Analisi Matematica II

Appunti di Davide Gaetano Barberi, Corso di Intelligenza Artificiale and Data Analytics, A.A 2022/23.

Integrali Generalizzati (o Impropri)

Funzione Localmente Integrabile

Sia J un intervallo qualunque.

Sia $f : J \to \mathbb{R}$.

f si dice **localmente integrabile su J** se f è integrabile su ogni intervallo compatto $K \subseteq J$.

Continua/Monotona, allora Localmente Integrabile

Se $f : J \to \mathbb{R}$ è continua o monotona, allora f è **localmente integrabile** su J.

Localmente Integrabile, allora Continua

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile.

Sia $c \in J$.

La funzione integrale:

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

con $x \in J$, è **continua in J.**

Inoltre, $\forall d \in J$,

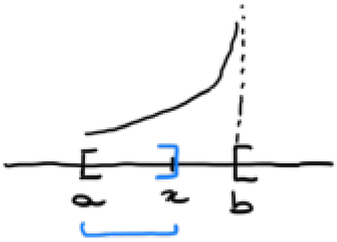
$$\lim_{x \to d} F(x) = F(d)$$

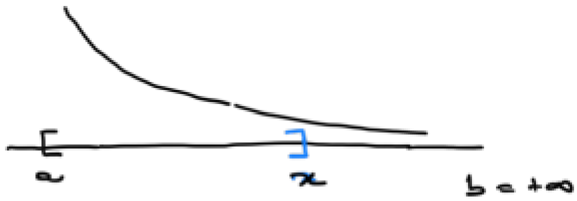
Funzioni Integrabili in Senso Generalizzato

1. Sia $J = [a, b[$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J.

f si dice **integrabile in senso generalizzato su** J se esiste finito il limite:

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt =: \int_a^b f(t)dt$$





2. Sia $J =]a, b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile.

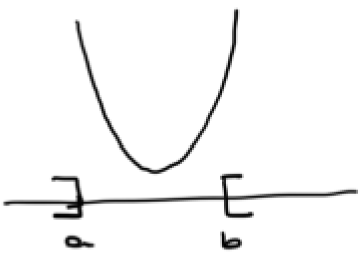
   f si dice **integrabile in senso generalizzato su** J se esiste finito il limite:

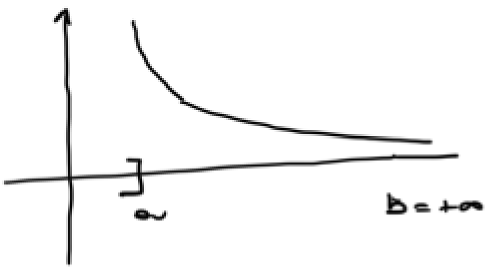
$$\lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt := \int_a^b f(t)dt$$

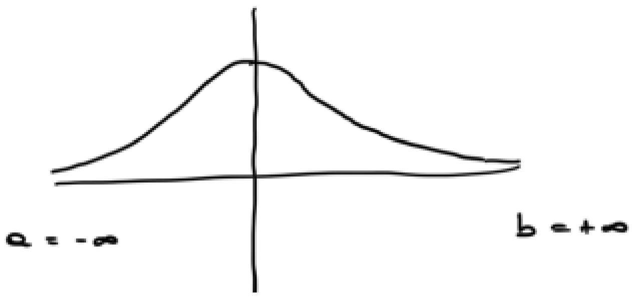
3. Sia $J =]a, b[$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J.

   f si dice **integrabile in senso generalizzato su** J **se esiste $c \in J$ tale che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, c]$ e $[c, b[$** e si pone:

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$







Esempi Pratici

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\qquad J=[0;1[$

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{t\to 1}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1} -2\left(\sqrt{1-t}-\sqrt{1}\right) = 2$$

2) $$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} e^x\Big|_t^0 =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[1-e^t\right] = 1$$

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \arctan(0)-\arctan(t) + \lim_{t\to+\infty} \arctan(t)-\arctan(0)$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

Integrabilità in Senso Generalizzato delle Funzioni Campione

Teorema: J Illimitato.

1. Sia $J=[a,+\infty[$ con $a>0$.

   Si ha che $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ **esiste finito** $\iff \alpha>1$.

2. Sia $J =]-\infty, b]$ con $b < 0$.

   Si ha che $\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{|x|^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha > 1$.

Dimostrazione:

dim: 1. Si ha che

$$\int_a^t \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_a^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) & \alpha \neq 1 \\ \left[\log(x)\right]_a^t = \log t - \log a & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

2. In maniera analoga.

Teorema: J Limitato.

1. Sia $J = [a, b[$ con $0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   Si ha che $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha < 1$.

2. Sia $J =]a, b]$ con $0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   Si ha che $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ **esiste finito** $\iff \alpha < 1$.

Dimostrazione:

dim: 1.

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha}\, dt = \begin{cases} \left[-\frac{1}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha}\right] & \alpha \neq 1 \\ \left[-\log(b-t)\right]_a^x = \log(b-a) - \log(b-x) & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

💡 Non si legge molto bene, ma la prima condizione è; $\alpha \neq 1$.

Teorema (Aut - aut per l'Integrale Generalizzato)

Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ localmente integrabile.

Sia $f \geq 0$ in $J = [a, b[$, allora **esiste finito a** $+\infty$ **il limite:**

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = sup_{x \in J} \int_a^x f(t)dt$$

Dimostrazione:

dim: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente, dunque per il teorema sul limite delle funzioni monotone il limite esiste finito a $+\infty$

$$\lim_{x \to b} F(x) = \sup_{x \in J} F(x)$$

∎

Osservazione:

$f(t) = \cos(t)$ allora il limite $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \cos(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ **NON ESISTE.**

Criterio di Confronto

Siano $f, g : J = [a, b[\to \mathbb{R}$

Siano f, g localmente integrabili tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in J.

Si ha che

1. se g è integrabile in senso generalizzato su J, allora lo è anche f e

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2. se f **NON** è integrabile in senso generalizzato su J, allora NON lo è nemmeno g.

Dimostrazione:

dim: 1) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt = G(x)$

Per il teorema dell' aut - aut, esiste

$$\lim_{x \to b} F(x) = \sup_{x \in J} F(x) \leq \sup_{x \in J} G(x) = \lim_{x \to b} G(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi}}}{<} +\infty$$

e dunque anche f è integrabile in senso generalizzato su J e inoltre

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$

2) È l'implicazione contronominale di 1.

$p \Rightarrow q$ equiv $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

■

Corollario: Criterio del Confronto Asintotico

Siano $f, g : J = [a, b[\to \mathbb{R}$ localmente integrabili e tali che $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ in J ed esista

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in]0; +\infty[$$

allora f e g: o sono **ENTRAMBE** integrabili in senso generalizzato oppure **NESSUNA** delle due lo è.

Dimostrazione:

dim: Dalla definizione di limite con $\varepsilon = \frac{L}{2}$ si trova $\exists c \in J$ t.c.

$$\frac{1}{2} L g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} L g(x) \quad \text{per ogni } x \in [c, b[.$$

[$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in [b-\delta, b[$ si ha che

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} - L \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon g(x) \leq f(x) - L g(x) \leq \varepsilon g(x)$$ scegliendo $\varepsilon = \frac{L}{2}$

si ha che $\frac{1}{2} L g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} L g(x)$

e $c = b - \delta(\varepsilon)$ con $\varepsilon = \frac{L}{2}$]

- $0 < f(x) \leq \frac{3}{2} L g(x)$

  dunque se g è integrab. allora dal criterio del confronto anche f lo è

- $0 < \frac{1}{2} L g(x) \leq f(x)$

  dunque se g non è integrabile allora dal criterio del confronto nemmeno f lo è.

∎

Esercizi - Confronto Asintotico

Es.

Stabilire se è finito

$$\int_0^1 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

Tentiamo di usare il teorema del confronto asintotico in $J =]0,1]$ con $f(x) = \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\alpha}$ con $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 1 \in]0;+\infty[$$

Dunque poiché $g(x)$ è integrabile lo è anche f.

Es. Stabilire se è finito

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x \arctan(x)}{x^3+x+\cos(x)}\,dx$$

Funzioni Assolutamente e Semplicemente Integrabili in Senso Generalizzato

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile.

- Si dice che f è **assolutamente integrabile in senso generalizzato** se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato.
- Si dice che f è **semplicemente integrabile in senso generalizzato** se f è integrabile in senso generalizzato, $|f|$ NON è integrabile in senso generalizzato.

Teorema: Assolutamente Integrabile in Senso Generalizzato, allora Integrabile in Senso Generalizzato

Se $f : J \to \mathbb{R}$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato, allora f è integrabile in senso generalizzato e

$$\left|\int_J f(x)dx\right| \leq \int_J |f(x)|dx$$

Dimostrazione:

dim: Si ha che $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

dove f^+ ed f^- sono risp. la parte positiva e la parte negativa di f. ($f^+, f^- \geq 0$).

Vale

$0 \leq f^+ \leq |f|$

$0 \leq f^- \leq |f|$ in senso gen.

$\Rightarrow$ f^+ ed f^- sono integrabili e dunque

$f = f^+ - f^-$ anche è integrabile in senso gener.

Inoltre si ha

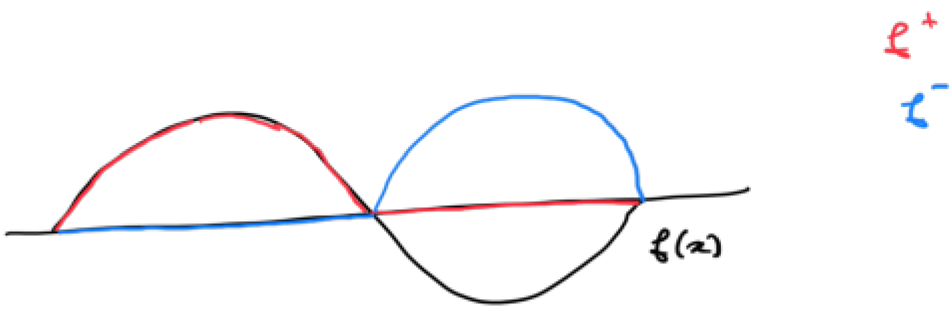
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

allora

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

■



Esempi di Funzioni Assolutamente Integrabili

Esempio:

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$ in $J = [1; +\infty[$

è assolutamente integrabile? SI.

Infatti dalla disuguaglianza

$\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ $\forall x \in J$ e dal teorema

del confronto si deduce che f è assolutam. integrabile. Si ricorda che $\frac{1}{x^2}$ è integr. in J.

Es. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è semplicemente integrabile in senso generaliz. su $[1; +\infty[$.

Criterio dell'Ordine di Infinitesimo (J Illimitato)

Sia $f : J = [a; +\infty[\to \mathbb{R}$

Sia f localmente integrabile.

Si ha:

1. Se $\exists \alpha > 1 : \lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in [0; +\infty[$

   allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato
2. Se $\exists \alpha \leq 1 : \lim_{x \to +\infty} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

   allora f NON è assolutamente integrabile in senso generalizzato.

Dimostrazione:

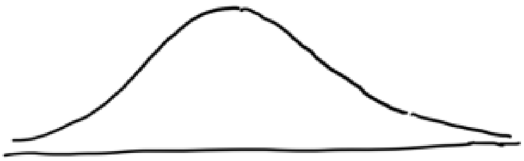
dim: 1). Idea teorema confronto tra $|f(x)|$ e $\frac{1}{x^\alpha}$.

2) " " $|f(x)|$ e $\frac{1}{x^\alpha}$

Es. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\cdot x^\alpha = 0$ con $\alpha>1$

dunque per il criterio di ordine di infinitesimo deduco che e^{-x^2} è integr. in senso gen. su $[0;+\infty[$



Criterio dell'Ordine di Infinito (J Limitato)

Sia $f : J = [a,b[\to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$.

Sia f localmente integrabile.

Si ha che:

1. Se $\exists \alpha < 1 : \lim_{x\to b^-} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in [0;+\infty[$

   allora f è assolutamente inegrabile in senso generalizzato

2. Se $\exists \alpha \geq 1 : \lim_{x\to b^-} |f(x)| \cdot x^\alpha = L \in]0;+\infty[\cup \{+\infty\}$

   allora f NON è assolutamente integrabile in senso generalizzato

Esempio (cenno).

La funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è semplicemente integrab. in $J = [1; +\infty[$

- Idea: f è integrab. in senso generalizzato

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx =$$

Integrando per parti

$$\dots = \underbrace{\frac{1}{x}(-\cos(x))\Big|_1^t}_{a} - \underbrace{\int_1^t \frac{1}{x^2}\cos(x)\,dx}_{b}$$

- Idea: $|f|$ non è integr. in senso generaliz.

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} \qquad \sin^2(x) = |\sin(x)|\underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1} \leq |\sin(x)|\cdot 1$$

Vogliamo dimostrare che $\frac{\sin^2(x)}{x}$ non è integr. in senso. gener. e poi applicare i teoremi del confronto.

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

💡 Nei due Criteri scritti sopra, ti può aiutare pensare $|f(x)| \cdot x^\alpha$ come $\frac{|f(x)|}{1/x^\alpha}$ e considerando che $\frac{1}{x^\alpha}$ è stata analizzata nei teoremi precedenti come funzione campione

Serie Numeriche

Serie di Termine Generale

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri in $\mathbb{R}$.

Si dice **serie di termine generale** a_n la somma formale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Somma Parziale Associata ad una Serie

Per ogni indice n della successione, si definisce la **somma pariale (o ridotta)** s_n associata ad $(a_n)_n$ come

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Serie **Convergente**, Serie **Divergente** e Serie **Indeterminata**

- Si dice che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **convergente** se esiste finito

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = s$$

s si dice **somma della serie** e si scrive $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- Se

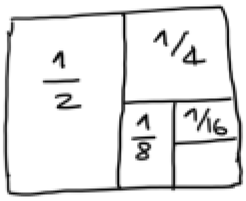
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty (o \ -\infty)$$

la serie si dice **divergente a $+\infty (o \ -\infty)$.**

- Se NON esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$, la serie si dice **indeterminata**.

Esempi

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$



converge

- $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$ diverge

$s_n = 1 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \longrightarrow +\infty$

- $1 - 1 + 1 + \dots + (-1)^{n+1} +$ è indeterm.

- $\dots$

$s_{2n} = 0$ dunque non esiste il $\lim_{n \to +\infty} s_n$

$s_{2n+1} = 1$

Serie Geometrica

Consideriamo

$$a + ak + ak^2 + \dots + a\cdot k^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a\cdot k^n$$

con $a, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Il numero k si dice ragione della serie.

Si ha che

$$s_n = a + \dots + a\cdot k^{n-1} = \begin{cases} na & \text{se } k = 1 \\ a\cdot\dfrac{1-k^n}{1-k} & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$$

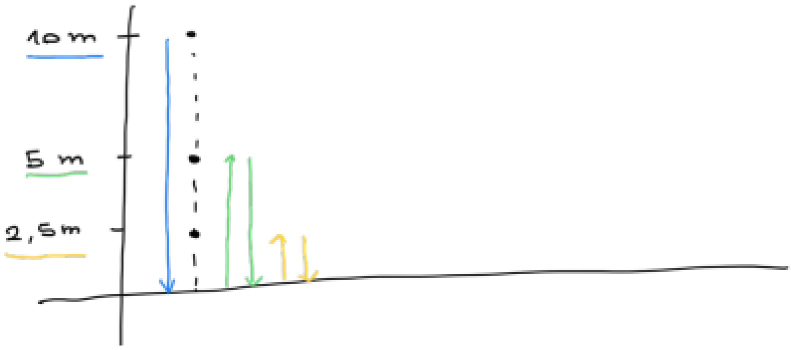
La serie è convergente se $|k| < 1$ con somma $a\cdot\dfrac{1}{1-k}$

" " " divergente se $k \geq 1$

" " " indeterminata se $k \leq -1$.

Es. La pallina che rimbalza

Supponiamo di far cadere una pallina da una quota di 10 m. di altezza e ad ogni rimbalzo arriva a metà della quota raggiunta al rimbalzo precedente. Qual è la distanza totale che percorre la pallina?



$$D = 10 + \underbrace{10 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{in alto}} + \underbrace{10 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{basso}} + \underbrace{10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{in alto}} + \underbrace{10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{basso}} + \dots$$

$$= 10 + 20 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

$$D = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 10 = 40 - 10 = 30$$

è una serie geom. di ragione $\frac{1}{2}$

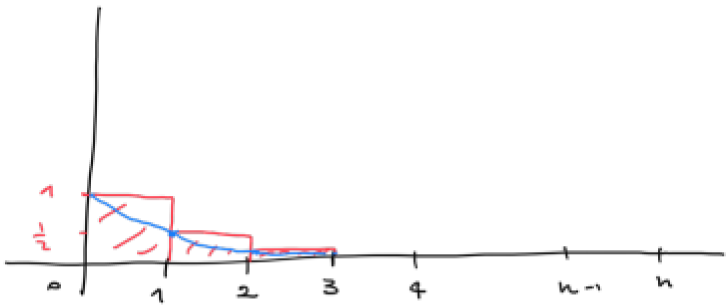
che converge.

$$\frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = 40$$

Serie Armonica

Consideriamo la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$



$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \int_0^n \frac{1}{x+1}\,dx = \log(x+1)\Big|_0^n$$

$$= \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

La serie diverge a $+\infty$.

Serie di Mengoli (Serie Telescopica)

Consideriamo

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

La serie converge con somma 1.