Analisi Matematica II

Appunti di Davide Gaetano Barberi, Corso di Intelligenza Artificiale and Data Analytics, A.A 2022/23.

Integrali Generalizzati (o Impropri)

Funzione Localmente Integrabile

Sia J un intervallo qualunque.

Sia $f : J \to \mathbb{R}$.

f si dice **localmente integrabile su J** se f è integrabile su ogni intervallo compatto $K \subseteq J$.

Continua/Monotona, allora Localmente Integrabile

Se $f : J \to \mathbb{R}$ è continua o monotona, allora f è **localmente integrabile** su J.

Localmente Integrabile, allora Continua

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile.

Sia $c \in J$.

La funzione integrale:

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

con $x \in J$, è **continua in J.**

Inoltre, $\forall d \in J$,

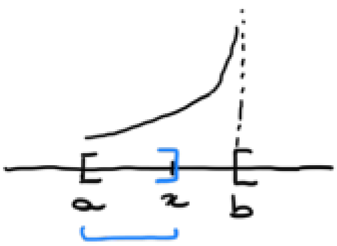
$$\lim_{x \to d} F(x) = F(d)$$

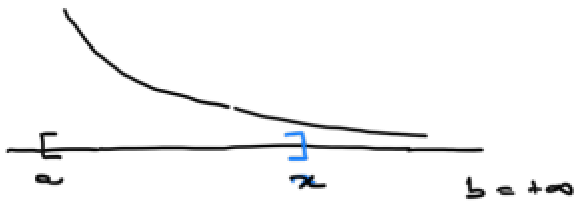
Funzioni Integrabili in Senso Generalizzato

1. Sia $J = [a, b[$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J.

   f si dice **integrabile in senso generalizzato su J** se esiste finito il limite:

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt =: \int_a^b f(t)dt$$





2. Sia $J =]a, b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile.

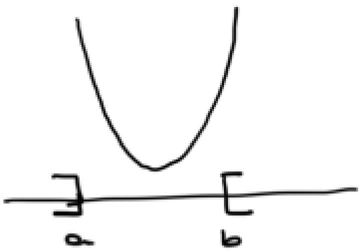
   f si dice **integrabile in senso generalizzato su J** se esiste finito il limite:

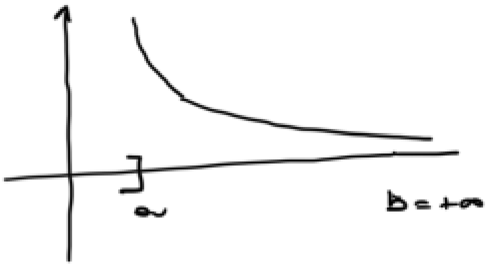
$$\lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt := \int_a^b f(t)dt$$

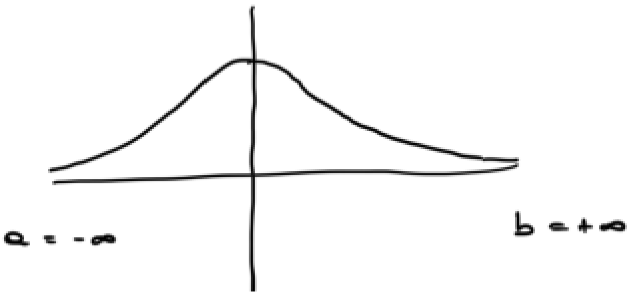
3. Sia $J =]a, b[$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J.

   f si dice **integrabile in senso generalizzato su** J **se esiste** $c \in J$ **tale che** f **è integrabile in senso generalizzato su** $]a, c]$ **e** $[c, b[$ e si pone:

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$







Esempi Pratici

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\qquad J = [0; 1[$

$$\lim_{t \to 1} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t \to 1} \left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t \to 1} -2\left(\sqrt{1-t} - \sqrt{1}\right) = 2$$

2) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \to -\infty} e^x \Big|_t^0 =$

$= \lim_{t \to -\infty} [1 - e^t] = 1$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$

$\lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= \lim_{t \to -\infty} \arctan(0) - \arctan(t) + \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) - \arctan(0)$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Integrabilità in Senso Generalizzato delle Funzioni Campione

Teorema: J Illimitato.

1. Sia $J = [a, +\infty[$ con $a > 0$.

   Si ha che $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha > 1$.

2. Sia $J =]-\infty, b]$ con $b < 0$.

   Si ha che $\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{|x|^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha > 1$.

Dimostrazione:

dim: 1. Si ha che

$$\int_a^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_a^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) & \alpha \neq 1 \\ [\log(x)]_a^t = \log t - \log a & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

2. In maniera analoga.

Teorema: J Limitato.

1. Sia $J = [a, b[$ con $0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   Si ha che $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha < 1$.

2. Sia $J =]a, b]$ con $0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   Si ha che $\int_a^b \frac{1}{(x-\alpha)^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha < 1$.

Dimostrazione:

dim: 1.

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt = \begin{cases} \left[-\frac{1}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha}\right] & \alpha \neq 1 \\ \left[-\log(b-t)\right]_a^x = \log(b-a) - \log(b-x) & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

> 💡 Non si legge molto bene, ma la prima condizione è; $\alpha \neq 1$.

Teorema (Aut - aut per l'Integrale Generalizzato)

Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ localmente integrabile.

Sia $f \geq 0$ in $J = [a, b[$, allora **esiste finito a** $+\infty$ **il limite:**

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = sup_{x \in J} \int_a^x f(t)dt$$

Dimostrazione:

dim: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente, dunque per il teorema sul limite delle funzioni monotone il limite esiste finito o $+\infty$

$$\lim_{x \to b} F(x) = \sup_{x \in J} F(x)$$

Osservazione:

$f(t) = \cos(t)$ allora il limite $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \cos(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ **NON ESISTE.**