Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského

Úloha 3

Kmity spriahnutých kyvadiel

Denisa Lampášová
1FYZ2

30. apríla 2015

Abstrakt

1 Teoretická analýza

Oscilátory, na ktoré pôsobiaca vonkajšia periodická sila má pôvod v inom oscilátore, nazývame spriahnutými oscilátormi. Príkladom spriahnutého kyvadla je napríklad dvojica fyzikálnych kyvadiel spojená elastickou väzbou. V našom prípade použijeme pružinku s malou tuhosťou k_1. Pre výchylky y_1, y_2 takýchto kyvadiel platia pohybové rovnice (pre jednoduchosť zanedbajme odpor prostredia)

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} &= -k y_1 - k_1 (y_1 - y_2)\,, \\ m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} &= -k y_2 - k_1 (y_1 - y_2)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Budeme vyšetrovať tri situácie:

a) **Symetrické vychýlenie:** V čase $t = 0$ vychýlime obe kyvadlá do polohy $y_1 = y_2 = A$. Riešením sústavy (1) zisťujeme, že obe kyvadlá budú kmitať súhlasne s vlastnou frekvenciou ω_1.

b) **Opačné vychýlenie:** V čase $t = 0$ vychýlime oscilátory na opačné strany tak, že $y_1 = -y_2 = A$. Riešením sústavy (1) zisťujeme, že sa oba oscilátory budú pohybovať s uhlovou frekvenciou ω_2, ale s fázovým posunom π.

c) **Antisymetrické vychýlenie:** Ak jeden oscilátor vychýlime do polohy A ($y_1 = A$) a druhý podržíme v rovnovážnej polohe ($y_2 = 0$), riešením sústavy (1) dostávame všeobecne zložité neharmonické kmitanie. Ak je však rozdiel frekvencií ω_1 a ω_2 veľmi malý (čo pri viazaných oscilátoroch znamená veľmi slabú väzbu (t.j. $k_1 << k$, čo v našom prípade naozaj platí)), výsledné kmitanie sa zjednoduší. Pôjde o jednoduché sínusové kmity, ktorých amplitúda sa periodicky mení s frekvenciou ω_0. Vznikajú teda rázy, ktorých periódu môžeme vyjadriť vzťahom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,, \tag{2}$$

pričom rázy kyvadiel sú posunuté o $\pi/2$.

Na vystihnutie sily väzby sa používa pomer $\kappa = \frac{k_1}{k_1 + k}$, ktorý je nazývaný **faktorom väzby**. Pomocou základných frekvencií spriahnutých oscilátorov ω_1, ω_2 alebo pomocou periódy T kmitov každého oscilátora a periódy T_0 rázov, ho môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}\,, \qquad \kappa = \frac{4 T T_0}{4 T_0^2 + T^2}\,. \tag{3}$$

2 Meranie

Úlohy:

1. Pri zvolenej polohe valca a väzbovej pružiny zmerať základné frekvencie ω_1 a ω_2 spriahnutých kyvadiel a určiť z nich faktor väzby κ.
2. Zmerať periódu rázov T_0 a periódu pohybu kyvadiel T a z nich určiť faktor väzby κ.
3. Určiť závislosť faktoru väzby κ od vzdialenosti d.

Pomôcky: Dve fyzikálne kyvadlá na stojane s možnosťou väzby, väzbová pružina, senzor na meranie polohy kyvadla pripojený na počítač s príslušným programovým vybavením.

Postup:

- Po uistení sa, že posuvné valce sú na oboch kyvadlách v rovnakej vzdialenosti od osi otáčania, overíme, že doba kmitu oboch kyvadiel je zhodná.[1]
- Zmeriame dobu kmitu T_1 a z nej vypočítame vlastnú uhlovú frekvenciu oscilátorov $\omega_1 = 2\pi/T$.
- V rovnakej vzdialenosti d od osi otáčania upevníme na obe kyvadlá väzbovú pružinu.
- Postupne volíme všetky začiatočné podmienky opísané v teoretickej časti:
  a) Meriame periódu kmitov T_1 ľubovoľného kyvadla a overíme súhlas z predchádzajúcim meraním.[2]
  b) Meriame dobu kmitu T_2 ľubovoľného kyvadla a znej vypočítame druhú základnú uhlovú frekvenciu ω_2.
  c) Zmeriame periódu rázov T_0 a zároveň meriame tiež dobu kmitu T jedného z kyvadiel.
- Vypočítame faktor väzby κ:
  - z hodnôt ω_1, ω_2,
  - z hodnôt T, T_0.

  Následne obe hodnoty porovnáme.
- Meranie opakujeme pre rôzne vzdialenosti d (vzdialenosť väzbovej pružinky od osi otáčania).
- Zostrojíme graf závislosti faktoru väzby κ od vzdialenosti d.

[1] Ak zistíme, že nie je, pokúsime sa to napraviť.
[2] Meraním periódy ešte pred upevnením pružinky.

3 Výsledky

Naše meranie sme začali zistením[3] periódy kmitu ($T_1 = 1{,}97\,\mathrm{s}$) jedného z našich dvoch kyvadiel. Uhlová frekvencia ω_1 nám vyšla $3.195\,\mathrm{s}^{-1}$. Následne sme vykonali merania všetkých troch prípadov z teoretickej časti pre tri rôzne vzdialenosti d.

d = 90 cm

periódy			
T_1 / [s]	T_2 / [s]	T / [s]	T_0 / [s]
1,96	1,85	1,85	33,56

Tabuľka 1: Hodnoty všetkých zisťovaných periód pre $d = 90\,\mathrm{cm}$

uhlové frekvencie		
ω_1 / [s^{-1}]	ω_2 / [s^{-1}]	ω_0 / [s^{-1}]
3,20	3,39	0,19

Tabuľka 2: Hodnoty všetkých zisťovaných uhlových frekvencií pre $d = 90\,\mathrm{cm}$

d = 70 cm

periódy			
T_1 / [s]	T_2 / [s]	T / [s]	T_0 / [s]
1,96	1,90	1,76	54,99

Tabuľka 3: Hodnoty všetkých zisťovaných periód pre $d = 70\,\mathrm{cm}$

uhlové frekvencie		
ω_1 / [s^{-1}]	ω_2 / [s^{-1}]	ω_0 / [s^{-1}]
3,20	3,31	0,11

Tabuľka 4: Hodnoty všetkých zisťovaných uhlových frekvencií pre $d = 70\,\mathrm{cm}$

d = 45 cm

periódy			
T_1 / [s]	T_2 / [s]	T / [s]	T_0 / [s]
1,96	1,93	1,95	137,31

Tabuľka 5: Hodnoty všetkých zisťovaných periód pre $d = 45\,\mathrm{cm}$

[3] Na zisťovanie všetkých periód (okrem periódy rázov T_0) sme použili metódu založenú na meraní závislosti vzdialenosti kyvadla od senzoru od času. Z grafu zobrazujúceho danú závislosť už nebol problém odčítať 10 dôb desať-periód ($10T$). Z nich sme urobili aritmetický priemer, ktorý sme následne vydelili desiatimi.

uhlové frekvencie		
ω_1 / [s^{-1}]	ω_2 / [s^{-1}]	ω_0 / [s^{-1}]
3,20	3,25	0,05

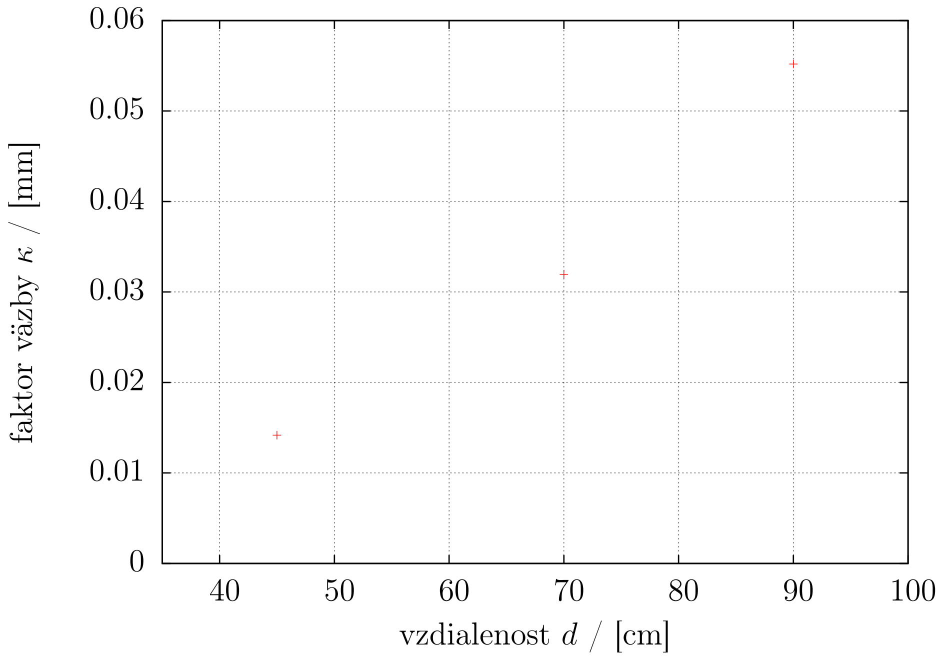
Tabuľka 6: Hodnoty všetkých zisťovaných uhlových frekvencií pre $d = 45\,\text{cm}$

Z nameraných hodnôt sme pomocou vzťahov (3) vypočítali faktor väzby. Zistené hodnoty uvádzame v tabuľke:

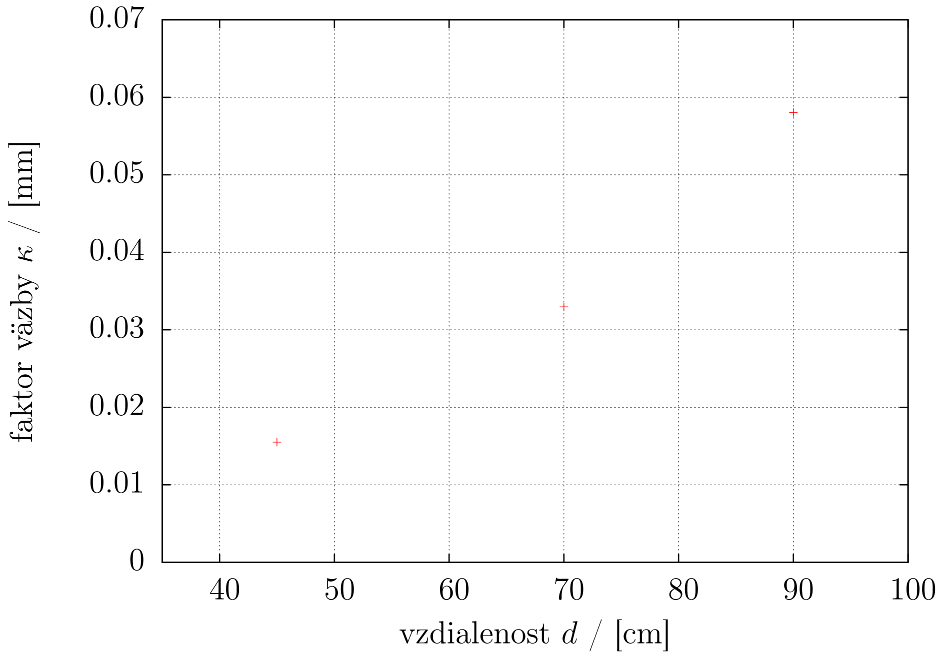
	d		
druh výpočtu	90 cm	70 cm	45 cm
rázy	0,0552	0,0319	0,01417
frekvencie	0,0580	0,0330	0,0155

Tabuľka 7: Hodnoty faktoru väzby κ pre skúmané vzdialenosti d

Nakoniec sme vypočítané hodnoty vyniesli do grafov:



Graf 1: Grafické znázornenie hodnôt faktoru väzby vypočítaných z periódy rázov



Graf 2: Grafické znázornenie hodnôt faktoru väzby vypočítaných z uhlových frekvencií

4 Diskusia a záver

Experimentálne sme overili, že faktor väzby κ závisí od vzdialenosti väzby od osi otáčania. Čím je vzdialenosť väzbovej pružiny od závesu väčšia, tým je väzba silnejšia a prenos mechanickej energie medzi oscilátormi prebieha rýchlejšie.

Faktor väzby κ sme vypočítali dvomi rôznymi spôsobmi. Priemerný podiel dvojice výsledkov dosiahnutých týmito metódami je $\frac{\kappa_{\text{cez rázy}}}{\kappa_{\text{cez frekvencie}}} = 0{,}9448$, z čoho je zrejmé, že rôznym spôsobom výpočtu sme nedostali rovnaké výsledky. Tieto výsledky sa však nelíšili až tak veľmi. Namerané hodnoty sa líšili v priemere o necelých 6 %. Tento rozdiel sme dostali kvôli nerovnakej presnosti merania frekvencie kmitov (teda ich periódy) a periódy rázov.

Keďže kyvadlá sme vychyľovali ručne, veľkosť počiatočnej výchylky a rýchlosti pravdepodobne presne nezodpovedali požadovaným hodnotám. Tieto nepresnosti mohli byť príčinou systematických chýb vo výsledkoch.

Druhým podstatným vplyvom bola relatívne nízka presnosť odčítania periódy rázov. Chyby merania ultrazvukového senzora a samotného programu Coach 6 nevieme ovplyvniť ani odmerať. Odhadujeme však, že sú rádovo menšie, než chyby spôsobené nepresnosťou merania.

Literatúra

[1] Zrubáková, N., Brežná, E., Pisoňová, B.: Praktikum z mechaniky a molekulovej fyziky. Bratislava, UK 2003.

[2] Baláž, M.: Kmity spriahnutých kyvadiel, 2014.

[3] http://fks.sk/∼juro/phys_materials.html