Analisi Matematica II

Appunti di Davide Gaetano Barberi, Corso di Intelligenza Artificiale and Data Analytics, A.A 2022/23.

Integrali Generalizzati (o Impropri)

Funzione Localmente Integrabile

Sia J un intervallo qualunque.

Sia $f : J \to \mathbb{R}$.

f si dice **localmente integrabile su** J se f è integrabile su ogni intervallo compatto $K \subseteq J$.

Continua/Monotona, allora Localmente Integrabile

Se $f : J \to \mathbb{R}$ è continua o monotona, allora f è **localmente integrabile** su J.

Localmente Integrabile, allora Continua

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile.

Sia $c \in J$.

La funzione integrale:

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

con $x \in J$, è **continua in J.**

Inoltre, $\forall d \in J$,

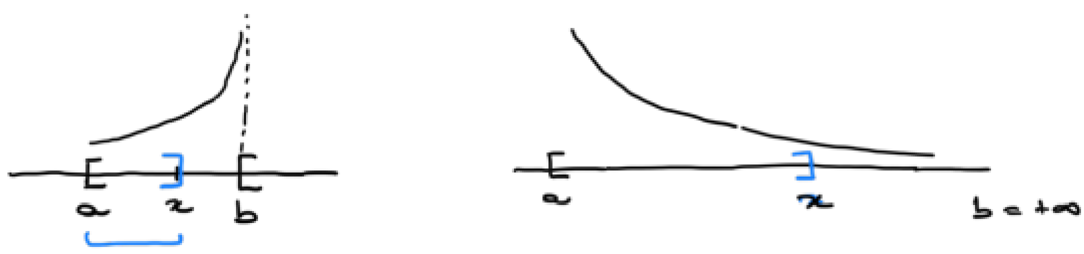
$$\lim_{x \to d} F(x) = F(d)$$

Funzioni Integrabili in Senso Generalizzato

1. Sia $J = [a, b[$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J.

   f si dice **integrabile in senso generalizzato su J** se esiste finito il limite:

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt =: \int_a^b f(t)dt$$



2. Sia $J =]a, b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile.

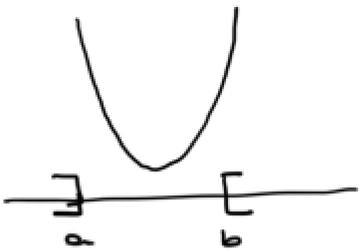
   f si dice **integrabile in senso generalizzato su J** se esiste finito il limite:

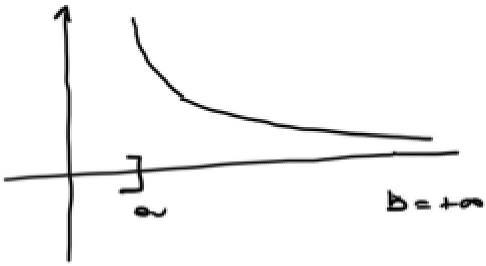
$$\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)dt := \int_a^b f(t)dt$$

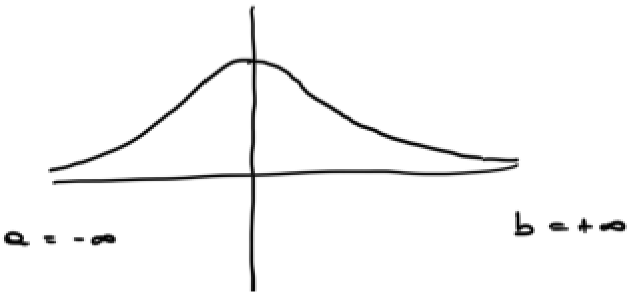
3. Sia $J =]a,b[$ con $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J.

   f si dice **integrabile in senso generalizzato su** J **se esiste $c \in J$ tale che f è integrabile in senso generalizzato su $]a,c]$ e $[c,b[$** e si pone:

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$







Esempi Pratici

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\qquad J = [0;1[$

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1} -2\left(\sqrt{1-t} - \sqrt{1}\right) = 2$$

2) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \to -\infty} e^x \Big|_t^0 =$

$= \lim_{t \to -\infty} [1 - e^t] = 1$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$

$\lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= \lim_{t \to -\infty} \arctan(0) - \arctan(t) + \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) - \arctan(0)$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Integrabilità in Senso Generalizzato delle Funzioni Campione

Teorema: J Illimitato.

1. Sia $J = [a, +\infty[$ con $a > 0$.

   Si ha che $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha > 1$.

2. Sia $J =]-\infty, b]$ con $b < 0$.

   Si ha che $\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{|x|^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha > 1$.

Dimostrazione:

dim: 1. Si ha che

$$\int_a^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_a^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) & \alpha \neq 1 \\ [\log(x)]_a^t = \log t - \log a & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

2. In maniera analoga.

Teorema: J Limitato.

1. Sia $J = [a, b[$ con $0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   Si ha che $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha < 1$.

2. Sia $J =]a, b]$ con $0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   Si ha che $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha < 1$.

Dimostrazione:

dim: 1.

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt = \begin{cases} \left[-\frac{1}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha}\right] & \alpha \neq 1 \\ \left[-\log(b-t)\right]_a^x = \log(b-a) - \log(b-x) & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

> 💡 Non si legge molto bene, ma la prima condizione è; $\alpha \neq 1$.

Teorema (Aut - aut per l'Integrale Generalizzato)

Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ localmente integrabile.

Sia $f \geq 0$ in $J = [a, b[$, allora **esiste finito a $+\infty$ il limite:**

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = sup_{x \in J} \int_a^x f(t)dt$$

Dimostrazione:

dim: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente, dunque per il teorema sul limite delle funzioni monotone il limite esiste finito o $+\infty$

$$\lim_{x \to b} F(x) = \sup_{x \in J} F(x)$$

Osservazione:

$f(t) = \cos(t)$ allora il limite $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \cos(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ **NON ESISTE.**

Criterio di Confronto

Siano $f, g : J = [a, b[\to \mathbb{R}$

Siano f, g localmente integrabili tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in J.

Si ha che

1. se g è integrabile in senso generalizzato su J, allora lo è anche f e

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2. se f **NON** è integrabile in senso generalizzato su J, allora NON lo è nemmeno g.

Dimostrazione:

dim: 1) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^x g(t)\,dt = G(x)$

Per il teorema dell'aut-aut, esiste

$$\lim_{x \to b} F(x) = \sup_{x \in J} F(x) \le \sup_{x \in J} G(x) = \lim_{x \to b} G(x) < +\infty$$

per ipotesi

e dunque anche f è integrabile in senso generalizzato su J e inoltre

$$\int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt$$

2) È l'implicazione controronominale di 1.

$p \Rightarrow q$ equiv $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

■

Corollario: Criterio del Confronto Asintotico

Siano $f, g : J = [a, b[\to \mathbb{R}$ localmente integrabili e tali che $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ in J ed esista

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in]0; +\infty[$$

allora f e g: o sono **ENTRAMBE** integrabili in senso generalizzato oppure **NESSUNA** delle due lo è.

Dimostrazione:

dim: Dalla definizione di limite con $\varepsilon = \frac{L}{2}$ si trova $\exists\, c \in J$ t.c.

$$\frac{1}{2} L\, g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} L\, g(x) \qquad \text{per ogni } x \in [c, b[.$$

[$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in [b-\delta, b[$ si ha che

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} - L \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon\, g(x) \leq f(x) - L\, g(x) \leq \varepsilon\, g(x) \qquad \text{scegliendo } \varepsilon = \frac{L}{2}$$

si ha che $\quad \frac{1}{2} L\, g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} L\, g(x)$

e $c = b - \delta(\varepsilon)$ con $\varepsilon = \frac{L}{2}$]

- $0 < f(x) \leq \frac{3}{2} L\, g(x)$
  dunque se g è integrab. allora dal criterio del confronto anche f lo è

- $0 < \frac{1}{2} L\, g(x) \leq f(x)$
  dunque se g non è integrabile allora dal criterio del confronto nemmeno f lo è.

∎

Esercizi - Confronto Asintotico

Es.

Stabilire se è finito

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

Tentiamo di usare il teorema del confronto asintotico in $J =]0,1]$ con $f(x) = \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\alpha}$ con $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 1 \in]0;+\infty[$$

Dunque poichè $g(x)$ è integrabile lo è anche f.

Es. Stabilire se è finito

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x \operatorname{arctang}(x)}{x^3+x+\cos(x)}\,dx$$

Funzioni Assolutamente e Semplicemente Integrabili in Senso Generalizzato

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile.

- Si dice che f è **assolutamente integrabile in senso generalizzato** se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato.
- Si dice che f è **semplicemente integrabile in senso generalizzato** se f è integrabile in senso generalizzato, $|f|$ NON è integrabile in senso generalizzato.

Teorema: Assolutamente Integrabile in Senso Generalizzato, allora Integrabile in Senso Generalizzato

Se $f : J \to \mathbb{R}$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato, allora f è integrabile in senso generalizzato e

$$\left|\int_J f(x)dx\right| \leq \int_J |f(x)|dx$$

Dimostrazione:

dim: Si ha che $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e
$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

dove f^+ ed f^- sono risp. la parte positiva e la parte negativa di f. ($f^+, f^- \geq 0$).

Vale
$0 \leq f^+ \leq |f|$
$0 \leq f^- \leq |f|$ in senso gen.

$\Rightarrow$ f^+ ed f^- sono integrabili e dunque
$f = f^+ - f^-$ anche è integrabile in senso gener.

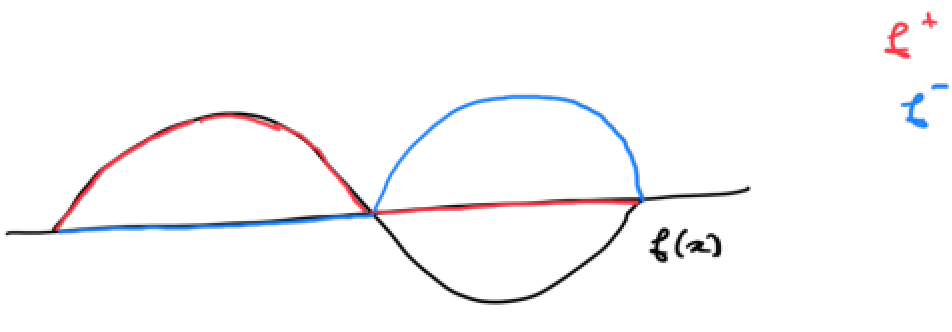
Inoltre si ha

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

allora

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$



Esempi di Funzioni Assolutamente Integrabili

Esempio:

$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ in $J = [1; +\infty[$

è assolutamente integrabile? SI.

Infatti dalla disuguaglianza

$\left| \dfrac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \dfrac{1}{x^2} \quad \forall x \in J$ e dal teorema

del confronto si deduce che f è assolutam. integrabile. Si ricorda che $\dfrac{1}{x^2}$ è integr. in J.

Es. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ è semplicemente integrabile in senso generalizz. su $[1; +\infty[$.

Criterio dell'Ordine di Infinitesimo (J Illimitato)

Sia $f : J = [a; +\infty[\to \mathbb{R}$

Sia f localmente integrabile.

Si ha:

1. Se $\exists \alpha > 1 : \lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in [0; +\infty[$

   allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato

2. Se $\exists \alpha \leq 1 : \lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

   allora f NON è assolutamente integrabile in senso generalizzato.

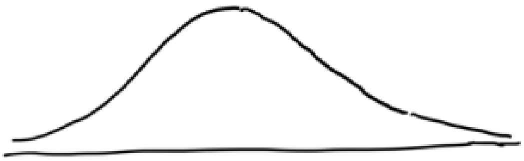
Dimostrazione:

dim: 1). Idea teorema confronto tra $|f(x)|$ e $\frac{1}{x^{\alpha}}$.

2) " " $|f(x)|$ e $\frac{1}{x^{\alpha}}$

∎

Es. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$



$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} \cdot x^{\alpha} = 0$ con $\alpha > 1$

dunque per il criterio di ordine di infinitesimo deduco che e^{-x^2} è integr. in senso gen. su $[0;+\infty[$

Criterio dell'Ordine di Infinito (J Limitato)

Sia $f : J = [a, b[\to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$.

Sia f localmente integrabile.

Si ha che:

1. Se $\exists \alpha < 1 : \lim_{x \to b^-} |f(x)| \cdot x^{\alpha} = L \in [0; +\infty[$

   allora f è assolutamente inegrabile in senso generalizzato

2. Se $\exists \alpha \geq 1 : \lim_{x \to b^-} |f(x)| \cdot x^{\alpha} = L \in]0; +\infty[\cup \{+\infty\}$

   allora f NON è assolutamente integrabile in senso generalizzato

Esempio (cenno).

La funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è semplicemente integrab.

in $J = [1; +\infty[$

- Idea: f è integrab. in senso generalizzato

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x}\, dx =$$

Integrando per parti

$$\dots = \underbrace{\frac{1}{x}(-\cos(x))\Big|_1^t}_{a} - \underbrace{\int_1^t \frac{1}{x^2}\cos(x)\, dx}_{b}$$

- Idea: $|f|$ non è integr. in senso generaliz.

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} \qquad \sin^2(x) = |\sin(x)|\underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1} \leq |\sin(x)| \cdot 1$$

Vogliamo dimostrare che $\frac{\sin^2(x)}{x}$ non è integr. in senso. gener. e poi applicare i teoremi del confronto.

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

💡 Nei due Criteri scritti sopra, ti può aiutare pensare $|f(x)| \cdot x^\alpha$ come $\frac{|f(x)|}{1/x^\alpha}$ e considerando che $\frac{1}{x^\alpha}$ è stata analizzata nei teoremi precedenti come funzione campione

Serie Numeriche

Serie di Termine Generale

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri in $\mathbb{R}$.

Si dice **serie di termine generale a_n** la somma formale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Somma Parziale Associata ad una Serie

Per ogni indice n della successione, si definisce la **somma pariale (o ridotta)** s_n associata ad $(a_n)_n$ come

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Serie Convergente, Serie Divergente e Serie Indeterminata

- Si dice che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **convergente** se esiste finito

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = s$$

s si dice **somma della serie** e si scrive $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- Se

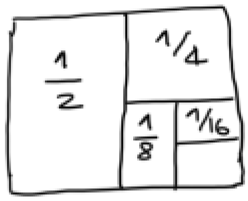
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty (o \ -\infty)$$

la serie si dice **divergente a $+\infty (o \ -\infty)$.**

- Se NON esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$, la serie si dice **indeterminata**.

Esempi

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$



converge

- $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$ diverge

$s_n = 1 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \longrightarrow +\infty$

- $1 - 1 + 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ è indeterm.

- ...

$s_{2n} = 0$ dunque non esiste il $\lim_{n \to +\infty} s_n$

$s_{2n+1} = 1$

Serie Geometrica

Consideriamo

$$a + ak + ak^2 + \dots + a\cdot k^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a\cdot k^n$$

con $a, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Il numero k si dice

ragione della serie.

Si ha che

$$s_n = a + \dots + a\cdot k^{n-1} = \begin{cases} na & \text{se } k = 1 \\ a\cdot\dfrac{1-k^n}{1-k} & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$$

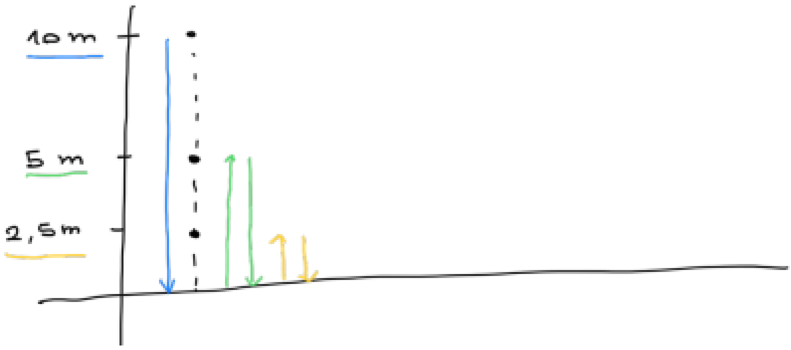
La serie è convergente se $|k| < 1$ con somma $a\cdot\dfrac{1}{1-k}$

" " " divergente se $k \geq 1$

" " " indeterminata se $k \leq -1$.

Es. La pallina che rimbalza

Supponiamo di far cadere una pallina da una quota di 10 m. di altezza e ad ogni rimbalzo arriva a metà della quota raggiunta al rimbalzo precedente.
Qual è la distanza totale che percorre la pallina?



$$D = 10 + \underbrace{10 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{in alto}} + \underbrace{10 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{basso}} + \underbrace{10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{in alto}} + \underbrace{10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{basso}} + \dots$$

$$= 10 + 20 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

$$D = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\substack{\text{è una serie} \\ \text{geom. di ragione } \frac{1}{2} \\ \text{che converge.}}} - 10 = 40 - 10 = 30$$

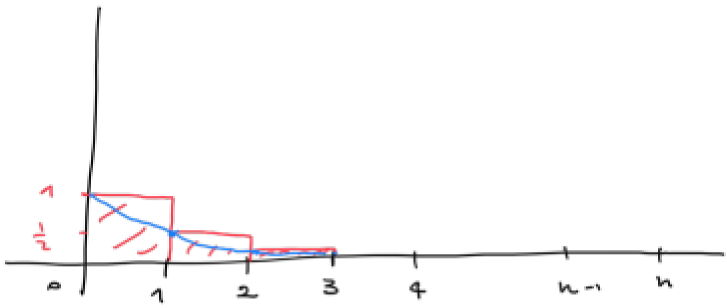
$$\frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = 40$$

Serie Armonica

Consideriamo la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$



$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx = \log(x+1)\Big|_0^n$$

$$= \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

La serie diverge a $+\infty$.

Serie di Mengoli (Serie Telescopica)

Consideriamo

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cancel{\cdot} \cancel{\cdot} \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

La serie converge con somma 1.

Condizione Necessaria per la Convergenza della Serie

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Dimostrazione:

dim: $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ e di conseguenza $a_{n+1} \to 0$

$$\begin{array}{cc} s_{n+1} & s_n \\ \downarrow & \downarrow \text{ per } n \to +\infty. \\ s & s \end{array}$$

💡 La condizione è necessaria ma non sufficiente. Infatti la serie armonica ha termine generale $a_n = \frac{1}{n}$ che tende a zero ma la serie diverge.

Serie Resto

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, Sia $N \in \mathbb{N}^+$, la serie $\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ si dice serie resto N-esimo.

💡 La serie e la serie resto hanno lo stesso carattere, infatti:

Considero un indice $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N+k} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{N+k} a_n}$$

se la serie resto converge ad esempio a s^N allora anche la serie di partenza convergerà e lo farà a

$$\sum_{n=1}^{N} a_n + s^N$$

e viceversa.

Criterio di Convergenza di Cauchy (Condizione Necessaria e Sufficiente per la Convergenza)

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\iff$

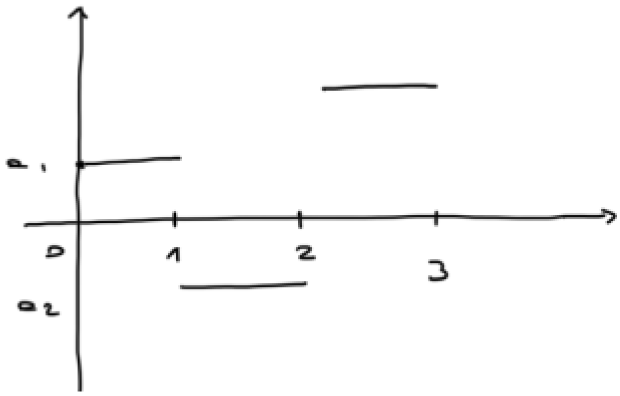
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, \forall p > 0, |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$

  e

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, \forall p > 0, |a_{n+p} + a_{n+p-1} + ... + a_{n+1}| < \varepsilon$

Relazione tra Serie e Integrali Generalizzati

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e definiamo la funzione a scalino $a : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ ponendo $a(x) = a_n$ per $n - 1 \leq x \leq n$



La funzione $a(x)$ è una funzione localmente integrabile su $[0; +\infty[$ e vale

$$\int_0^n a(x)dx = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n$$

Teorema

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge con somma s $\iff$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x a(t)dt = \int_0^{+\infty} a(t)dt = s$$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ (o a $-\infty$) $\iff$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x a(t)dt = +\infty \ (o \ -\infty)$$

Dimostrazione:

dim: ① Se considero $n \le x < n+1$ allora si ha che

$$\int_0^x a(t)\,dt = \int_0^n a(t)\,dt + \int_n^x a_{n+1}\,dt = s_n + a_{n+1}\cdot(x-n) \qquad (*)$$

$\Leftarrow$ Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x a(t)\,dt = s$ allora in particolare

esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n a(t)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$

$\Rightarrow$ Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ allora per $n \le x < n+1$

per (*) si ha che

$$\int_0^x a(t)\,dt = \underset{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ s}}{s_n} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perché la serie} \\ \text{è converg.}}}{a_{n+1}} \cdot \underbrace{(x-n)}_{\text{è limitato.}}$$

② $\Leftarrow$ Come prima

$\Rightarrow$ Supponiamo che la serie diverga $+\infty$, cioè

$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$

Si ha che per $n \leq x < n+1$

- se $a_{n+1} \geq 0$

$s_n \leq \int_0^x a(t)\,dt = s_n + a_{n+1} \cdot (x-n) \leq s_{n+1}$

se $a_{n+1} < 0$

$s_{n+1} \leq \int_0^x a(t)\,dt \leq s_n$

In conclusione si ha che

$\min\{s_n, s_{n+1}\} \leq \int_0^x a(t)\,dt \leq \max\{s_n, s_{n+1}\} \quad \underline{\forall n}$

Allora si $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty = \lim_{+\infty} s_{n+1}$, dunque

$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x a(t)\,dt = +\infty$

Serie a Termini Positivi

Teorema di Aut-Aut per le Serie a Termini non Negativi

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è tale che $\forall n, a_n \geq 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ o converge o diverge a $+\infty$.

Dimostrazione: Monotonia di s_n.

Criterio del Confronto

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ tali che $\forall n$ valga

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Si ha che:

1. se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge;
2. se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Esempi

Es. • $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}}_{a_n}$ $\qquad \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n} \le \frac{3^n+3^n}{0+4^n} = \underbrace{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{b_n}$

Osservando che b_n è il termine generale di una serie geometrica convergente (perché la ragione della serie è $\frac{3}{4}$) e usando il criterio del confronto deduco che la serie converge con somma s ($s<6$)

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ questa serie diverge in quanto $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$

↳ termine generale di una serie divergente.

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{\ } \le \frac{1}{\ }$

$n^2 \qquad (n-1)\cdot n$ ↳ termine generale della serie di Mengoli.

Serie Armonica Generalizzata

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, con $p > 0$

- se $0 < p < 1$ allora la serie diverge a $+\infty$
- se $p > 1$ allora la serie è convergente con somma $s \le \frac{p}{p-1}$.

Criterio dell'Ordine di Infinitesimo

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tale che $\forall n, a_n \geq 0.$

Si ha che

1. se esiste $p > 1$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n^p = L \in [0; +\infty[$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

2. se esiste $p \leq 1$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n^p = L \in]0; +\infty[\cup \{+\infty\}$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Dimostrazione:

dim ① Perché $a_n \cdot n^p$ converge allora $\exists\, k > 0$ ed $\exists\, \bar{n}$ t.c.

$a_n \cdot n^p \leq k \quad \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow a_n \leq \frac{k}{n^p} \quad \forall n \geq \bar{n}$ e

dunque essendo $p > 1$ allora per il teorema del confronto segue la tesi.

Esempio

Es. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + 2\arctan(n)}{n^2+n+1}$

Vediamo se il termine generale va a zero

$$\frac{\sqrt{n} + 2\arctan(n)}{n^2+n+1} = \frac{\sqrt{n}\left(1 + \frac{2\arctan(n)}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \sim n^{-3/2} \to 0$$

Usando il criterio dell'ordine di infinitesimo con $p = \frac{3}{2}$ e osservando che

$$a_n \cdot n^p = \frac{\sqrt{n} + 2\arctan(n)}{n^2+n+1} \cdot n^{3/2} =$$

$$= n^{-3/2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{2\arctan(n)}{\sqrt{n}}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \cdot n^{3/2} = 1$$

Criterio del Rapporto

Se $a_n > 0 \forall n$ ed $\exists K \in]0,1[$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K \ \ \forall n$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge**.

Dimostrazione:

dim: $a_2 \leq K a_1$

$a_3 \leq K a_2 \leq K^2 a_1$

$\vdots$

$a_n \leq \dots \leq K^{n-1} \cdot a_1$

Il termine generale a_n è maggiorato dal termine generale di una serie geometrica di ragione $K \in]0;1[$ e di conseguenza per il criterio del confronto si ha la tesi. ■

Esempio

Es. Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}}$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty}$$

$$\frac{1}{e}$$

$\frac{1}{e} \in]0,1[$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{e} \right| < \varepsilon$

Dunque $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{e} < \varepsilon \quad$ e quindi

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + \frac{1}{e}$

Dunque scegliendo $\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{2}$

si trova che $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \underbrace{1 - \frac{1}{2e}}_{:=K} < 1 \quad \forall n \geq \bar{n}$

Dunque la serie converge

Criterio del Rapporto con il Limite

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tale che $a_n > 0 \forall n$ e tale che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

allora:

1. se $L < 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge**
2. se $L > 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **diverge**.

Criterio della Radice

Se $a_n \geq 0 \; \forall n$ ed $\exists K \in]0;1[$: $\sqrt[n]{a_n} \leq K \forall n$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge**.

Dimostrazione: Criterio del Confronto + Convergenza Serie Geometrica di ragione K.

Criterio della Radice con il Limite

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tale che $a_n \geq 0 \forall n$ ed esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

allora:

1. se $L < 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge**
2. se $L > 1$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **diverge**.

Esempio

Es. Studiamo il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

Dunque per il criterio della radice con il limite deduciamo che la serie converge.

> 💡 Se una serie verifica il criterio del rapporto allora verifica anche il criterio della radice, mentre il viceversa non vale. Esempio:
>
> $$a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$
>
> $$a_n = \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

Serie di Termini Qualsiasi

Serie Assolutamente e Semplicemente Convergenti

- Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **assolutamente** convergente se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente
- Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **semplicemente** convergente se è convergente ma $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

Esempi

Esempi

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ è assolutamente convergente,

  in quanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è converg.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ è semplicem. convergente.

Teorema: Serie Assolutamente Convergente allora Convergente

Se una serie è assolutamente convergente allora **è convergente**.

Dimostrazione:

dim: Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge allora

per il criterio di Cauchy (per serie)

sappiamo che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n, \forall p \quad n > \bar{n}$ si ha che

$$\left| |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \right| < \varepsilon$$

Poiché

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq \left| |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| \right| < \varepsilon$$

allora per il criterio di Cauchy deduco

che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. ■

Serie con i Termini di Segno Alternato

Sia $a_n > 0 \forall n$. La serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n \ \ (o \ \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \cdot a_n)$$

si dice **serie con i termini di segno alternato**.

Criterio di Leibnitz

Supponiamo che:

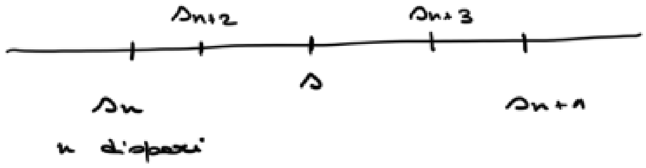
1. $a_n > 0 \forall n$
2. $a_{n+1} \leq a_n \forall n$
3. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n$ **converge**.

Inoltre $|s - s_n| \leq a_{n+1}$

Dimostrazione:

dim:



- $s_{2k+1} = s_{2k} \underbrace{- a_{2k+1}}_{+(-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1}} = s_{2k-1} \overbrace{+ a_{2k} - a_{2k+1}}^{\geq 0 \text{ per ip } 2)} \geq s_{2k-1} \geq \dots \geq s_1$

- $s_{2k+2} = s_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} \overbrace{- a_{2k+1} + a_{2k+2}}^{\leq 0 \text{ per ip } 2)} \leq s_{2k} \leq s_2$

- $s_1 \leq \dots \leq s_{2k+1} = s_{2k} \overbrace{- a_{2k+1}}^{\leq 0} \leq s_{2k} \leq \dots \leq s_2$

Dunque s_{2k+1} è crescente, s_{2k} è decrescente ed entrambe sono limitate. Dunque esistono

... limiti

finiti e ...

$$\lim_{k \to +\infty} s_{2k+1} = s' \quad e \quad \lim_{k \to +\infty} s_{2k} = s''$$

$$\underset{s'}{\underset{\downarrow}{s_{2k+1}}} = \underset{s''}{\underset{|}{s_{2k}}} - \underbrace{a_{2k+1}}_{\substack{\downarrow \ \text{per ipotesi 3)} \\ 0}}$$

Dunque $s = s' = s''$ e quindi $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$

Stima dell'errore.

Per ogni h e k si ha che

$$s_{2k+1} \leq s \leq s_{2h}$$

e quindi

$$|s_n - s| = \begin{cases} s - s_{2k+1} \leq s_{2k+2} - s_{2k+1} = a_{2k+2} & \text{se } n = 2k+1 \\ s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1} & \text{se } n = 2k \end{cases}$$

e dunque $|s_n - s| \leq a_{n+1} \quad \forall n.$

Esempio

Esempio.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \qquad \text{con } p>0$$

- Se $0 < p \leq 1$ è una serie semplicemente convergente in quanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{diverge}$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p}$ converge in virtù del criterio di Leibnitz

assolutam. converg.

- Se $p>1$ è una serie assolutam... .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge.}$$