MMP2 Cheatsheet

Denis Titov

Kompakte Zusammenfassung: Gruppen- und Darstellungstheorie, Lie-Gruppen, Praktische Beispiele

1 Grundbegriffe

Gruppe
Definition 1

Gruppe $(G, *)$: Menge mit Verknüpfung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$
- **Assoziativität**: $(gh)k = g(hk)$
- **Einselement**: $\exists \mathbb{1} : \mathbb{1}g = g\mathbb{1} = g$
- **Inverse**: $\forall g \in G \exists g^{-1} : gg^{-1} = g^{-1}g = \mathbb{1}$
- **Abelsch**: $gh = hg$ (kommutativ)

1.1 Wichtige Gruppen

Zyklische Gruppe C_n
Definition 2

$C_n = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ mit Addition modulo n

Symmetrische Gruppe S_n
Definition 3

Permutationen von n Elementen, $|S_n| = n!$

Diedergruppe D_n
Definition 4

Symmetriegruppe eines n-Ecks, $|D_n| = 2n$ $D_n = \langle R, S \rangle = \{R^k, SR^k \mid k \in \{0, ..., n-1\}\}$ mit $R^n = S^2 = \mathbb{1}$, $SRS = R^{-1}$

Orthogonale Gruppen
Definition 5

- $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$
- $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbb{1}\}$
- $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$

2 Darstellungen

Darstellung
Definition 6

Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$ auf Vektorraum $V \neq \{0\}$ $\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$, $\rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_V$, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$

Unitäre Darstellung
Definition 7

$\rho(g)$ unitär für alle $g \in G$: $(\rho(g)u, \rho(g)v) = (u, v)$

Endliche Gruppen
Satz 8

Endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Darstellungen endlicher Gruppen sind vollständig reduzibel.

Lemma von Schur
Satz 9

Seien $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ irreduzible Darstellungen:
1. $\varphi \in \mathrm{Hom}_{G(V_1,V_2)} \Rightarrow \varphi = 0$ oder Isomorphismus
2. $\varphi \in \mathrm{Hom}_{G(V,V)} \Rightarrow \varphi = \lambda \mathbb{1}_V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Abelsche Gruppen
Corollary 10

Jede irreduzible endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Darstellung abelscher Gruppen ist eindimensional.

3 Charaktere

Charakter
Definition 11

$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$, $\chi_{\rho(g)} = \mathrm{tr}(\rho(g))$
- Invariant unter Konjugation: $\chi_{\rho(hgh^{-1})} = \chi_{\rho(g)}$
- Äquivalente Darstellungen haben gleiche Charaktere

Konjugationsklasse
Definition 12

$[g] = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$. Charakter konstant auf Konjugationsklassen.

Orthogonalität der Charaktere
Satz 13

Für irreduzible Darstellungen ρ, ρ': $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = \frac{1}{|}G| \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho(g)}} \chi_{\rho'}(g) = \begin{cases} 1 \text{ falls } \rho \equiv \rho' \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

Zerlegung der regulären Darstellung
Satz 14

$\rho_{\mathrm{reg}} = \oplus_i n_i \rho^{(i)}$ mit $n_i = \dim(\rho^{(i)})$ $|G| = \sum_i n_i^2$

4 Frobenius-Formel & Young-Tableaux

Frobenius-Formel
Definition 15

Für S_n: $\chi^{\lambda(\sigma)} = \left(\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i, j)\right)^{-1} \sum_T \prod_{k=1}^n x_k^{m_{k(T)}}$ wobei $h(i, j)$ der Hook-Länge entspricht.

5 Young-Tableaux und S_n

Partition
Definition 16

Partition von n: $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \geq 1$ Darstellung durch Young-Diagramm mit λ_i Kästchen in Zeile i.

Standard-Young-Tableau
Definition 17

Füllung eines Young-Diagramms mit Zahlen $1, ..., n$, streng wachsend in Zeilen und Spalten.

Hook-Länge
Definition 18

Für Kästchen (i, j): $h(i, j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ wobei λ'_j = Spaltenlänge der j-ten Spalte.

Anzahl Standard-Tableaux
Satz 19

Anzahl Standard-Tableaux für Partition λ: $f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)} h(i,j)}$

5.1 Permutationstypen

Zyklentyp
Definition 20

Permutation $\sigma \in S_n$ bestimmt durch Zyklentyp $(1^{m_1} 2^{m_2} ... n^{m_n})$ wobei m_k = Anzahl der k-Zyklen. Konjugationsklassen $\leftrightarrow$ Zyklentypen $\leftrightarrow$ Partitionen.

6 Tensorprodukte

Tensorprodukt von Darstellungen
Definition 21

$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$ $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$

Charaktere von Tensorprodukten
Definition 22

$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g) \cdot \chi_{\rho_2}(g)$

7 Reduktion und Irreduzibilität

Reduzible/Irreduzible Darstellung
Definition 23

- **Reduzibel**: $\exists$ invarianter Unterraum $W \subset V$, $W \neq \{0\}, V$
- **Irreduzibel**: keine nichttrivialen invarianten Unterräume
- **Vollständig reduzibel**: direkte Summe irreduzibler Darstellungen

Maschkes Satz
Satz 24

Alle Darstellungen endlicher Gruppen über $\mathbb{C}$ sind vollständig reduzibel.

8 Kristallgruppen und Physik

32 Punktgruppen
Definition 25

Alle möglichen Punktsymmetrien von Kristallen:
- Zyklengruppen: C_n (Rotation um $2\frac{\pi}{n}$)
- Diedergruppen: D_n (Rotationen + Spiegelungen)
- Platonische Körper: T_d (Tetraeder), O_h (Oktaeder), I_h (Ikosaeder)

Anwendungen
Example 26

- **Molekülorbitale**: Symmetrie bestimmt erlaubte Übergänge
- **Kristallfeld-Aufspaltung**: Entartung durch Symmetriebrechung
- **Phononen**: Schwingungsmoden durch Gruppentheorie klassifiziert

9 Kompakte Lie-Gruppen

Kompakte Lie-Gruppe
Definition 27

Lie-Gruppe, die als topologischer Raum kompakt ist. **Beispiele**: $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$

Weyl-Satz
Satz 28

Alle Darstellungen kompakter Lie-Gruppen sind vollständig reduzibel.

Cartan-Unteralgebra
Definition 29

Maximale abelsche Unteralgebra $h \subset g$. Dimension = Rang der Lie-Algebra.

Wurzeln und Gewichte
Definition 30

- **Wurzel**: Eigenwert von $ad(H)$ für $H \in h$
- **Gewicht**: Eigenwert in Darstellung
- **Höchstes Gewicht**: charakterisiert irreduzible Darstellung eindeutig

10 Wichtige Isomorphismen

Niedrigdimensionale Isomorphismen
Definition 31

- $SU(2) \approx Sp(1) \approx$ Einheits-Quaternionen
- $SO(3) \approx \frac{SU(2)}{\{\pm 1\}}$ (Spin-Bahn-Kopplung)
- $SO(4) \approx SU(2) \times SU(2)$
- $SO(6) \approx SU(4)$
- $\mathrm{Spin}(3) \approx SU(2)$, $\mathrm{Spin}(4) \approx SU(2) \times SU(2)$

11 Formeln für Prüfung

Orthogonalitätsrelationen
Definition 32

Für endliche Gruppe G, irreduzible Darstellungen $\rho^{(i)}$: $\sum_{g \in G} \rho_{ab}^{(i)}(g) \rho_{cd}^{(j)}(g) = |G \frac{|}{n_i} \delta_{ij} \delta_{ac} \delta_{bd}$

Dimensionsformel
Definition 33

$\sum_i \left(\dim \rho^{(i)}\right)^2 = |G|$ (Anzahl Konjugationsklassen = Anzahl irreduzibler Darstellungen)

Charakterorthogonalität
Definition 34

$\left(\chi^{(i)}, \chi^{(j)}\right) = \sum_{g \in G} \overline{\chi^{(i)}(g)} \chi^{(j)} \frac{g}{|} G| = \delta_{ij}$

12 Symmetrisches und äußeres Produkt

Symmetrisches Produkt
Definition 35

$S^N V = \{x \in V^{\otimes N} \mid \rho(\sigma)x = x \forall \sigma \in S_N\}$ Basis: $\left[e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_N} \mid 1 \leq i_1 \leq ... \leq i_N\right]$ $\dim(S^N V) = \binom{m+N-1}{N}$ für $\dim(V) = m$

Äußeres Produkt
Definition 36

$\wedge^N V = \{x \in V^{\otimes N} \mid \rho(\sigma)x = \mathrm{sgn}(\sigma)x \forall \sigma \in S_N\}$ Basis: $\left[e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_N} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_N\right]$ $\dim(\wedge^N V) = \binom{m}{N}$ für $\dim(V) = m$

13 Eigenwertprobleme mit Symmetrie

Diagonalisierung symmetrischer Operatoren
Satz 37

Sei $A : V \to V$ mit $\rho(g)A = A\rho(g)$ für alle $g \in G$. Bei Zerlegung $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$ (irreduzibel): A hat höchstens n verschiedene Eigenwerte, konstant auf jeder Komponente V_i.

Anwendung: Kristallfeldtheorie
Example 38

Hamiltonoperator H kommutiert mit Symmetriegruppe $\to$ Energieniveaus klassifiziert durch irreduzible Darstellungen.

14 Spektraltheorie und Quantenmechanik

Irreduzible Darstellungen der Rotationsgruppe
Definition 39

$SO(3)$: Darstellungen $D^{(l)}$ mit $\dim = 2l + 1$, $l = 0, 1, 2, ...$ Charaktere: $\chi^{(l)}(\varphi) = \frac{\sin((2l+1)\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$

Spin und SU(2)
Definition 40

$SU(2)$: Darstellungen $D^{(j)}$ mit $\dim = 2j + 1$, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$ Covering: $SU(2) \to SO(3)$ mit Kern $\{\pm \mathbb{1}\}$

Clebsch-Gordan-Zerlegung
Satz 41

$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \oplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(J)}$ Koeffizienten $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 \mid JM \rangle$ durch Rekursion oder Tabellen.

15 Darstellungen klassischer Gruppen

GL(n) und SL(n)
Definition 42

$GL(n, \mathbb{C})$: alle invertierbaren $n \times n$ Matrizen $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$ Fundamentaldarstellung: Standardaktion auf $\mathbb{C}^n$

Orthogonale und unitäre Gruppen
Definition 43

$O(n) = \{A \mid A^T A = \mathbb{1}\}$, $SO(n) = O(n) \cap \{\det = 1\}$ $U(n) = \{A \mid A^* A = \mathbb{1}\}$, $SU(n) = U(n) \cap \{\det = 1\}$ Kompakt $\longrightarrow$ vollständig reduzible Darstellungen

Symplektische Gruppe
Definition 44

$Sp(2n) = \{A \mid A^T J A = J\}$ mit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ Erhält symplektische Form, wichtig in Hamiltonscher Mechanik

16 Lie-Algebren-Struktur

Lie-Klammer
Definition 45

$[X, Y] = XY - YX$ (Kommutator) **Eigenschaften**:
- Bilinear: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
- Antisymmetrisch: $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobi-Identität: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Strukturkonstanten
Definition 46

Für Basis $\{X_1, ..., X_n\}$ von g: $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$ c_{ij}^k = Strukturkonstanten, bestimmen Lie-Algebra vollständig

17 Wurzelsysteme

Cartan-Zerlegung
Definition 47

$g = h \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi} g_\alpha)$
- h: Cartan-Unteralgebra (maximal abelsch)
- Φ: Wurzelsystem
- $g_\alpha = \{X \in g \mid [H, X] = \alpha(H)X \forall H \in h\}$

Einfache Wurzeln
Definition 48

Minimale Teilmenge $\Delta \subset \Phi$ mit:
- Jede Wurzel ist Linearkombination mit ganzzahligen Koeffizienten gleichen Vorzeichens
- $|\Delta|$ = Rang von g

18 Klassifikation einfacher Lie-Algebren

ADE-Klassifikation
Definition 49

Klassische Reihen:
- $A_n = sl(n + 1, \mathbb{C})$, $n \geq 1$
- $B_n = so(2n + 1, \mathbb{C})$, $n \geq 2$
- $C_n = sp(2n, \mathbb{C})$, $n \geq 3$
- $D_n = so(2n, \mathbb{C})$, $n \geq 4$

Ausnahme-Algebren: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2

19 Darstellungstheorie von s l(2)

Basis von s l(2)
Definition 50

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Relationen: $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = H$

Darstellungen von sl(2)
Satz 51

Irreduzible Darstellungen V_n mit $\dim = n + 1$, $n = 0, 1, 2, ...$ Basis: $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ mit:
- $Hv_k = (n - 2k)v_k$
- $Ev_k = kv_{k-1}$ (für $k > 0$)
- $Fv_k = (n - k)v_{k+1}$ (für $k < n$)

20 Quantenfeldtheorie-Verbindungen

Poincaré-Gruppe
Definition 52

$\mathrm{ISO}(1, 3) = SO^+(1, 3) \otimes \mathbb{R}^{1,3}$ (Lorentz-Gruppe $\boxed{?}$ Translationen) Darstellungen klassifizieren Elementarteilchen (Masse, Spin)

Gauge-Theorien
Definition 53

- $SU(3)_C$: Starke Wechselwirkung (QCD)
- $SU(2)_L \times U(1)_Y$: Elektroschwache Theorie
- $SU(5)$ oder $SO(10)$: Grand Unified Theories

21 Computertechniken

Charaktertafel berechnen
Definition 54

1. Konjugationsklassen bestimmen
2. Dimensionen durch $\sum_i n_i^2 = |G|$
3. Orthogonalitätsrelationen nutzen
4. Produktzahlen prüfen

Projektionsoperatoren
Definition 55

Für irreduzible Darstellung $\rho^{(i)}$: $P^{(i)} = \left(\frac{n_i}{|} G|\right) \sum_{g \in G} \chi^{(i)}(g^{-1}) \rho(g)$ Projiziert auf isotypische Komponente

22 Wichtige Identitäten

Burnside-Lemma — Definition 56

Anzahl Bahnen unter Gruppenaktion: $|\frac{X}{G}| = \left(\frac{1}{|}G|\right) \sum_{g \in G} |X^g|$ wobei $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$

Frobenius-Reziprozität — Definition 57

Für Untergruppe $H \subset G$: $(\chi|_H, \psi)_H = \left(\chi, \mathrm{Ind}_H^G \psi\right)_G$

Maschke-Satz — Satz 58

Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ ist halbeinfach $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{char}(\mathbb{C}) \nmid |G|$

Pauli-Matrizen und su(2) — Definition 59

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ $su(2) = \mathrm{span}\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$

Wichtige Lie-Algebren — Definition 60

- $sl(n) = \{X \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$
- $so(n) = \{X \mid X^T = -X\}$ (schiefsymmetrisch)
- $su(n) = \{X \mid X^* = -X, \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (anti-hermitesch, spurlos)

23 Praktische Beispiele & Rechnungen

23.1 Young-Tableaux berechnen

Young-Tableau für S_4 — Example 61

Partition $\lambda = (3, 1)$ von 4:
□ □ □
□
Hook-Längen: $h(1,1) = 3, h(1,2) = 2, h(1,3) = 1, h(2,1) = 1$ Anzahl Standard-Tableaux: $f^{(3,1)} = \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$ Standard-Tableaux:

```
1 2 3  |  1 2 4  |  1 3 4  |  2 3 4
4      |  3      |  2      |  1
```

23.2 Charaktertafel berechnen

D_3 Charaktertafel — Example 62

$D_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, $|D_3| = 6$ Konjugationsklassen: $[e], [r, r^2], [s, sr, sr^2]$ 3 irreduzible Darstellungen mit $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6 \longrightarrow n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$
| | $[e]$ | $[r, r^2]$ | $[s, sr, sr^2]$ | |—|—|—|—| | ρ_1 | 1 | 1 | 1 | | ρ_2 | 1 | 1 | −1 | | ρ_3 | 2 | −1 | 0 |

23.3 Schur-Lemma anwenden

Schur für C_n — Example 63

C_n abelsch $\longrightarrow$ alle irreduziblen Darstellungen eindimensional $\rho_k : C_n \to \mathbb{C}^*$, $\rho_{k(g)} = \omega^k$ mit $\omega = e^{\{2\pi\frac{i}{n}\}}$ Für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{C_n}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$: $\varphi\left(\rho_{k(g)} z\right) = \rho_{k(g)} \varphi(z) \longrightarrow \varphi\left(\omega^k z\right) = \omega^k \varphi(z) \longrightarrow \varphi = \lambda \mathbb{1}$

23.4 Charakterformel nutzen

Orthogonalität prüfen — Example 64

Für D_3: $(\chi_1, \chi_3) = \frac{1}{6}[1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 3] = 0$ ✓ $(\chi_3, \chi_3) = \frac{1}{6}[2^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + 0^2 \cdot 3] = \frac{6}{6} = 1$ ✓

23.5 Lie-Algebren berechnen

$su(2)$ Struktur — Example 65

Basis: $X_1 = i\frac{\sigma_1}{2}, X_2 = i\frac{\sigma_2}{2}, X_3 = i\frac{\sigma_3}{2}$ $[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k$ Strukturkonstanten: $c_{12}^3 = 1, c_{23}^1 = 1, c_{31}^2 = 1$ Cartan: $h = \mathrm{span}\{X_3\}$, Wurzeln: $\alpha = \pm 2$ $su(2) = h \oplus g_\alpha \oplus g_{-\alpha}$

23.6 Tensorprodukte

Tensorprodukt-Zerlegung — Example 66

$SU(2)$: $D^{(\frac{1}{2})} \otimes D^{(\frac{1}{2})} = D^{(0)} \oplus D^{(1)}$ Charaktere: $\chi^{(\frac{1}{2})}(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\chi^{(\frac{1}{2})} \cdot \chi^{(\frac{1}{2})} = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2(1 + \cos\theta) = 2 + 2\cos\theta = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}$ ✓

Clebsch-Gordan — Example 67

$j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2}$: $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |1, 1\rangle$ (Triplett) $\oplus |0, 0\rangle$ (Singulett) $|1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ $|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

23.7 Irreduzible Darstellungen finden

S_3 Darstellungen — Example 68

1. Triviale: $\rho_1(\sigma) = 1$ für alle σ
2. Vorzeichen: $\rho_2(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$
3. Standard: $\rho_3 : S_3 \to GL(2, \mathbb{C})$ durch Permutation von (x, y, z) mit $x + y + z = 0$ $\rho_3((12)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

24 Formeltabelle & Schnellreferenz

24.1 Charakterformeln kompakt

$\sum_i \left(\dim \rho^{(i)}\right)^2 = |G|$ • $(\chi^{(i)}, \chi^{(j)}) = \delta_{ij}$ • $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ • $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$

24.2 Wichtige Gruppen-Ordnungen

$|S_n| = n!$ • $|A_n| = \frac{n!}{2}$ • $|D_n| = 2n$ • $|GL(n, q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$ • $|SL(n, q)| = |GL(n, q)\frac{|}{q-1}$

24.3 Standard-Darstellungen

S_3: 1, 1, 2 • S_4: 1, 1, 2, 3, 3 • D_3: 1, 1, 2 • D_4: 1, 1, 1, 1, 2 • $SU(2)$: $D^{(j)}$, $\dim = 2j + 1$ • $SO(3)$: $D^{(l)}$, $\dim = 2l + 1$

24.4 Clebsch-Gordan Regeln

$j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2| + 1 \oplus ... \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus j_1 + j_2$ $l \otimes l = 0 \oplus 1 \oplus ... \oplus 2l$ (für ganzzahlige l)

24.5 Lie-Algebren Dimensionen

$\dim(sl(n)) = n^2 - 1$ • $\dim(so(n)) = \frac{n(n-1)}{2}$ • $\dim(su(n)) = n^2 - 1$ • $\dim(sp(2n)) = n(2n + 1)$

24.6 Young-Tableaux Quickfacts

Hook-Länge: $h(i, j) = \lambda_i + \lambda_j' - i - j + 1$ • Anzahl: $\frac{n!}{\prod} h(i, j)$ • Inhalt: $c(i, j) = j - i$

24.7 Tensor-Identitäten

$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ • $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$ • $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\ \mathrm{tr}(B)$

24.8 Exponential-Tricks

$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$ (falls $[A, B] = 0$) • $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ • $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$

24.9 Kompakte Gruppen

Alle Darstellungen vollständig reduzibel • Unitäre Darstellungen existieren • `overline`$\{\rho\} \cong \rho$ für reelle Gruppen

24.10 Kristallgruppen (32 Punktgruppen)

$C_1, C_i, C_2, C_s, C_{2h}, D_2, C_{2v}, D_{2h}, C_4, S_4, C_{4h}, D_4, C_{4v}, D_{2d}, D_{4h}, C_3, C_{3i}, D_3, C_{3v}, D_{3d}, C_6, C_{3h}, C_{6h}, D_6, C_{6v}, D_{3h}, D_{6h}, T, T_h, O, T_d, O_h$

24.11 Nützliche Matrizen

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ • $\tau_x = (\sigma_x, 0)$, $\tau_y = (\sigma_y, 0)$, $\tau_z = (0, \sigma_z)$

24.12 Schur-Orthogonalität

$\sum_{g \in G} \overline{\rho_{ab}^{(i)}(g)} \rho_{cd}^{(j)}(g) = |G\frac{|}{n_i}\delta_{ij}\delta_{ac}\delta_{bd}$

24.13 Burnside-Lemma

$|\frac{X}{G}| = \frac{1}{|}G| \sum_{g \in G} |X^g|$ wobei $X^g = \{x \mid gx = x\}$

24.14 Wurzelsystem-Basics

Einfache Wurzeln bilden Basis • Positive/negative Wurzeln • Weyl-Gruppe permutiert Wurzeln • Gewichte = Darstellungstheorie

24.15 Casimir-Operatoren

$SU(2)$: $C_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ • Eigenwert: $j(j + 1)$ • $SO(3)$: $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, Eigenwert: $l(l + 1)$

24.16 Projektionsformeln

Projektion auf irred. Komp.: $P^{(i)} = \frac{n_i}{|}G| \sum_{g \in G} \chi^{(i)}(g^{-1})\rho(g)$ Multiplizität: $m_i = (\chi, \chi^{(i)})$

24.17 Quick-Tests

Irreduzibel? $\longrightarrow$ $(\chi, \chi) = 1$ • Abelsch? $\longrightarrow$ Alle irred. eindimensional • Einfach? $\longrightarrow$ Nur $[G, G] = G$ oder $= \{1\}$

24.18 Darstellungen klassischer Gruppen

$GL(n)$: Alle polynomial Darst. • $SL(n)$: Spurlos • $O(n)$: Orthogonal-erhaltend • $Sp(2n)$: Symplektisch-erhaltend

24.19 Induzierte Darstellungen

$\mathrm{Ind}_H^G \rho(g) = \sum_i \rho\left(t_i^{-1} g t_j\right)$ falls $g \in t_j H t_j^{-1}$ • $\dim\left(\mathrm{Ind}_H^G \rho\right) = [G : H]\dim(\rho)$

24.20 Frobenius-Reziprozität

$(\chi|_H, \psi) = \left(\chi, \mathrm{Ind}_H^G \psi\right)$ • $\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_H^G \rho = \sum_{g \in \frac{G}{H}} \rho^g$

24.21 Exam Survival Kit

Charaktertafel-Algorithmus: 1) Konjugationsklassen $\longrightarrow$ 2) $\sum n_i^2 = |G|$ $\longrightarrow$ 3) Orthogonalität $\longrightarrow$ 4) Prüfung ✓
Irreduzibel-Test: $(\chi, \chi) = 1$ ✓ **Äquivalenz:** $(\chi_1, \chi_2) = 1$ ✓
Multiplizität: $m_i = (\chi, \chi^{(i)})$
Young-Tableaux: Hook = rechts + unten + 1, Anzahl = $\frac{n!}{\prod}$ hooks, Charakter via Tabloids
Tensor-Zerlegung: $\chi_1\chi_2 = \sum_i a_i \chi^{(i)}$ mit $a_i = (\chi_1\chi_2, \chi^{(i)})$
Lie-Tricks: $[X, Y] = XY - YX$, $\exp([X, Y]) = \exp(X)\exp(Y)\exp(-X)\exp(-Y)$ (BCH), Cartan = maximal abelsch
Kristall-Entscheidung: Punktgruppe $\longrightarrow$ irred. Darst. $\longrightarrow$ Aufspaltung, Selection rules: $\Gamma_i \otimes \Gamma_j \supset \Gamma_{\text{total}}$
Clebsch-Gordan: $j_1 \oplus j_2 = |j_1 - j_2| \oplus ... \oplus j_1 + j_2$, Multiplizität meist 1
Schur anwenden: Irreduzibel + φ kommutiert $\longrightarrow$ $\varphi = \lambda\mathbb{1}$, Verschiedene Darst. $\longrightarrow$ $\varphi = 0$
Casimir berechnen: Quadratische Operatoren kommutieren mit allen, Eigenwerte klassifizieren
Prüfungsstrategie: Symmetrie erkennen $\longrightarrow$ Gruppe identifizieren $\longrightarrow$ Darstellungen $\longrightarrow$ Aufspaltung/Entartung