



# Introduzione alla Fisica

Appunti di Davide Gaetano Barberi, Corso di Intelligenza Artificiale and Data Analytics, A.A 2022/23.

## Grandezze Fisiche

Misura Diretta

Misura Indiretta

Valori di Densità Importanti

Notazione Scientifica / Ordini di Grandezza

Multipli e Sottomultipli di Unità:

Scale di Lunghezza:

Conversione tra Unità di Misura

Leggi di Scala

Esercizio

Leggi di Potenza

## Analisi Dimensionale

Regole dell'Analisi Dimensionale

Verifica Dimensionale

Dipendenze Funzionali

## Ordini di Grandezza - Problemi alla Fermi

Esempi

Esempi di problemi alla Fermi

## Incertezze Sperimentali

Risoluzione Strumentale (Risoluzione)

Incertezze Statistiche (Precisione)

Errori Sistematici (Accuratezza)

Differenza tra Precisione e Accuratezza

Cifre Significative

Regole per la Scrittura  $X \pm \Delta X$

Esempi di Scrittura  $X \pm \Delta X$

Propagazione delle Incertezze

Propagazione dell'Incertezza: Funzione di 1 Variabile

Approssimazione Lineari Utili

Propagazione delle Incertezze: Funzione di 2 Variabili

Esempi

Incetzze Statistiche e loro Propagazione

## Grandezze Fisiche

**Grandezza Fisica:** Caratteristica di un corpo o di un fenomeno naturale a cui si può associare uno o più numeri.

grandezza  $\longrightarrow$  numero  
MISURA

Grandezza	Dimensione	Unità	
Lunghezza	L	m	} grandezze fondamentali
Intervallo di tempo (tempo)	T	s	
Massa	M	kg	
Area	$L^2$	$m^2$	} grandezze derivate
Volume	$L^3$	$m^3$	
Densità	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{kg}{m^3}$	

Si

Secondo il **Sistema Internazionale SI**.

## Misura Diretta

Confronto con Campione (Unità di Misura).

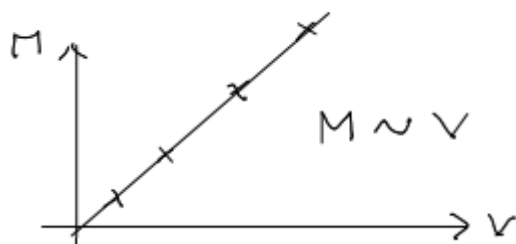
$$\begin{array}{c} L \\ \hline m \end{array} \quad \frac{L}{m} = 1.5 \quad L = 1.5 m$$

## Misura Indiretta

Relazione matematica.

$$\begin{array}{l} D \updownarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \text{---} \end{array} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{l} A = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} D^2 \\ V = A L = \frac{\pi}{4} D^2 L \\ M \sim V \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{adimensionali} \\ \rho = \frac{M}{V} \quad \underline{\text{densità}} \end{array}$$

Massa e Volume possiedono una **relazione di diretta proporzionalità**:



## Valori di Densità Importanti

$$\text{aria} \quad \rho \approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad @ T_{amb}$$

$$\text{H}_2\text{O} \quad \rho \approx 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{gesso} \quad \rho \approx 2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

} liquidi / solidi

## Notazione Scientifica / Ordini di Grandezza

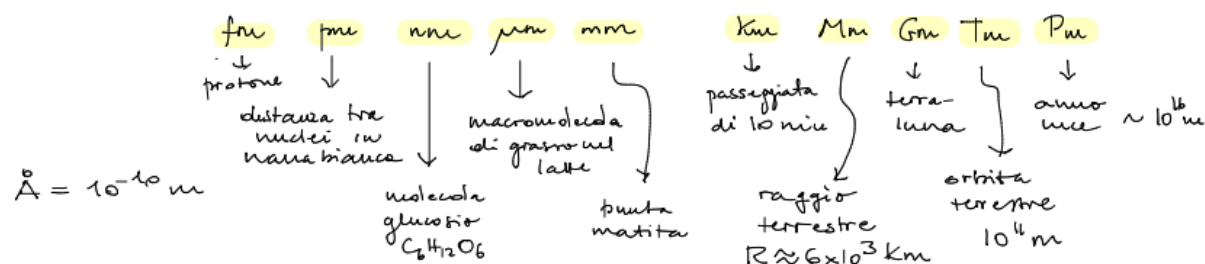
$$R = 6371000 \text{ m} = 6.371 \times 10^6 \text{ m} \quad \rightarrow \text{ordine di grandezza}$$

$R$  = Raggio Terrestre...da ricordare!

## Multipli e Sottomultipli di Unità:

	$10^{-15}$	$10^{-12}$	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^0$	$10^3$	$10^6$	$10^9$	$10^{12}$	$10^{15}$
prefisso	f	p	n	$\mu$	m		K	M	G	T	P
	FEMTO	PICO	NANO	MICRO	MILLI		KILO	MEGA	GIGA	TERA	PETA

## Scale di Lunghezza:



## Conversione tra Unità di Misura

$$1) \quad 70 \frac{\text{mi}}{\text{h}} \quad \text{mi} = 1.609 \text{ km} \quad \frac{\text{mi}}{\text{km}} = 1.609 \quad \frac{\text{mi}}{\text{km}} = 1.609 \quad \frac{\text{mi}}{\text{km}} = 1.609$$

$$= 70 \times \frac{1.609 \text{ km}}{\text{h}} = 70 \times 1.609 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 112 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$2) \quad \text{Velocità del suono } c = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 330 \times \frac{1}{1000} \text{ km} \times \frac{1}{\frac{1}{3600} \text{ h}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{m} = \frac{1}{1000} \text{ km} \\ \text{s} = \frac{1}{3600} \text{ h} \end{array} \right. \quad = 330 \times \frac{3600}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$


$$= 330 \times 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 1000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

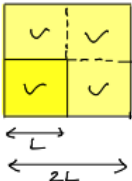
3) densità dell'acqua liquida

$$\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \dots \frac{\text{kg}}{\text{l}} = \dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (\text{es})$$

## Leggi di Scala

Di quanto varia una caratteristica di un corpo se cambio la scala di lunghezza del corpo stesso?



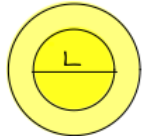


$$L_i \rightarrow L_f = 2L_i$$

$$A_i \rightarrow A_f = ?$$

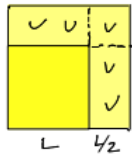
$$A_f = L_f^2 = (2L_i)^2$$

$$= 4L_i^2 = 4A_i$$



$$A \sim L^2$$


$$A = cL^2$$



$$L_i \rightarrow L_f = \frac{3}{2}L_i$$

$$A_i \rightarrow A_f = \left(\frac{3}{2}L_i\right)^2$$

$$= \frac{9}{4}A_i$$



$$L_i \rightarrow L_f = \alpha L_i$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$A_i \rightarrow A_f = c(\alpha L_i)^2$$

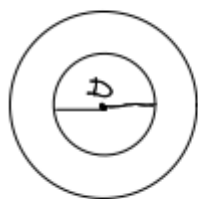
$$= \alpha^2 c L_i^2$$

$$= \alpha^2 A_i$$

Variazione assoluta:  $\Delta A = A_f - A_i$   
 Variazione relativa:  $\frac{\Delta A}{A_i}$

## Esercizio

Es.: aumento il diametro del cerchio del 50%.  
 Di quanto aumenta il numero di pixel?



$$N \sim D^2$$

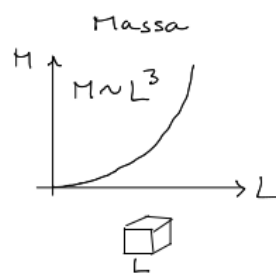
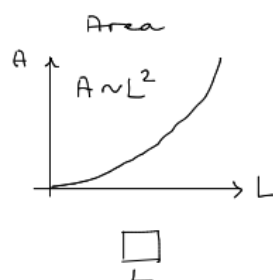
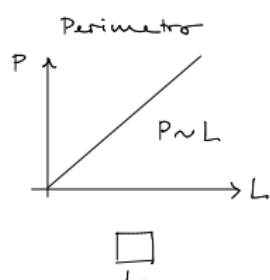
$$D_i \rightarrow D_f = D_i + \frac{1}{2}D_i = \frac{3}{2}D_i$$

$$N_i \rightarrow N_f = \left(\frac{3}{2}\right)^2 N_i = \frac{9}{4}N_i$$

$$\frac{\Delta N}{N_i} = \frac{\frac{9}{4}N_i - N_i}{N_i} = \frac{5}{4} = 1.25$$

125%

## Leggi di Potenza



$$Y = aX^b \quad a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R}$$

$$X_i \rightarrow X_f = \alpha X_i$$

$$Y_i \rightarrow Y_f = \alpha^b Y_i$$

Densità	Velocità
$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow \frac{kg}{m^3}$	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{m}{s}$
$\uparrow$ massa per unità di volume	$\uparrow$ spostamento per unità di tempo
$\uparrow$ kg al m <sup>3</sup> kg per m <sup>3</sup>	$\uparrow$ m al s

## Analisi Dimensionale

$$[ ] \quad [\Delta t] = T \quad [\Delta x] = L \quad \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{L}{T} \quad [a] = \frac{L}{T^2}$$

## Regole dell'Analisi Dimensionale

1. Somma e Sottrazione di grandezze fisiche omogenee tra loro
2. Membri di un'equazione omogenei tra loro
3. Argomento di funzioni trascendenti adimensionale

## Verifica Dimensionale

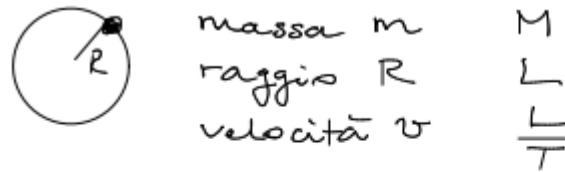
$$\Delta x = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + x_0$$

$\xrightarrow{\quad} \Delta t \times$

$$[\Delta x] = \left[ \frac{1}{2} \right] [a] [\Delta t]^2 + [x_0]$$

$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 + L \quad \checkmark$$

## Dipendenze Funzionali



accelerazione centripeta  $a_c$

$$[a_c] = \frac{L}{T^2} = \left(\frac{L}{T}\right)^2 \frac{1}{L} = \frac{[v]^2}{[R]} = \left[\frac{v^2}{R}\right]$$

$$a_c \sim \frac{v^2}{R} \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

## Ordini di Grandezza - Problemi alla Fermi

Ottenere ordine di grandezza partendo da conoscenze.

### Esempi

Sfera di raggio  $R$  avrà  $V = ?$   $S = ?$  Se io ricordo che  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , basta fare la sua derivata per ottenere la superficie:  $S = 4\pi R^2$ ,

### Esempi di problemi alla Fermi

#### 1) Massa della terra

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$   $M = \rho V = 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{4}{3} \times (6 \times 10^6 \text{ m})^3$

$R \approx 6 \times 10^3 \text{ km}$   $= 4 \times 10^4 \times 6^3 \times 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \text{m}^3 = 9 \times 10^2 \times 10^{22} \text{ kg}$

$\rho \approx 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$   $= 9 \times 10^{24} \text{ kg} \rightarrow \text{ordine di grandezza: } (25)$

$9 > \sqrt{10} \approx 3.16$

#### 2) Capelli in testa

$A = 2\pi R^2$   $\sigma$ : densità di capelli per unità di superficie

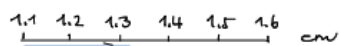
$R \approx 10 \text{ cm}$   $\sigma = \frac{1}{d^2}$   $N = \sigma \cdot 2\pi R^2 = \frac{1}{10^{-2} \text{ cm}^2} \times 6 \times 10^2 \text{ cm}^2$

$d \approx 10^{-1} \text{ cm}$   $= 6 \times 10^4 \rightarrow (5)$

## Incertezze Sperimentali

Il valore VERO di una grandezza fisica NON esiste.

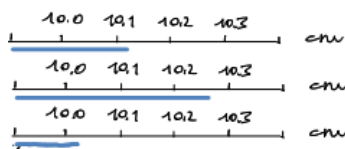
### Risoluzione Strumentale (Risoluzione)



$$D = (1,35 \pm 0,05) \text{ cm} \rightarrow \text{risoluzione} = \text{metà graduazione}$$

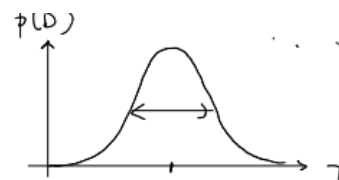
$$D = (1,3 \pm 0,1) \text{ cm} \rightarrow \text{soprastima incertezza ma OK}$$

## Inceteeze Statistiche (Precisione)



$$D = (10,05 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$D = (10,25 \pm 0,05) \text{ cm}$$



## Errori Sistematici (Accuratezza)

Inceteeza assoluta

$$\Delta x$$

$$\Delta D = 0,05 \text{ cm}$$

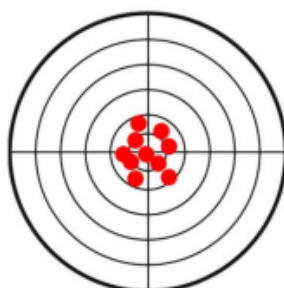
Inceteeza relativa

$$\frac{\Delta x}{|x|}$$

$$\frac{\Delta D}{|D|} = \frac{0,05}{1,35} = 0,037 = 3,7 \%$$

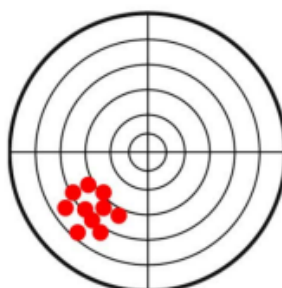
## Differenza tra Precisione e Accuratezza

+ PRECISIONE  
+ ACCURATEZZA

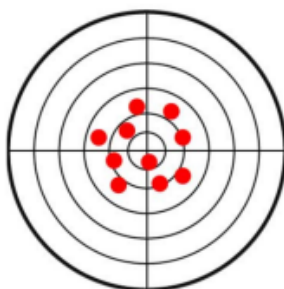


BIAS-VARIANCE  
TRADEOFF

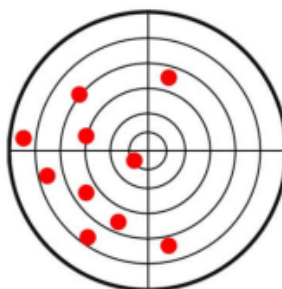
+ PRECISIONE  
- ACCURATEZZA



- PRECISIONE  
+ ACCURATEZZA

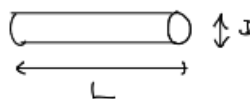


- PRECISIONE  
- ACCURATEZZA



## Cifre Significative





$$V = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot L \quad D = (1,35 \pm 0,05) \text{ cm} \quad L = (5,45 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$V = 7,800835 \text{ cm}^3$$

$$D = (0,0135 \pm 0,0005) \text{ m}$$

$$D = (1,3523 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$D = 1,35 \text{ cm} \quad \text{di default tutte le cifre sono significative} \quad \pm 1$$

## Regole per la Scrittura $X \pm \Delta X$

1.  $\Delta X$  : riporto una sola cifra significativa, a meno che essa non sia 1 (in quel caso, se possibile, ne riporto 2)
2.  $X$  : riporto tutte le cifre fino all'ordine di grandezza dell'incertezza (arrotondando l'ultima cifra secondo la regola del numero pari)

$$0,125 \rightarrow 0,12 \quad 0,135 \rightarrow 0,14$$

## Esempi di Scrittura $X \pm \Delta X$

OK

$$g = (9,81 \pm 0,05) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = (9,81 \pm 0,16) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Delta t = (0,157 \pm 0,002) \text{ s}$$

$$\Delta t = (1,57 \times 10^{-1} \pm 2 \times 10^{-3}) \text{ s}$$

$$\Delta t = 1,57 \times 10^{-1} \text{ s} \pm 3\%$$

NOT OK

$$g = 9,81 \pm 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = (9,81 \pm 0,05) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Delta t = (0,157 \pm 0,05) \text{ s}$$

$$\Delta t = (1,57 \times 10^{-2} \pm 2 \times 10^{-2}) \text{ s}$$

$$\Delta t = 1,57 \times 10^{-1} \text{ s} \pm 0,1\%$$

Strumento di misura

Grandezza fisica / ambiente

Risoluzione

Precisione

Fluttuazioni / rumore

↓  
Incertezza estesa

↓  
Incertezza statistica

## Propagazione delle Incertezze

$$\begin{array}{l} \text{Cilindro} \downarrow \\ D = (1,35 \pm 0,05) \text{ cm} \quad A = \frac{\pi}{4} D^2 \quad A = 1,431388 \text{ cm}^2 \\ L = (5,15 \pm 0,05) \text{ cm} \quad V = \frac{\pi}{4} D^2 L \quad V = 7,371649 \text{ cm}^3 \end{array}$$

$$A_{\max} = \frac{\pi}{4} (D + \Delta D)^2 = \frac{\pi}{4} (D^2 + 2D\Delta D + \Delta D^2)$$

$$A_{\min} = \frac{\pi}{4} (D - \Delta D)^2 = \frac{\pi}{4} (D^2 - 2D\Delta D + \Delta D^2)$$

$$\Delta A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2} = \frac{\pi}{4} 2D\Delta D = 2 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\Delta D}{D} = 2 A \frac{\Delta D}{D}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta D}{D} = 2 \times 0,037 = 0,074 = 7,4\% \Rightarrow \Delta A = 0,074 \times 1,431388 \text{ cm}^2 = 0,106 \text{ cm}^2$$

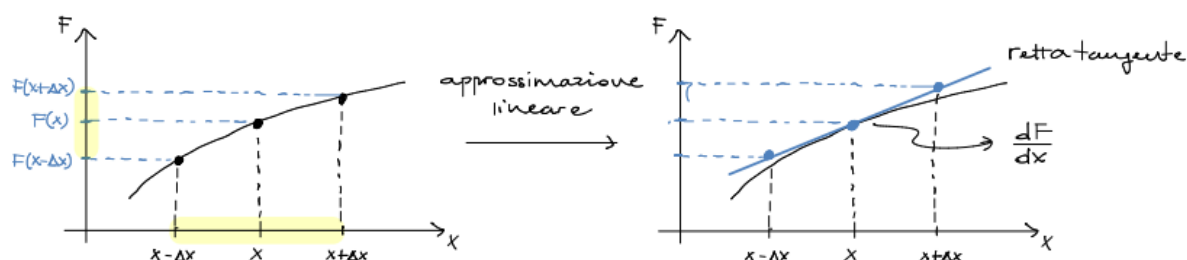
$$A \pm \Delta A = (1,43 \pm 0,11) \text{ cm}^2$$



Regola pratica: nel caso di funzioni che coinvolgono coefficienti esatti e/o leggi di potenza, conservo il numero di cifre significative

## Propagazione dell'Incertezza: Funzione di 1 Variabile

$$X \pm \Delta X \rightarrow F(X) \rightarrow \Delta F = ?$$



Sviluppo in serie di Taylor di  $F$  nell'intorno di  $x$

$$\begin{cases} F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{dF}{dx} \Delta x + o(\Delta x^2) \\ F(x - \Delta x) = F(x) - \frac{dF}{dx} \Delta x + o(\Delta x^2) \end{cases}$$

$$\Delta F = \frac{|F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x)|}{2} = \left| \frac{dF}{dx} \right| \Delta x \rightarrow \text{regola di propagazione di un'incertezza estesa}$$

$$\text{Es: } F(x) = cx^2 \quad x \pm \Delta x \rightarrow \Delta F = ?$$

$$\frac{dF}{dx} = 2cx \quad \Delta F = 2|c||x|\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta F}{|F|} = \frac{2|c||x|\Delta x}{|c||x|^2} = 2 \frac{\Delta x}{|x|}$$

## Approssimazione Lineari Utili

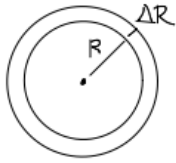
## Approssimazioni lineari utili $|x| \ll 1$

$$1) (1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

$$2) \exp(x) \approx 1 + x$$

$$3) \log(1+x) \approx x \quad F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}$$

Es: volume di una corona sferica  $\Delta R \ll R$



$$V = \frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left[ R^3 \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^3 - R^3 \right]$$

$$\approx \frac{4}{3}\pi \left[ R^3 \left(1 + 3 \frac{\Delta R}{R}\right) - R^3 \right] = \underbrace{4\pi R^2}_{\text{area base}} \cdot \underbrace{\Delta R}_{\text{altezza}}$$

$$V_S = \int_0^R dV = \int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

## Propagazione delle Incertezze: Funzione di 2 Variabili

$$X \pm \Delta X, Y \pm \Delta Y \rightarrow F(X, Y) \rightarrow \Delta F = ? \quad \Delta F = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2}$$

1) **Somma**:  $F = X + Y$

$$\begin{aligned} F_{\max} &= (X + \Delta X) + (Y + \Delta Y) = X + Y + (\Delta X + \Delta Y) \\ F_{\min} &= (X - \Delta X) + (Y - \Delta Y) = X + Y - (\Delta X + \Delta Y) \end{aligned} \Rightarrow \Delta F = \Delta X + \Delta Y$$

2) **Differenza**:  $F = X - Y$

$$\begin{aligned} F_{\max} &= (X + \Delta X) - (Y - \Delta Y) = X - Y + (\Delta X + \Delta Y) \\ F_{\min} &= (X - \Delta X) - (Y + \Delta Y) = X - Y - (\Delta X + \Delta Y) \end{aligned} \Rightarrow \Delta F = \Delta X + \Delta Y$$

3) **Prodotto**:  $F = XY \quad X, Y > 0$

$$\begin{aligned} F_{\max} &= (X + \Delta X)(Y + \Delta Y) = XY + X\Delta Y + Y\Delta X + \Delta X\Delta Y \\ F_{\min} &= (X - \Delta X)(Y - \Delta Y) = XY - X\Delta Y - Y\Delta X + \Delta X\Delta Y \end{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$

4) **Divisione**:  $F = \frac{X}{Y}$

$$\begin{aligned} F_{\max} &= \dots \dots \dots a, b \in \mathbb{R} \\ F_{\min} &= \dots \dots \dots \uparrow \uparrow \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{X\Delta Y + Y\Delta X}{XY} \Rightarrow \frac{\Delta F}{F} = |a| \frac{\Delta X}{X} + |b| \frac{\Delta Y}{Y}$$

5) **Legge di potenza**:  $F = X^a Y^b \Rightarrow$

$$\frac{\Delta F}{F} = |a| \frac{\Delta X}{X} + |b| \frac{\Delta Y}{Y}$$

⊕ Si sommano le incertezze ASSOLUTE

⊗ Si sommano le incertezze RELATIVE

## Esempi

Applicazione:  $V = \frac{\pi}{4} D^2 L = A L$

$$\frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L} \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta L}{L} = 0,074 + 0,0097 = 0,0837 = 8,37\%$$

$$\Delta V = 0,0837 \times 7,37 \text{ cm}^3 = 0,617 \text{ cm}^3$$

$$V = 7,37 \text{ cm}^3$$

$$V \pm \Delta V = (7,4 \pm 0,6) \text{ cm}^3$$

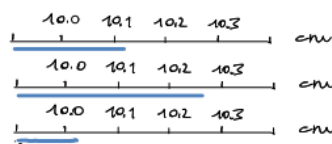
Es.: incertezza su  $F = X^2 - Y^2$  con  $X \pm \Delta X$ ,  $Y \pm \Delta Y \rightarrow \Delta F = ?$

Applicazione numerica:  $X = (1,01 \pm 0,01)$   $Y = (1,00 \pm 0,01)$

$$F \pm \Delta F = 0,02 \pm 0,04 \quad \frac{\Delta F}{|F|} = 200\%$$

## Incerteze Statistiche e loro Propagazione

$x_1, x_2, \dots, x_N$   $N$  misure



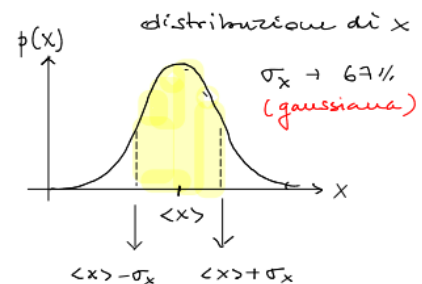
$$x = (10,15 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$x = (10,25 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$x = (10,05 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Valore medio:  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

Deviazione standard:  $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$



1) Somma e differenza:  $\sigma_F^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad F(x, y)$

2) Prodotto e divisione:  $\left(\frac{\sigma_F}{\langle F \rangle}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{\langle x \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\langle y \rangle}\right)^2$