МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОТЧЁТ ПО ПРАКТИКУМУ НА ЭВМ

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ СТРЕЛЬБЫ»

Задача № 21

Работу выполнил:

Новов Денис Дмитриевич

Преподаватель:

Самохин Александр Сергеевич

Москва 2017

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается задача Лагранжа с фиксированным временным отрезом, без ограничений вида «меньше или равно»:

$$\int\limits_0^{\pi} \Big(\dot{x}^2 \cdot \exp(-\alpha x)\Big)\, dt \to extr,$$

$$\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin(t)\, dt = 1,\ \int\limits_0^{\pi} \frac{x \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2}\, dt = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0,\ \alpha = \{0.0;\ 0.1;\ 1.0;\ 5.0\}$$

Требуется:

1. формализовать задачу как задачу оптимального управления;
2. принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой;
3. численно решить полученную краевую задачу;
4. обосновать точность полученных результатов;

2 Формализация задачи

Задача оптимального управления без ограничений вида «меньше или равно» выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(t,\ x,\ u), \\ u \in \mathbb{U}, \\ B_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \\ B_0 \to inf. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $B_i = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t,\ x(\cdot),\ u(\cdot))\, dt + \psi_i(t_0,\ t_1,\ x(t_0),\ x(t_1))$.

Формализуем исходную задачу как задачу оптимального управления. Временной отрезок $[t_0,\ t_1]$ фиксирован и равен $[0,\ \pi]$. Введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ u = \dot{x}, \\ x_2 = \int\limits_0^t x \cdot \sin(t)\, dt, \\ x_3 = \int\limits_0^t \dfrac{x \cdot \cos(t)}{1+\alpha t^2}\, dt. \end{cases}$$

Тогда исходная система (1) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot \sin(t), \\ \dot{x}_3 = \dfrac{x_1 \cdot \cos(t)}{1+\alpha t^2}, \\ u \in \mathbb{R}, \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = 0, \\ x_2(\pi) - 1 = 0, \\ x_3(\pi) = 0, \\ \int\limits_0^\pi \Big(u^2 \cdot \exp(-\alpha x_1) \Big)\, dt \to inf. \end{cases} \tag{3}$$

В данном случае

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = u, \\ &\varphi_2 = x_1 \cdot \sin(t), \\ &\varphi_3 = \frac{x_1 \cdot \cos(t)}{1+\alpha t^2}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &f_0 = u^2 \cdot \exp(-\alpha x_1), && \psi_0 \equiv 0, \\ &f_1 \equiv 0, && \psi_1 = x_1(0), \\ &f_2 \equiv 0, && \psi_2 = x_2(0), \\ &f_3 \equiv 0, && \psi_3 = x_3(0), \\ &f_4 \equiv 0, && \psi_4 = x_2(\pi) - 1, \\ &f_5 \equiv 0, && \psi_5 = x_3(\pi). \end{aligned}$$

3 Принцип максимума

Выпишем функции Лагранжа $\mathcal{L}$ и Понтрягина H:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^{\pi} L\,dt + l,$$
$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i + < p,\ \dot{x} - \varphi >,\ l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i,$$
$$H =< p,\ \varphi > - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i.$$

В рассматриваемой задаче получим следующие выражения:

$$L = \lambda_0 u^2 \cdot \exp(-\alpha x_1) + p_1(\dot{x}_1 - u) + p_2(\dot{x}_2 - x_1 \cdot \sin(t)) + p_3 \left(\dot{x}_3 - \frac{x_1 \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2} \right),$$
$$l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_3(0) + \lambda_4 \big(x_2(\pi) - 1 \big) + \lambda_5 x_3(\pi),$$
$$H = p_1 u + p_2 x_1 \cdot \sin(t) + p_3 \frac{x_1 \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2} - \lambda_0 u^2 \cdot \exp(-\alpha x_1).$$

Применим к (3) принцип максимума Понтрягина. Запишем необходимые условия оптимальности:

а) Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система уравнений, условие стационарности по x):

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_2 \cdot \sin(t) - p_3 \dfrac{x_1 \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2} - \alpha \lambda_0 u^2 \cdot \exp(-\alpha x_1), \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \\ \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

б) Условие оптимальности по управлению:

$u = argabsmax H(u)$

$H(u) = -\lambda_0 \exp(-\alpha x_1) \cdot u^2 + p_1 u$ — парабола (если $\lambda_0 \neq 0$), ветви которой направлены вниз. Значит $argabsmax H(u)$ — точка максимума этой параболы.

$u = \dfrac{p_1}{2\lambda_0 \cdot \exp(-\alpha x_1)}$,

в) Условие трансверсальности по x:

$p_i(t_k) = (-1)^k \dfrac{\partial l}{\partial x_i(t_k)},\ i = 1;\ 2;\ 3,\ k = 0;\ 1,\ t_0 = 0,\ t_1 = \pi$:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= -\frac{\partial l}{\partial x_1(\pi)} = \lambda_1, \\ p_2(0) &= \frac{\partial l}{\partial x_2(0)} = \lambda_2, \\ p_3(0) &= \frac{\partial l}{\partial x_3(0)} = \lambda_3, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} p_1(\pi) &= \frac{\partial l}{\partial x_1(\pi)} = 0, \\ p_2(\pi) &= -\frac{\partial l}{\partial x_2(0)} = -\lambda_4, \\ p_3(\pi) &= -\frac{\partial l}{\partial x_3(0)} = -\lambda_5, \end{aligned} \tag{6}$$

г) Условие стационарности по t_k:

его нет, т.к. t_k — известные константы,

д) Условие дополняющей нежёсткости:

его нет, т.к. отсутствуют условия вида «меньше или равно»,

е) Условие неотрицательности:

$\lambda_0 \geqslant 0$;

ж) Условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точность до положительного множителя),

з) Множители Лагранжа не равны одновременно нулю (НЕРОН).

4 Анормальный случай

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$. Тогда (3) и (4) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot \sin(t), \\ \dot{x}_3 = \dfrac{x_1 \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2}, \\ \dot{p}_1 = -p_2 \cdot \sin(t) - p_3 \dfrac{x_1 \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2}, \\ \dot{p}_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда следует, что $p_2 = c_2 = const,\ p_3 = c_3 = const$. Значит

$$\dot{p}_1 = -c_2 \cdot \sin(t) - c_3 \frac{x_1 \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2}$$

Из условия оптимальности по управлению б) следует, что $p_1(t) \equiv 0$. В противном случае получим $u(t) = \pm\infty$ — такой управляемый процесс не является допустимым. Значит $c_2 = c_3 = 0$, следовательно:

$$\begin{aligned} p_1(t) &\equiv 0, \\ p_2(t) &\equiv 0, \\ p_3(t) &\equiv 0, \end{aligned}$$

Из условий трансверсальности в) (6) получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= p_1(0) = 0, \\ \lambda_2 &= p_2(0) = 0, \\ \lambda_3 &= p_3(0) = 0, \\ \lambda_4 &= -p_1(\pi) = 0, \\ \lambda_5 &= -p_2(\pi) = 0, \end{aligned}$$

Таким образом, получили $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, т.е. не выполнено условие НЕРОН. Значит анормальный случай невозможен.

Выяснили, что $\lambda_0 \neq 0$. Выберем следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Тогда условие б) запишется в виде:

$$u = p_1 \cdot \exp(\alpha x_1) \tag{9}$$

5 Краевая задача

Таким образом на основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления (3) сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 \cdot \exp(\alpha x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot \sin(t), \\ \dot{x}_3 = \dfrac{x_1 \cdot \cos(t)}{1 + \alpha t^2}, \\ \dot{p}_1 = -p_2 \cdot \sin(t) - p_3 \dfrac{\cos(t)}{1 + \alpha t^2} - \frac{\alpha}{2} p_1^2 \cdot \exp(\alpha x_1), \\ \dot{p}_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

$$
\begin{gathered}
x_1(0) = 0 \quad x_2(\pi) = 1 \\
x_2(0) = 0 \quad x_3(\pi) = 0 \\
x_3(0) = 0 \quad p_1(\pi) = 0 \\
\alpha = \{0.0;\ 0.1;\ 1.0;\ 5.0\}
\end{gathered}
\tag{11}
$$

6 Выбор вычислительной схемы

Краевая задача (10)-(11) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки возьмём недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$: $\beta_1 = p_1(0),\ \beta_2 = p_2(0),\ \beta_3 = p_3(0)$. Задав эти значения некоторым образом и решив задачу Коши на отрезке $[0,\ \pi]$, получим функции $x_1(\cdot)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3],\ x_2(\cdot)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3],\ x_3(\cdot)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3],\ p_1(\cdot)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3],\ p_2(\cdot)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3],\ p_3(\cdot)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3]$ (в том числе и их значения в $t = \pi$).

Задача Коши для системы ОДУ 1-ого порядка решается численно явным методом Рунге-Кутты 6-ого порядка:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = h \cdot f\Big(t_i, x_i\Big) \\
&k_2 = h \cdot f\Big(t_i + \frac{1}{2}h,\ x_i + \frac{1}{2}k_1\Big) \\
&k_3 = h \cdot f\Big(t_i + \frac{1}{2}h,\ x_i + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\Big) \\
&k_4 = h \cdot f\Big(t_i + h,\ x_i - k_2 + 2k_3\Big) \\
&k_5 = h \cdot f\Big(t_i + \frac{2}{3}h,\ x_i + \frac{1}{27}(7k_1 + 10k_2 + k_4)\Big) \\
&k_6 = h \cdot f\Big(t_i + \frac{1}{5}h,\ x_i + \frac{1}{625}(28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)\Big) \\
&x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}\Big(k_1 + 4k_3 + k_4\Big)
\end{aligned}
$$

с главным членом погрешности

$$
r = -\frac{1}{336}\Big(42k_1 + 224k_3 + 21k_4 - 162k_5 - 125k_6\Big)
$$

Будем использовать метод с переменным шагом. Длину шага определим из следующих соображений:

1. Зададим допустимую погрешность ε и $\varepsilon_0 = \varepsilon \cdot 10^{-3}$;
2. Имея значение $x(t)$, вычислим $x(t+h)$ и посчитаем ошибку $err = \dfrac{|r|}{2^6}$
3. (a) Если $err < \varepsilon$, то шаг длины h считается принятым. $x_{i+1} = x_i + \Delta x + r$.

i. Если $err > \varepsilon_0$, то шаг оставляем прежним.

ii. В противном случае $h = 2h$.

(b) В противном случае шаг отбрасывается и считается снова с шагом $h = \frac{1}{2}h$.

Для решения краевой задачи (10)-(11) необходимо подобрать значения $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ таким образом, чтобы удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} x_2(\pi)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3] &= 1, \\ x_3(\pi)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3] &= 0, \\ p_1(\pi)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3] &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Вектор-функция невязок будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{X}(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} x_2(\pi)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3] - 1 \\ x_3(\pi)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3] \\ p_1(\pi)[\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3] \end{pmatrix}$$

В результате решение краевой задачи свелось к решению системы из 3-х алгебраических уравнений от 3-х неизвестных.

Корень $\vec{\beta}$ системы алгебраических уравнений $\vec{X}(\vec{\beta}) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина: (верхний индекс у $\vec{\beta}$ — номер шага)

$$0 = \vec{X}(\vec{\beta}^{n+1}) = \vec{X}(\vec{\beta}^n) + X'(\vec{\beta}^n)(\vec{\beta}^{n+1} - \vec{\beta}^n), \Rightarrow$$

$$X'(\vec{\beta}^n)(\vec{\beta}^{n+1} - \vec{\beta}^n) = -\vec{X}(\vec{\beta}^n)$$

Здесь $X'(\vec{\beta}^n) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_j^n}\right)$. Получили СЛАУ относительно вектора $\vec{h} \doteqdot \vec{\beta}^{n+1} - \vec{\beta}^n$. Найдя методом Гаусса $\vec{h}$, положим $\vec{\beta}^{n+1} = \vec{\beta}^n + \vec{h}$.

Пусть

$$||\vec{X}(\vec{\beta})||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2(\vec{\beta})}{\varkappa_i}},\ \varkappa_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} {x'_{ij}}^2(\vec{\beta})}$$

— норма Федоренко. Если $||\vec{X}(\vec{\beta}^{n+1})||_F < ||\vec{X}(\vec{\beta}^n)||_F$, то шаг принимаем и считаем дальше. В противном случае полагаем $\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{h}$ и $\vec{\beta}^{n+1} = \vec{\beta}^n + \vec{h}$. Такую процедуру делаем до тех пор, пока не выполнится условие уменьшения нормы Федоренко.

При достаточно хорошем начальном приближении $\beta_1^0,\ \beta_2^0,\ \beta_3^0$ этим методом мы сможем найти искомый корень уравнения невязок.

7 Тест на гармоническом осцилляторе

Часть программы, которая относится к методу Рунге-Кутты, проверим на задаче о гармоническом осцилляторе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_1, & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Аналитическое решение этой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = \sin(t) \\ x_2(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Значения, полученные численно, совпадают с аналитическим решением. Отсюда делаем вывод, что программа работает достаточно корректно.

8 Численное решение для всех случаев

Ниже представлены результаты вычислений программы со значением максимально допустимой относительной погрешности на шаге решения задачи Коши, равным $\Delta_{loc} = 10^{-13}$. В качестве начального параметра пристрелки был взят нулевой вектор.

При $\alpha = 0.0$:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0.92339945288, \\ \beta_2 = 0.46169974568, \\ \beta_3 = 0.58785433645, \\ B_0 = 0.46169974568, \end{cases}$$

Причем число шагов в методе Ньютона равняется 5, а модуль вектор-функции невязок на последнем шаге равняется $3.4 \cdot 10^{-14}$.

При $\alpha = 0.1$:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0.77033706153, \\ \beta_2 = 0.29225132160, \\ \beta_3 = 0.48509813624, \\ B_0 = 0.29569945272, \end{cases}$$

Причем число шагов в методе Ньютона равняется 6, а модуль вектор-функции невязок на последнем шаге равняется $7.3 \cdot 10^{-14}$.

При $\alpha = 0.5$:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0.37133627904, \\ \beta_2 = 0.17260315717, \\ \beta_3 = -0.03377357702, \\ B_0 = 0.18545275286, \end{cases}$$

Причем число шагов в методе Ньютона равняется 7, а модуль вектор-функции невязок на последнем шаге равняется $0.4 \cdot 10^{-14}$.

При $\alpha = 1.0$:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0.19068992925, \\ \beta_2 = 0.14508719092, \\ \beta_3 = -0.30475425989, \\ B_0 = 0.17336079704, \end{cases}$$

Причем число шагов в методе Ньютона равняется 8, а модуль вектор-функции невязок на последнем шаге равняется $7.4 \cdot 10^{-14}$.

9 Графики

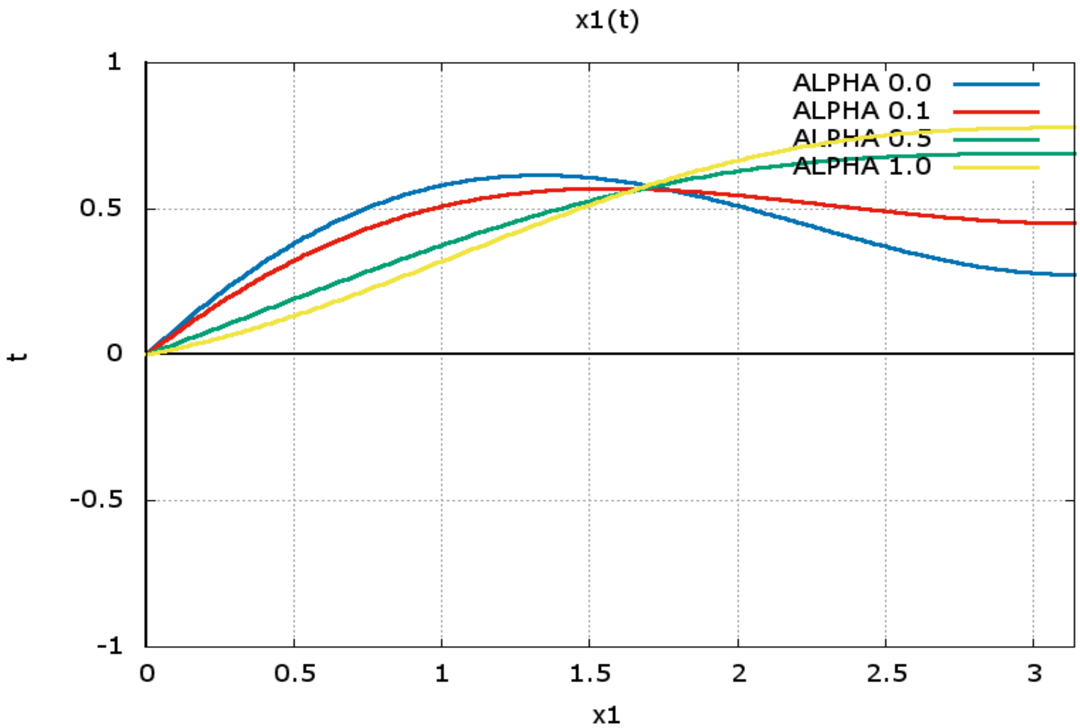

Рис. 1: Зависимость $x_1(t)$ от параметра α

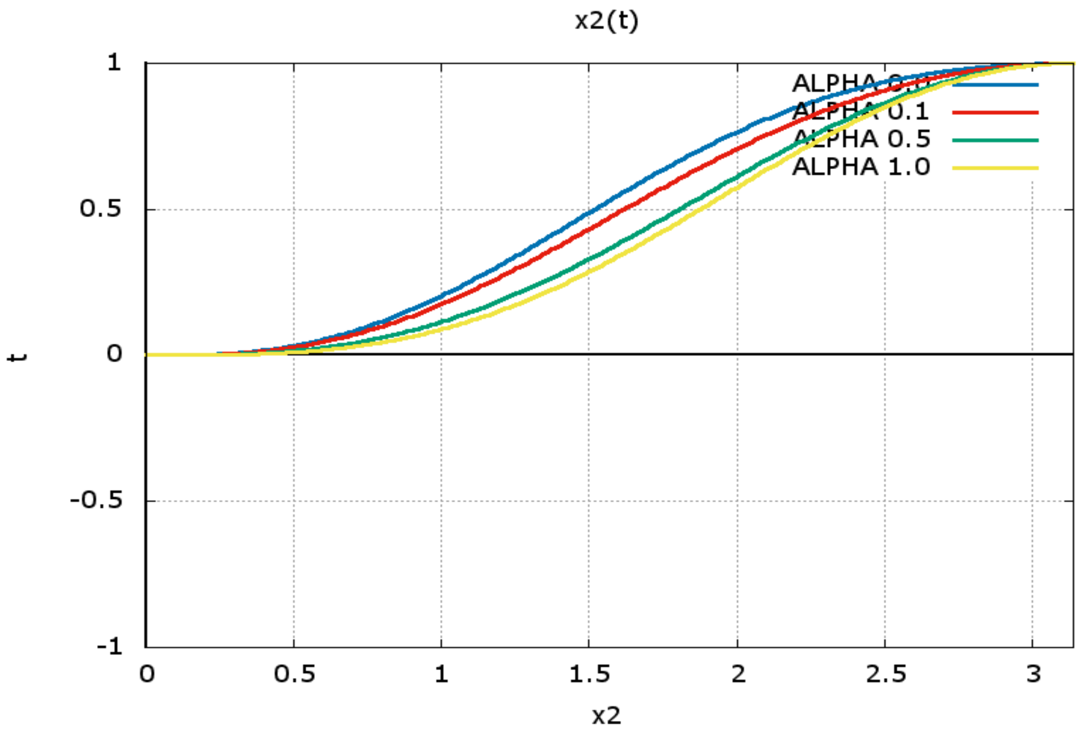

Рис. 2: Зависимость $x_2(t)$ от параметра α

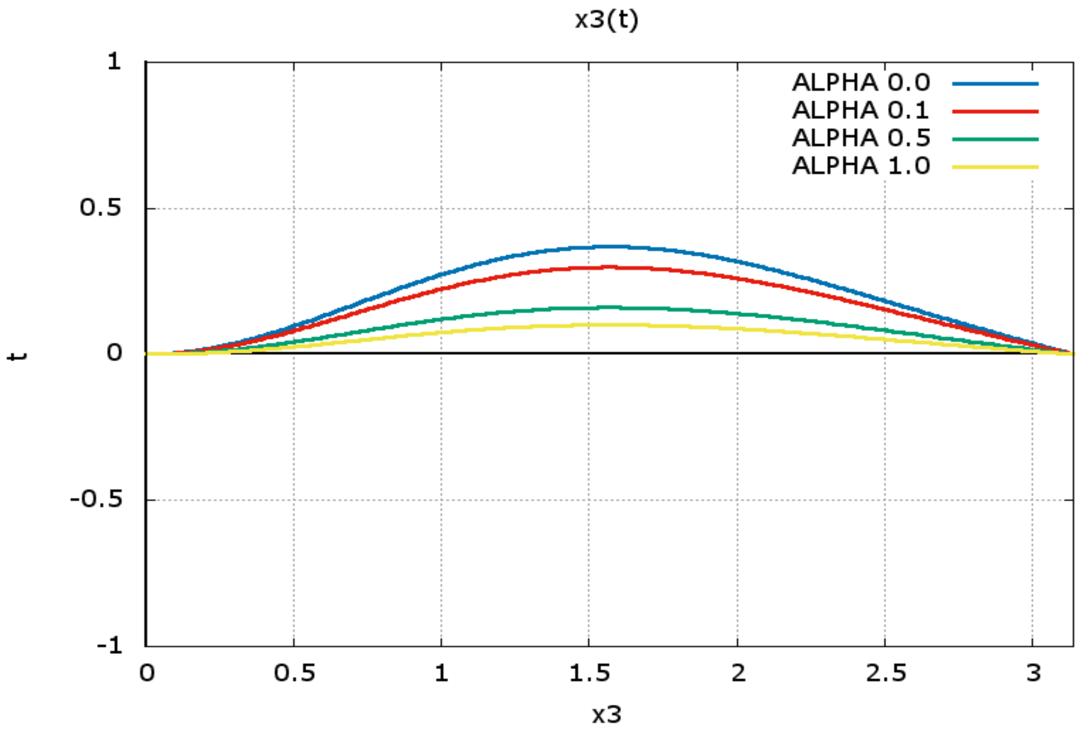

Рис. 3: Зависимость $x_3(t)$ от параметра α

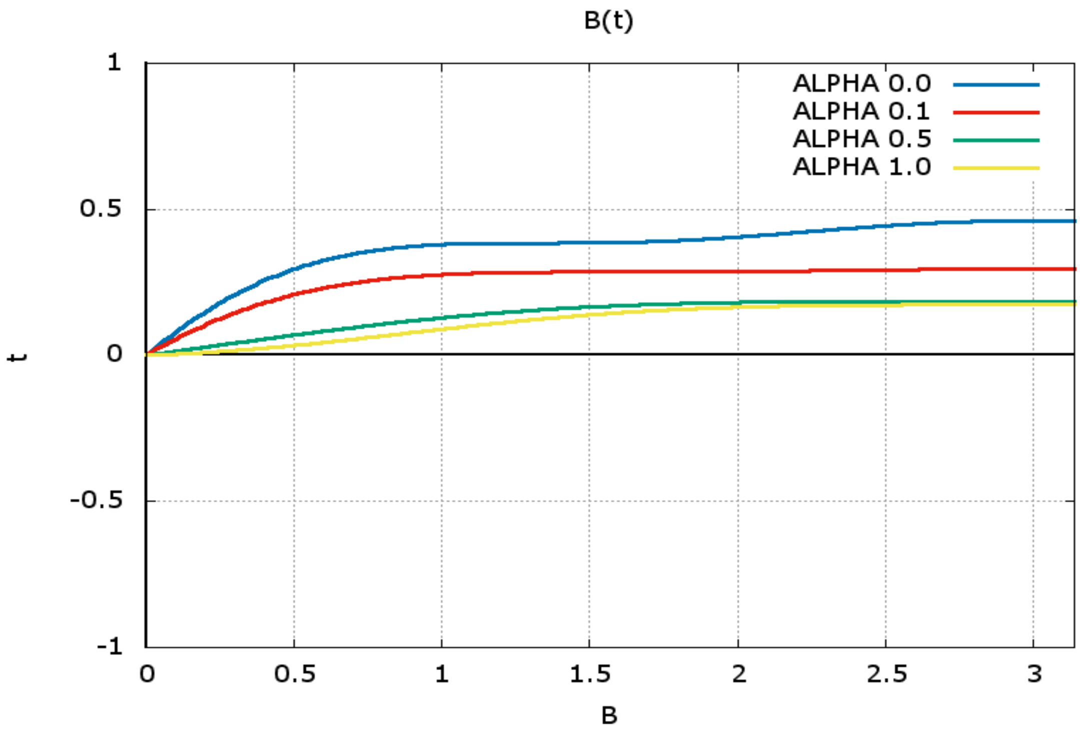

Рис. 4: Зависимость $B_0(t)$ от параметра α

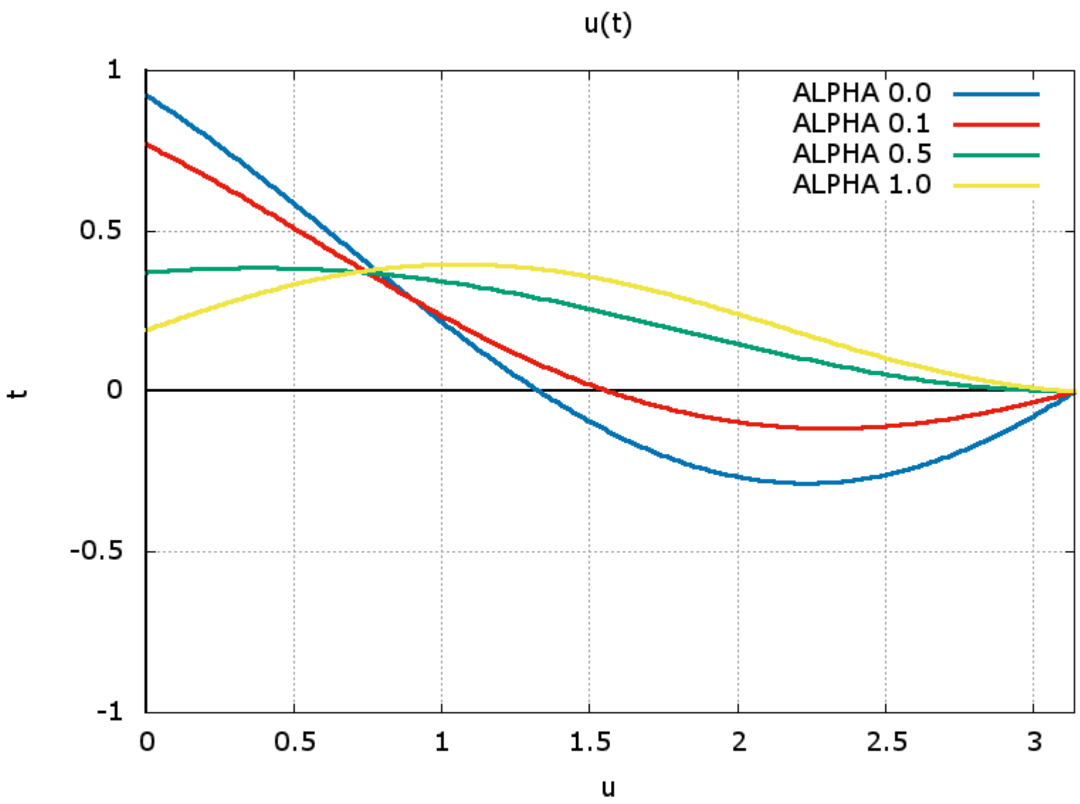

Рис. 5: Зависимость управления от параметра α

10 Аналитическое решение

Рассмотрим задачу при $\alpha = 0.0$. Краевая задача (10)-(11) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot \sin(t), \\ \dot{x}_3 = x_1 \cdot \cos(t), \\ \dot{p}_1 = -p_2 \cdot \sin(t) - p_3 \cdot \cos(t), \\ \dot{p}_2 = 0, \\ \dot{p}_3 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0 \quad x_2(\pi) = 1 \\ x_2(0) = 0 \quad x_3(\pi) = 0 \\ x_3(0) = 0 \quad p_1(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Несложно проверить, что аналитическое решение выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2(\pi t + \pi\sin(t) + 4\cos(t) + 4)}{3\pi^2 - 16}, \\ x_2 = \dfrac{-2\pi t - 4\pi\sin(2t) + 8\cos^2(t) + 4(\pi t - 4)\cos(t) + 8}{6\pi^2 - 32}, \\ x_3 = \dfrac{4t + 2(\pi t - 4)\sin(t) + 2\sin(2t) - \pi\cos^2(t) + 2\pi\cos(t) - \pi}{6\pi^2 - 32}, \\ p_1 = \dfrac{2(\pi - 4\sin(t) + \pi\cos(t))}{3\pi^2 - 16}, \\ p_2 \equiv \dfrac{2\pi}{3\pi^2 - 16}. \\ p_3 \equiv \dfrac{8}{3\pi^2 - 16}, \end{cases} \tag{15}$$

Отсюда корень уравнения невязок:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{4\pi}{3\pi^2 - 16} = 0.92339944906, \\ \beta_2 &= \frac{2\pi}{3\pi^2 - 16} = 0.46169972453, \\ \beta_3 &= \frac{8}{3\pi^2 - 16} = 0.58785434706. \end{aligned} \tag{16}$$

Значение функционала B_0 в этом случае тоже считается явно:

$$\int_0^\pi \Big(\frac{(2(\pi - 4\sin(t) + \pi\cos(t)))^2}{(3\pi^2 - 16)^2} \Big)\, dt = 0.46169972453$$

11 Сравнение аналитического и численного решений

Сравним результаты, полученные с помощью программы, с теоретическим решением при $\alpha = 0.0$:

$$\begin{cases} |\Delta_{\beta_1}| = 3.82 \cdot 10^{-9}, \\ |\Delta_{\beta_2}| = 2.12 \cdot 10^{-8}, \\ |\Delta_{\beta_3}| = 1.06 \cdot 10^{-8}, \\ |\Delta_{B_0}| = 2.16 \cdot 10^{-8}, \end{cases}$$

12 Сравнение логарифмической нормы и максимального сингулярного числа

Обозначим через $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$ якобиан системы, $\mu(J)$ — максимальное собственное значение матрицы $\frac{J+J^T}{2}$, $||J||$ — максимальное сингулярное число.

$$J = \begin{pmatrix} \alpha x_4 \cdot \exp \alpha x_1 & 0 & 0 & \exp \alpha x_1 \\ \sin t & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos t}{1+\alpha^2 t} & 0 & 0 & 0 \\ -0.5\alpha^2 {x_4}^2 \cdot \exp \alpha x_1 & 0 & 0 & -\alpha x_4 \cdot \exp \alpha x_1 \end{pmatrix}$$

Обозначим $j_1 = \exp \alpha x_1,\ j_2 = \sin t,\ j_3 = \frac{\cos t}{1+\alpha^2 t},\ j_4 = \alpha x_4$. Получим

$$J = \begin{pmatrix} j_1 j_4 & 0 & 0 & j_1 \\ j_2 & 0 & 0 & 0 \\ j_3 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5{j_4}^2 j_1 & 0 & 0 & -j_1 j_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{J+J^T}{2} - xE = \begin{pmatrix} j_1 j_4 - x & 0.5j_2 & 0.5j_3 & 0.5j_1(1-0.5{j_4}^2) \\ 0.5j_2 & -x & 0 & 0 \\ 0.5j_3 & 0 & -x & 0 \\ 0.5j_1(1-0.5{j_4}^2) & 0 & 0 & -j_1 j_4 - x \end{pmatrix}$$

$$JJ^T - xE = \begin{pmatrix} {j_1}^2(1+{j_4}^2) - x & j_1 j_2 j_4 & j_1 j_3 j_4 & -{j_1}^2 j_4(1+0.5{j_4}^2) \\ j_1 j_2 j_4 & {j_2}^2 - x & j_2 j_3 & -0.5 j_1 j_2 {j_4}^2 \\ j_1 j_3 j_4 & j_2 j_3 & {j_3}^2 - x & -0.5 j_1 j_3 {j_4}^2 \\ -{j_1}^2 j_4(1+0.5{j_4}^2 & -0.5 j_1 j_2 {j_4}^2 & -0.5 j_1 j_3 {j_4}^2 & {j_1}^2 {j_4}^2(1+0.25{j_4}^2) - x \end{pmatrix}$$

Заметим, что обе матрицы симметричны. Это значит, что собственные значения матриц вещественны. Рассмотрим симметричную матрицу

$$A = A' - xE = \begin{pmatrix} a-x & b & c & d \\ b & e-x & f & g \\ c & f & h-x & k \\ d & g & k & l-x \end{pmatrix}$$

Сначала пусть все элементы матрицы ненулевые.

Найдем собственные значения этой матрицы. Для этого представим матрицу A в виде произведения побочно-единичной матрицы P, нижнетреугольной матрицы L и верхнетругольной матрицы U: $A = P \cdot L \cdot U$, где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & u_2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & u_3 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{pmatrix}$$

Здесь $\bullet$ - ненулевые (вообще говоря) неинтересующие нас элементы матрицы,

$$u_1 = d,$$

$$u_2 = f - \frac{cg}{d},$$

$$u_3 = f - \frac{bk}{d} - \frac{(e - \frac{bg}{d} - x)(h - \frac{ck}{d} - x)}{f - \frac{cg}{d}},$$

$$u_4 = d - $$
$$-\frac{(c-\frac{k(a-x)}{d}-\frac{(b-\frac{g(a-x)}{d})(h-\frac{ck}{d}-x)}{f-\frac{cg}{d}})(g-\frac{b(l-x)}{d}-\frac{(k-\frac{c(l-x)}{d})(e-\frac{bg}{d}-x)}{f-\frac{cg}{d}})}{f-\frac{bk}{d}-\frac{(e-\frac{bg}{d}-x)(h-\frac{ck}{d}-x)}{f-\frac{cg}{d}}} -$$
$$-\frac{(b-\frac{g(a-x)}{d})(k-\frac{c(l-x)}{d})}{f-\frac{cg}{d}}-\frac{(a-x)(l-x)}{d},$$

В силу свойств определителя матрицы $det(A) = det(P)\cdot det(L)\cdot det(U) = 1\cdot 1\cdot u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdot u_4$. Получается, нас интересует уравнение

$$u_3 \cdot u_4 = 0 \tag{17}$$

Положим

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\frac{cg}{d}-f}, \\ a_1 = \dfrac{h+e-\frac{ck+bg}{d}}{f-\frac{cg}{d}}, \\ a_2 = f-\dfrac{bk}{d}+\dfrac{(e-\frac{bg}{d})(h-\frac{ck}{d})}{\frac{cg}{d}-f}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = d\cdot a_0, \\ b_1 = d\cdot a_1, \\ b_2 = d\cdot a_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{g}{d}\dfrac{1}{\frac{cg}{d}-f}, \\ c_1 = \dfrac{b-\frac{ga}{d}-\frac{g}{d}(h-\frac{ck}{d})}{f-\frac{cg}{d}}, \\ c_2 = c-\dfrac{ka}{d}+\dfrac{(b-\frac{ga}{d})(h-\frac{ck}{d})}{\frac{cg}{d}-f}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 = \dfrac{c}{d}\dfrac{1}{\frac{cg}{d}-f}, \\ d_1 = \dfrac{k-\frac{cl}{d}-\frac{c}{d}(e-\frac{bg}{d})}{f-\frac{cg}{d}}, \\ d_2 = g-\dfrac{bl}{d}+\dfrac{(k-\frac{cl}{d})(e-\frac{bg}{d})}{\frac{cg}{d}-f}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_0 = \dfrac{cg}{d^2}\dfrac{1}{\frac{cg}{d}-f}, \\ e_1 = \dfrac{\frac{g}{d}(k-\frac{cl}{d})-\frac{c}{d}(b-\frac{ag}{d})}{f-\frac{cg}{d}}, \\ e_2 = \dfrac{(b-\frac{ag}{d})(k-\frac{cl}{d})}{\frac{cg}{d}-f}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0 = -\dfrac{1}{d}, \\ f_1 = -\dfrac{a+l}{d}, \\ f_2 = \dfrac{al}{d}, \end{cases}$$

Тогда уравнение (17) сводится к виду

$$x^4 + ux^3 + vx^2 + wx + q = 0 \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{cases} u = \dfrac{c_1 d_0 + c_0 d_1 + a_0(e_1 + f_1) + a_1(e_0 + f_0)}{c_0 d_0 + a_0(e_0 + f_0)}, \\ v = \dfrac{c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0 + a_0(e_2 + f_2) + a_1(e_1 + f_1) + a_2(e_0 + f_0) - b_0}{c_0 d_0 + a_0(e_0 + f_0)}, \\ w = \dfrac{c_1 d_2 + c_2 d_1 + a_2(e_1 + f_1) + a_1(e_2 + f_2) - b_1}{c_0 d_0 + a_0(e_0 + f_0)}, \\ q = \dfrac{c_1 d_2 + a_2(e_2 + f_2) - b_2}{c_0 d_0 + a_0(e_0 + f_0)}, \end{cases}$$

В силу ограниченности латинского алфавита используем еще греческий алфавит и обозначим

$$\begin{cases} \xi = 27qu^2 - 71qv - 9uvw + 2v^3 + 27w^2, \\ \eta = 12q - 3uw + v^2, \\ \zeta = \dfrac{u^2}{4} - \dfrac{2v}{3}, \\ \theta = -u^3 + 4uv - 8w, \\ \varphi = \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{4v}{3}, \\ \psi = -\dfrac{u}{4}, \\ \Phi = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{\xi^2 - 4\eta^3} + \xi}}{3\sqrt[3]{2}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{\sqrt{\xi^2 - 4\eta^3} + \xi}}, \end{cases}$$

Наконец, корни уравнения (18):

$$\begin{cases} x_{1,2} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\Phi + \zeta} \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{-\Phi - \dfrac{\theta}{4\sqrt{\Phi + \zeta}} + \varphi} + \psi, \\ x_{3,4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\Phi + \zeta} \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{-\Phi + \dfrac{\theta}{4\sqrt{\Phi + \zeta}} + \varphi} + \psi, \end{cases}$$

Пусть $x_{max} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|\}$. Тогда $||A'|| = \sqrt{x_{max}}$.

Пусть теперь

$$A = A'' - xE = \begin{pmatrix} a-x & b & c & d \\ b & -x & 0 & 0 \\ c & 0 & -x & 0 \\ d & 0 & 0 & e-x \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения этой матрицы. Для этого представим матрицу A в виде произведения матрицы P, нижнетреугольной матрицы L и верхнетругольной матрицы U: $A = P \cdot L \cdot U$, где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & u_2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & u_3 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{pmatrix}$$

Здесь $\bullet$ - ненулевые (вообще говоря) неинтересующие нас элементы матрицы,

$$u_1 = c,$$

$$u_2 = -x,$$

$$u_3 = \frac{d}{c}x,$$

$$u_4 = d - \frac{c(e-x)(\frac{b^2}{c} + c + \frac{(a-x)x}{c})}{dx},$$

В силу свойств определителя матрицы $det(A) = det(P) \cdot det(L) \cdot det(U) = 1 \cdot 1 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4$. Получается, нас интересует уравнение

$$u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 = 0 \tag{19}$$

Положим
$$\begin{cases} u = -a - e, \\ v = -b^2 - e^2 - d^2 - ae, \\ w = (b^2 + c^2)e, \end{cases}$$
Тогда уравнение (19) сводится к виду
$$x(x^3 + ux^2 + vx + w) = 0 \tag{20}$$
Корни уравнения (20) (помимо $x = 0$) определяются по формулам Кардано. Пусть $x_{max} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|\}$. Тогда $\mu(A'') = x_{max}$.

13 Оценка погрешности

В данной задаче собственные значения матриц не являются постоянными и различаются на каждом шаге. Условие $\mu < ||J||$ не выполняется на всём промежутке, поэтому мы не можем оценить погрешность таким образом:
$$\delta_{k+1} = err_{k+1} + \delta_k \cdot exp(L_k) \approx err_{k+1} + \delta_k \cdot exp((t_{k+1} - t_k)l(t_k))$$
где δ_{k+1} - глобальная погрешность на k-ом шаге,
$l = \mu(J)$ - максимальное собственное значение матрицы $\frac{J+J^T}{2}$,
$L_k(t) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} l(s)\,ds$, err_k - локальная погрешность на k-ом шаге.

14 Правило Рунге

Оценим числа Рунге $R = \dfrac{x_{10^{-9}} - x_{10^{-11}}}{x_{10^{-11}} - x_{10^{-13}}}$ для $t_1 = \frac{\pi}{4},\ t_2 = \frac{\pi}{2},\ t_3 = \frac{3\pi}{4},\ t_4 = \pi$.

Для $\alpha = 0.0$:

$t_1:\ R_{x_1} = -16.21,\quad R_{x_2} = -15.04,\quad R_{x_3} = -14.37,$

$t_2:\ R_{x_1} = 4.56,\quad R_{x_2} = 5.87,\quad R_{x_3} = -4.65,$

$t_3:\ R_{x_1} = 0.45,\quad R_{x_2} = -2.98,\quad R_{x_3} = -1.33,$

$t_4:\ R_{x_1} = 46.27,\quad R_{x_2} = 44.35,\quad R_{x_3} = 37.81,$

$$
\begin{aligned}
&t_1: \ R_{p_1} = -19.21, && R_{B_0} = -13.53, && R_u = -18.83,\\
&t_2: \ R_{p_1} = 6.86, && R_{B_0} = 5.18, && R_u = 3.08,\\
&t_3: \ R_{p_1} = 2.39, && R_{B_0} = -2.39, && R_u = -2.65,\\
&t_4: \ R_{p_1} = 40.17, && R_{B_0} = 64.95, && R_u = 52.34.
\end{aligned}
$$

Для $\alpha = 0.1$:

$$
\begin{aligned}
&t_1: \ R_{x_1} = -14.43, && R_{x_2} = -17.91, && R_{x_3} = -15.37,\\
&t_2: \ R_{x_1} = 5.47, && R_{x_2} = 6.23, && R_{x_3} = -6.64,\\
&t_3: \ R_{x_1} = -1.65, && R_{x_2} = -3.07, && R_{x_3} = -2.83,\\
&t_4: \ R_{x_1} = 37.24, && R_{x_2} = 42.61, && R_{x_3} = 60.21,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&t_1: \ R_{p_1} = -20.51, && R_{B_0} = -14.33, && R_u = -17.13,\\
&t_2: \ R_{p_1} = 5.82, && R_{B_0} = 4.65, && R_u = 6.84,\\
&t_3: \ R_{p_1} = 3.33, && R_{B_0} = -3.63, && R_u = -1.20,\\
&t_4: \ R_{p_1} = 39.21, && R_{B_0} = 40.35, && R_u = 48.37.
\end{aligned}
$$

Для $\alpha = 0.5$:

$$
\begin{aligned}
&t_1: \ R_{x_1} = -14.65, && R_{x_2} = -12.19, && R_{x_3} = -18.31,\\
&t_2: \ R_{x_1} = 5.82, && R_{x_2} = 4.93, && R_{x_3} = -4.65,\\
&t_3: \ R_{x_1} = 1.01, && R_{x_2} = -3.18, && R_{x_3} = -3.58,\\
&t_4: \ R_{x_1} = 39.67, && R_{x_2} = 34.75, && R_{x_3} = 36.73,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&t_1: \ R_{p_1} = -16.27, && R_{B_0} = -19.43, && R_u = -17.03,\\
&t_2: \ R_{p_1} = 6.56, && R_{B_0} = 4.14, && R_u = 3.55,\\
&t_3: \ R_{p_1} = 1.79, && R_{B_0} = -6.76, && R_u = -1.75,\\
&t_4: \ R_{p_1} = 43.04, && R_{B_0} = 53.25, && R_u = 51.04.
\end{aligned}
$$

Для $\alpha = 1.0$:

$$
\begin{aligned}
&t_1: \ R_{x_1} = -14.91, && R_{x_2} = -13.34, && R_{x_3} = -17.77,\\
&t_2: \ R_{x_1} = 7.36, && R_{x_2} = 2.57, && R_{x_3} = -4.63,\\
&t_3: \ R_{x_1} = 3.85, && R_{x_2} = -6.18, && R_{x_3} = -2.41,\\
&t_4: \ R_{x_1} = 48.17, && R_{x_2} = 50.38, && R_{x_3} = 39.36,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
t_1: & R_{p_1} = -14.65, & R_{B_0} = -17.13, & R_u = -20.51, \\
t_2: & R_{p_1} = 6.56, & R_{B_0} = 4.93, & R_u = 5.82, \\
t_3: & R_{p_1} = -3.58, & R_{B_0} = -1.75, & R_u = -2.65, \\
t_4: & R_{p_1} = 53.25, & R_{B_0} = 34.75, & R_u = 48.37.
\end{array}
$$

15 Просчёт назад

Ниже приведены результаты «просчёта назад». Для найденных параметров пристрелки считаем задачу Коши методом Рунге-Кутты на отрезке $[0, \pi]$ и получаем значения функций в точке π. Затем полученные значения задаем в качестве начальных условий в точке π для тех же дифференциальных уравнений и решаем задачу Коши на отрезке $[\pi, 0]$. Далее сравниваем разницу между изначальными начальными данными в точке 0 и значениями функций в точке 0, полученных методом Рунге-Кутты:
Для $\alpha = 0.0$:

$$
\begin{array}{llll}
|\Delta_{loc}| = 10^{-9}: & |\Delta_{x_1}| = 0.0453791, & |\Delta_{x_2}| = 0.0000354, & |\Delta_{x_3}| = 0.0010925, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-11}: & |\Delta_{x_1}| = 0.0077843, & |\Delta_{x_2}| = 0.0000004, & |\Delta_{x_3}| = 0.0000334, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-13}: & |\Delta_{x_1}| = 0.0077841, & |\Delta_{x_2}| = 0.0000002, & |\Delta_{x_3}| = 0.0000331,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
|\Delta_{loc}| = 10^{-9}: & |\Delta_{p_1}| = 0.0279056, & |\Delta_{p_2}| = 0.0000000, & |\Delta_{p_3}| = 0.0000000, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-11}: & |\Delta_{p_1}| = 0.0049267, & |\Delta_{p_2}| = 0.0000000, & |\Delta_{p_3}| = 0.0000000, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-13}: & |\Delta_{p_1}| = 0.0049263, & |\Delta_{p_2}| = 0.0000000, & |\Delta_{p_3}| = 0.0000000,
\end{array}
$$

Для $\alpha = 0.1$:

$$
\begin{array}{llll}
|\Delta_{loc}| = 10^{-9}: & |\Delta_{x_1}| = 0.0378172, & |\Delta_{x_2}| = 0.0000293, & |\Delta_{x_3}| = 0.0009101, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-11}: & |\Delta_{x_1}| = 0.0064935, & |\Delta_{x_2}| = 0.0000008, & |\Delta_{x_3}| = 0.0000273, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-13}: & |\Delta_{x_1}| = 0.0064912, & |\Delta_{x_2}| = 0.0000000, & |\Delta_{x_3}| = 0.0000270,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
|\Delta_{loc}| = 10^{-9}: & |\Delta_{p_1}| = 0.0246093, & |\Delta_{p_2}| = 0.0000000, & |\Delta_{p_3}| = 0.0000000, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-11}: & |\Delta_{p_1}| = 0.0043197, & |\Delta_{p_2}| = 0.0000000, & |\Delta_{p_3}| = 0.0000000, \\
|\Delta_{loc}| = 10^{-13}: & |\Delta_{p_1}| = 0.0043191, & |\Delta_{p_2}| = 0.0000000, & |\Delta_{p_3}| = 0.0000000,
\end{array}
$$

Для $\alpha = 0.5$:

$|\Delta_{loc}| = 10^{-9}:$ $|\Delta_{x_1}| = 0.0178933,$ $|\Delta_{x_2}| = 0.0000145,$ $|\Delta_{x_3}| = 0.0004332,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-11}:$ $|\Delta_{x_1}| = 0.0105214,$ $|\Delta_{x_2}| = 0.0000034,$ $|\Delta_{x_3}| = 0.0001492,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-13}:$ $|\Delta_{x_1}| = 0.0031207,$ $|\Delta_{x_2}| = 0.0000001,$ $|\Delta_{x_3}| = 0.0000134,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-9}:$ $|\Delta_{p_1}| = 0.0001751,$ $|\Delta_{p_2}| = 0.0000000,$ $|\Delta_{p_3}| = 0.0000000,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-11}:$ $|\Delta_{p_1}| = 0.0000523,$ $|\Delta_{p_2}| = 0.0000000,$ $|\Delta_{p_3}| = 0.0000000,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-13}:$ $|\Delta_{p_1}| = 0.0000000,$ $|\Delta_{p_2}| = 0.0000000,$ $|\Delta_{p_3}| = 0.0000000,$

Для $\alpha = 1.0$:

$|\Delta_{loc}| = 10^{-9}:$ $|\Delta_{x_1}| = 0.0088525,$ $|\Delta_{x_2}| = 0.0000077,$ $|\Delta_{x_3}| = 0.0002171,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-11}:$ $|\Delta_{x_1}| = 0.0015927,$ $|\Delta_{x_2}| = 0.0000004,$ $|\Delta_{x_3}| = 0.0000073,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-13}:$ $|\Delta_{x_1}| = 0.0015923,$ $|\Delta_{x_2}| = 0.0000001,$ $|\Delta_{x_3}| = 0.0000071,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-9}:$ $|\Delta_{p_1}| = 0.0140923,$ $|\Delta_{p_2}| = 0.0000000,$ $|\Delta_{p_3}| = 0.0000000,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-11}:$ $|\Delta_{p_1}| = 0.0024162,$ $|\Delta_{p_2}| = 0.0000000,$ $|\Delta_{p_3}| = 0.0000000,$

$|\Delta_{loc}| = 10^{-13}:$ $|\Delta_{p_1}| = 0.0024011,$ $|\Delta_{p_2}| = 0.0000000,$ $|\Delta_{p_3}| = 0.0000000,$

16 Список литературы

Список литературы

[1] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: Учебное пособие — М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1987.

[2] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Перевод с англ. — М.:Мир, 1990.

[3] Григорьев И. С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. — М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.

[4] Исаев В. К., Сонин В. В.. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, том 3, номер 6, 1114–1116.