МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Факультет информационных технологий и программирования

Кафедра информационных систем

Методы оптимизации

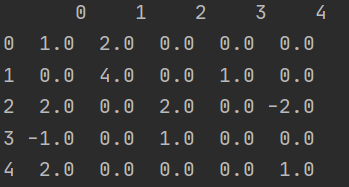
**Лабораторная работа №3**

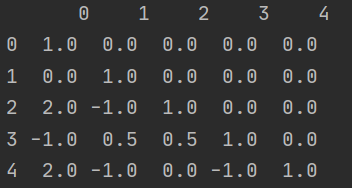
Выполнили студенты группы № М33041:  
Черныш Даниил Павлович, Русских Полина Александровна

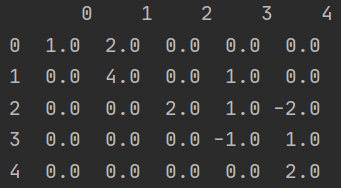
Проверила: Москаленко Мария Александровна

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2020

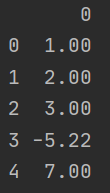
1. LU-разложение

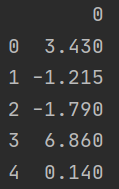
Матрица A

Матрица L

Матрица U

Ax = B

Матрица B

Матрица x

1. Матрица, число обусловленности которой регулируется за счет изменения диагонального преобладания.

Погрешности найденных решений:

k error

1 0.0  
2 0.0  
3 0.0  
4 1.0151046669903963e-11  
5 2.692458256348118e-10  
6 3.0660783171635817e-09  
7 2.8973200283388678e-08  
8 1.3865760140063799e-07  
9 1.235727349017483e-05

1. Матрица Гилберта

Погрешность найденных решений:

k error

1 0.0  
2 9.992007221626409e-16  
3 6.661338147750939e-16  
4 1.0115241977359801e-12  
5 1.240625380205529e-11  
6 4.0981899355566987e-10  
7 1.9860097693375726e-08  
8 5.353408527586367e-07  
9 7.243554770915613e-05

1. Блочные матрицы

Исходная матрица (блок размера 2x2)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 7 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 10 | 5 | 1 | 7 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 9 | 1 | 15 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 12 | 1 | 2 | 2 | 0 | 5 | 0 |
| 4 | 8 | 1 | 7 | 1 | 21 | 3 | 9 | 0 | 0 | 8 |
| 5 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 13 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 6 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 21 | 0 | 0 | 9 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 9 | 20 | 0 | 8 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 | 13 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10 |

1 Итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 7.0 | 2.0 | 3.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 0.0 | 0.0 |
| 1 | 0.14 | 9.71 | 4.57 | 0.86 | 6.86 | 0.86 | 1.86 | -0.43 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1.29 | -0.16 | 11.88 | -0.15 | 0.82 | 0.85 | 0.01 | -3.93 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.14 | 0.07 | 2.24 | 11.79 | 0.35 | 1.79 | 1.72 | -0.4 | 5.0 | 0.0 |
| 4 | 1.14 | -0.13 | 4.18 | -0.03 | 20.76 | 1.97 | 8.1 | -3.49 | 0.0 | 8.0 |
| 5 | 0.14 | 0.38 | -1.18 | 3.53 | -1.76 | 12.53 | 1.15 | 1.74 | 3.0 | 1.0 |
| 6 | 0.57 | 0.4 | 2.47 | 6.09 | 4.71 | 8.09 | 19.69 | -1.54 | 0.0 | 9.0 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 9.0 | 20.0 | 0.0 | 8.0 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.0 | 1.0 | 3.0 | 2.0 | 2.0 | 13.0 | 1.0 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 2.0 | 2.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 10.0 |

2 Итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 7.0 | 2.0 | 3.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 0.0 | 0.0 |
| 1 | 0.14 | 9.71 | 4.57 | 0.86 | 6.86 | 0.86 | 1.86 | -0.43 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1.29 | -0.16 | 11.88 | -0.15 | 0.82 | 0.85 | 0.01 | -3.93 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.14 | 0.07 | 0.19 | 11.82 | 0.2 | 1.63 | 1.72 | 0.34 | 5.0 | 0.0 |
| 4 | 1.14 | -0.13 | 0.35 | 0.0 | 20.47 | 1.67 | 8.09 | -2.11 | -0.01 | 8.0 |
| 5 | 0.14 | 0.38 | -0.1 | 0.3 | -1.74 | 12.13 | 0.64 | 1.24 | 1.51 | 1.0 |
| 6 | 0.57 | 0.4 | 0.21 | 0.52 | 4.43 | 7.07 | 18.8 | -0.9 | -2.59 | 9.0 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.08 | 0.98 | 2.86 | 8.85 | 19.97 | -0.42 | 8.0 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.34 | 0.93 | 2.45 | 1.42 | 1.88 | 11.31 | 1.0 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 2.0 | 2.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 10.0 |

3 Итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 7.0 | 2.0 | 3.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 0.0 | 0.0 |
| 1 | 0.14 | 9.71 | 4.57 | 0.86 | 6.86 | 0.86 | 1.86 | -0.43 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1.29 | -0.16 | 11.88 | -0.15 | 0.82 | 0.85 | 0.01 | -3.93 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.14 | 0.07 | 0.19 | 11.82 | 0.2 | 1.63 | 1.72 | 0.34 | 5.0 | 0.0 |
| 4 | 1.14 | -0.13 | 0.35 | 0.0 | 20.47 | 1.67 | 8.09 | -2.11 | -0.01 | 8.0 |
| 5 | 0.14 | 0.38 | -0.1 | 0.3 | -0.09 | 12.27 | 1.33 | 1.07 | 1.51 | 1.68 |
| 6 | 0.57 | 0.4 | 0.21 | 0.52 | 0.22 | 0.55 | 16.32 | -1.03 | -3.41 | 6.35 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.08 | 0.05 | 0.23 | 8.17 | 19.83 | -0.77 | 7.23 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.34 | 0.05 | 0.19 | 0.79 | 1.77 | 11.02 | 0.31 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 0.15 | 0.01 | 0.05 | -0.23 | 8.97 |

4 Итерация

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 7.0 | 2.0 | 3.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 0.0 | 0.0 |
| 1 | 0.14 | 9.71 | 4.57 | 0.86 | 6.86 | 0.86 | 1.86 | -0.43 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1.29 | -0.16 | 11.88 | -0.15 | 0.82 | 0.85 | 0.01 | -3.93 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.14 | 0.07 | 0.19 | 11.82 | 0.2 | 1.63 | 1.72 | 0.34 | 5.0 | 0.0 |
| 4 | 1.14 | -0.13 | 0.35 | 0.0 | 20.47 | 1.67 | 8.09 | -2.11 | -0.01 | 8.0 |
| 5 | 0.14 | 0.38 | -0.1 | 0.3 | -0.09 | 12.27 | 1.33 | 1.07 | 1.51 | 1.68 |
| 6 | 0.57 | 0.4 | 0.21 | 0.52 | 0.22 | 0.55 | 16.32 | -1.03 | -3.41 | 6.35 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.08 | 0.05 | 0.23 | 0.5 | 20.35 | 0.94 | 4.06 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.34 | 0.05 | 0.19 | 0.05 | 0.09 | 11.1 | -0.36 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 0.15 | 0.0 | 0.0 | -0.23 | 8.95 |

Матрица L

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 1 | 0.14 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1.29 | -0.16 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.14 | 0.07 | 0.19 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 4 | 1.14 | -0.13 | 0.35 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 5 | 0.14 | 0.38 | -0.1 | 0.3 | -0.09 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | 0.57 | 0.4 | 0.21 | 0.52 | 0.22 | 0.55 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.08 | 0.05 | 0.23 | 0.5 | 1.0 | 0.0 | 0.0 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.34 | 0.05 | 0.19 | 0.05 | 0.09 | 1.0 | 0.0 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.1 | 0.15 | 0.0 | 0.0 | -0.02 | 1.0 |

Матрица U

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 7.0 | 2.0 | 3.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 3.0 | 0.0 | 0.0 |
| 1 | 0.0 | 9.71 | 4.57 | 0.86 | 6.86 | 0.86 | 1.86 | -0.43 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 0.0 | 0.0 | 11.88 | -0.15 | 0.82 | 0.85 | 0.01 | -3.93 | 0.0 | 0.0 |
| 3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 11.82 | 0.2 | 1.63 | 1.72 | 0.34 | 5.0 | 0.0 |
| 4 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 20.47 | 1.67 | 8.09 | -2.11 | -0.01 | 8.0 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 12.27 | 1.33 | 1.07 | 1.51 | 1.68 |
| 6 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 16.32 | -1.03 | -3.41 | 6.35 |
| 7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 20.35 | 0.94 | 4.06 |
| 8 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 11.1 | -0.36 |
| 9 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 8.95 |

Время работы при разных размерах блока r

r = 1, time = 0.00972839999999997

r = 2, time = 0.010258300000000053

r = 5, time = 0.018057199999999995

Выводы:

1. После написания LU разложения, можно сделать вывод о том, что LU разложение позволяет намного проще решать СЛАУ (в том числе и для поиска обратной матрицы). Несмотря на то, что одно матричное уравнение заменяется двумя, каждое из них решить намного проще, так как они оба имеют в произведении треугольную матрицу. Уравнение с треугольной матрицей элементарно решается обратным проходом метода Гаусса.
2. Проведя исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания, можно увидеть, что погрешность найденных решений достаточно мала. Однако погрешность ухудшается при увеличении размерности.
3. Аналогичное ухудшение погрешности наблюдается и при исследовании матрицы Гилберта.
4. Блоки должны являться квадратными матрицами, размер которых должен быть делителем размера основной матрицы. Для большей эффективности размер блока должен быть значительно меньше размера основной матрицы, так как все операции производятся с блоками, то при меньшей размерности именно блоков время на совершение этих операций меньше