

ÚLOHA 4

---

MERANIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA

---

## Abstrakt

# 1 Teoretická analýza

Viskozita je fyzikálna veličina vyjadrujúca mieru odporu tekutiny deformovať sa pod vplyvom šmykových (tangenciálnych) napätí. Inými slovami je to odpor, ktorým tekutina pôsobí proti silám snažiacim sa posunúť jej najmenšie častice. Na ľubovoľné teleso pohybujúce sa v kvapaline teda pôsobí proti jeho pohybu odporová sila, ktorá je závislá od vlastností kvapaliny, od rýchlosti telesa a od jeho tvaru. Pre pohyb gule v neohraničenom prostredí možno veľkosť tejto sily vyjadriť Stokesovým vzťahom

$$F = 6\pi\mu rv, \quad (1)$$

kde  $v$  je rýchlosť padajúcej gule,  $r$  jej polomer a  $\mu$  dynamická viskozita kvapaliny.

Keďže s rastúcou rýchlosťou rastie aj odporová sila, tiažová sila nebude guľôčku urýchľovať donekonečna. Guľôčka bude zrýchľovať len dovtedy, kým sa súčet vztlakovej a odporovej sily nevyrovná tej tiažovej. Takže v momente, keď táto situácia nastane, sa guľôčka začne pohybovať rovnomerným pohybom. Túto situáciu charakterizuje vzťah

$$F_g - F_{\text{vztlak}} = F_{\text{stokes}}, \quad (2)$$

$$m_{\text{tel}}g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{kvap}}g = 6\pi\mu rv, \quad (3)$$

z ktorého bez problémov vyjadríme (musíme si však spomenúť aj na to, že  $\rho = m/V$ ) vzťah pre viskozitu

$$\mu = \frac{2gr^2(\rho_{\text{tel}} - \rho_{\text{kvap}})}{9v}, \quad (4)$$

kde  $g$  je tiažové zrýchlenie,  $r$  polomer guľôčky,  $\rho_{\text{tel}}$  hustota guľôčky a  $\rho_{\text{kvap}}$  hustota oleja. Rýchlosť guľôčky  $v$  možno vyjadriť pomocou dráhy, na ktorej je pohyb guľôčky rovnomerný a doby, počas ktorej prejde guľôčka túto dráhu.

Nakoľko Stokesov vzťah (1) predpokladá, že rýchlosť padajúcej gule je veľmi malá a rozmery nádoby sú oproti polomeru gule veľmi veľké (aby guľa nezanechávala za sebou víry), použijeme aj presnejší vzťah, ktorý zahŕňa vplyv priemeru valca  $2R$  na odpor prostredia (korekcia  $\mu$  vzhľadom na ohraničené prostredie)

$$\mu = \frac{1}{1 + 2.4(r/R)} \cdot \frac{2g(\rho_{\text{tel}} - \rho_{\text{kvap}})r^2}{9v}. \quad (5)$$

## 2 Meranie

Úlohy:

1. Určiť dynamickú viskozitu  $\mu$  skúmanej kvapaliny.
2. Urobiť korekciu  $\mu$  vzhľadom na ohraničené prostredie.
3. Zhodnotiť presnosť merania a porovnať s hodnotou v tabuľkách.

**Pomôcky:** Sklenené valce naplnené viskóznym olejom (vnútorné priemery 15, 25 a 50 mm), fixku (káblkové zväzky, alebo čokoľvek použiteľné na značkovanie miest na valcoch), guľôčky, mikrometer, pravítko, stopky, analytické váhy, hustomer, elektromagnet.

**Opis zariadenia:** Pád guľôčok skúmame na zariadení (obr.1) pozostávajúcom z valcov, na ktorých si označíme miesto, pri prechode guľôčky ktorým začneme merať a miesto, kde skončíme s meraním času pádu guľôčky. Samozrejme, na tomto úseku by sa mala guľôčka pohybovať rovnomerným priamočiarym pohybom. Valce sú naplnené olejom a v ich spodnej časti sa nachádzajú guľôčky. Tie dvíhame vo valci pomocou elektromagnetu.

□DSC\_0024.JPG

Obr. 1: Aparatúra

### Postup:

- Mikrometrom odmeriame priemer  $2r$  10 guľôčok (ekvivalenty guľôčok tých istých vlastností, aké majú guľôčky vo valci) – nakoľko sme pokus uskutočňovali pre dva druhy guľôčok (malé a veľké), odmeriame priemer desiatich z každého druhu.
- Odvážime guľôčky – pomocou analytických váh zistíme hmotnosť 10 guľôčok jedného druhu  $m_{10}$ , hmotnosť jednej guľôčky  $m$  bude desatina z  $m_{10}$ .
- Ak nepoznáme hustotu kvapaliny  $\rho_{\text{kvap}}$ , zistíme ju pomocou hustomeru.
- Zistíme hustotu guľôčky  $\rho_{\text{tel}}$ <sup>1</sup>.
- Pomocou fixky, káblových zväzkov alebo čohokoľvek, čo uznáte za vhodné, si označíme úsek, ktorý bude slúžiť ako dráha pri výpočte rýchlosti guľôčky. Odmeriame dĺžku tohoto úseku<sup>2</sup>.
- V každom valci pre každú guľôčku uskutočníme 10 meraní doby, za ktorú guľôčka prešla daný úsek. Guľôčky vynášame hore pomocou elektromagnetu.
- Zo vzdialenosti značiek  $s$  a aritmetického priemeru doby pádu  $\bar{T}$  určíme rýchlosť  $v$  guľôčky.
- Zo vzťahu (4) vypočítame dynamickú viskozitu a zo vzťahu (5) korekciu  $\mu$  vzhľadom na ohraničené prostredie.
- Zhodnotíme presnosť merania  $\mu$ .

---

<sup>1</sup>Ja som ju vypočítala zo vzorca  $\rho_{\text{tel}} = \frac{m}{(4/3)\pi r^3}$ , ale samozrejme, sú aj iné metódy.

<sup>2</sup>My sme použili pravítko.

### 3 Výsledky a diskusia

Smerodajné odchýlky ľubovoľnej vypočítanej veličiny  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  skladáme podľa vzorca

$$s(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} s(x_i) \right)^2}, \quad (6)$$

za predpokladu, že veličiny  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sú navzájom nezávislé.

Pomocou mikrometra sme namerali priemery guľôčok  $d$ :

	$d_{\text{mala}} / [*10^{-3} \text{ m}]$	$d_{\text{velka}} / [*10^{-3} \text{ m}]$
1.	3.184	3.970
2.	3.172	3.980
3.	3.163	3.970
4.	3.169	3.978
5.	3.162	3.962
6.	3.180	3.981
7.	3.182	3.978
8.	3.173	3.980
9.	3.182	3.972
10.	3.170	3.975
$\bar{d} \pm s$	$3.174 \pm 0.008$	$3.975 \pm 0.006$

Tabuľka 1: Zisťovanie priemeru guľôčok.

Z nich sme si vyjadrili pomocou vzťahu  $r = d/2$  polomer malej guľôčky  $r_m = (1.587 \pm 0.004) \text{ mm}$  a polomer veľkej guľôčky  $r_v = (1.988 \pm 0.003) \text{ mm}$ . Zistili sme hmotnosť 10 malých guľôčok  $m_{10m} = 1.2997 \text{ g}$  a 10 veľkých guľôčok  $m_{10v} = 2.55 \text{ g}$ , z čoho sme získali hmotnosť malej guľôčky  $m_m = 0.13 \text{ g}$  a hmotnosť veľkej guľôčky  $m_v = 0.255 \text{ g}$ . Hustota oleja bola už známa  $\rho_{\text{kvap}}(20^\circ\text{C}) = 879.9 \text{ kg/m}^3$ . Hustotu guľôčok  $\rho_{\text{tel}}$  sme vypočítali podľa vzorca  $\rho_{\text{tel}} = \frac{m}{(4/3)\pi r^3}$ . Hustota malých guľôčok nám vyšla  $\rho_m = (7\,764,69 \pm 58,71) \text{ kg/m}^3$  a hustota veľkých guľôčok  $\rho_v = (7\,748.23 \pm 35.08) \text{ kg/m}^3$ .

Celý experiment sme uskutočňovali pre dráhu  $s = (42 \pm 0.1) \text{ cm}$ . K nej sme zistili zodpovedajúce doby  $T$  (teda čas, ktorý jednotlivým guľôčkám túto dráhu trvalo prejsť):

Na základe nameraných časov  $T$  sme určili príslušné rýchlosti:

Nakoniec sme pomocou vzťahu (4) vypočítali dynamickú viskozitu oleja  $\mu$  pre všetky uvedené prípady a podľa vzťahu (5) taktiež korekciu  $\mu$  pre všetky spomínané prípady:

### 4 Diskusia

Na nepresnosti našich výsledkov sme sa mohli do vysokej miery pričiniť dopustením sa viacerých závažných chýb. Jednou z nich je, napríklad, nepresné určenie času pádu guľôčky. Táto

	$R = 15\text{mm}$		$R = 25\text{mm}$		$R = 50\text{mm}$	
	$T_{\text{mala}}/[\text{s}]$	$T_{\text{velka}}/[\text{s}]$	$T_{\text{mala}}/[\text{s}]$	$T_{\text{velka}}/[\text{s}]$	$T_{\text{mala}}/[\text{s}]$	$T_{\text{velka}}/[\text{s}]$
1.	3.61	2.44	3.93	2.77	4.97	3.80
2.	3.61	2.45	3.99	2.73	4.82	3.82
3.	3.56	2.50	4.04	2.76	4.86	3.78
4.	3.56	2.46	4.05	2.81	4.84	3.74
5.	3.60	2.55	4.01	2.87	4.81	3.77
6.	3.60	2.48	3.93	2.86	4.90	3.74
7.	3.62	2.48	4.11	2.89	4.88	3.74
8.	3.62	2.50	4.07	2.86	4.97	3.73
9.	3.61	2.54	4.00	2.81	4.84	3.74
10.	3.56	2.51	4.10	2.78	4.88	3.80
$\bar{T} \pm s$	$3.60 \pm 0.026$	$2.49 \pm 0.036$	$4.02 \pm 0.063$	$2.81 \pm 0.054$	$4.88 \pm 0.056$	$3.77 \pm 0.033$

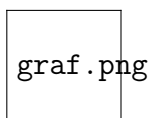
Tabuľka 2: Meranie periód.

$R/[\text{mm}]$	$v_{\text{mala}}/[\text{m/s}]$	$v_{\text{velka}}/[\text{m/s}]$
15	$0.1167 \pm 0.0009$	$0.1687 \pm 0.0025$
25	$0.1045 \pm 0.0017$	$0.1495 \pm 0.0029$
50	$0.0861 \pm 0.0235$	$0.1114 \pm 0.0010$

Tabuľka 3: Zisťovanie rýchlosti guľôčok.

$R/[\text{mm}]$	$\mu_{\text{mala}}/[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\mu_{\text{velka}}/[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\mu_{\text{kor-mala}}/[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\mu_{\text{kor-velka}}/[\text{Pa} \cdot \text{s}]$
15	$0.3239 \pm 0.0043$	$0.3508 \pm 0.0056$	$0.2583 \pm 0.0034$	$0.2661 \pm 0.0054$
25	$0.3617 \pm 0.0075$	$0.3958 \pm 0.0080$	$0.3139 \pm 0.0064$	$0.3324 \pm 0.0056$
50	$0.4390 \pm 0.0072$	$0.5312 \pm 0.0057$	$0.4080 \pm 0.0069$	$0.4849 \pm 0.0061$

Tabuľka 4: Dynamická viskozita oleja a jej korekcia.



Obr. 2: Výsledky.

chyba sa dala znížiť predĺžením meranej dráhy. Na druhej strane, dĺžka valcov je obmedzená a len ťažko sa dalo odhadnúť, kde sa guľôčka začína pohybovať rovnomerným priamočiarym pohybom. Je dosť možné, že už aj bez toho sme hornú hranicu umiestnili príliš vysoko. Posunutím hornej hranice vyššie by sme len zvýšili pravdepodobnosť, že sa guľôčka na celom našom úseku nepohybuje konštantnou rýchlosťou.

Meranie dĺžky spomínaného úseku taktiež nebolo úplne ideálne. Merali sme ju pravítkom a nakoľko na valci neexistuje nijaká kolmá linka (ani len dva body, o ktorých by sme si boli

na 100 % istý, že sú presne nad sebou), ktorú by sme mohli pravítkom sledovať, mohlo sa to výrazne odraziť na rozdiely skutočnej a nameranej dĺžky. Túto chybu sme sa samozrejme do výpočtov snažili zahrnúť – konkrétne určením odchýlky  $\pm 1$  mm, ktorá však nemusela byť dostatočná.

Nakoniec, nejakých chýb sme sa mohli dopustiť aj pri meraní priemeru a hmotností guľôčok. Ale predpokladám, že tie boli minimálne, nakoľko sme ich využili pri výpočte hustôt guľôčok, a hustoty nám vyšli veľmi podobné ( $\rho_m = (7\,764,69 \pm 58,71) \text{ kg/m}^3$  a  $\rho_v = (7\,748.23 \pm 35.08) \text{ kg/m}^3$ ) a s relatívne veľkým prekryvom intervalov (t.j. intervalov, do ktorých, so zarátaním odchýliek, môžu hustoty spadať).

Nanešťastie nevieme, aký konkrétny olej sa nachádzal vo valcoch, v ktorých sme uskutočňovali meranie a tým pádom ani aká bola jeho skutočná dynamická viskozita. Avšak pri porovnaní s tabuľkami môžeme skonštatovať, že dynamická viskozita nášho oleja ( $\bar{\mu}_{kor} = (0.3439 \pm 0.0023) \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) nám vyšla relatívne blízko k dynamickej viskozite minerálneho oleja ( $0.200 - 0.300 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ). V prípade, že náš olej spadá do tejto kategórie, naša priemerná viskozita s korekciou je minimálne o 12.77 % väčšia, ako by mala byť. Z toho vyplýva, že naše chyby neboli zanedbateľné.

## 5 Záver

Použitím Stokesovej metódy sme sa dopracovali k určeniu dynamickej viskozity oleja, konkrétne  $\bar{\mu} = (0.4004 \pm 0.0025) \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Po následnom vykonaní korekcie a vypočítaní aritmetického priemeru týchto hodnôt sa hodnota nami nameranej dynamickej viskozity výrazne znížila  $\bar{\mu}_{kor} = (0.3439 \pm 0.0023) \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , čo je približne o 14 % menej. Predpokladáme, že nami nameraná hodnota tú skutočnú minimálne o  $0.0439 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  prevyšuje.

## Literatúra

- [1] Zrubáková, N., Brežná, E., Pisoňová, B.: Praktikum z mechaniky a molekulovej fyziky. Bratislava, UK 2003.