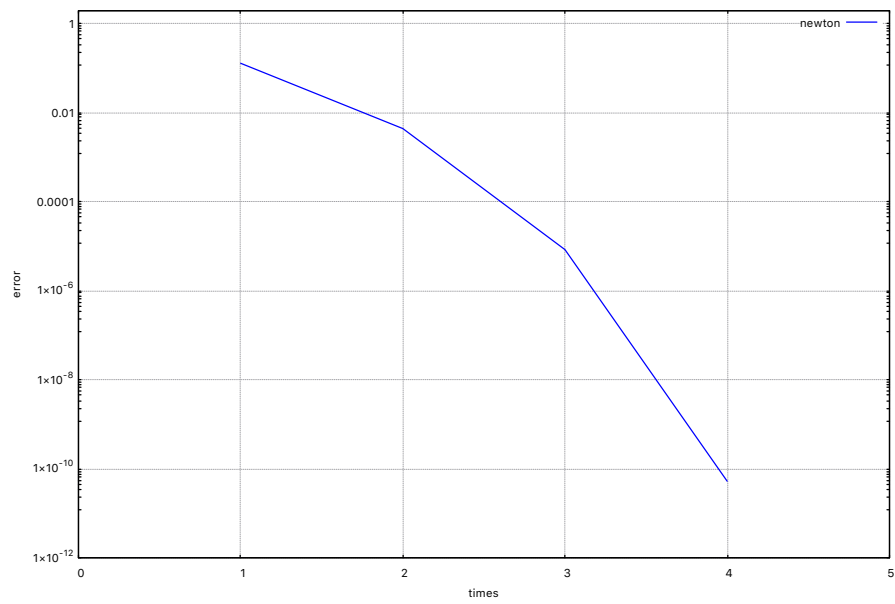


図 8 真値と多変数ニュートン法の近似値との誤差 2

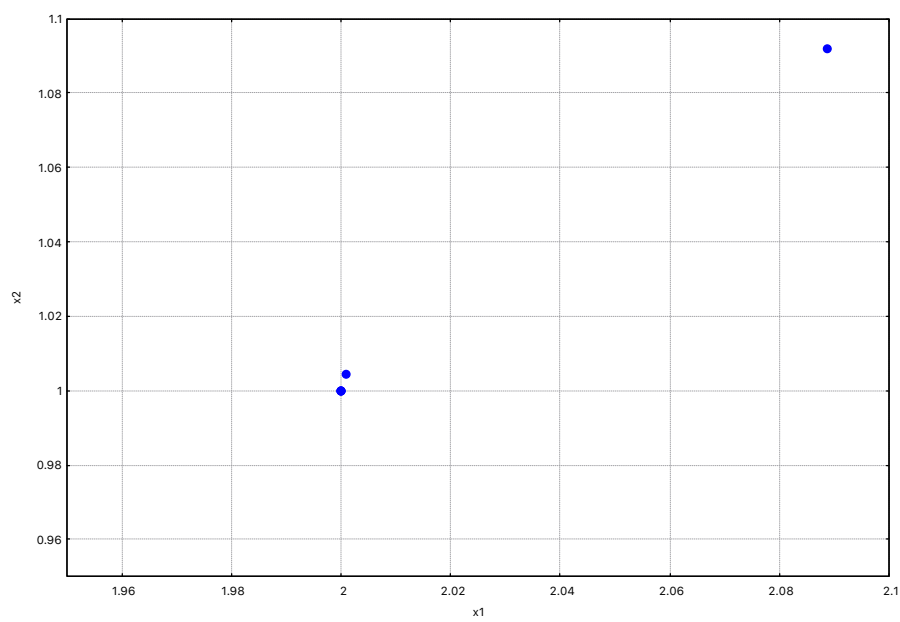


図 9 多変数ニュートン法の近似値 2

参考文献

- [1] 森正武. 『数値解析 (第 2 版)』. 共立出版, 2018.
- [2] 藤野和建伊理正夫. 『数値計算の常識』. 共立出版, 2011.