MMP2

Denis Titov

In dieser Vorlesung geht es um Algebraische Methoden, Gruppen- und Darstellungstheorie.

Contents

1 Grundbebriffe

1.1 Gruppen

Definition Gruppe Definition 1

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung/Produkt/Gruppenoperation:

$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto gh$$

sodass

$$(gh)k = g(hk)$$
$$\exists \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1}g = g\mathbb{1} = g$$
$$\forall g \in G \exists g^{-1} \in G \Rightarrow gg^{-1} = g^{-1}g = \mathbb{1}$$

Das Einselement ist eindeutig. Das inverse ist eindeutig.

Rechenregeln:

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$$
$$h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}h = \mathbb{1}$$

Die Ordnung von G:

$$|G| \in \mathbb{N} \cup \infty$$

G ist **abelsch**, wenn die Verknüpfung kommutativ ist:

$$gh = hg$$

Bei einer abelschen Gruppe ist die Verknüpfung oft als Addition geschrieben. Einselement wird zur Null.

Beispiele: $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $+$ oder Vektorräume.

1.1.1 Untergruppe

Definition Untergruppe Definition 2

Eine Untergruppe $H \subset G$ ist eine nicht-leere Teilmenge, sodass:

$$h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1h_2 \in H$$
$$h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow \mathbb{1} \in H$$

Eine Untergruppe ist eine Gruppe mit der gleichen Verknüpfung wie G.

1.1.2 Direktes Produkt

Definition Direktes Produkt Definition 3

Das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ ist das karthesisches Produkt:

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2)$$

Das Einselement ist $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$ und das Inverse ist $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.

Direkte Produkte benutzt man in fällen, wo zwei Gruppen unabhängig sind, also die Verknüpfung nicht von der anderen abhängt oder nicht kompatibel ist.

1.1.3 Zyklische Gruppe C_n

Zyklische Gruppen Definition 4

C_n Zyklische Gruppen der Ordnung n: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =$ Restklassen $\{0, 1, ..., n-1\}$ mit $+$ modulo n. $a = b$ falls $a - b$ ein Vielfaches von n ist. Das produkt ist die Addition modulo n.

1.1.4 Symmetrische Gruppe S_n

Symmetrische Gruppe Definition 5

S_n Symmetrische Gruppe der Ordnung n: Permutation von n Elementen. Ist eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ mit der Verknüpfung $\pi_1\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_2$ mit offensichtlichem Einselement $\mathbb{1}$ und Inversen π^{-1}.

1.1.5 Diedergruppe D_n

Diedergruppe Definition 6

Diedergruppe D_n der Ordnung $2n, n \geq 3$: Symmetriegruppe eines n-Ecks. Es besteht aus n Rotationen und n Spiegelungen: $X \in O(2)$ die das im Ursprung zentriertes n-Eck wieder auf sich selbst abbildet.

Lemma: Sei $R \in SO(2) \subset O(2)$ die Drehung um $\frac{2\pi}{n}$, $S \in O(2)$ die Spiegelung an der x-Achse, dann ist $D_n =< R, S >= \{R^k, SR^k \mid k \in \{0, ..., n-1\}\}$.

Es gilt:

$$SRS = R^{-1}$$
$$RS = SR^{-1}$$

Sei $v_0, ..., n_{n-1}$ in $\mathbb{R}^2$, die Ecken eines n-Ecks, dann:

$$Rv_j = v_{j+1}$$
$$Sv_j = v_{n-j}$$

Das Paar (v_0, v_1) wird durch die $2n$ Elemente der Diedergruppe D_n auf verschiedene Paare abgebildet. Genauer: Für jedes $g \in D_n$ ist $g(v_0, v_1)$ ein Paar benachbarter Ecken des n-Ecks, und für zwei verschiedene Elemente $g, h \in D_n$ gilt $g(v_0, v_1) \neq h(v_0, v_1)$. Umgekehrt gibt es für jedes Paar benachbarter Ecken $\left(v_i, v_{\{i+1 \bmod n\}}\right)$ oder $\left(v_{\{i+1 \bmod n\}}, v_i\right)$ genau ein Element $g \in D_n$ mit $g(v_0, v_1) = \left(v_i, v_{\{i+1 \bmod n\}}\right)$ bzw. $g(v_0, v_1) = \left(v_{\{i+1 \bmod n\}}, v_i\right)$.

Es ist generell zielführender, die wirkung von Operationen auf einzelne Elemente zu betrachten, als die Wirkung auf ganze Mengen.

1.1.6 Allgemeine lineare Gruppe $\mathbb{K}$

Definition Allgemeine lineare Gruppe Definition 7

Die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$ ist die Gruppe der invertierbaren Matrizen der Ordnung n über dem Körper $\mathbb{K}$ mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung. Das Einselement ist die Einheitsmatrix und das Inverse ist die Inverse Matrix.

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

Die Ordnung von $GL(n, \mathbb{K})$ ist $|\mathbb{K}|^{\{n^2\}} - |\mathbb{K}|^{\{n^2-1\}}$.

1.1.7 Vektorraum V

Definition Vektorraum V Definition 8

V Vektorraum $\to GL(V) = \{f : V \to V | \text{f linear}\}$

1.1.8 Orthogonale Gruppe $O(n)$

Definition | Orthogonale Gruppe — Definition 9

$$O(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$$

Es gilt:

$$A^{-1} = A^T$$
$$O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$$
$$A, B \in O(n) \Rightarrow AB \in O(n)$$
$$(AB)^T AB = \mathbb{1}$$

1.1.9 $O(p,q)$

Definition | $O(p,q)$ — Definition 10

Sei für $x, y \in \mathbb{R}^{p+q}$:

$$(x,y)_{p,q} = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i x_i$$

$$O(p,q) = \{A \in GL(p+q,\mathbb{R}) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^{p+q} : (Ax, Ay)_{p,q} = (x,y)_{p,q}\}$$

Beispiele:

$$O(n,0) = O(n)$$
$$O(1,3) = \text{Lorentzgruppe}$$

1.1.10 Unitäre Gruppe $U(n)$

Definition | Unitäre Gruppe — Definition 11

$$U(n) \subset GL(n,\mathbb{C})$$
$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbb{1}\}$$
$$= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid (Au, Av) = (u,v) \forall u, v \in \mathbb{C}^n\}$$
$$A^* = \overline{A^T} = A^\dagger$$

Mit dem normalen Skalarprodukt.

1.1.11 Symplektische Gruppe $Sp(n)$

Definition | Symplektische Gruppe — Definition 12

Betrachte die antisymmetische Bilinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{\{2n\}}$:

$$\omega(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} (X_{2i-1} Y_{2i} - X_{2i} Y_{2i-1})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Sp(2n) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid \omega(AX, AY) = \omega(X,Y)\}$$
$$= \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid A^T \Omega_{2n} A = \Omega_{2n}\}$$

1.1.12 Spezielle lineare Gruppe SG

Definition | SG — Definition 13

$$SG = \{A \in GL(n,\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\} \subset G$$

Beispiele:

$SO(n), SU(n), SL(n,\mathbb{K}) = SGL(n,\mathbb{K})$.

1.2 Gruppenoperationen

Definition | Gruppenwirkung — Definition 14

Eine Gruppe G wirkt auf eine Menge M, wenn eine Abbildung gegeben ist:

$$G \times M \to M$$
$$(g,x) \mapsto gx$$

welche folgende Eigenschaften erfüllt:

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$$
$$\mathbb{1}x = x$$
$$\forall g \in G \exists g^{-1} \in G \Rightarrow g^{-1} g x = \mathbb{1}x$$

Beispiele:

- Jede Gruppe G wirkt auf sich selbst durch die Links- und Rechtsmultiplikation und durch Konjugation $M = G$:

  $$L : g \cdot x = gx$$
  $$R : g \cdot x = xg^{-1}$$
  $$g \cdot x = gxg^{-1}$$

  Dies mag trivial erscheinen, es ist aber sehr wichtig die beiden Richtungen nicht zu vertauschen.
- GL wirft auf $\mathbb{R}^n$:

  $$A \cdot x = Ax$$
- $O(n)$ wirkt auf $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$:

  $$A \cdot x = Ax$$

1.2.1 Gruppenhmomorphismus

Definition | Gruppenhomomorphismus — Definition 15

Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist eine Abbildung zwischen zwei Gruppen, die die Verknüpfung erhält:

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

Das Einselement wird auf das Einselement abgebildet:

$$f(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H$$

Das Inverse wird auf das Inverse abgebildet:

$$f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

Beispiele: $f : GL(n,\mathbb{K}) \to O(n)$, $f : SL(n,\mathbb{K}) \to SO(n)$.

1.2.2 Gruppenisomorphismus

Definition | Gruppenisomorphismus — Definition 16

Ein Gruppenisomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus, der bijektiv ist. Zwei Gruppen G und H sind isomorph $G \cong H$, wenn es einen Gruppenisomorphismus zwischen ihnen gibt.

Wir müssen keine weiteren Eigenschaften annehmen weil wir in der Definition bereits die Gruppenstruktur voraussetzen:

$$\varphi(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H$$
$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$$

Gruppenisomorphismen kann man verknüpfen:

$$\psi \circ \varphi : G \to H \to K$$

Ist φ ein Gruppenisomorphismus, dann ist φ^{-1} auch ein Gruppenisomorphismus.

1.2.3 Kern und Bild eines Gruppenhomomorphismus

Definition Kern Definition 17

Der Kern eines Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist die Menge der Elemente, die auf das Einselement abgebildet werden:

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = \mathbb{1}_H\} \subset G$$

Der Kern ist eine Untergruppe von G.

Definition Bild Definition 18

Das Bild eines Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist die Menge der Elemente, die erreicht werden:

$$\operatorname{im}(\varphi) = \{h \in H \mid \exists g \in G : \varphi(g) = h\} \subset H$$

Das Bild ist eine Untergruppe von H.

Ein Gruppenhomomorphismus $G \to H$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\ker(\varphi) = \{\mathbb{1}\}$ und $\operatorname{im}(\varphi) = H$.

1.2.4 Nebenklassen

Definition Nebenklassen Definition 19

Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Die Menge G/H der links Nebenklassen ist die Menge der £quivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $g_1 \sim g_2$ genau dann, wenn $\exists h \in H : g_2 = g_1 h$.

Beispiel:

$$N_g = \{g' \in G \mid g' \sim g\}$$

Alle N_g sind gleich gross, denn:

$$g^{-1}(-) : N_g \leftrightarrows N_1 : g(-)$$

sind inverse Abbildungen.

Die Nebenklasse $N_1 = H$. Das bedeutet, dass alle Nebenklassen die gleiche Grösse haben und sind disjunkt. Also falls $|G|$ endlich ist, dann ist $|G| = |H||G/H|$.

Man muss aufpassen, denn G/H hat keine natürliche Gruppenstruktur.

1.2.5 Normalteiler

Definition Normalteiler Definition 20

Ein Normalteiler $H \subset G$ ist eine Untergruppe, die invariant unter Konjugation ist:

$$ghg^{-1} \in H$$

Das bedeutet, dass $ghg^{-1} \in H$ für alle $g \in G$ und $h \in H$.

Beispiel: G Abelsch: jede Untergruppe ist Normalteiler, denn $ghg^{-1} = h$.

Normalteiler sind genau die Nebenklassen, die eine Gruppenstruktur haben. Die Quotientengruppe G/H ist die Menge der Nebenklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $g_1 \sim g_2$ genau dann, wenn $\exists h \in H : g_2 = g_1 h$.

Sei $[g]$ die Nebenklasse von g in G/H.

Sei $H \subset G$ ein Normalteiler, dann ist

$$G/H \times G/H \to G/H$$
$$([g_1], [g_2]) \mapsto [g_1 g_2]$$

ein **wohldefiniertes** Produkt auf G/H. Dann ist G/H eine Gruppe, gennant **Faktorgruppe** mit dem Einselement $[\mathbb{1}]$.

Beispiel:

- V Vektorraum $\Rightarrow (V, +)$ ist eine Gruppe. $U \subset V$ ist Untervektorraum

$$\Rightarrow U \subset V \text{ Untergruppe}$$
$$\Rightarrow U \text{ Normalteiler} \in$$

$\mathrm{V}\!\Rightarrow V/U$ Quotientenraum

-$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist der Quotient von $\mathbb{Z}$ und $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

-$\varphi : G \to H$ Hom $\Rightarrow \ker(\varphi) \subset G$ ist ein Normalteiler in G.

- $GL(n, \mathbb{K}) \overset{\det}{\to} Gl(1, \mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K} \mid x \neq 0\}$. ist ein Gruppenhomomorphismus:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$\Rightarrow \ker(\varphi) = SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$ Normalteiler

Theorem Satz 21

Sei $\varphi : G \to H$ Gruppenhomomorphismus, dann:

$$G/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi)$$
$$[g] \mapsto \varphi(g)$$

1.2.6 Semidirekte Produkte

Beispiel:

Die **Bewegungsgruppe** von $\mathbb{R}^3$ ist die Gruppe der affinen Transformationen:

$$x \in \mathbb{R}^3 \mapsto Ax + b$$
$$A \in O(3), b \in \mathbb{R}^3$$

Das Produkt ist die Komposition von Abbildungen:

$$(A_1, b_1)(A_2, b_2) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1)$$
$$x \mapsto A_2 x + b_2 \mapsto A_1(A_2 x + b_2) + b_1 = A_1 A_2 x + A_1 b_2 + b_1$$
$$\mathbb{1} = (\mathbb{1}, 0)$$
$$(A, b)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1} b)$$

Wir schreiben $IO(3)$ für die inhomogene Orthogonale Gruppe.

Wir haben die Gruppen $IO(3)$ (Inhomogene Orthogonale Gruppe) und $IO(1, 3)$ (Inhomogene Lorentzgruppe). Diese Gruppen sind semidirekte Produkte:

Definition Semidirekte Produkte Definition 22

Seien G, H Gruppen und $\rho : G = \mathrm{Aut}_H = \{\varphi : H \to H \mid \text{Gruppensiom}\}$

Dann ist $G \times H$ mit Produkt

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = \big(g_1 g_2, h_1 \rho_{g_1}(h_2)\big)(\rho_{g_1}(h_2) = \rho(g_1)(h_2)$$

eine Gruppe: Das semidirekte Produkt $G \ltimes_h H$.

Beispiel:

$IO(3) = O(3) \ltimes_\rho \mathbb{R}^3$ mir $\rho_A(b) = Ab$ für $A \in O(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$.

Es gilt:

$$\rho_{g_1} \times \rho_{g_2} = \rho_{g_1 g_2}$$
$$\rho_g(h_1 h_2) = \rho_g(h_1)\rho_g(h_2)$$

Impliziert assoziativität:

$$((g_1, h_1)(g_2, h_2))(g_3, h_3) = (g_1, h_1)((g_2, h_2)(g_3, h_3))$$

Einsnelement: $(1, 1)$

Inverses: $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, \rho_{g^{-1}} h^{-1})$.

1.3 Lie Gruppen

Sind Gruppen die einerseits die Struktur einer Mannigfaltigkeit haben und andererseits die Verknüpfung und Inversen Abbildung glatt sind.

Definition Lie Gruppe — Definition 23

Eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe G die gleichzeitig eine C^∞ Mannigfaltigkeit ist, sodass das Produkt $G \times G \to G$ und die Inversen Abbildung $G \to G$ beide C^∞ sind.

Beispiele: $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $O(p, q)$, $U(p, q)$, $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $SL(n, \mathbb{R})$.

G ist jeweils eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{N\times N}$. Zum Beispiel ist $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\} = \det^{-1(1)}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

- Mult ist Matrizenmultiplikation, also C^∞.
- Inverse $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^\#$ ist C^∞ auf $\{A \mid \det(A) \neq 0\}$

1.3.1 Zusammenhangseigenschaften

Definition Zusammenhang — Definition 24

X sein ein metrischer Raum, dann ist X wegzusammenhängend, falls:

$$\forall x, y \in X \exists \gamma : [0, 1] \to X \text{ stetig}$$
$$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

Definition Zusammenhangskomponenten — Definition 25

Die Zusammenhangskomponenten einer Menge X sind die maximalen zusammenhängenden Teilmengen von X. Diese werden durch die Äquivalenzrelation $x \sim y$ definiert, wenn es einen Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ gibt, sodass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Eine Menge ist zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegt werden kann.

Theorem — Satz 26

Sei $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine Untergruppe. Sei G_0 die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{1} \in G$, dann:

$$G_0 \subset G \text{ Normalteiler}$$
$$\Rightarrow G/G_0 \cong \text{Menge der Kusammenhangskomp.}$$

Theorem Zusammenhänge — Satz 27

- $SO(n), SU(n), U(n)$ sind zusammenhängend.
- $O(n)$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten:

$$O(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} \cup \{A \in O(n) \mid \det(A) = -1\}$$

Um zu zeigen, dass eine Gruppe zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, dass jedes Element $g \in G$ zu $\mathbb{1}$ verbunden werden kann.

Beispiel $SU(n)$:

Jedes Element $A \in SU(n)$ ist eine unitäre Matrix mit $\det(A) = 1$. $A = UDU^{-1}$.

Wir können annehmen, dass D eine Diagonalmatrix ist mit exponentiellen Einträgen $e^{i\varphi_1}, ..., e^{i\varphi_n}$. Die stetig Abbildung besteht dann aus $e^{i\varphi_i t}$. Für $SU(n)$ müssen wir zusätzlich annehmen, dass $\sum_i \varphi_i = 0$. Dies folgt aus der Freiheit beliebige φ zu wählen. Daraus folgt, dass $\det(D) = 1$.

Beispiel $SO(n)$:

Wir benutzen die Normalform für orthogonale Matrizen:

$$\forall A \in O(n) \exists O \in O(n) :$$
$$A = O \operatorname{diag}(R(\varphi_1), ..., R(\varphi_k), \pm 1, ..., \pm 1) O^{-1}$$
$$R(\varphi_i) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_j) & -\sin(\varphi_j) \\ \sin(\varphi_j) & \cos(\varphi_j) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Nun müssen wir zeigen, dass die Determinante $\det(A) = 1$ ist. Dies kann man für $A \in SO(n)$ wegen $R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ annehmen.

Unsere stetige Abbildung ist dann:

$$\gamma t \mapsto O \operatorname{diag}(R(\varphi_1 t), ..., R(\varphi_k t), 1, ..., 1) O^{-1}$$

Dies zeigt, dass $SO(n)$ zusammenhängend ist.

Gegenbeispiel $O(n)$:

Wir werden zeigen, dass $O(n)$ aus zwei disjunkten Zusammenhangskomponenten besteht. Wir haben bereits gezeigt, dass $SO(n)$ zusammenhängend ist. Dies ist eine derKomponenten. Die andere Komponente ist $\det(A) = -1$.

$$P = \operatorname{diag}(1, 1, ..., 1, -1) \in O(n)$$

Wir wollen P und jedes A mit einer stetigen kurve verbinden.

$$PA \in SO(n)$$
$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \to O(n)$$
$$\tilde{\gamma}(0) = \mathbb{1}$$
$$\tilde{\gamma}(1) = PA$$
$$\gamma(t) = P\tilde{\gamma}(t)$$

Dies ist eine stetige Abbildung, die P mit A verbindet. Um zu zeigen, dass die zwei Komponenten disjunkt sind, müssen wir zeigen, dass es keine stetige Abbildung zwischen ihnen gibt.

Das ist klar weil die Determinante eine stetige Abbildung ist, und Abbildungen in $\det(P) = -1$ und $\det(A) = 1$ somit nicht stetig verbunden werden können.

Genauer:

$$t \mapsto \det(\gamma(t)) \text{ stetig}$$
$$\det(\gamma(0)) = \det(\gamma(0)) = 1$$
$$\det(\gamma(1)) = \det(\gamma(1)) = -1$$

Dies ist nicht möglich, da die Determinante stetig ist und somit nicht von 1 auf -1 springen kann.

1.4 Bahnensatz und Bahnenformel

Definition Bahn — Definition 28

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt.

Für $x \in X$ ist

$$G_x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

die Bahn (orbit) von $x \in X$

Definition Stabilisator — Definition 29

$$\operatorname{Stab}_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subset G$$

Der Stabilisator ist nicht nur eine Untermenge, sondern eine Untergruppe von G.

Theorem Bahnensatz und Bahnenformel Satz 30

Wirkt die Gruppe G auf der Menge X, so ist für alle $x \in X$:

$$G/\mathrm{Stab}_x \to G_x$$
$$[g] \mapsto gx$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Insbesondere, wenn G endlich ist, dann gilt die **Bahnformel**:

$$|G| = |G_x||\mathrm{Stab}_x|$$

Beispiel:

Die **Oktaeder Gruppe** $O \subset O(3)$ ist die Symmetriegruppe eines im Ursprung zentrierten Würfels oder Oktaeders. Sie hat 48 Elemente.

Um zu zeigen, dass $|O| = 48$, betrachten wir die Bahn und den Stabilisator.

O wirkt auf X (Eckpunkte des Würfels). Sei $x \in X$ eine Ecke: $O_x = X$. $|O_x| = 6$

Der Stabilisator Stab_x ist die Gruppe der Symmetrien, die die spezifische Ecke $x \in X$ fixieren. Diese Gruppe ist isomorph zu D_3 (Diedergruppe der Ordnung 6), da sie die Symmetrien des Dreiecks ist, das die drei anderen Ecken des Würfels verbindet.

Die Ordnung des Gesamten Würfels ist also:

$$|O| = |O_x||\mathrm{Stab}_x| = 8 * 6 = 48$$

Beispiel:

Kristallographie: Man hat Salz NaCl mit der sich absechselnden kubischen Struktur:

$$\begin{pmatrix} Na & Cl & Na \\ Cl & Na & Cl \\ Na & Cl & Na \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Na} : \Gamma_{fcc} = \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 \mid i + j + k = \mathrm{gerade}\}$$

Sei $G_{\mathrm{NaCl}} \subset IO(3) = O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, die Symmetriegruppe, welche das Gitter auf sich selbst abbildet. Diese Gruppen nennt man auch Kristallographische Gruppen (es gibt nur 230 davon).

O ist die oktaeder Gruppe, die die Symmetrie des Würfels beschreibt, also geeignet ist, um die Symmetrie des Gitters zu beschreiben.

Wir wollen nun die Symmetriegruppen unseres Gitters bestimmen.

- $\Gamma_{fcc} \subset G_{\mathrm{NaCl}}$
- $U \subset G_{\mathrm{NaCl}}$

Wir müssen zeigen:

$$G_{\mathrm{NaCl}} = O \ltimes \Gamma_{fcc}$$

Beweis:

Sei $X = \Gamma_{fcc}$ die Menge der Natrium-Ionen. G_{NaCl} operiert also auf X.

$$x = 0$$
$$G_{\mathrm{NaCl}} x = \Gamma_{fcc} = X$$
$$\text{Aber } \mathrm{Stab}_x = O$$

Nach Bahnensatz:

$$G_{\mathrm{NaCl}}/O \cong \Gamma_{fcc} \Rightarrow G_{\mathrm{NaCl}}/O \cong O \ltimes \Gamma_{fcc}/O$$

Dies kann nur eine Bijektion sein, falls die Abbildung schon bijektiv, also schon surjektiv ist. Die surjektivität beweist die Behauptung.

1.5 To Know

- Bekomme System und sage was die Symmetriegruppe ist.
- Bekomme System und sage wieviele Elemente die Symmetriegruppe hat.
- Bekomme System und sage, wie man alle Symmetriegruppen findet.

2 Darstellungen von Gruppen

Nun haben wir die Symmetriegruppen bestimmt. Dies reicht nocht nicht um das System zu charakterisieren, da es viele Systeme mit den selben Symmetrien gibt.

Wir müssen noch herrausfinden, wie eine jeweilige Gruppe auf diephysikalischen Elemente des Systems wirkt.

Definition Darstellung — Definition 31

Eine (reele bzw. komplexe) **Darstellung** einer Gruppe G auf einem (reelen oder komplexen) Vektorraum $V \neq \{0\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$ (Abbildung von Gruppenelementen auf invertierbare lineare Abbildungen).

V heisst dann **Darstellungsraum** von ρ.

Also ordnet ρ jedem Gruppenelement $g \in G$ eine invertierbare lineare Abbildung $\rho(g) \in GL(V)$ zu, so dass

$$\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$$

Man nennt $\rho(g)$ auch **Darstellung** oder **Datstellungsmatrix** von g (Matrix setzt Basis und Dimension voraus).

Es gilt:

$$\rho(1) = \mathbb{1}_V$$
$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$$

Beispiele:

- Triviale Darstellung:
$$V = \mathbb{C}$$
$$\rho(g) = \mathbb{1}_V = 1 \in \mathbb{C}$$
- $G = S_n, V = \mathbb{C}^n$, Standardbasis
$$\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$$
- $$G = \mathbb{Z}_n, V = \mathbb{C}$$
$$\rho(m) = e^{2\pi i \frac{m}{n}} \in GL(1, \mathbb{C})$$
- $$G = O(3), V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$$
$$(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

Definition Reguläre Darstellung — Definition 32

Die **reguläre Darstellung** einer endlichen Gruppe G ist die Darstellung $\rho_{\text{reg}} : G \to GL(\mathbb{C}(G))$ auf der Menge

$$\mathbb{C}(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\}$$
$$(\rho_{\text{reg}}(g)f)(x) = f(g^{-1}x) f \in \mathbb{C}(G), g, x \in G$$

2.1 Vollständig Reduzibel

Definition Vollständig Reduzibel — Definition 33

Eine Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ heisst **vollständig reduzibel**, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass die Darstellungsmatrix von $\rho(g)$ in dieser Basis diagonalisierbar ist für alle $g \in G$.

Das heisst, es gibt eine Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix von $\rho(g)$ in dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

2.2 Unitäre Datstellung

Definition Unitäre Darstellung — Definition 34

Eine Darstellung ρ von G auf dem $\mathbb{C}$ −Vektorraum V mit Skalarprodukt $(,)$ heisst **unitär**, falls $\rho(g)$ unitär für alle $g \in G$ ist.

(d.h. $(\rho(g)u, \rho(g)v) = (u, v)$)

Dann gilt:

$$\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1}) = \rho(g)^*$$

Satz Unitäre Darstellungen — Satz 35

Endlich dimensionale unitäre Darstellungen sind vollständig reduzibel.

Weil:

Sei $W \subset V$ ein invarianter Unterraum der Darstellung (ρ, V). Dann ist $W^\perp = \{v \in V \mid (v, w) = 0\}$ invariant, denn

$$\begin{aligned} \forall v \in W^\perp, g \in G \Rightarrow (\rho(g)v, w) \\ = (v, \rho(g)^*) \\ = (v, \rho(g^{-1})w) = 0 \\ \Rightarrow \rho(g)v \in W^\perp \end{aligned}$$

Da $V = W \oplus W^\perp$ ist, ist $W^\perp$ ein Invarianter Komplement zu W.

Satz Endliche Gruppen — Satz 36

Sei (ρ, V) eine Darstellung einer endlichen Gruppe G auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ −Vekrorraum V.

Dann existiert ein Skalarprodukt $(,)$ auf V, so dass (ρ, V) bezüglich diesem Skalarprodukt unitär ist.

Dies bedeutet auch, dass endlich dimensionale $\mathbb{C}$ −Darstellungen endlicher Gruppen vollständig reduzibel sind.

Beweis:

Wir verwenden Mittelwertsbildungen. Wir fangen an mit einem beliebigen (nicht notwendigerweise unitären) Skalarprodukt $(,)_0$ auf V.

Wir setzen:

$$(v, w) = \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)_0$$

Dann ist $(,)$ ein Skalarprodukt, denn $(\rho(g) -, \rho(g) -)_0$ ist ein Skalarprodukt. Die Summe von Skalarprodukten ist ein Skalarprodukt.

ρ ist unitär bezüglich $(,)$:

$$\begin{aligned} & (\rho(h)v, \rho(h)w) \\ &= \sum_{g \in G} (\rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w)_0 \\ &= \sum_{g \in G} (\rho(gh)v, \rho(gh)w)_0 \\ &= (v, w) \\ & \text{setze } \tilde{g} = gh \\ \Rightarrow &= \sum_{\tilde{g} \in G} (\rho(\tilde{g})v, \rho(\tilde{g})w)_0 = (v, w) \end{aligned}$$

Dies ist ein Trick den man sehr oft verwenden kann, um unitäre Darstellungen zu konstruieren.

2.3 Lemma von Schur

Satz Schur Satz 37

Sei $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ endlich-dimensionalle Darstellungen der Gruppe G.

Wir untersuchen den Vektorraum

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{\varphi : V_1 \to V_2 \mid \varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(\varphi(v))$$

Seien $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ **irreduzible** endlich-dimensionale Darstellungen von G.

- $\Phi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \Rightarrow \Phi = 0$ oder φ Isomorphismus und ρ_1, ρ_2 äquivalent
- $$\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1) \Rightarrow \varphi = \lambda \mathbb{1}_{V_1}, \lambda \in \mathbb{C}$$

Wenn wir zwei irreduzible Darstellungen haben, welche nicht äquivalent sind, dann gibt es zwischen diesen beiden Darstellungen keine Abbildung ausser dem null-Homomorphismus.

Falls man in den selben Darstellungsraum abbildet, dann ist die Abbildung ein Skalar mal die Identität.

Beweis:

- Das Bild und der Kern sind invariante Unterräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(V_1) \subset V_1, \mathrm{Im}(V_2) : 1.\varphi(v) = 0 &\Rightarrow \varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0 \\ &\Rightarrow \rho_1(g)v \in \mathrm{Ker}(\varphi) \\ &2.w = \varphi(v) \\ \rho_2(g)w = \rho_2(g)\varphi(v) &= \varphi(\rho_1(g)v) \in \mathrm{Im}(\varphi) \end{aligned}$$

  Da ρ_1, ρ_2 irreduzibel sind, ist:

  $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ oder V_1 und oder $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ oder V_2.

  - Falls $\mathrm{Ker}(\varphi) = V_1$ dann ist $\varphi = 0$ per Definition.
  - Falls $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ dann ist φ injektiv (auch $\varphi \neq 0$). Dann ist $\mathrm{Im}(\varphi)$ auch nicht der Nullraum, also $\mathrm{Im}(\varphi) = V_2$. Dann ist φ auch surjektiv, also ein Isomorphismus.
- Hier nutzen wir, dass der Körper über $\mathbb{C}$ ist. Sei λ ein Eigenwert von φ, also $\varphi - \lambda \mathbb{1}_{V_1} \in \mathrm{Hom}_{G(V_1, V_1)}$ nicht invertierbar ($\det = 0$).

  Wir benutzen den vorherigen Satz und sehen, dass $\tilde{\varphi} = 0$ oder invertierbar. Invertierbar haben wir schon ausgeschlossen, also ist $\tilde{\varphi} = 0$.

  $\Rightarrow \varphi = \lambda \mathbb{1}_{V_1}$

Die physikalische Interpretation ist, dass zwei irreduzible Darstellungen nicht miteinander wechselwirken können, wenn sie nicht äquivalent sind, da der Operator dann einfach Null wäre.

Korollar Abelsche Gruppen Corollary 38

Für abelsche Gruppen: Jede irreduzible endlich-dimensionale $\mathbb{C}-$Darstellung ist eindimensional.

Beweis:

Bei abelschen Gruppen gilt, dass beliebige zwei Elemente kommutieren. Das heisst auch, dass die Darstellungsmatrizen kommutieren. Das heisst, dass die Darstellungsmatrizen diagonalisiert werden können.

$$\begin{gathered} gh = hg \Rightarrow \rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g) \\ \forall g \in G \Rightarrow \rho(g) \in \mathrm{Hom}_{G(V,V)} \\ \text{weil } \rho(g)\rho(h) = \rho(gh) = \rho(hg) = \rho(h)\rho(g) \\ \Rightarrow \rho(g)\lambda_g \mathbb{1}_V, \lambda_g \in \mathbb{C} \end{gathered}$$

Dies impliziert, dass jeder beliebige Unterraum von V invariant ist. $\Rightarrow \dim(V) = 1$.

2.4 Recap

- Eine Darstellung wird dadurch klassifiziert, wie reduzibel sie ist und welche irreduziblen Darstellungen es gibt.
- Alle unitären Darstellungen sind vollständig reduzibel.
- Alle endlichen Gruppen haben eine unitäre Darstellung, also auch vollständig reduzibel.

3 Endliche Gruppen

In diesem Kapitel sind alle Gruppen endliche und alle Darstellungen endlichdimensional und komplex.

3.1 Orthogonalitätssrelation für die Matrixelemente

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine irreduzible Darstellung von G.

Sei $(,)$ ein Skalarprodukt auf V dessen ρ unitär ist.

Wir wählen eine Orthonormalbasis von V: $\rho_{ij}(g)$ die Matrix von $\rho(g)$ bezüglich dieser basis

Da die Matrix unitär:

$$\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ji}(g)} \Leftrightarrow \rho(g)^* = \rho(g^{-1})$$

Satz Satz 39

Seien $\rho : G \to GL(V), \rho' : G \to GL(V')$ irreduzible unitäre Darstellungen von G und $(\rho_{ij}(g)), \rho'_{ij}(g)$ die Matrizen von $\rho(g), \rho'(g)$ bezüglich (beliebigen) Orthonormalbasen von V, V'.

1. Sind ρ, ρ' inäquivalent (nicht isomorph), so gilt:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho'_{kl}(g) = 0$$

   Dies sagt auch aus:

$$(\rho_{ij}, \rho'_{kl}) = 0$$

2. Sind ρ, ρ' äquivalent (isomorph), so gilt:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho'_{kl}(g) = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim(V)}$$

Bemerkung: Auf dem Raum $\mathbb{C}(G) : \{f : G \to \mathbb{C}\}$ hat man folgendes Skalarprodukt:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g)$$

Dann folgt, dass $\rho_{ij}, \rho'_{kl} \in \mathbb{C}(G)$ orthogonal und "fast" orthonormal.

Beweis:

Wir benutzen Mittelwertbildung und das Lemma von Schur:

1. Wir bauen einen Homomorphismus von ρ zu ρ'.

   Sei $\varphi : V \to V'$ irgendeine lineare Abbildung mit Matrix φ_{ij}.

$$\varphi_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1}) \varphi \rho(g)$$

$$\text{also } \varphi_G \rho(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1}) \varphi \rho(gh)$$

$$\tilde{g} = gh$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{|G|} \sum_{\sim \in G} \rho'((\tilde{g}h)^{-1}) \varphi(\rho(\tilde{g}))$$

$$\rho'\left((\tilde{g}h^{-1})^{-1}\right) = \rho'(g\tilde{g}^{-1}) = \rho'(g)\rho'(\tilde{g}^{-1})$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{|G|} \sum_{\sim \in G} \rho'(h)\rho'(\tilde{g}^{-1}) \varphi \rho(g)$$

$$= \rho'(h)\varphi_G \Rightarrow \varphi_G \in \mathrm{Hom}_H(V, V')$$

   Also nach Schur 1: $\varphi_G = 0$. Wir schreiben also die Matrixelemente von φ_G:

$$(\varphi_G)_{jl} = 0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{ik} \overline{\rho'_{ij}(g)} \varphi_{ik} \rho_{kl}(g)$$

$$= \sum_{ik} \varphi_{ik} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho'_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) \right) = 0$$

$$\forall \varphi$$

2. Wir benutzen Schur 2: $\varphi_G = \lambda(\varphi)\mathbb{1}_V$:

$$\rho = \rho'$$

$$\Rightarrow \varphi_G = \lambda(\varphi)\mathbb{1}_V$$

$$\mathrm{tr}(\varphi_G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(\rho(g)^{-1} \varphi \rho(g))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(\varphi)$$

$$= \mathrm{tr}(\varphi) \text{ Schur} := \lambda(\varphi) \dim(V)$$

$$\Rightarrow \lambda(\varphi) = \frac{\mathrm{tr}(\varphi)}{\dim(V)}$$

$$\Rightarrow \varphi_G - \frac{\mathrm{tr}(\varphi)}{\dim(V)} \mathbb{1}_V = 0$$

$$0 = (\tilde{\varphi})_{jl} = (\varphi_G)_{jl} - \delta_{jl} \frac{1}{\dim(V)} \sum_{ik} \varphi_{ik} \delta(ik)$$

$$= \sum_{ik} \varphi_{ik} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) - \delta_{jl}\delta_{ik} \frac{1}{\dim(V)} \right) \forall \varphi$$

$$\Rightarrow = 0 \blacksquare$$

Zusammenfassed, wenn man zwei irreduzible Darstellungen ρ, ρ' von G hat, dann ist die representation der Matrixelemente von ρ bezüglich einer Orthonormalbasis orthogonal zu den Matrixelementen von ρ' bezüglich einer anderen Orthonormalbasis, wenn die Darstellungen nicht isomorph (nicht äquivalent) sind.

3.2 Charakter einer Darstellung

Definition **Charakter** Definition 40

Der Charakter einer (endlichdimensionalen) Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ ist die Funktion:

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C},$$

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$$

$$= \sum_i \rho_{ii}(g)$$

$$\chi_\rho \in \mathbb{C}(G)$$

Eigenschaften:

1. Invariant unter Konjugation:

$$\chi_\rho(g) = \chi_\rho(hgh^{-1}) \forall h \in G$$

2. Sind ρ, ρ' äquivalent, so gilt, dass die charaktere gleich sind:

$$\chi_\rho = \chi_{\rho'}$$

Beweis:

$$\chi_\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(hgh^{-1}))$$

$$= \mathrm{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1}))$$

$$= \mathrm{tr}(\rho(h)\rho(h^{-1})\rho(g))$$

$$= \mathrm{tr}(\rho(g))$$

$$\blacksquare$$

Wei tr die Spur ist, ist sie invariant unter Konjugation.

Sei $\varphi : V \to V'$ ein Isomorpohismus zwischen den Darstellungen ρ, ρ'. Das heisst:

$$\begin{aligned}\varphi \circ \rho(g) &= \rho'(g) \circ \varphi \\ \Rightarrow \varphi \circ \rho(g) \circ \varphi^{-1} &= \rho'(g) \\ \Rightarrow \operatorname{tr}(\rho'(g)) &= \operatorname{tr}(\varphi \circ \rho(g) \circ \varphi^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(\rho(g)) = \chi_\rho(g)\end{aligned}$$

■

3.2.1 Konjugationsklassen

Definition Konjugationsklasse — Definition 41

Zwei Elemente $g, h \in G$ sind in der gleichen Konjugationsklasse, wenn es ein $k \in G$ gibt, so dass $h = kgk^{-1}$.

Dies bildet ein Teilmenge der Form

$$\{hgh^{-1} \mid h \in G\}$$

Die Konjugationsklassen sind die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $g \sim h' \Leftrightarrow g = hg'h^{-1}$ für ein $h \in G$.

Oder alternativ die Bahnen von der Wirkung von G auf sich selbst durch Konjugation.

- vom Satz sagt, dass Charaktere auf Konjugationsklassen konstant sind:

  Man sagt χ_ρ ist eine Klassenfunktion.

Typische Operationen auf Darstellungen:

Seien $(\rho, V), (\rho', V')$ Darstellungen von G.

- Direkte Summe:

  $\rho \oplus \rho'$ ist die Darstellung auf $V \oplus V'$, sodass $(\rho \oplus \rho')(g)(v + v') = \rho(g)v + \rho'(g)v'$.

- Die Tensorproduktdarstellung:

  $\rho \otimes \rho'$ ist die Darstellung auf $V \otimes V'$, sodass:

  $$(\rho \otimes \rho')(g)(v \otimes v') = (\rho(g)v) \otimes (\rho'(g)v')$$

- Duale Darstellung:

  Sei $\rho_{\text{dual}}, V^*)$ ist die Darstellung auf dem Dualraum $V^* = \{\lambda : V \to \mathbb{C}_{\text{linear}}\}$, sodass

  $$((\rho_{\text{dual}})(g)\lambda)(v) = \lambda(\rho(g)^{-1}v)$$

3.2.2 Charakter der direkten Summe und des Tensorprodukts

Lemma — Lemma 42

- $\chi_\rho(1) = \dim(V) = \dim(\rho)$
- $$\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$$
- $$\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \chi_{\rho'}$$
- $$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$$

Beweis:

Sei $e_1, ..., e_n$ basis von V. $e_1', ..., e_n'$ basis von V'.

Dann ist $e_1, ..., e_n, e_1', ..., e_n'$ eine basis von $V \oplus V'$.

Die Matrix von $(\rho \oplus \rho')(g)$:

$$\begin{pmatrix} \rho(g)_{ij} & 0 \\ 0 & \rho'(g)_{kl} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(\rho \oplus \rho'(g)) = \operatorname{tr}(\rho(g)) + \operatorname{tr}(\rho'(g))$$

■

Wähle ein invariantes Skalarprodukt auf V, sodass ρ unitär ist.

$$\Rightarrow (\rho(g))_{ij} \in U(n)$$

Die Darstellungsmatrizen sind unitär. Das heisst aber:

$$\begin{aligned}\rho(g^{-1})_{ij} &= \overline{\rho(g)_{ji}} \\ \Rightarrow \operatorname{tr}(\rho(g^{-1})) &= \sum_i \overline{\rho(g)_{ii}} = \overline{\operatorname{tr}(\rho(g))}\end{aligned}$$

Beispiele:

3.2.3 Charakter der regulären Darstellung

Die reguläre Darstellung war einfach die Darstellung von G auf dem Raum $\mathbb{C}(G)$ der komplexen Funktionen auf G.

$$\begin{gathered}(\rho_{\text{reg}}(g)f)(h) = f(g^{-1}h) \\ f : G \to \mathbb{C}\end{gathered}$$

Die einfache Basis ist $\delta_g(h) = \delta_{gh}$.

Lemma — Lemma 43

$$\rho_{\text{reg}}(g)\delta_h = \delta_{gh}$$

nur Diagonaleinträge falls $h = gh \Leftrightarrow g = 1$.

$$\Rightarrow \chi_{\text{reg}}(g) = \operatorname{tr}\big(\rho_{\text{reg}}(g)\big) = |G|\delta_{1g}$$

Dies wird später noch wichtig sein.

3.3 Orthogonalität der Charaktere

Wir werden gleich sehen, dass die Charaktere irreduzibler Darstellungen orthogonal sind.

Satz Orthogonalität der Charaktere — Satz 44

Sei ρ, ρ' **irreduzible** Darstellungen von G mit Charakteren $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$.

Dann gilt:

1. Sind ρ, ρ' inäquivalent (nicht isomorph), so gilt:

   $$(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\rho(g)} \chi_{\rho'}(g) = 0$$

2. Sind ρ, ρ' äquivalent (isomorph), so gilt:

   $$(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) &= \left(\sum_i \rho_{ii}, \sum_j \rho_{jj}'\right) \\ &= \sum_{i,j} = (\rho_{ii}, \rho_{jj}')\end{aligned}$$

Da die Matrixelemente orthogonal sind, folgt:

$$(\rho_{ii}, \rho_{jj}') = 0$$

■

Wir nehmen an $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ gleich sind:

$$\begin{aligned}(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) &= \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \rho_{jj}') \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{1}{\dim(\rho)} \\ &= \frac{\dim(\rho)}{\dim(\rho)} = 1\end{aligned}$$

■

korollar Corollary 45

Sei $\rho \cong \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \ldots$ eine Zerlegung der Darstellung ρ in irreduzible Darstellungen ρ_i auf G. Dann sei χ_ρ wie gehabt.

Sei σ eine irreduzible Darstellung von G. Dann ist ist die anzahl von ρ_j, die äquivalent zu σ ist, gegeben durch:

$$n_\sigma = (\chi_\rho, \chi_\sigma) = \#\{j \mid \rho_j \cong \sigma\}$$

Dies nennt man auch die **Vielfachheit** von σ in ρ.

Beweis:

$$\begin{aligned} \chi_\rho &= \sum_i \chi_{\rho_i} \\ \Rightarrow (\chi_\rho, \chi_\sigma) &= \sum_j (\chi_{\rho_j}, \chi_\sigma) \\ &= \#\{j \mid \rho_j \cong \sigma\} \end{aligned}$$

■

korollar Corollary 46

Sei ρ eine irreduzible Darstellung von G. Dann ist die Vielfachheit von ρ in sich selbst gleich 1:

$$n_\rho = (\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$$

Dies ist eine Möglichkeit, die Irreduzibilität nachzuweisen.

Beweis:

Sei ρ reduzibel $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \ldots$ (n >= 2).

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{ij} (e_i, e_j) =\geq n \geq 2 \neq 1$$

3.4 Zerlegung der regulären Darstellung

Wir werden sehen, dass die reguläre Darstellung ρ_{reg} alle irreduziblen Darstellungen enthält.

Satz Zerlegung der regulären Darstellung Satz 47

Jede irreduzible Darstellung σ von einer endlichen Gruppe G kommt genau $n_\sigma = (\chi_{\text{reg}}, \chi_\sigma) = \dim(\sigma)$ mal in der Zerlegung der regulären Darstellung ρ_{reg} vor.

Beweis:

$$(\chi_{\text{reg}}, \chi_\sigma) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\text{reg}}(g)} \chi_\sigma(g)$$

Alle terme verschwinden, ausser die, wo $g = 1$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|G|} |G| \chi_\sigma(1) \\ &= \chi_\sigma(1) = \dim(\sigma) \end{aligned}$$

■

korollar Corollary 48

Der Raum der Funktionen auf G ist endlichdimensional. Da ρ_{reg} eine Darstellung ist, ist sie auch endlichdimensional. Dies bedeutet auch, dass es endlich viele irreduzible Darstellungen gibt (bis auf äquivalenz).

Seien $\rho_1, \ldots, \rho_k$ die irreduziblen Darstellungen von G (bis auf Äquivalenz) mit Dimensionen $d_1, \ldots, d_k$.

Dann gilt die Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{C}(G)) &= |G| \\ &= \sum_{j=1}^k d_j^2 \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |G| = \dim(\mathbb{C}(G)) &= \chi_{\text{reg}}(1) \\ &= \sum_{j=1}^k \dim(\rho_j) \dim(\rho_j) \\ \text{weil } \chi_{\text{reg}} &= \sum_{j=1}^k \dim(\rho_j) \chi_j \end{aligned}$$

■

3.5 Satz von Peter - Weyl

korollar Satz von Peter - Weyl Corollary 49

Sei $\rho_1, \ldots, \rho_k$ eine Liste der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von G.

Seien $(\rho_{\alpha,ij}(g))$ die Darstellungsmatrizen bezüglich einer orthogonalen Basen auf den unterliegenden Vektorräumen V_α.

Die Funktionen

$$(\rho_{\alpha,ij}, \alpha = 1, \ldots, k, i, j = 1, \ldots, \dim(\rho_\alpha)$$

bilden eine orthogonale Basis von $\mathbb{C}(G)$ bezüglich des Skalarprodukts.

Beweis:

Wir haben schon gesehen, dass die Vektoren dieser Liste orthogonal und $\neq 0$ sind. Also gibt es

$$\sum_\alpha (\dim(\rho_\alpha))^2$$

viele Vektoren in der Liste. Diese bilden eine Basis von $\mathbb{C}(G)$, da die Dimension von $\mathbb{C}(G)$ gleich der Anzahl der Elemente in der Liste ist.

■

korollar Corollary 50

Sei G eine endliche Gruppe. Die Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_k$ der irreduziblen Darstellungen von G bilden eine orthogonale Basis auf dem Raum der Klassenfunktionen.

Klassenfunktionen sind definiert als:

$$\{f : G \to \mathbb{C} \mid f(g) = f(hgh^{-1}) \forall h \in G\} \subset \mathbb{C}(G)$$

Beweis:

Wüssten wir schon, dass die Dimension des Raumes der Klassenfunktionen gleich der Dimension der irreduziblen Darstellungen ist, dann wäre die Behauptung klar.

Da wir dies aber noch nicht wissen, zeigen wir dies mit Mittelwertbildung:

Wir wissen χ_j bildet ein Orthonormalsystem auf dem Raum der Klassenfunktionen. Wir müssen nun zeigen, dass dies auch ein Erzeugendensystem ist.

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion.

$$\Rightarrow f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f(hgh^{-1})$$

Die $\rho_{\alpha,ij}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}(G)$. Es folgt

$$f(g) = \sum_{\alpha ij} \lambda_{\alpha,ij} \rho_{\alpha,ij}(g)$$

für alle $g \in G$, für geeignete Koeffizienten $\lambda_{\alpha,ij}$.

Dies setzen wir in die Gleichung für $f(g)$ ein:

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{\alpha ij} \lambda_{\alpha,ij} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ij}(hgh^{-1}) \\ &= \sum_{\alpha ijkl} \lambda_{\alpha,ij} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ik}(h) \rho_{\alpha,kl}(g) \rho_{\alpha,lj}(h^{-1}) \\ &= \sum_{\alpha ijkl} \lambda_{\alpha,ij} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ik}(h) \rho_{\alpha,kl}(g) \overline{\rho_{\alpha,lj}(h)} \\ &= \sum_{\alpha ijkl} \lambda_{\alpha,ij} \rho_{\alpha,kl}(g) \left(\rho_{\alpha,jl}, \rho_{\alpha,ik}\right) \\ &\text{weil } \left(\rho_{\alpha,ik}, \rho_{\alpha,jl}\right) = \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{1}{\dim(\rho_\alpha)} \\ &\Rightarrow= \sum_{\alpha i} \lambda_{\alpha,ii} \sum_k \rho_{\alpha,kk}(g) \frac{1}{\dim(\rho_\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha i} \lambda_{\alpha,ii} \frac{1}{\dim(\rho_\alpha)} \chi_\alpha(g) \end{aligned}$$

Somit ist f ausgedrückt als Linearkombination der Charaktere χ_α.

■

Wir beobachten, dass die Dimension des Raumes der Klassenfunktionen gleich ist wie die Anzahl der Konjugationsklassen.

Korollar — Corollary 51

Eine endliche Gruppe hat genauso viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen wie Konjugationsklassen.

3.6 Die Charaktertafel

Die Charaktertafel einer endlichen Gruppe G ist eine $k \times k$ Tabelle folgender Form:

$\mathbb{G}$	c_1	c_2	…	c_k
χ_1	$\chi_1(c_1)$	$\chi_1(c_2)$	…	$\chi_1(c_k)$
χ_2	$\chi_2(c_1)$	$\chi_2(c_2)$	…	$\chi_2(c_k)$
…	…	…	…	…
χ_k	$\chi_k(c_1)$	$\chi_k(c_2)$	…	$\chi_k(c_k)$

$\chi_i(c_j)$ bedeutet die Anwendung von χ_i auf ein beliebiges Element g der Menge c_j.

Beispiel:

$G = S_3$ besteht aus allen Permutationen von $\{1,2,3\}$.

$$|G| = 3! = 6$$

- Konjugationsklassen:

  Sei s die Permutation $(1,2,3) \to (2,1,3)$ (vertausschung).

  Sei f die Permutation $(1,2,3) \to (3,1,2)$ (cyklisch).

  $$\Rightarrow S_3 = \{1, s, tst^{-1}, t^2st^{-2}, t, sts^{-1}\}$$

Daraus kann man nun die Konjugationsklassen extrahieren.

In jeder Gruppe ist 1 ihre eigene Konjugationsklasse:

$$\begin{aligned} C_1 &= [1] = \{1\} \\ C_2 &= [s] = \{s, tst^{-1}, t^2st^{-2}\} \text{ ungereade} \\ C_3 &= [t] = \{t, sts^{-1}\} \text{ gerade} \end{aligned}$$

Gerade und ungerade Permutationen können nicht in der gleichen Konjugationsklasse liegen.

Wir sehen, wir haben 3 Konjugationsklassen. Wir schauen uns die irreduziblen Darstellungen an. Wir wissen es gibt 3 viele (bis auf äquivalenz). Seien die jeweiligen Dimensionen d_1, d_2, d_3. Dimensionsformel:

$$\sum_i d_i^2 = |S_3| = 6$$

Raten bringt us auf Dimensionen $(1,1,2)$ weil das die einzige Kombination ist, welche die Formel erfüllt.

Bei einer beliebigen Gruppe gibt es immer die triviale Darstellung auf $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{triv}}(g) &= 1 \\ \dim(\rho_{\text{triv}}) &= 1 \end{aligned}$$

Weiterhin haben Permutationsgruppen auch die Vorzeichendarstellung (Signumsdarstellung):

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(g) &= \operatorname{sgn}(g) \\ \dim(\rho_\varepsilon) &= 1 \end{aligned}$$

Zufälligerweise haben wir bereits die Signumsdarstellung. In diesem fall ist $\rho_{\text{sgn}} \neq \rho_{\text{triv}}$. Somit haben wir eine weitere irreduzible Darstellung.

Weiter benutzen wir die Charaktertafel:

$6\ S_3$	$1C_1$	$3C_2$	$2C_3$
χ_{triv}	1	1	1
χ_{sgn}	1	−1	1
χ_3	2	a	b

Beim ausfüllen beachten wir, das χ_{triv} immer 1 gibt und dass C_1 immer die dimension der Gruppe gibt. χ_{sgn} gibt das signum. Die beiden letzten Einträge für χ_3 folgen aus der orthogonalität.

Das Skalarprodukt ist definiert als:

$$\begin{aligned} \left(f, \tilde{f}\right) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} \tilde{f}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{k} |C_j| \overline{f(C_j)} \tilde{f}(C_j) \end{aligned}$$

Wir wollen also mit dem Faktor gewichten.

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot |C_1| + |C_2| \cdot a + 2 \cdot b \\ 0 &= 1 \cdot 2 - 3 \cdot a + 2b \Rightarrow a = 0 \\ &\Rightarrow b = -1 \end{aligned}$$

Also haben wir

$6\ S_3$	$1C_1$	$3C_2$	$2C_3$
χ_{triv}	1	1	1
χ_{sgn}	1	−1	1
χ_3	2	0	−1

- Konstruktion der 2 dimensionale irreduziblen Darstellung:

Wir haben die (unitäre) Darstellung

$$\rho : S_3 \to GL(\mathbb{C}^3)$$
$$\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$$
$$\Rightarrow \chi(1) = 3 \text{ dimension}$$
$$\Rightarrow \chi(s) = 1$$
$$\text{weil } \rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \chi(t) = 0$$
$$\text{weil } \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(\chi, \chi) = 2 \text{ nicht irreduzibel}$$

Wir suchen eine irreduzible Unterdarstellung von ρ.

$$U = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3)$$

ist ein invarianter Unterraum. Wir wissen aber $\rho|_U = \rho_{\text{triv}}$

$$\Rightarrow U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Wir behaupten, dass $\rho|_{U^\perp}$ ist die gesuchte 2 dimensionale irreduzible Darstellung.

Um zu zeigen, dass $\rho|_{U^\perp}$ irreduzibel ist, rechnen wir das Skalarprodukt vom Charakter mit sich selbst aus und zeigen, dass es 1 ist.

Charakter $\chi^\perp$ von $\rho|_{U^\perp}$ erfüllt

$$\chi = \chi^\perp + \chi_{\text{triv}}$$
$$\Rightarrow \chi^\perp = \chi - \chi_{\text{triv}} = \begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ s \mapsto 0 \\ t \mapsto -1 \end{pmatrix}$$
$$(\chi^\perp, \chi^\perp) = \frac{1}{6}(2^2 * 1 + 0^2 * 3 + (-1)^2 * 2) = 1$$

Wir haben also eine irreduzible Darstellung gefunden.

Durch diese Berechnung haben wir mehrere wichtige Ziele erreicht und fundamentale Eigenschaften der symmetrischen Gruppe S_3 aufgedeckt:

Was wir erreichen wollten: Unser Hauptziel war es, alle irreduziblen Darstellungen von S_3 zu klassifizieren und explizit zu konstruieren. Da wir bereits wussten, dass es drei Konjugationsklassen gibt, mussten nach der Darstellungstheorie genau drei irreduzible Darstellungen existieren mit Dimensionen, die die Gruppenordnung teilen.

Die durchgeführten Schritte:

1. **Dimensionsanalyse**: Durch die Formel $\sum_i \dim(\rho_i)^2 = |G| = 6$ identifizierten wir die möglichen Dimensionen $(1, 1, 2)$.
2. **Triviale Konstruktionen**: Wir erkannten sofort die triviale Darstellung ρ_{triv} und die Signumsdarstellung ρ_{sgn}, beide eindimensional.
3. **Permutationsdarstellung**: Wir konstruierten die natürliche 3-dimensionale Permutationsdarstellung $\rho : S_3 \to GL(\mathbb{C}\}^3)$ durch $\rho(\sigma)e_i = e_{\{\sigma(i)\}}$.
4. **Charakterberechnung**: Durch explizite Matrixdarstellungen berechneten wir den Charakter χ dieser Darstellung.
5. **Reduzibilität prüfen**: Das Skalarprodukt $(\chi, \chi) = 2$ bewies, dass diese Darstellung reduzibel ist.
6. **Invariante Unterräume**: Wir identifizierten $U = \operatorname{span}(e_1 + e_2 + e_3)$ als invarianten Unterraum, der die triviale Darstellung trägt.
7. **Orthogonale Projektion**: Durch Übergang zum orthogonalen Komplement $U^\perp$ extrahierten wir die gesuchte 2-dimensionale irreduzible Darstellung.
8. **Irreduzibilitätsnachweis**: Das Skalarprodukt $(\chi^\perp, \chi^\perp) = 1$ bestätigte die Irreduzibilität.

Was uns das über S_3 aussagt: Diese Konstruktion offenbart die tiefe Struktur der symmetrischen Gruppe S_3:

- **Vollständige Klassifikation**: Wir haben nun alle irreduziblen Darstellungen gefunden: zwei eindimensionale (trivial und Signum) und eine zweidimensionale.
- **Geometrische Interpretation**: Die 2-dimensionale Darstellung entspricht der Wirkung von S_3 auf die Ebene senkrecht zur Hauptdiagonale im $\mathbb{R}^3$ - geometrisch die Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks.
- **Algebraische Struktur**: Die Zerlegung der Permutationsdarstellung zeigt, wie S_3 auf verschiedenen Unterräumen agiert und wie sich komplexere Darstellungen aus einfacheren zusammensetzen.

Bemerkung:

Die Orthonormalität der Charaktertafel sagt, dass die $k \times k$ Matrix

$$A = \left(\sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}} \chi_i(C_j) \right)_{\{i,j=1,\dots,k\}}$$

orthonormale Zeilen hat bezüglich des Standard-Skalarprodukts, also $A \in U(n)$. A hat auch orthonormale Spalten bezüglich des Standard-Skalarprodukts.

$$\sum_j \chi_j(C_\alpha)\overline{\chi_j(C_\beta)} = \frac{|G|}{|C_\alpha|}\delta_{\alpha\beta}$$

3.7 Die Kanonische Zerlegung einer Darstellung

Sei $\rho : G \to GL(V)$ (endlichdimensional, komplex).

Wir können V schreiben als direkte Summe von invarianten, irreduziblen ($\rho|U_i$ irreduzibel) Unterräumen $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Seien $\rho_1, \dots, \rho_k$, $\rho_i : G \to GL(V_i)$ die inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von G.

Wir müssen nun die Unterräume U_i finden, die ρ_i tragen.

Sei $W_i = \oplus_j U_j | \rho|_{U_j} \cong e_i$, sodass $\rho|_{U_i}$ äquivalent zu ρ_i ist.

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$$

Satz Kanonische Zerlegung — Satz 52

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung von G.

Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung von V in Invariante, irreduzible Unterräume:

Die Zerlegung W_i ist unabhängig von der Zerlegung in U_i.

Die Projektion $P_i : V \to W_i$ ist eindeutig, sodass $\rho|_{W_i}$ äquivalent zu ρ_i ist.

$$w_1 + \dots + w_k \mapsto w_i = p_i(w_1 + \dots + w_k)$$
$$p_i(v) = \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(g) v$$

Beweis:

Aus der 2. Aussage folgt die 1. Aussage, da die W_i eindeutig sind.

1. Wir zeigen, dass die p_i ein Gruppenhomomorphismus sind:

$$p_i \rho(h) v = \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(gh) v$$
$$\text{substitution } g \mapsto hgh^{-1}$$
$$\Rightarrow= \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(hgh^{-1})} \rho(hg) v$$
$$= \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(h) \rho(g) v$$
$$= \rho(h) p_i(v)$$

Dies ist die Homomorphismuseigenschaft.

2. Für $v \in U_j$ ist $\rho(g) v \in U_j \forall g$, da U_j invariant.

$$\Rightarrow p_i|_{U_j} : U_j \to U_j$$

Wir verwenden das Lemma von Schur 2:

$$p_i|_{U_j} = \lambda\left(p_i|_{U_j}\right) \mathbb{1}_{\{U_j\}}$$
$$\Rightarrow p_i|_{U_j} = c_{ij} \mathbb{1}_{U_j}$$

Um das c_{ij} zu bestimmen, berechnen wir die Spur:

$$c_{ij} \dim(U_j) = \operatorname{tr}\left(p_i|_{U_j}\right)$$
$$= \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \operatorname{tr}\left(\rho(g)|_{U_j}\right)$$
$$= \dim(V_i)\left(\chi_i, \chi_{\rho|_{U_j}}\right)$$
$$\Rightarrow c_{ij} = \begin{cases} 0, \rho_i \neq \rho|_{U_j} \\ 1, \rho_i \cong \rho|_{U_j} \end{cases}$$

Die Zerlegung von $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ heisst die **kanonische Zerlegung** von V bezüglich der Darstellung ρ.

Wie W_j nennt man **isotypische Komponenten**.

Bemerkung:

Jede endlichdimensionale, komplexe Darstllung einer endlichen Gruppe G lässt sich also schreiben als:

$$V \cong \oplus_{j=1}^k \left(V_j \oplus \ldots \oplus V_j\right)$$
$$\text{Notation} : W \oplus \ldots \oplus W \cong W \otimes \mathbb{C}^n$$
$$\Rightarrow= \otimes_{j=1}^k \left(V_j \otimes \mathbb{C}^{n_j}\right)$$
$$\text{mit } n_j = \left(\chi_j, \chi_\rho\right)$$

Der Isomorphismus ist eindeutig bestimmt bis auf Automorphismen der Form:

$$\oplus_{j=1}^k \mathbb{1}_{V_j} \otimes F_j$$
$$\text{mit } \mathbb{C}^{n_j} \to \mathbb{C}^{n_j} \text{ beliebig}$$

3.8 Beispiel: Die Diedergruppen

Ziel:

Finde alle irreduziblen Darstellungen der Diedergruppe $D_n = \left\{R^a S^b \mid a = 0, \ldots, n-1; b = 0, 1\right\}$.

Wir haben die Symmetrien der Rotation eines n-Ecks und die Symmetrien der Spiegelung.

Sei $\rho : D_n \to GL(V)$ irgendeine Darstellung. Wir definieren $\overline{R} = \rho(R), \overline{S} = \rho(S)$.

Diese können nicht geliebig sein wegen $R^n = \mathbb{1}$ und es gilt:

$$\Rightarrow \overline{R^n} = \mathbb{1}_V$$
$$\Rightarrow \overline{S^2} = \mathbb{1}_V$$
$$SR = R^{-1} S \text{ oder } SRS^{-1} = R^{-1}$$
$$\Rightarrow \overline{SR} = \overline{R^{-1} S}$$

Sind umgekehrt $\overline{S}, \overline{R} \in GL(V)$, sodass die obigen Gleichungen gelten, dann gilt:

$$\rho\left(R^a S^b\right) = \overline{R}^a \overline{S}^b$$

und ist eine Darstellung von D_n.

Beweis:

Da die Produktregeln $R^a R^b R^{a'} S^{b'} = R^{a+a'-2a'b} S^{b+b'}$ von ρ respektiert wird.

3.8.1 Eindimensionale Darstellungen

$$\dim V = 1$$
$$\Rightarrow \overline{R^n} = \overline{S^2} = 1 = \overline{R^2}$$
$$\Rightarrow \overline{R}, \overline{S} \in \{\pm 1\}$$

und $\overline{R} = 1$ falls n ungerade.

$$n \text{ gerade} \Rightarrow 4 \text{ Dst. } \overline{S}, \overline{R} = \{\pm 1\}$$
$$n \text{ ungerade} \Rightarrow 2 \text{ Dst. } \overline{S} = \{\pm 1\}, \overline{R} = 1$$

3.8.2 Zweidimensionale Irreduzible Darstellungen

Sei (ρ, V) eine Darstellung von D_n mit $\dim(V) = 2$.

Sei v ein Eigenvektor von $\overline{R} = \rho(R)$ mit Eigenwert ε.

$$\overline{R}^n = 1 \Rightarrow \varepsilon^n = 1$$
$$\Rightarrow \varepsilon = e^{2\pi i \frac{j}{n}}, j = 0, \ldots, n-1$$
$$\overline{SR} = \overline{R^{-1} S}$$
$$\Rightarrow \overline{SR} v = \varepsilon \overline{S} v = \overline{R^{-1} S} v$$
$$\Rightarrow \overline{R}\left(\overline{S} v\right) = \varepsilon^{-1}\left(\overline{S} v\right)$$

Dies bedeutet, dass $\overline{S} v$ ein Eigenvektor von $\overline{R}$ ist mit Eigenwert ε^{-1}.

Wäre $\overline{S} v \propto v$, so wäre $\operatorname{span}(v)$ invariant, also ρ nicht irreduzibel.

Wir wollen ρ irreduzibel, also $(v, \overline{s} v)$ bilden Basis von V.

In dieser Basis:

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \overline{R} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen definieren eine Darstellung von D_n.

Wir müssen nun noch zeigen, dass diese Darstellungen irreduzibel und inäquivalent sind.

Falls $\varepsilon = \varepsilon^{-1} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1$, so ist die Darstellung nicht irreduzibel, da $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ bzw. $\operatorname{span}\left(v + \overline{S} v\right)$ ist invariant.

Wir nemhen an $\varepsilon \neq \varepsilon^{-1}$, also $j \neq 0, \frac{n}{2}$. In den anderen Fällen ist die Darstellung irreduzibel, denn falls er reduzibel wäre, dann gäbe es ein $w \neq 0 \in V$, sodass $\operatorname{span}(w)$ invariant ist.

Falls w ein gemeinsamer Eigenvektor von $\overline{R}$ und $\overline{S}$ ist, gäbe es einen widerspruch, da $\overline{R}$ und $\overline{S}$ nicht gleichzeitig diagonalisiert werden können, da sie nicht kommutieren.

Vertauschen $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon^{-1} \Leftrightarrow j \leftrightarrow n - j$ ergibt äquivalente Darstellungen.

Falls $\left\{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\right\} \neq \left\{\varepsilon', \varepsilon'^{-1}\right\} \Rightarrow$ Entsprechende Darstellungen sind inäquivalent.

Wir listen die inäquivalenten irreduziblen Darstellungen der Dimension 2 auf:

Sei ρ_j die Darstellung wie oben, mit $\varepsilon = e^{2\pi i \frac{j}{n}}$.

$$\rho_j, j = 1, 2, ..., \mathrm{floor}\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

sind die inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von D_n der Dimension 2.

Behauptung:

Wir haben alle irreduziblen Darstellungen von D_n gefunden.

Beweis:

Dimensionsformel:

$$2n = |G| = \sum_i \dim(\rho_i)^2$$

Wir unterscheiden n gerade:

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = 4\left(1 + \frac{n}{2} + 1\right) = 2n$$

n ungerade:

$$2 \cdot 1^2 + 2^2 \frac{n-1}{2} = 2(1 + n - 1) = 2n$$

■

Charaktere der zweidimensionalen Darstellungen:

$$\chi_j = \chi_{\rho_j}$$
$$\chi_j(R^a) = 2\cos\left(2\pi \frac{j}{n}\right)$$
$$\chi_j(R^a S) = 0$$

Schlussbemerkung:

Die meisten gier für endliche Gruppen gezeigten aussagen gelten weiterhin für kompakte Gruppen, wenn man ersetzt:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (-) \to \int_G (-)$$

Weiterhin können wir viele der Aussagen für nicht-kompakte Gruppen benutzen, mittels einer Lie-Algebra.

3.9 Darstellungstheorie von S_n

Ziele:

- Konjugationsklassen
- Irreduziblen Darstellungen
- Charaktere der Darstellungen

3.10 Partitionen

Sei $n \in \mathbb{N}$

Dann ist eine Partition (Zerlegung, Zahlpartition) von n eine Zerlegung von n in eine Summe von ganzen Zahlen ≥ 1:

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$$

Diese ist äquivalent unter Vertauschung.

Beispiel: $n = 4$ hat 5 verschiedene Partitionen:

$$4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Man gibt sie oft an, indem man festhält wie oft eine jeweilige Zahl vorkommt. Diese Angabe ist dann auch eindeutig. Es gilt dann:

$$n = \sum_j j \cdot i_j$$

Wir schreiben $\underline{i} = (i_1 \ \ i_2 \ \ \ldots \ \ i_n)$.

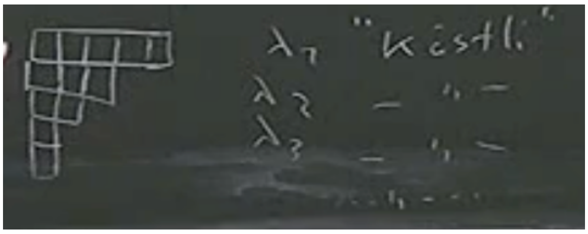
Beispiel: $4 = 2 + 1 + 1$:

$$\underline{i} = (2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ \ldots)$$

Eine Partition lässt sich durch ein **Young-Tableau** darstellen.

Sei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots$.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$$



Beschreibt $12 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1$.

3.11 Permutationen und Konjugationsklassen

Sei $\sigma \in S_n = \mathrm{Bij}(\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, .n\})$ eine Permutation.

Schreibweisen:

1. Wertetabelle/Zweizeilenschreibweise:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(1) = 4, \sigma(2) = 1 \ldots$$

2. Zyklenschreibweise: Im vorherigen Beispiel:

$$\sigma = (142)(35)$$
$$\sigma(1) = 4, \sigma(4) = 2, \sigma(2) = 1$$
$$\sigma(3) = 5, \sigma(5) = 3$$

   Die einzelnen Blöcke heissen **Zyklen**. Die Reihenfolge der Zyklen ist egal, aber die Reihenfolge der Elemente in einem Zyklus ist wichtig. In einem Zyklus kann man jedoch die Zahlen zyklisch verschieben, z.B. $(142) = (421) = (214)$.

$$\Rightarrow (142)(35) = (421)(35)$$

Sei $i_k(\sigma)$ die Anzahl der Zyklen der Länge k in σ in der Zyklenschreibweise von σ.

$$\underline{i}(\sigma) = (i_1(\sigma), (i_2(\sigma), \ldots)$$

Beispiel:

$$\underline{i}(\sigma) = (0, 1, 1, 0)$$

Es gilt:

$$\sum_k i_k(\sigma) k = n$$

$\underline{i}(\sigma)$ bestimmt eine Partition von n.

Wir schauen uns an, wie oft wie lange Zyklen in σ vorkommen. Das ist eine Partition von n.

Lemma — Lemma 53

Sei $\tau \in S_n$ eine Permutation, in Zyklenschreibweise.

$$\tau = \left(i_{1,1} \ldots i_{1,\lambda_1}\right)\left(i_{2,1} \ldots i_{2,\lambda_2}\right) \ldots \left(i_{k,1} \ldots i_{k,\lambda_k}\right)$$

Sei $\sigma \in S_n$ beliebig. Dann gilt:

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \left(\sigma\left(i_{1,1}\right) \ldots \sigma\left(i_{1,\lambda_1}\right)\right)\left(\sigma\left(i_{2,1}\right) \ldots \sigma\left(i_{2,\lambda_2}\right)\right) \ldots \left(\sigma\left(i_{k,1}\right) \ldots \sigma\left(i_{k,\lambda_k}\right)\right) = \tau'$$

Beweis:

Zu zeigen: $\sigma\tau = \tau'\sigma$

$$\Leftrightarrow \sigma\tau(j) = \tau'(\sigma(j)) \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

O.B.d.A. $i_{1,1} = j$.

$$\tau'\sigma(j)\tau'(\sigma(i_1, 1)) = \sigma\left(i_{1,2}\right)$$
$$\sigma\tau(j) = \sigma\tau\left(i_{1,1}\right) = \sigma\left(i_{1,2}\right)$$

Korollar — Corollary 54

1. $i_k(\sigma\tau\sigma^{-1}) = i_k(\tau)$
2. Jedes σ, welches die Konugation erfüllt muss auch die gleiche Partition wie τ haben.

   $\tau, \tau' \in S_n$ sind in der gleichen Konjugationsklasse, genau dann wenn $\underline{i}(\tau) = \underline{i}(\tau')$.
3. Die Konjugationsklassen von S_n sind 1 zu 1 genau die Partitionen von n.

   Also sind die Konjugationsklassen von S_n einfach zu finden, indem wir die Partitionen von n finden.

Beispiel: Konjugationsklassen von S_3

Partitionen: 3, 2+1, 1+1+1 also 3 Konjugationsklassen:

$$[(123)] = \{(123), (132), (213), (231), (312), (321)\}$$
$$[(12)(3)] = \{(12)(3), (13)(2), (23)(1)\}$$
$$[(1)(2)(3)] = \{(1)(2)(3) = 1\}$$

In der Literatur werden die Zyklen von Länge 1 oft weggelassen.

Für jede Gruppe wissen wir, dass es genausov viele irreduzible Darstellungen wie Konjugationsklassen gibt. Es gibt also genauso viele irreduzible Darstellungen wie Partitionen von n. Für die symmetrische Gruppe gilt vor ales, dass es eine Abbildung von Partitionen von n auf irreduzible Darstellungen gibt.

3.12 Die Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe

Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ der Gruppe G der Vektorraum der formalen Linearkombinationen der Elemente von G über den komplexen Zahlen:

$$\sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}[G], a_g \in \mathbb{C}$$
$$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}(G) \text{ für endliche Gruppen}$$

$\mathbb{C}[G]$ ist ein Ring mit dem assoziativen bilinearen Produkt:

$$\mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$$

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h (gh)$$

$$= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h',h''\in G|\ h'h''=g} a_{h'} b_{h''}\right) g$$

Wenn der unterliegende Raum noch ein Vektorraum ist, und das Produkt kompatibel ist mit der Vektorraumstruktur, dann nennt man den Ring eine $\mathbb{C}$ — **Algebra**.

Sei nun $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der Gruppe G auf dem Vektorraum V. Wir erhalten eine Abbildung:

$$\rho : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$$

$$\rho\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g \rho(g)$$

Es gilt dann $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$. Also ist ρ ein Ringhomomorphismus.

Sei $\rho_1, ..., \rho_k$ eine Liste der inäquivalenten, irreduziblen Darstellungen von G auf dem Vektorraum $V_1, ..., V_k$.

Die direkte Summe:

$$\oplus_{j=1}^{k} \mathrm{End}(V_j)$$
$$\subset \mathrm{End}(V_1 \oplus ... \oplus V_k)$$

Das Endresultat kann man sich als diagonale Blockmatrix aus $f_j \in \mathrm{End}(V_j)$ vorstellen.

Dies ist wieder ein Ring:

$$(f_1, ..., f_k)(g_1, ..., g_k) = (f_1 g_1, ..., f_k g_k)$$

Theorem Satz 55

Die Abbildung von Vektorräumen (und Ringen):

$$\varphi : \mathbb{C}[G] \to \oplus_{j=1}^{k} \mathrm{End}(V_j) = R$$

$$\varphi(x) : x \mapsto \left(\rho_1(x), ..., \rho_{k(x)}\right)$$

Ist ein Isomorphismus.

Die Gruppenalgebra ist also nichts anderes als die Algebra der Blockdiagonalmatrizen.

Beweis:

Wir zeigen, dass die Abbildung injektiv und surjektiv ist. Die Vektorräume müssen dann die gleiche Dimension haben.

$$\dim \mathbb{C}[G] = |G|$$

$$\dim(R) = \sum_{j=1}^{k} \dim(\rho_j)^2 = |G|$$

Es reicht zu zeigen, dass φ injektiv ist:

Wähle Orthonronalbasis von V_j für alle j und Seite $(\rho_{\alpha,ij}(g))$ die Matrixelemente von $\rho_\alpha(g)$.

Sei für $x \in \mathbb{C}[G] : \varphi(x) = 0$, also $\rho_{\alpha,ij}(x) = 0 \forall \alpha, i, j$. Daraus folgt $x = 0$, da die $\rho_{\alpha,ij}$ eine orthogonale Basis bilden von $\mathbb{C}[G]$.

■

Wir können die Blockdiagonalmatrizen nutzen, um die irreduziblen Darstellungen zu finden.

3.13 Irreduzible Darstellungen von S_n

Definition Definition 56

Ein Young-Schema ist ein Young-Diagramm, in dessen Kästchen die Zahlen $1, 2, ..., n$ eingetragen sind. Jede Zahl kommt genau einmal vor.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & \\ 3 & & \end{pmatrix}$$

Für λ ein Young-Diagramm, sei $\widehat{\lambda_{\text{norm}}}$ das Schema, in das $1, 2, ..., n$ aufsteigend eingetragen sind, also in der Reihenfolge der Zeilen und Spalten.

$$\hat{\lambda}_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{pmatrix}$$

Definition Definition 57

Für ein λ Young-Schema, sei λ^T das transponierte Young-Schema, also die Zeilen und Spalten vertauscht oder Spiegeling an der Hauptdiagonalen.

$$\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & \end{pmatrix}$$

Definition Definition 58

Sei $\hat{\lambda}$ ein Young-Schema mit n Kästchen.

Sei $G_{\hat{\lambda}} \subset S_n$ die Untergruppe der Permutationen, die aus Permutationen bestehen, die die Zahlen jeder Zeile von $\hat{\lambda}$ wieder auf sich selbst Abbilden.

$$\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to G_{\hat{\lambda}} = \{\mathbb{1}, (12)(3)(4), (1)(234), (12)(34)\} \subset S_4$$

Wir können das selbe für die Transponierte machen.

Es sei Symmetrierer und Antisymmetrierer:

$$s_{\hat{\lambda}} = \sum_{\substack{(\sigma\in G_{\hat{\lambda}}\sigma\in\mathbb{C}[S_n] \\ a_{\hat{\lambda}} = \sum_{(\sigma\in G_{\hat{\lambda}^T}\mathrm{sgn}(\sigma)\in\mathbb{C}[S_n]}}}$$

Falls wir nur λ haben:

$$s_\lambda = s_{\hat{\lambda}_{\text{norm}}}, a_\lambda = a_{\hat{\lambda}_{\text{norm}}}$$

Definition Definition 59

Zu jedem Young-Schema λ mit n Kästchen definieren wir den invarianten Unterraum:

$$V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] s_\lambda a_\lambda = \{x s_\lambda a_\lambda \mid x \in \mathbb{C}[S_n]\}$$

und ρ_λ sei die Einschränkung der Darstellung von S_n auf $\mathbb{C}(S_n)$ durch Linksmultiplikation auf V_λ:

$$\rho_\lambda = \rho_{\mathbb{C}[G]}|_{V_\lambda}$$

Satz Satz 60

Die Darstellungen ρ_λ sind irreduzibel und für $\lambda \neq \lambda'$ sind $\rho_\lambda, \rho_{\lambda'}$ inäquivalent. Wir haben also eine bijektive Abbildung von den Young-Schemata auf die irreduziblen Darstellungen von S_n.

Beispiel:

$$\lambda = (.\ .\ .\ .\ .) \text{ n Kästchen}$$
$$\hat{\lambda}_{\text{norm}} = (1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ n)$$
$$G_\lambda = G_{\hat{\lambda}_{\text{norm}}} = S_n$$
$$G_{\lambda^T} = G_{\hat{\lambda}^T_{\text{norm}}} = \{\mathbb{1}\}$$
$$\Rightarrow s_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$$
$$\Rightarrow a_\lambda = 1$$

Es sei:

$$g \in S_n : g s_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} g\sigma$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \sigma = s_\lambda$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{C}[S_n] : x s_\lambda \propto s_\lambda$$
$$\Rightarrow V_\lambda = \{c s_\lambda \mid c \in \mathbb{C}\} \text{ 1-dimensional}$$

Dies nennt man die **triviale Darstellung** weil der Basisvektor invariant gelassen wird:

$$\rho_{\lambda(\sigma)} = \mathbb{1}$$

Beispiel:

$$\lambda = \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$
$$\hat{\lambda}_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}$$
$$G_\lambda = \{\mathbb{1}\}$$
$$G_{\lambda^T} = S_n$$
$$\Rightarrow s_\lambda = 1$$
$$\Rightarrow a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$$
$$g \in S_n : g a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(g)(g\sigma)$$
$$\sigma \mapsto g^{-1}\sigma$$
$$\Rightarrow = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(g^{-1}\sigma)\sigma = \operatorname{sgn}(g) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$$
$$\Rightarrow V_\lambda = \{c a_\lambda \mid c \in \mathbb{C}\} \text{ 1-dimensional}$$
$$\Rightarrow \rho_{\lambda(\sigma)} = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

Also haben wir die **Vorzeichen-Darstellung**.

Lemma Lemma 61

1. $c_\lambda = s_\lambda a_\lambda \neq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{C}[S_n] : c_\lambda \times c_\lambda \propto c_\lambda$
3. Falls $\lambda > \mu$, (das heisst $\lambda_1 > \mu_1$ oder $\lambda_1 = \mu_1$ und $\lambda_2 > \mu_2$ oder so weiter):

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & & \\ 9 & 10 & & & \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & & & \\ 8 & 9 & & & \\ 10 & & & & \end{pmatrix} = \mu$$

Dann $\forall x \in \mathbb{C}[S_n] : c_\lambda \times c_\mu = 0$

Lemma Lemma 62

1. Sei $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ so, dass $\forall X \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) : AXA \propto A$.

   $\Rightarrow$ der Rang der Matrix ≤ 1, also $\forall u, v \in \mathbb{C}^n : A = uv^*$
2. Sei A Blockdiagonalmatrix mit Blockgrössen $d_1, \dots, d_k$.

   Es gelte für jedes $X = \operatorname{diag}(X_1, \dots, X_k)$ gleicher Form:
   $$AXA \propto A$$
   $\Rightarrow$ entweder $A = 0$ oder $\exists! j : A_j \neq 0$ und Rang von $A_j = 1$.

   $\Rightarrow A_j = uv^*$

Beweis Lemma:

1. $A = 0 \Rightarrow \text{Rang} = 0$.

   Für $A \neq 0$:
   $$\exists a, b \in \mathbb{C}^n : Aa \neq 0, b^*A = 0$$
   Sei $X = ab^*$:
   $$AXA = (Aa)(b^*A) = cA$$
   $$= ucv^*$$
   $$\Rightarrow A = \frac{1}{c} cuv^* = uv^*$$
   Also Rang $= 1$.
2. OBdA Nehme an $A_1, A_2 \neq 0$:
   $$X = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
   $$AXA = \operatorname{diag}(A_1, 0, \dots, 0) = c \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots) \text{ Widerspruch!}$$
   Weil entweder muss $c = 1$ für den ersten Block oder $c = 0$ für den zweiten Block sein.

Beweis vom Satz:

Zu zeigen war $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ irreduzibel und inäquivalent.

Wir benutzen den Isomorphismus $\varphi : \mathbb{C}[S_n] \to \oplus_{j=1}^k \operatorname{End}(V_j)$, wobei (ρ_i, V_i) die irreduziblen Darstellungen von S_n sind.

Wende φ an:

$$\varphi(c_\lambda)\varphi(x)\varphi(c_\lambda) \propto \varphi(c_\lambda) \forall x \in \mathbb{C}[S_n]$$
$$\Rightarrow AXA \propto A$$

Nach dem Lemma muss A entweder 0 sein oder es gibt genau einen Block $A_j \neq 0$ und Rang von $A_j = 1$, dann:

$$\varphi(c_\lambda) = \left(0, 0, \dots, A_j, 0, \dots, 0\right)$$

Betrache $\varphi(V_\lambda)$. Wähle Basen von V_j, sodass die Matrix von der Abbildung A_j bezüglich dieser Basis die Form:

$$K = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots \\ * & 0 & 0 & \dots \\ * & 0 & 0 & \dots \\ * & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$\varphi(V_\lambda)$ hat dann die Form:

$$\operatorname{diag}(X_1, ..., X_n) \operatorname{diag}(0, ..., 0, K, 0, ..., 0)$$
$$X_j \in \operatorname{End}(V_j) \cong \operatorname{Mat}_{d_j \times d_j}(\mathbb{C})$$
$$\Rightarrow = \operatorname{diag}(0, ..., 0, X_j 0, 0, ..., 0)$$
$$\Rightarrow \varphi(V_\lambda) = \{\operatorname{diag}(0, ..., 0, (yK), 0, ..., 0) \mid y \in \mathbb{C}\}$$
$$\Rightarrow V_\lambda \cong V_j$$
$$\Rightarrow \rho_\lambda \cong \rho_j$$

Um das zu zeigen, schauen wir uns ein Element der Gruppe an.

$$\varphi(\sigma) \operatorname{diag}(0, ..., 0, (yK), 0, ..., 0)$$
$$= \operatorname{diag}\left(0, ..., 0, \rho_{j(\sigma)}(yK), 0, ..., 0\right)$$

Also $\rho_j \cong \rho_\lambda$. Da ρ_j irreduzibel ist, ist auch ρ_λ irreduzibel. Wir haben also für jedes λ eine irreduzible Darstellung gefunden.

Wir müssen noch zeigen, dass die Darstellungen inäquivalent sind für $\lambda \neq \mu$.

Seien nun λ, μ zwei unterschiedliche Young-Schemata mit n Kästchen. OBdA $\lambda > \mu$.

Nach dem Lemma gilt:

$$\forall x \in \mathbb{C}[S_n] : c_\lambda \times c_\mu = 0$$

Falls $j(\lambda) \neq j(\mu)$, sind wir fertig.

Wir wollen aber einen Widerspruch finden für den Fall, dass $j(\lambda) = j(\mu)$:

$$\varphi(c_\lambda) = \left(0, ..., 0, A_j, 0, ..., 0\right)$$
$$\varphi(c_\mu) = \left(0, ..., 0, B_j, 0, ..., 0\right)$$
$$\Rightarrow \varphi(c_\lambda)\varphi(x)\varphi(c_\mu) = \left(0, ..., 0, A_j X B_j, 0, ..., 0\right) = 0$$

Dies ist ein Widerspruch, da $A_j X B_j \neq 0$ für beliebiges X.

$$\Rightarrow j(\lambda) \neq j(\mu)$$

■

Nun haben wir eine bijektive Abbildung von den Young-Schemata auf Konjugationsklassen. Um die irreduziblen Darstellungen zu finden, müssen wir nur noch die Young-Schemata finden.

3.14 Charakterformel von Frobenius

Definition Frobenius-Formel — Definition 63

Sei λ ein Young-Schema mit n Kästchen.

Sei $\underline{i} = (i_1, i_2, ..., i_k)$ eine Partition von n und $c_{\underline{i}}$ die entsprechende Konjugationsklasse von S_n.

Dann gilt:

$$X_{\rho_\lambda}\left(C_{\underline{i}}\right) = \left(\Delta(x) \prod_k P_k^{ik}(x)\right)_{x^{\lambda+\rho}}$$
$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

in Multiindexschreibweise:

$$\Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

ist die Vandermonde-Determinante, die die Symmetrie der Variablen x_i beschreibt.

$$= \det\left(\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$P_k(x) = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$$
$$\rho = (n-1, n-2, ..., 1, 0)$$
$$\Rightarrow x^{\lambda+\rho} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} ... x_n^{\lambda_n}$$
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \text{ Zeilenlängen des Young-Schemas}$$
$$(Q(x))_x^\alpha = \text{Koeff. von } x^\alpha$$

Uns interessiert eigentlich nur ein Spezialfall:

Definition Haken — Definition 64

Für ein Young-Diagramm λ und (i, j) ein Kästchen in λ, i als Zeile und j als Spalte. Der **Haken** $H_{i,j}$ ist die Menge der Kästchen, die in der Zeile i und Spalte j liegen und alle Kästchen rechts und darunter liegen:

Die Hakenlänge $h_{i,j}$ ist die Anzahl der Kästchen in $H_{i,j}$.

Korollar Hakenlängenformel — Corollary 65

$$\dim(\rho_\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h(i,j)}$$

Beispielhaft kann man die Hakenlängen in einem Young-Schema λ eintragen:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & \\ 3 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix}$$

Dann ist $\dim(\rho_\lambda) = \frac{11!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = 1320$

3.15 Recap

- Für die symmetrische Gruppe korrespondieren die Konjugationsklassen 1 zu 1 mit den Partitionen von n.
- Jede Korrespondiert zu der Konjugationsklasse der Permutationen, deren Zyklenschreibweise die Partition beschreibt.
- Die irreduziblen Darstellungen von S_n sind 1 zu 1 korrespondierend mit den Partitionen von n.
- Die Konstruktion von irreduziblen Darstellungen von S_n wird wahrscheinlich nicht geprüft werden.
- Hakenlängenformel behalten.

4 Eigenwertprobleme mit Symmetrie

4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der Gruppe G und $A : V \to V$. Wir wollen A diagonalisieren. Wir suchen $\rho(g)A = A\rho(g) \forall g \in G$.

Also $A \in \mathrm{Hom}_{G(V,V)}$. Ein Beispiel davon findet man in der Quantentheorie. In dem Fall wär A der Hamiltonoperator und $\rho(g)$ die Zeitentwicklung. Dann ist V ein Hilbertraum.

Frage: Was bringt uns die Symmetrie um A zu diagonalisieren? Was können wir über die Eigenwerte und Eigenvektoren von A sagen durch die Symmetrie?

Wir kennen den Spezialfall: Falls unsere Darstellung ρ irreduzibel. Über das Lemma von Schur 2 $\Rightarrow A = c\mathbb{1}_V \Rightarrow$ alle Eigenwerte von A gleich, jedes $v \in V, v \neq 0$ ist ein Eigenvektor.

Satz Satz 66

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine endlichdimensionale, komplexe Datstellung einer endlichen Gruppe G (geht auch für kompakte Gruppen, wir müssen nur vollständig reduzieren können).

Sei $A : V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung, so dass $\rho(g)A = A\rho(g)$ für alle $g \in G$ gilt.

Sei $V \cong V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ eine Zerlegung in irreduzible, invariante Unterräume. Dann hat A höchstens n verschiedene Eigenwerte und in einer geeigneten Basis gilt, dass A Diagonalform hat:

$$\mathrm{diag}(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{2n}, \dots, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nn})$$

Beweis:

Seien $E_1, \dots, E_m$ die Eigenräume von A mit den Eigenwerten $\mu_1, \dots, \mu_m$. A ist diagonalisierbar:

$$\begin{gathered} V = E_1 \oplus \dots \oplus E_m \\ \forall g \in G, v \in E_j : A\rho(g)v = \rho(g)Av = \mu_j \rho(g)v \\ \Rightarrow \rho(g)v \in E_j \end{gathered}$$

$\Rightarrow$ die E_j sind invariante Unterräume.

Zerlege die Darstellungen E_j seperat in irreduzible Unterdarstellungen:

$$\begin{gathered} \Rightarrow V = V_1' \oplus \dots \oplus V_{n'}' \\ \rho|_{V_j'} \text{ irreduzibel} \\ \Rightarrow A|_{V_j'} = c_j \mathbb{1}_{\{V_j'\}} \end{gathered}$$

$\Rightarrow$ Es gilt $n = n'$ und die Dimensionen $\dim(V_1'), \dots, \dim(V_n')$ sind gleich der Dimensionen der $\dim(V_1, \dots, V_n)$ bis auf eine Permutation.

Man kann annehmen $V_j = V_j'$. Wähle eine Basis von V als Vereinigung von Basen von $V_1, \dots, V_n$. Dann ist wegen above A automatisch diagonal in dieser Basis und alle Basiselemente von V_j sind Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert.

Bemerkung:

Sei $V \cong W_1, \dots, W_k$ die Zerleigung von V in isotypische Komponenten. Also für $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_k, V_k)$ die irreduziblen Darstellungen von G mit $W_j \cong V_j \oplus \dots \oplus V_j$ mit Vielfachheit n_j an V_j. $n_j = (\chi_j, \chi_\rho)$.

Es gilt für $A \in \mathrm{Hom}_{G(V,V)}$:

$$\begin{gathered} A : V \to V \\ \forall g \in G \rho(g)A = A\rho(g) \end{gathered}$$

Dann ist A diagonalisierbar und in der Basis von V mit Basisvektoren $v_{\{ji\}}$ für $i = 1, \dots, n_j$ ist A diagonal.

Beweis:

1. Zerlege die Darstellung V in isotypische Komponenten. Zu jeder irreduziblen Darstellung von G gibt es eine isotypische Komponente W_j mit Vielfachheit n_j.

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

   Schreibe A in Blockform:

$$\begin{gathered} A = \left(A_{ij}\right)_{ij} \in \mathrm{Mat}_{k \times k} \\ \text{mit } A_{ij} : W_j \to W_i \end{gathered}$$

2. Schreibe:

$$W_i = V_i \oplus \dots \oplus V_i \text{ vielfachheit } n_i$$

   Aber das ist nicht eindeutig. Schreibe A_{ij} in Blockform bezüglich dieser Zerlegung:

$$\begin{gathered} A_{ij} = \left(A_{ij,pq}\right)_{pq} \in \mathrm{Mat}_{n_i \times n_j} \\ \text{mit } A_{ij,pq} : V_j \to V_i \end{gathered}$$

   In Blockschreibweise:

$$\rho(g) = \mathrm{diag}(\rho_1(g), \dots, \rho_1(g), \rho_2(g), \dots, \rho_2(g), \dots, \rho_k(g), \dots, \rho_k(g))$$

   Mit Blöcken $n_1, \dots, n_k$.

   Wir schauen uns wieder $\rho(g)A = A\rho(g)$ an. Das heißt:

$$\begin{gathered} \forall i, j, p, q, \forall g \in G : \\ \rho_i(g)A_{ij,pq} = A_{ij,pq}\rho_j(g) \\ \Rightarrow A_{ij,pq} \in \mathrm{Hom}_{G(V_j, V_i)} \end{gathered}$$

   Wir benutzen das Lemma von Schur 2:

   Angenommen $V_i \neq V_j$, dann ist die Abbildung $A_{ij,pq} = 0$. Ist $V_i = V_j$, dann ist $A_{ij,pq} = c_{ij,pq}\mathbb{1}_{\{V_i\}}$.

$$\begin{gathered} \Rightarrow A = \mathrm{diag}(A_{11}, \dots, A_{kk}) \\ A_{ii} = \left(a_{i,lm}\mathbb{1}_{V_i}\right)_{lm} \in \mathrm{Mat}_{n_i \times n_i} \end{gathered}$$

   Wir können es auch so schreiben:

$$\begin{gathered} W_i \cong V_i \oplus \dots \oplus V_i == V_i \otimes C^{n_i} \\ A_{ii} = \mathbb{1}_{V_i} \otimes a_i \\ a_i = \left(a_{i,lm}\right)_{lm} \in \mathrm{Mat}_{n_i \times n_i} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \end{gathered}$$

Die Diagonalisierung von A ist also zurückgeführt auf die Diagonalisierung der Matrizen der $n_i \times n_i$ Matrizen a_i.

Spezialfall:

Seien alle $n_i \in \{0, 1\}$. Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der endlichen Gruppe G und $A \in \mathrm{Hom}_{G(V,V)}$.

Sei $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ eine Zerlegung in irreduzible, invariante Unterräume, sodass $\rho|_{U_i} \neq \rho|_{U_j}$ für $i \neq j$.

Dann gilt:

$$\begin{gathered} AU_i \subset U_i \\ \text{und} \\ A|_{U_i} = \lambda_i \mathbb{1}_{U_i} \end{gathered}$$

Beispiel:

Diagonalisiere $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Wir haben viel Symmetrie.

Es gilt $\rho(\sigma)A = A\rho(\sigma) \forall \sigma \in S_3$, mit $\rho : S_3 \to GL(C^3)$ durch Permutation der Basisvektoren.

$$\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$$

Wir haben schon gesehen $\rho \cong \rho_{\text{triv}} \oplus \rho_2$, wobei ρ_2 die 2-dimensionale irreduzible Darstellung ist. Da die beiden Darstellungen inäquivalent sind, ist der Satz anwendbar.

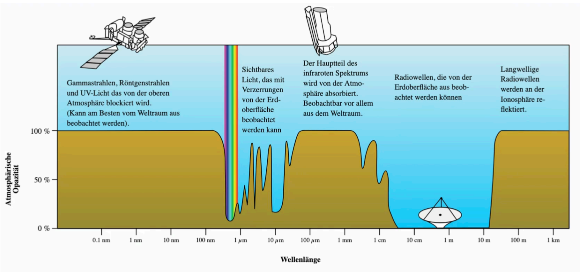
$$V = \mathbb{C}^3 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \oplus \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

⇒ Die Basisvektoren sind Eigenvektoren. Die Eigenwerte bestimmt man durch Anwendung:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+2b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = a + 2b$$
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda_2 = a - b$$

4.2 Beipsiel: Kleine Schwingungen von Molekülen

Welche Schwingungsfrequenzen gibt es und mit welchen Amplituden schwingen die Atome?



1. Zuerst haben wir die Starrkörperbewegung. Die Atome bewegen sich linear und rotieren als ganzes.

Wir betracheten ein Molekül mit N Atomen mit Koordinaten $y = (\vec{y}_1 \ \cdots \ \vec{y}_N) \in \mathbb{R}^{3N}, \vec{y}_i \in \mathbb{R}^3$, die wir als Punktmassen betrachten, mit Masse m_i.

Die Atome bewegen sich in einem Potential

$$V(y) = V(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_N)$$

Die neuton'sche Gleichung für die Bewegung der Atome ist:

$$m_i \, \mathrm{d}^2 \mathrm{d}^2 \vec{y}_i^\alpha(t) \mathrm{d}^2 t = -\frac{\partial V}{\partial \vec{y}_i^\alpha(y(t))}$$

Wir betrachten ein Kohlenstoff-Wasserstoff-Molekül C, H_4, wobei wir eine Tetraederstruktur haben. Wir haben 5 Atome, also $N = 5$ und $y \in \mathbb{R}^{\{15\}}$.

Wir gucken uns die kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage y^* (lokales Minimum von V) an. Wir nehmen an, dass V eine Taylorreihe bis zu zweiter Ordnung ist:

$$y(t) = y^* + x(t)$$
$$x(t) \text{ kleine Schwingung}$$
$$\text{Gleichgewichtslage: } \Delta V(y^*) = 0$$

Nähert man V durch die Taylorreihe um y^* an, so erhält man:

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 x(t)_i^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\sum_{ij\beta} \frac{\partial^2 V(y^*)}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} x_j^{\beta(t)} + o(x^2)$$
$$\text{Hesse Matrix in } y^*$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = -Ax(t)$$
$$A = \left(m_i^{-1} \frac{\partial^2 V(y^*)}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta}\right)_{ij} \in \mathrm{Mat}_{3N \times 3N}$$

Diese Matrix A ist diagonalisierbar, da ähnlich zu Matrix mit Einträgen:

$$m_1^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 V(y^*)}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} m_j^{-\frac{1}{2}}$$

Diese Matrix ist diagonalisierbar.

Die Lösung der Differentialgleichung erhalten wir durch den Ansatz:

$$x(t) = e^{i\omega t} x_0$$
$$\Rightarrow -\omega^2 e^{i\omega t} x_0 = -Ax_0$$
$$Ax_0 = \omega^2 x_0$$

also ist x_0 ein Eigenvektor von A und ω^2 der zugehörige Eigenwert. Die Eigenfrequenzen sind also die positiven Wurzeln der Eigenwerte von A.

Ziel: Diagonalisiere A. Dies sollte für die Matrix nicht zu schwierig sein, aber wir wollen die Symmetrie benutzen.

4.2.1 Symmetrien

1. Potential ist invariant unter Vertauschung gleicher Atome.

$$V\left(\vec{y}_{\sigma(1)}, ..., \vec{y}_{\sigma(N)}\right) = V(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_N)$$

   Falls σ nur gleiche Atome vertauscht, dann ist σ eine Symmetrie des Potentials. Also $\sigma \in H = S_{N_1} \times S_{N_2} \times ... \times S_{N_K} \subset S_N$.

2. Wir nehmen an V ist rotationsinvariant, spiegelungsinvariant und translationsinvariant.

$$\forall R \in IO(3) : V(R\vec{y}_1, ..., R\vec{y}_N) = V(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_N)$$

3. Die Gleichgewichtslage y^* ist invariant unter den der endlichen Untergruppe $G \subset H \times IO(3)$

   Schwerpunkt in $O \Rightarrow$ ersetze $IO(3)$ durch $SO(3)$. Jedes $g \in G, g = (\sigma \in H, R \in O(3))$ workt auf einer Konfiguration $y \in \mathbb{R}^{3N}$ wie folgt:

$$\rho(g)(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_N) = \left(R\vec{y}_{\sigma^{-1}(1)}, ..., R\vec{y}_{\sigma^{-1}(N)}\right)$$

   Zudem muss die Gleichgewichtslage y^* invariant sein:

$$\rho(g)y^* = y^*$$

   Wegen $V(\rho(g)y) = V(y)$ folgt auch:

$$\rho(g)A = A\rho(g)$$

   $\Rightarrow A$ ist ein Darstellungshomomorphismus von G $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{3N}, \mathbb{R}^{3N})$.

Unter der Annahme, dass in y^* keine zwei Atome den gleichen Ort haben, bestimmt die Komponente R von $g = (\sigma, R)$ schon eindeutig.

Wir können $G \subset O(3)$ als Untergruppe von $SO(3)$ betrachten, da G auch die Spiegelungen enthält.

4.3 Methan: Explizite Rechnung

Methan besteht aus einem Kohlenstoffatom und vier Wasserstoffatomen. Wir haben $N = 5$ und $y \in \mathbb{R}^{15}$. Das Molekül hat eine Tetraederstruktur im Gleichgewichtszustand mit dem

Kohlenstoffatom im Ursprung und den Wasserstoffatomen auf den Ecken des Tetraeders.

$$y = (\vec{y}_1, ..., \vec{y}_4, \vec{y}_C)$$

Symmetrieannahmen:

$$\begin{aligned} V(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_4, \vec{y}_C) &= V(R\vec{y}_1, ..., R\vec{y}_4, R\vec{y}_C) \forall R \in IO(3) \\ &= V\left(\vec{y}_{\sigma(1)}, ..., \vec{y}_{\sigma(4)}, \vec{y}_C\right) \forall \sigma \in S_4 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{gathered} V(y) = V(\rho(g)y) \forall g \in G \\ H_v(y) = \rho(g)^T H_v(\rho(g)y)\rho(y) \\ \Rightarrow \rho(g)H_v(y) = H_v(\rho(g)y)\rho(g) \\ y = y^* \\ \Rightarrow \rho(g)H_v(y^*) = H_v(\rho(g)y^*\rho(g)) \\ = H_{v(y^*)}\rho(g) \\ M^{-1}\rho(g)H_v(y^*) = \rho(g)M^{-1}H_v(y^*) \\ = M^{-1}H_v(y^*)\rho(g) \\ \Rightarrow \rho(g)A = A\rho(g) \end{gathered}$$

Gleichgewichtslage $y^* \in \mathbb{R}^{15}$ mit $y^*_C = 0, y^*_{1,...,4}$ sind Ecken eines Tetraeder.

Die Symmetriegruppe ist also die Tetraedergruppe $T \cong S_4 = G$.

4.3.1 Charaktertafel S_4

$$\begin{pmatrix} 24T & [1] & 8[r_3] & 3[r_2] & 6[S_4] & 6[\tau] \\ \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \chi_3 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \chi_4 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ \chi_5 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g))$.

$$\operatorname{tr}(\rho(1)) = \operatorname{tr}(\mathbb{1}) = 15$$

$$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix}, z.B. R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(\rho(\tau)) = 3$$

Allgemein ist $g \in G$ mit zugehöriger Permutation $\sigma \in H$ der Atome und $R \in O(3)$, so gilt:

$$\begin{gathered} \operatorname{tr}(\rho(g)) = N_R \cdot \operatorname{tr}(R) \\ N_R = \# \text{ Atome, die an Stelle bleiben} \end{gathered}$$

$$\operatorname{tr}(\rho(r_3)) = 2 \cdot \operatorname{tr}\left(R_{\frac{2}{3}\pi}\right)$$

Allgemein in geeigneten Basisvektoren e_1, e_2, e_3:

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}\left(R_\varphi\right) = 2\cos(\varphi) + 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(\rho(r_3)) = 2\left(2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + 1\right) = 0$$

$$\begin{gathered} \chi_{\rho(r_2)} = 1 \cdot (2\cos(\pi) + 1) = -1 \\ \text{allgemein } \operatorname{tr}(RS) = 2\cos(0) - 1 \\ \chi_{\rho(S_4)} = 1 \cdot \left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) = -1 \\ \Rightarrow \chi_\rho : (15, 0, -1, -1, 3) \end{gathered}$$

Vielfachheit der irreduziblen Darstellungen:

$$\begin{aligned} n_1 &= (\chi_1, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} 24 = 1 \\ n_2 &= (\chi_2, \chi_\rho) = 1 \\ n_3 &= (\chi_3, \chi_\rho) = 0 \\ n_4 &= (\chi_4, \chi_\rho) = 1 \\ n_5 &= (\chi_5, \chi_\rho) = 3 \end{aligned}$$

Der Charekter zerfällt in folgende komponenten:

$$\begin{gathered} \chi_\rho = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + 3\chi_5 \\ \Rightarrow \rho \cong \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_4 \oplus \rho_5 \oplus \rho_5 \oplus \rho_5 \end{gathered}$$

Wir haben aber noch nicht festgelegt, dass der Schwerpunkt im Ursprung ist. Für uns sind Verschiebungen aber keine Schwingungen. Wir könnten das Molekül auch als ganzes Rotieren. Beide führen zu Nullvektoren. Diese beiden Darstellungen müssen wir also noch rausnehmen.

Wir ziehen ρ_5 (translation) und ρ_4 (Rotation) ab. Es bleiben also 4 irreduzible Darstellungen übrig. Das heisst, wir haben 4 Eigenfrequenzen.

Translation:

Kleine Translationen aus der Ruhelageentsprechen Nullvekoren (Vektoren im Kern) von A, ergeben also keine Eigenschwingungen.

Beweis:

$$V(\vec{y}_1, ..., \vec{y}_4, \vec{y}_C) = V(\vec{y}_1 + a, ..., \vec{y}_4 + a, \vec{y}_C + a) = V(y) = V(y + a)$$

$$A = \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial^2 V(y^*)}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta}\right)_{ij} \in \mathrm{Mat}_{15 \times 15}$$

$$\Rightarrow Ay = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{ij\beta} \frac{1}{m_i} \frac{\partial^2 V(y^*)}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} a^\beta$$

$$= \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha} |_{y=y^*} \left(\sum \frac{\partial V(y)}{\partial y_j^\beta} a^\beta\right) = 0$$

Die Translation zerfällt in einen 3-dimensionalen Unterraum, der die Translationen in $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Nun müssen wir aber herrausfinden, zu welchem irreduziblen Darstellung dieser Unterraum gehört.

$$\begin{gathered} a \in U \\ \rho(g), g = (\sigma, R) \end{gathered}$$

$$\rho(g)a = \begin{pmatrix} R\vec{a} \\ R\vec{a} \\ ... \\ R\vec{a} \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} \rho|_U \cong G \to GL(\mathbb{R}^3), (\sigma, R) \mapsto (x \to Rx) \\ \chi_{\text{trans}}((\sigma, R)) = \operatorname{tr}(R) = 2\cos(\theta) \pm 1 \\ \Rightarrow \chi_{\text{trans}} = \chi_5 \end{gathered}$$

Drehung:

Wieder ein invarianter 3-dimensionaler Unterraum aus Nullvektoren von A.

$$U' = \left\{\begin{pmatrix} \vec{n} \times \vec{y}_1^* & ... & \vec{n} \times \vec{y}_4^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | \; \vec{n} \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^{15}$$

zerlege $\rho|_{U'}$ in irreduzible Darstellungen:

$$\rho^{(\sigma,R)} \begin{pmatrix} \vec{n} \times \vec{y}_1^* & ... & \vec{n} \times \vec{y}_4^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\vec{n} \times R\vec{y}_{\sigma^{-1}(1)} \\ ... \end{pmatrix} \det(R)$$

$$= \det(R) \begin{pmatrix} \vec{n} \times \vec{y}_1^* \\ ... \end{pmatrix}$$

Also ist $\rho|_{U'}$ isomorph zu ρ_{rot}.

$$\chi_{\text{rot}} = (3 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 1 \;\; -1)$$

Über die Charaktertafel:

$$\Rightarrow \chi_{\text{rot}} = \chi_4$$
$$\Rightarrow \rho_{\text{rot}} \cong \rho_4$$

Methan halt also höchstens 4 Eigenfrequenzen. Und die generieren jeweils noch in die Dimension der irreduziblen Darstellung.

5 Die Drehgruppe und die Lorentzgruppe

In diesem Kapitel geht es um die Gruppen $O(3), SO(3), O(1,3)$

Definition Orthogonale und Lorentz-Gruppen — Definition 67

$$O(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T A = \mathbb{1}\}$$
$$SO(3) = \{A \in O(3) \mid \det(A) = 1\}$$
$$O(1,3) = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid A^T \eta A = \eta\}$$
$$IO(3) = \{A \in O(3) \mid A \text{ ist Isometrie des Eukl. Raumes}\}$$

wobei $\eta = \operatorname{diag}(-1,1,1,1)$ die Minkowski-Metrik ist.

5.1 Isometrien des Euklidischen Raumens

Der Euklidische Abstand $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist:

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$$

Eine Isometrie des Euklidischen Raumes ist eine bojektive Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

so dass

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y) \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

Satz — Satz 68

Sei f eine Isometrie des Euklidischen Raumes. Dann exisitieren eine Matrix $R \in O(3), b \in \mathbb{R}^3$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = Rx + b$, also $f \in IO(3)$

5.2 $SO(3)$ und $O(3)$

Drehungen und Spiegelungen von dem 3-dimensionalen Raum.

Sei $P \in O(3)$ die Spiegelung $P = -\mathbb{1}$, also $Px = -x$.

$\Rightarrow$ Jede Matrix in $O(3)$ hat $\det(\pm 1)$ und ist also von der Form:

$$R \in SO(3) \text{ oder } PR, R \in SO(3)$$

Jede Matrix in $SO(3)$ hat die Form:

$$OR_3(\theta)O^{-1}$$
$$O \in SO(3), R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also eine Drehung um die $z/3$-Achse um den Winkel θ.

Was also passiert is, dass O das System für die richtige Drehung entlang z ausrichtet, R_3 die Drehung entlang z macht und O^{-1} das System wieder zurückdreht.

Wir definieren:

$$Oe_3 = n$$
$$OR_3(\theta)O^{-1} = R(n,\theta)$$

Lemma — Lemma 69

Sei $O \in SO(3), n = Oe_3$

$$R(n,\theta)x = OR_3(\theta)O^{-1}x$$
$$= (x \cdot n)n + (x - (x\cdot n)n)\cos(\theta) + n \times x \sin(\theta)$$

Dies gilt für jede beliebige Wahl von O.

Dies ist die Formel für die Drehung eines Vektors x um den Winkel θ um die Achse n.

Beispiel:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\theta = \pi$$

falls alles richtig geht, bekommen wir $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cos(\pi)$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\pi)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)(-1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$O = \mathbb{1}, n = e_3$$
$$R_3(\theta)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(\theta) + \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(\theta)$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\cos(\theta) - x_2\sin(\theta) \\ x_2\cos(\theta) + x_1\sin(\theta) \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= R_3(\theta)x$$

Allgemeine O. Wir machen eine Substitution:

$$y = O^{-1}x, x = O(y), O^{-1}n = e_3, Oe_3 \times Oy$$
$$R_3(\theta)Oy = (Oy\cdot n)n + (Oy - n(Oy\cdot n))\cos(\theta)$$
$$+ n \times Oy\sin(\theta) \mid Oy \cdot Oz = yz$$
$$= (y\cdot e_3)Oe_3 + O(y - e_3(y\cdot e_3))\cos(\theta) + O(e_3 \times y)\sin(\theta)$$
$$\Leftrightarrow R_3(\theta)y = (y\cdot e_3)e_3 + (y - e_3(y\cdot e_3))\cos(\theta) + (e_3 \times y)\sin(\theta)$$

■

Lemma — Lemma 70

1. $R(n,\theta) = R(-n,-\theta) = R(n-\theta)^{-1}$
2. $$\forall \tilde{O} \in SO(3):$$
   $$\tilde{O}R(n,\theta) = R\left(\tilde{O}n, \theta\right)\tilde{O}$$
   $$\Leftrightarrow \tilde{O}R(n,\theta)\tilde{O}^{-1} = R\left(\tilde{O}n, \theta\right)$$

Beweis:

1. Ist klar.

2.
$$Oe_3 = n$$
$$\begin{aligned}\tilde{O}R(n,\theta)\tilde{O}^{-1} &= \tilde{O}OR_3(\theta)O^{-1}\tilde{O}^{-1} \\ &= \left(\tilde{O}O\right)R_3(\theta)\left(\tilde{O}O\right)^{-1} \\ &= R\left(\tilde{O}Oe_3,\theta\right) \\ &= R\left(\tilde{O}n,\theta\right)\end{aligned}$$
■

5.3 Eulerwinkel

Satz — Satz 71

Jede Matrix $A \in SO(3)$ kann als Produkt von drei Drehungen um die Achsen x, y, z dargestellt werden:
$$A = R_3(\varphi)R_1(\theta)R_3(\psi)$$
wobei $\varphi \in [0, 2\pi[, \theta \in [0, \pi], \psi \in [0, 2\pi[$ und R_i die Drehung um die Achse i um den Winkel φ, θ, ψ ist.

Eulerwinkel ist meinst relativ unpraktisch aber es hat viele Anwendungen in der Technik. Zum Beispiel in der Robotik oder der Positionierung von Flugzeugen (Pitch, Yaw, Roll).

Wir haben die Variante **Kardanwinkel**:
$$A = R_1(\varphi)R_2(\theta)R_1(\psi)$$
Wir haben die Variante **Drehung um mitgeführte Achsen** (Flugzeug):
$$\begin{aligned}\tilde{R} &= R(R_3(\text{Yaw } e_2, \text{Pitch})R_3(\text{Yaw})R(\tilde{R}e_1, \text{Roll}) \\ &= \tilde{R}R(e_1, \text{Roll}) = R_3(\text{Yaw})R_2(\text{Pitch})R_1(\text{Roll})\end{aligned}$$

5.4 Homomorphismus $SU(2) \to SO(3)$

Lemma — Lemma 72

Jede Matrix $A \in SU(2)$ hat folgende Form:
$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$
Also ist $SU(2) \cong S^3$ (3-Sphäre) als Mannigfaltigkeit.

Beweis:
$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SU(2) \\ \det(A) &= 1 = \alpha\delta - \beta\gamma \\ A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}\delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix} = A^* \\ A^* &= \overline{A}^T = \begin{pmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta}\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \delta = \overline{\alpha}, \gamma = -\overline{\beta} \\ &\Rightarrow 1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2\end{aligned}$$

Definition Hermiteische Matrizen — Definition 73

Sei H_0 der Raum der hermiteschen spurfreien Matrizen:
$$\begin{aligned}H_0 &= \{A \in \text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid A^* = A, \text{tr}(A) = 0\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix}z & x+iy \\ x-iy & -z\end{pmatrix} \mid z, x, y \in \mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{R}^3\end{aligned}$$
Für
$$X, Y \in H_0$$
$$(X, Y) = \frac{1}{2}\,\text{tr}(XY)$$
Dies ist ein Skalarprodukt auf H_0.
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\text{tr}\left(\left(\begin{pmatrix}z & x+iy \\ x-iy & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z' & x'+iy' \\ x'-iy' & -z'\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= zz' + xx' + yy')\ \text{standardskalarprodukt}\end{aligned}$$
Also ist $(H_0m(-,-)) \cong (\mathbb{R}^3, (-,-))$

Für $A \in SU(2)$ definieren wir:
$$\Phi(A) : H_0 \to H_0$$
$$\Phi(A)X = AXA^* = AXA^{-1} \in H_0$$
Dies ist wieder Spurfrei.

Lemma — Lemma 74

1. $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$
2. $(\Phi(A)X, \Phi(A)Y) = (X, Y)$

Beweis:

1. $\Phi(AB)X = ABXB^*A^* = \Phi(A)\Phi(B)X$
2. $$\begin{aligned}(\Phi(A)X, \Phi(A)Y) &= \text{tr}(AXA^*AYA^*) \\ &= \text{tr}(X, Y)\end{aligned}$$

Also ist Φ ein Gruppenhomomorphismus von $SU(2)$ auf die orthogonalen Abbildungen von H_0.

Definition Pauli Matrizen — Definition 75

Wir haben eine Orthonormalbasis von H_0:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to H_0 \\ x \mapsto \hat{x} &= x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 \\ &= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist, welcher die Skalarprodukte erhält.

Wir bezeichnen mit $\Phi(A)$ die Matrix von $\Phi(A) \in \mathrm{End}(H_0)$ bezüglich der Orthonormalbasis $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$\Rightarrow \Phi : SU(2) \to O(3) \in \mathrm{Hom}$$

Es gilt: $A\hat{x}A^* = \widehat{\Phi(A)X}$, $A \in SU(2)$.

Da $SU(2) \cong S^3$ und S^3 zusammenhängen ist und Φ stetig, ist es leicht zu beweisen, dass $\det(\Phi(A)) = +1$

Somit ist $\Phi : SU(2) \to SO(3)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Satz — Satz 76

$\Phi : SU(2) \to SO(3)$ ist surjektiv und $\ker(\Phi) = \Phi^{-1}\{\mathbb{1}\} = \{\pm\mathbb{1}\}$

Beweis:

1. $$\ker(\Phi) = \{A \in SU(2) \mid AXA^* = X \forall X \in H_0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix} &= AXA^* = X \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ -\overline{\beta} & -\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} & -2\alpha\beta \\ -2\overline{\beta}\overline{\alpha} & |\beta|^2 + |\alpha|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \alpha\beta = 0 \\ &\Rightarrow \beta = 0, |\alpha| = 1 \end{aligned}$$

Dies Funktioniert für jede Paulimatirx. Es folgt:

$$\Rightarrow A = \pm\mathbb{1} \Rightarrow \ker(\Phi) = \{\pm\mathbb{1}\}$$

2. Eulerwinkel $\Rightarrow$ Es reicht zu zeugen, dass $R_1(\theta), R_3(\theta) \in \mathrm{im}(\Phi)$.

$$\Phi \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos -\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = R_1(\theta)$$

$$\Phi \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = R_3(\theta) = R_3(\theta)$$

■

Bemerkung:

Es gilt allgemein:

$$\Phi\left(\mathbb{1}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{n}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = R(n, \theta)$$

5.5 Minkovski-Raum

Definition Minkovski-Raum — Definition 77

Der Minkowski-Raum (Raumzeit) ist der Raum $\mathbb{R}^4$ mit der symmetrischen Bilinearform

$$\begin{aligned} (x, y) &= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 \\ &= x^T \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)y \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^4$ heisst:

- Zeitartig falls $(x, x) > 0$
- Raumartig falls $(x, x) < 0$
- Lichtartig falls $(x, x) = 0$

Die Menge der lichtartigen Vektoren heisst **Lichtkegel**.

In der Physik: $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 Raum.

5.6 Die Lorentzgruppe

Definition Lorentzgruppe — Definition 78

Die Lorentzgruppe $O(1, 3)$ ist die Gruppe der Matrizen

$$\begin{aligned} O(1,3) &= \{A \in\in GL(4, \mathbb{R}), (Ax, Ay) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid A^T gA = g\} \end{aligned}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir gucken uns die eigenschaften an:

$$\det(A^T gA) \Rightarrow \det(A) \in \{\pm 1\}$$

Die Lorentzgruppe zerfällt also in mindestens zwei disjunkte Teile:

Definition Basis der Lorentzgruppe — Definition 79

Sei eine Basis b_0, b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^4$ heisst **orthonormiert**, falls

$$(b_i, b_j) = g_{ij}$$

Satz — Satz 80

Sind $(b_i), (b_i')$ orthonormierte Basen, si gibt es genau ein A welches die Basis (b_i) auf die Basis (b_i') abbildet, so dass $A^T gA = g$ und $b_j' = Ab_j$.

Beweis:

1. Einduetigkeit ist klar durch Werte auf Basis eindeutig bestimmt.
2. Existenz:

   Sei A die durch $b_j' = Ab_j$ definierte lineare Abbildung. Es gilt zu zeigen $\forall x, y \in \mathbb{R}^4 : (Ax.Ay) = (x, y)$.

   Sei $x = \sum_j x_j b_j, y = \sum_j y_j b_j$.

$$\begin{aligned}(Ax, Ay) &= \left(\sum_i x_i Ab_i, \sum_j y_j Ab_j\right)\\ &= \sum_{ij} = x_i y_j (Ab_i, Ab_j)\\ &= \sum_{ij} x_i y_j (b_i', b_j')\\ &= \sum_{ij} x_i y_j g_{ij}\\ &= (x, y)\end{aligned}$$

■

Bemerkung:

$$b = \text{Standardbasis}$$

Dann gilt:

$$b_i' = Ab_i \text{ Spalten von } A$$

Diese sind eine orthonormierte Basis von $\mathbb{R}^4$ genau dann wenn $A \in O(1,3)$.

5.7 Beispiele

1. Orthogonale Transformationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$
$$R \in O(3)$$
$$O(3) \subset O(1,3) \text{ ist Untergruppe}$$

2. Lorentzboost in 3-Richtung mit Rapidität χ:

$$L(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & 0 & 0 & \sinh(\chi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\chi) & 0 & 0 & \cosh(\chi) \end{pmatrix}$$
$$L \in O(1,3)$$
$$L(\chi_1)L(\chi_2) = L(\chi_1 + \chi_2)$$
$$L(\chi)^{-1} = L(-\chi)$$

Physikalisch: Übergang in ein in 3-Rightung bewegtes Bezugssystem mit Geschwindigkeit $v = \tanh(\chi), \cosh(\chi) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \sinh(\chi) = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

3. Raumspiegelung:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g \in O(1,3)$$
$$P^T = P, P^2 = \mathbb{1}$$

4. Zeitumkehrung:

$$T = -P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(1,3)$$
$$T^2 = \mathbb{1}$$
$$T^T = T, T^2 = \mathbb{1}$$
$$TP = PT = -\mathbb{1}$$

Lemma — Lemma 81

Sei $A \in O(1,3)$:

$$\begin{aligned}A^T &= PA^{-1}P = TA^{-1}T\\ A^{-1} &= PA^TP = TA^TT\end{aligned}$$

Also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \tilde{v} \\ v & B \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & -v^T \\ -\tilde{v}^T & B^T \end{pmatrix}$$

Korollar — Corollary 82

Sei $A \in O(1,3) \Rightarrow A^T \in O(1,3)$

A ist genau dann in $O(1,3)$ wenn die Zeilen eine Orthonormalbasis bilden.

Sei

$$O_+(1,3) = \{A \in O(1,3) |\ A_{00} > 0\} \subset O(1,3)$$

Elemente von $O_T(1,3)$ nennt man orthochrone (zeitrichtungserhaltende) Lorentztranformation.

Satz — Satz 83

Sei $Z_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 |\ (x,x) > 0 \text{ und } x^0 > 0\}$. Dann gilt:

$$O_+(1,3) = \{A \in O(1,3) |\ AZ_+ \subset Z_+\}$$

Insbesondere ist $O_+(1,3) \subset O(1,3)$ eine Untergruppe.

Beweis:

"$\supset$": Sei $A \in O_+(1,3)$ und $x \in Z_+$, d.h. $(x,x) > 0$ und $x^0 > 0$.

Da $A \in O(1,3)$: $(Ax, Ax) = (x,x) > 0$, also ist Ax zeitartig.

Sei $Ax = (y^0, y^1, y^2, y^3)^T$. Wir müssen zeigen: $y^0 > 0$.

Betrachte $e_0 = (1,0,0,0)^T \in Z_+$. Dann ist $Ae_0 = (A_{00}, A_{10}, A_{20}, A_{30})^T$.

Da $(Ae_0, Ae_0) = (e_0, e_0) = 1$ und $A_{00} > 0$ (nach Voraussetzung), folgt: $A_{00}^2 - A_{10}^2 - A_{20}^2 - A_{30}^2 = 1$

Also $A_{00} = \sqrt{1 + A_{10}^2 + A_{20}^2 + A_{30}^2} \geq 1$.

Für beliebiges $x \in Z_+$ mit $x^0 > 0$: Da $x = x^0 e_0 + \sum_{i=1}^3 x^i e_i$ und $(x,x) > 0$, folgt $(x^0)^2 > \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$.

$(Ax)^0 = A_{00}x^0 + \sum_{i=1}^3 A_{0i}x^i$

Da $A_{00} \geq 1 > 0$ und durch Kontinuitätsargument folgt $(Ax)^0 > 0$.

"$\subset$": Sei $A \in O(1,3)$ mit $AZ_+ \subset Z_+$.

Dann $Ae_0 \in Z_+$, also $(Ae_0)^0 = A_{00} > 0$.

Also ist $O_+(1,3)$ abgeschlossen unter Multiplikation und Inversion, somit eine Untergruppe.

Definition 84

Definition — Orthochrone spezielle Lorentzgruppe

$$SO_+(1,3) = \{A \in O(1,3) |\det(A) = +1, A_{00} > 0\}$$

Satz — Satz 85

jede Lorentztransformation liegt in genau einer der 4 Teilmengen:

Gruppe	$\det(A)$	A_{00}	Menge
$SO_+(1,3)$	$+1$	>0	$SO_+(1,3)$
$O_+(1,3) \setminus SO_+(1,3)$	-1	>0	$\{PA \mid A \in SO_+(1,3)\}$
$SO_-(1,3)$	$+1$	<0	$\{TA \mid A \in SO_+(1,3)\}$
$O_-(1,3) \setminus SO_-(1,3)$	-1	<0	$PTA \mid A \in SO_+(1,3)$

Dies sind auch die 4 Zusammenhangskomponenten der Lorentzgruppe $O(1,3)$.

Lemma — Lemma 86

Jedes $A \in SO_+(1,3)$ ist von der Form:

$$A = R_1 L(\chi) R_2$$
$$R_1, R_2 \in SO(3), \chi \in \mathbb{R}$$

Beweis:

Sei $A \in SO_+(1,3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a^0 & * \\ \vec{a} & * \end{pmatrix}$$

Sei $R_1 \in SO(3)$ eine Drehung, welche den Vektor $\vec{a}$ auf die z-Achse abbildet: $R_1^{-1}\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{a}| \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow R_1^{-1} A = \begin{pmatrix} a^0 & * \\ R_1^{-1}\vec{a} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & * \\ 0 & * \\ 0 & * \\ |\vec{a}| & * \end{pmatrix}$$

Sei $\chi \in \mathbb{R}$ so gewählt, so dass $a^0 = \cosh(\chi), |\vec{a}| = \sinh(\chi)$.

$$\Rightarrow L(\chi) R_1^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Aus der definierenden Gleichung ist in $SO_+(1,3 \subset O(1,3))$.

$$\Rightarrow R^T R = \mathbb{1}, \text{also } R \in O(1,3)$$
$$\det(R) = 1, \text{also } R \in SO(3)$$

Setze $R_2 = R$.

$$\Rightarrow L(-\chi) R_1^{-1} A = R_2 \Leftrightarrow R_1 L(\chi) R_2 = A$$

Korollar — Corollary 87

$SO_+(1,3)$ ist zusammenhängend.

Die Zerlegung von $O(1,3)$ im Satz ist die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten.

Beweis:

Wir suchen die stetigen Abbildungen $\gamma : [0,1] \to SO_+(1,3)$

$$\gamma(0) = \mathbb{1}, \gamma(1) = A$$
$$A = R_1 L(\chi) R_2$$

Die jeweiligen Komponenten sind stetig verbindbar mit $\mathbb{1}$.

■

5.8 Isomorphismus $SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\} \to SO_+(1,3)$

Sei H der Raum der hermiteschen $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$, also alle Matrizen der Form:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^0 \mathbb{1} + \sum_{j=1}^{3} x^j \sigma_j = \sum_j x^j \sigma_j$$

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\sigma_j = \text{Pauli-Matrizen}$$

Jeder Vektor in $\mathbb{R}^4$ kann eindeutig zu einer Matrix in H zugeordnet werden. $H \cong \mathbb{R}^4$ mit $x \mapsto \hat{x}$.

Wir müssen nun das Minkowski-Skalarprodukt auf H definieren:

Lemma — Lemma 88

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 : (x,x) = \det(\hat{x})$$

Dies gilt auch für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^4$.

Beweis:

$$(x,y) = \det(\hat{x}\hat{y}) = (x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3)$$

$$\det(\hat{x}) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x,x)$$

Beachte: aus (x,x) lässt sich durch Polarisation das Skalarprodukt (x,y) rekonstruieren.

$$(x,y) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1}|_{\lambda_2=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_2}|_{\lambda_1=0} (\lambda_1 x + \lambda_2 y, \lambda_1 x + \lambda_2 y)$$

Für $A \in SL(2,\mathbb{C})$ definieren wir die Abbildung:

$$H \to H$$
$$X \mapsto AXA^*$$

Sei $\Phi(A) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die entsprechende Abbildung:

$$A\hat{x}A^* = \widehat{\Phi(A)x}$$

Es ist:

$$\det(A\hat{x}A^*) = \det(A)\det(\hat{x})\det(A^*) = \det(\hat{x})$$
$$= \det\left(\widehat{\Phi(A)x}\right) = (\Phi(A)x, \Phi(A)x)$$

$\Rightarrow \Phi(A) \in O(1,3) \Rightarrow \Phi : SL(2,\mathbb{C}) \to O(1,3)$.

Beispiel:

$$A = W_\Theta = \begin{pmatrix} e^\Theta & 0 \\ 0 & e^{-\Theta} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

$$W_\Theta \hat{x} W_\Theta^* = \begin{pmatrix} e^\Theta & 0 \\ 0 & e^{-\Theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\Theta & 0 \\ 0 & e^{-\Theta} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2\Theta}(x^0 + x^3) & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & e^{-2\Theta}(x^0 - x^3) \end{pmatrix}$$
$$= \widehat{\begin{pmatrix} \cosh(2\Theta) & 0 & 0 & \sinh(2\Theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(2\Theta) & 0 & 0 & \cosh(2\Theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}} \Rightarrow L(2\Theta)$$

Satz Satz 89

$$\forall S \in SL(2,\mathbb{C}) : \Phi(S) \in SO_+(1,3)$$

Die Abbildung $\Phi : SL(2,\mathbb{C}) \to SO_+(1,3)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\Phi) = \{\pm\mathbb{1}\}$.

Also induziert Φ einen Isomorphismus:

$$\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{\pm 1\}} \to SO_+(1,3)$$

Die Einschränkung von Φ auf $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$ ist der bekannte Gruppenhomomorphismus $\Phi : SU(2) \to SO(3)$, welcher die Drehungen im 3-dimensionalen Raum beschreibt.

Beweis:

1. Einschränkung ist bekannter Homomorphismus:

$$SU(2) \to SO(3)$$
$$A \mapsto \begin{pmatrix} H \cong \mathbb{R}^3 \to H_0 \cong \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto AXa^{-1} \end{pmatrix}$$
$$AXA^* = AXA^*, A \in SU(2)$$

2. Es ist ein Gruppenhomomorphismus

   Sei $A, B \in SL(2,\mathbb{C}), X \in H$.

$$(AB)X(AB)^* = ABXB^*A^* = A(BXB^*)A^* = \Phi(A)\Phi(B)X$$
$$\Rightarrow \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$$

3. Nimmt Werte an in $SO_+(1,3)$

   Es reicht zu zeigen, dass $SL(2,\mathbb{C})$ zusammenhängen ist, da $\mathbb{1}$ auf $SO_+(1,3)$ abgebildet wird.

   Da Φ stetig, ist dann automatisch das Bild von Φ enthalten in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{1} \in O(1,3)$ also in $SO_+(1,3)$.

   Sei $A \in SL(2,\mathbb{C})$:

$$A = D\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}D^{-1} \text{ Jordan-Form}$$
$$a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, D \in GL(2,\mathbb{C})$$

   Wähle eine stetige Kurve $t \mapsto a_t$, welche nicht durch 0 geht und $a_0 = 1, a_1 = a$.

   Die Kurve $t \mapsto A_t = D\begin{pmatrix} a_t & tb \\ 0 & a_t^{-1} \end{pmatrix}D^{-1}$ ist ebenfalls stetig und verbindet $\mathbb{1}$ mit A.

4. Ist surjektiv

   Jedes $A \in SO_+(1,3)$ ist von der Form:

$$A = R_1 L(\chi) R_2$$

   $SO(3)$ liegt im Bild von Φ wegen 1.

$$L(\chi) = \Phi\left(W_{\frac{\chi}{2}}\right)$$

   ist auch im Bild von $\Phi \Rightarrow A \in \mathrm{im}(\Phi)$ wegen 2.

5. Kern ist ± 1

$$\Phi(A) = \mathbb{1} \Leftrightarrow A\hat{x}A^* = \hat{x} \forall \hat{x} \in H$$

   Wähle $x = (1,0,0,0)$. $\hat{x} = \mathbb{1}$.

$$\Rightarrow AA^* = \mathbb{1}$$

   Wegen 1. und der Rechnung für den Bekannten Homomorphismus $SU(2) \to SO(3)$ folgt, dass $A \in \{\pm\mathbb{1}\}$.

   Es ist leicht zu zeigen, dass $\pm\mathbb{1}$ im Kern von Φ liegt.

■

5.9 Bemerkung

1. Gegeben ein Element von $O(3), SO(3)$ oder der Lorentzgruppe:
   1. Wie kann man sie aufschreiben
   2. Was sind die Zusammenhangskomponenten
   3. Zweifache Überlagerungen

6 Lie Algebren

Es gibt keine Darstellungstheorie für allgemeine Lie Gruppen, aber es existeiert für bestimmte Klassen von Lie Gruppen.

Wir werden versuchen, die Betrachtung der Mannigfaltigkeit lokal auf die Betrachtung der Vektorräume zu reduzieren.

6.1 Exponentialabbildungen

Wir nehmen die Frobeniusnorm auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\|X\| &= \left(\sum_{ij} |x_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\mathrm{tr}(X^{-1}X)}\end{aligned}$$

Es gilt $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$.

Die Reihe (Exponentialreihe)

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

konvergiert absolut für alle $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Absolut heisst, dass die entsprechende Reihe der Normen konvergiert:

$$\sum_k \frac{1}{k!}\|X\|^k \text{ konvergiert}$$

6.1.1 Eigenschaften der Exponentialabbildung

1. falls $XY = YX$: $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$
2. $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$, insbesondere $\exp(X) \in GL(n, \mathbb{K})$.
3. $A\exp(X)^{-1} = \exp(AXA^{-1})\forall A \in GL(n, \mathbb{K})$.
4. $\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{tr}(X))$

   Herleitung:

   Schreibe $X = ADA^{-1}$, D Jordan-Form. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\det(\exp(X)) &= \det(A\exp(D)A^{-1}) \\ &= \det(\exp(D)) \\ &= e^{\mathrm{tr}(D)} \\ &= e^{\mathrm{tr}(X)}\end{aligned}$$

5. $\exp(X^*) = \exp(X)^*$
6. $\exp(X^T) = \exp(X)^T$
7. $\exp\left(\overline{X}\right) = \overline{\exp(X)}$
8. Ist N nilpotent, so gilt $\exp(N) = 1 + N + \frac{N^2}{2!} + \ldots + \frac{N^k}{k!}$ für $N^{k+1} = 0$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}X &= \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \exp(X) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Elemente der Lie Algebra werden durch die Exponentialabbildung auf Elemente der Lie Algebra abgebildet.

Lemma — Lemma 90

Die Exponentialabbildung ist lokal ein Isomorphismus.

Die inverse Abbildung ist die Logarithmusabbildung, welche auf der Lie Gruppe definiert ist:

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

6.2 Einparametergruppen

Definition Einparametergruppe — Definition 91

Eine Abbildung $x : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ heisst Einparametergruppe, falls

1. x stetig differenzierbar ist.
2. $x(0) = \mathbb{1}$
3. x(s + t) = x(s) x(t) für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

   Das heisst, x ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(GL(n, \mathbb{K}), *)$.

Satz — Satz 92

1. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}), t \mapsto \exp(tA)$ ist eine Einparametergruppe.
2. Alle Einparametergruppen sind von dieser Form.

Beweis:

1. Ist klar wegen den Eigenschaften der Exponentialabbildung.
2. Sei $t \mapsto X(t)$ eine Einparametergruppe und $A = \dot{X}(0) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

   Es gilt:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \\ &= X(t) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - \mathbb{1}}{h} \\ &= X(t)A\end{aligned}$$

   Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $X(0) = \mathbb{1}$.

   $t \to \exp(tA)$ erfüllt die gleiche Differentialgleichung und Anfangsbedingung.

   Wir haben also eine eindeutige Lösung gefunden. Das heisst, dass die Exponentialabbildung die Einparametergruppe eindeutig bestimmt.

■

6.3 Matrix-Lie Gruppen

Definition Matrix-Lie Gruppe — Definition 93

Eine Matrix-Lie Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe $G \subset GL(n, \mathbb{K})$.

Abgeschlossen heisst:

$$\forall \text{ Folgen } x_n \in G, \lim_{n\to\infty} x_n = x \in GL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow x \in G$$

Definition Lie Algebra — Definition 94

$$\mathrm{Lie}(G) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \exp(tX) \in G \forall t \in \mathbb{R}\}$$

$\mathrm{Lie}(G)$ heisst Lie Algebra der Matrix-Lie Gruppe G.

Satz — Satz 95

$$G \subset GL(n, \mathbb{K}) \text{ abgeschlossen}$$
$$\Rightarrow \text{Lie}(G) \text{ reeler Vektorraum}$$
$$\text{Kommutator} : \forall X, Y \in \text{Lie}(G) : [X, Y] = XY - YX \in \text{Lie}(G)$$

Die Lie Algebra $\text{Lie}(G)$ ist also ein reeller Vektorraum. Der Kommutator wird auch Lie Klammer genannt. Der Kommutator von zwei Elementen $X, Y \in \text{Lie}(G)$ ist wieder in $\text{Lie}(G)$ enthalten.

Lemma — Lemma 96

$\text{Lie}(G)$ besteht aus allen Tangentialvektoren $X\dot(0)$ von glatten Kurven $X :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G, X(0) = \mathbb{1}$.

Mit anderen Worten: Die Lie Algebra von G ist der Tangentialraum an der Identität $\mathbb{1}$ der Lie Gruppe G.

$$\text{Lie}(G) = T_{\mathbb{1}} G$$

Beweis:

1. $\text{Lie}(G)$ enthält alle Tangentialvektoren.

   Einparametergruppen $t \to \exp(tA)$ sind glatte Kurven wie gefordert.

2. Für jedes Element von $\text{Lie}(G)$ gibt es eine glatte Kurve.

   Wir müssen zeigen: $\exp(tX(0)) \in G, \forall t \in \mathbb{R}$. Betrachte $t \in \mathbb{R}$ und $X\left(\frac{t}{n}\right)^n \in G$ für $n \to \infty$.

   Wir können auch annehmen, dass $\left\|X\left(\frac{t}{n}\right) - \mathbb{1}\right\| < 1$:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{t}{n}\right)^n &= \exp\left(n \log\left(X\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right) \ |\text{Taylor} \\ &= \exp\left(n \log\left(\mathbb{1} + \frac{t}{n}\dot{X}(0) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{t}{n}\dot{X}(0) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \ | \ n \to \infty \\ &= \exp\left(t\dot{X}(0)\right) \in GL(m, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

   Wegen Abgeschlossenheit von G folgt $\exp\left(t\dot{X}(0)\right) \in G$.

■

Beispiel:

- $$\text{Lie}(GL(n, \mathbb{K})) = gl(n, \mathbb{K}) = \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$$
  $$\mathbb{K} - \text{Basis} : E_{ij}, \left(E_{ij}\right)_{ij} = 1, \text{sonst } 0$$
- $$u(n) = \text{Lie}(U(n)) = \{X \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$$

$$su(n) = \text{Lie}(SU(n)) = \{X \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid X^* = -X, \text{tr}(X) = 0\}$$

6.3.1 Eigenschaften des Kommutators

Satz — Satz 97

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (Antisymmetrie)
2. Der Kommutator ist bilinear: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ und $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und $X, Y, Z \in \text{Lie}(G)$.
3. Jacobi Identität: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ für alle $X, Y, Z \in \text{Lie}(G)$.

Beweis:

$$\begin{gathered} XYZ - XZY - YZX + ZYX \\ +YZX - YXZ - ZXY + XZY \\ +ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\ = 0 \end{gathered}$$

Definition Lie Algebra — Definition 98

Ein reeler oder komplexer Vektorraum g, versehen mit einer Abbildung (Lie Klammer)

$$[.,.] : gxg \to g$$

die die Eigenschaften 1-3 erfüllt, heisst (reele oder komplexe) **Lie Algebra**

Ein Homomorphismus $\varphi : g_1 \to g_2$ von Lie Algebren ist eine lineare Abbildung, die die Lie Klammer erhält:

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \forall X, Y \in g_1$$

Isomorphismus von Lie Algebren falls φ bijektiv ist.

Beispiele:

$$o(n) = \text{Lie}(O(n)) = \{X \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$$
$$so(n) = \text{Lie}(SO(n)) = o(n)$$

Beweis:

$$X \in o(n) \Leftrightarrow \mathbb{1} = \exp(tX)^T \exp(tX) \forall t \in \mathbb{R}$$
$$= \exp(tX^T) \exp(tX) \text{ erfüllt eigenschaft}$$

■

$$\det(\exp(tX)) = \det(t \ \text{tr}(X)) = 1$$
$$\text{weil } X = -X^T$$
$$\Rightarrow so(n) = o(n)$$

Die Lie Algebra kann also die Zusammenhangskomponenten von O und SO nicht unterscheiden. Dies liegt daran, dass die Lie Algebra durch lokale Eigenschaften bei der Identität $\mathbb{1}$ charakterisiert wird. Die Lie Algebra kann globale Eigenschaften nicht erkennen.

Weiterhin: $sp(2n) = \text{Lie}(Sp(2n)) = \{X \in \text{Mat}_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid X^T J + JX = 0\}$

$$Sp(2n) = \left\{A \in \text{Mat}_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid A^T JA = J, J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A, B, C \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}), B = B^T, C = C^T\right\}$$

$$su(2) = \{\text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0, \text{tr}(X) = 0\}$$
$$\text{Basis } t_1 = i\sigma_1, t_2 = i\sigma_2, t_3 = i\sigma_3$$
$$[t_j, t_k] = -\sum_{l=1}^{3} e_{jkl} t_l$$

6.4 Campbell-Baker-Hausdorff Formel

Satz — Satz 99

Sei $X, Y \in \text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt (für t klein genug), dass:

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(tX + tY + \frac{t^2}{2}[X, Y] + o(t^3)\right)$$

Beweis:

Sei t so klein, dass $\|\exp(tX) \exp(tY) - \mathbb{1}\| < 1 \Rightarrow \log(-)$ anwendbar.

$$\Rightarrow \exp(tX) \exp(tY) = \exp(Z(t))$$
$$\text{mit } Z(t) = \log(\exp(tX) \exp(tY))$$

Entwickle beide Seiten in Potenzreihen in t und vergleiche die Koeffizienten:

$$1 + tX + \frac{t^2 X}{2} + ...)\left(1 + tY + \frac{t^2 Y}{2} + ...\right) = 1 + t(X + Y) + \frac{t^2}{2}(x^2 + 2XY + Y^2) + o(t^3)$$

$$= \exp(Z(t)) = \exp(tZ_1 + t^2 Z_2 + ...) = 1 + (tZ_1 + t^2 Z_2) + \frac{1}{2}t^2 Z_1^2 + o(t^3)$$

$$= 1 + tZ_1 + \frac{t^2}{2}(Z_1^2 + 2Z_2)$$

Koeffizientenvergleich:

$$Z_1 = X + Y$$
$$Z_1^2 + 2Z_2 == X^2 + 2XY + Y^2$$
$$\Rightarrow Z_2 = \frac{1}{2}[X, Y]$$

Kommutator:

$$\exp\left(\frac{1}{n}X\right)\exp\left(\frac{1}{n}Y\right)\exp\left(-\frac{1}{n}X\right)\exp\left(-\frac{1}{n}Y\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{n}\left(X + Y + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}[X, Y] + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$
$$+ \exp\left(-\frac{1}{n}\left(X + Y + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}[X, Y] + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left([X, Y] + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \exp([X, Y])$$

Der Kommutator ist also in der Lie Algebra enthalten (weil die Gruppe abgeschlossen ist, also Limes enthalten).

6.4.1 Exponentialabbildung

Sei $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G, X \mapsto \exp(X)$

Die Abbildung ist weder immer injektiv noch surjektiv.

Nicht injektiv, betrachte $\mathrm{Lie}(O(2))$ (rotationen periodisch mit 2π).

Nicht surjektiv, betrachte $\mathrm{Lie}(SL(2, \mathbb{R}))$ (determinante ist nicht immer 1).

Jedoch ist die Exponentialabbildung lokal ein Diffeomorphismus um $0 \in \mathrm{Lie}(G)$ mit einer Umgebung der Identität $\mathbb{1} \in G_0$, wobei G_0 die Zusammenhangskomponente der Identität ist.

Satz Satz 100

Sei $G \subset GL(N, \mathbb{K})$ eine Matrix-Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathrm{Lie}(G)$ und G_0 die Zusammenhangskomponente der Identität $\mathbb{1} \in G$.

Dann ist G_0 gleich der Gruppe aller Matrizen der Form

$$\exp(X_1)... \exp(X_n), (X_1, ..., X_n \in G)$$

Beispiel

$$G = U(n)$$

dann ist $\exp : u(n) \to U(n)$ surjektiv.

Jedes $U \in U(n)$ ist diagonalisierbar.

$$U = A\,\mathrm{diag}(e^{i\varphi_1}, ..., e^{i\varphi_n})A^{-1}, A \in U(n)$$
$$= \exp(A\,\mathrm{diag}(i\varphi_1, ..., i\varphi_n)A^*) \in u(n)$$

7 Darstellungen von Lie-Gruppen

7.1 Definition

Definition — Definition 101

Eine komplexe oder reele Darstellung einer Matrix-Lie Gruppe G auf einem endlichdimensionalen reelen oder komplexen Vektorraum $V, V \neq 0$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.

Die Dimension von ρ ist $\dim(V)$.

Stetig heisst: alle Matrixabbildungen $\rho_{ij}(g)$ sind stetig in $g \in G$

Für uns: Alle komplexen, endlich dimensionalen Darstellungen.

7.2 Beispiele

Satz — Darstellung von $U(1) \cong SO(2)$ — Satz 102

Diese Gruppen sind kompakt. Das heisst, jede Darstellung ist vollständig reduzibel.

Wenn wir die Darstellung also klassifizieren wollen, müssen wir nur die irreduziblen Darstellungen klassifizieren.

Sie sind auch abelsch, also ist jede irreduzible Darstellung ist im komplexen eindimensional.

Für jedes

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{Z} : \rho_n : U_1 \to GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z \mapsto z^n \end{aligned}$$

ist eine Darstellung von $U(1)$. Jede irreduzible Darstellung von $U(1)$ ist isomorph zu ρ_n für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

$$\begin{gathered} \rho_n \text{ stetig} \\ \text{Gruppenhom } (zw)^n = z^n w^n \end{gathered}$$

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass jede irreduzible Darstellung von dieser Form ist.

Sei $\rho : U(1) \to GL(\mathbb{C})$ eine 1-dimensionale Darstellung von $U(1)$.

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \rho(e^{it})$$

ist eine Einparametergruppe (Beweis unten).

$$\begin{gathered} \Rightarrow \exists \rho(e^{it}) = e^{tw}, w \in \mathbb{C} \forall t \in \mathbb{R} \\ \rho(e^{2\pi i}) = 1 = e^{2\pi w} \\ \Rightarrow 2\pi w \in w\pi i\mathbb{Z} \\ \Rightarrow w \in i\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \rho(z) = \rho(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi} = \rho_n(z) \Rightarrow \rho \cong \rho_n \end{gathered}$$

■

Satz — Darstellung von $SU(2)$ — Satz 103

$\forall n$ existiert eine irreduzible Darstellung $\rho_n : SU(2) \to GL(V_n)$ mit $\dim(V_n) = n + 1$. Jede irreduzible Darstellung von $SU(2)$ ist isomorph zu ρ_n für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Es gibt also genau eine irreduzible Darstellung mit Dimension $1, 2, 3, \ldots$.

Sei $V_n = \mathbb{C}[z_1, z_2]_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j z_1^j z_2^{n-j} \mid a_0, \ldots, a_n i \in \mathbb{C} \right\}$.

Behauptung:

$$\begin{aligned} \rho_n : SU(2) \to GL(V_n) \\ A \mapsto (f(z) \mapsto f(A^{-1} z)) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Es gilt, dass

$$\rho_{n(-A)} = (-1)^n \rho_n(A)$$

Also definiert ρ_n genau für gerade n eine Darstellung von $SU(3)$.

7.3 Darstellungen von Lie Algebren

Lemma — Lemma 104

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der Matrix Lie Gruppe G. Dann bildet ρ Einparametergruppen auf Einparametergruppen ab.

Beweis:

Sei $t \mapsto \Phi_t \in \mathbb{G}$ eine Einparametergruppe (Gruppenhom $\mathbb{R} \to G$ stetig, diffbar).

Sei $\psi_t = \rho(\varphi_t) \in GL(V)$.

Das komische daran ist, dass ρ nur stetig ist und dennoch ψ stetig diffbar in t ist. Es reicht, dass ψ_t nur bei $t = 0$ difbar ist.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\psi_t}{\mathrm{d}t} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\psi_{t+h} - \psi_t}{h} \\ &= \psi_t \lim_{h \to 0} \frac{\psi_h - \psi_0}{h} = \psi_t A \end{aligned}$$

Man verwendet den folgenden Trick:

Sei für t klein genug ($t < t_0$): $a_t = \log(\psi_t), a_0 = 0$.

Für $n = 1, 2, \ldots, t$ klein ($nt < t_0$).

$$\begin{aligned} \exp(a_n t) = \psi_{nt} = (\psi_t)^n = \exp(n a_t) \mid \log \\ \Rightarrow a_{nt} = n a_t \end{aligned}$$

Für rationale Zahlen $r = \frac{p}{q}$ und ε klein genug.

$$\begin{aligned} q a_{\varepsilon \frac{p}{q}} = q p a_{\varepsilon \frac{1}{q}} = p a_\varepsilon \\ \Rightarrow a_{r\varepsilon} = r a_\varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt die Gleichung auch für rationale Zahlen. Da rationale Zahlen dicht in den reellen Zahlen sind, gilt die Gleichung auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Sei $a = \varepsilon^{-1} a \varepsilon \Rightarrow a_{r\varepsilon} = r \varepsilon a$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ klein genug.

Beide Seiten sind stetig und $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, also $a_t = ta$ für alle $t \in \mathbb{R}$ klein genug.

Das heisst:

$$\psi_t = \exp(ta)$$

Also ψ_t diffbar.

Lemma — Lemma 105

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung und $X \in \mathrm{Lie}(g)$.

Dann ist $\rho(\exp(tX))$ eine Einparametergruppe in $GL(V)$.

Sei $\rho_*(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \rho(\exp(tX)) \in \mathrm{Lie}(GL(V)) = gl(V)$

$\rho_* : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(GL(V))$

1. $\rho(\exp(tX)) = \exp(t\rho_*(X)) \forall t \in \mathbb{R}, X \in \mathrm{Lie}(G)$
2. $\rho_*(\lambda X + \mu Y) = \lambda \rho_*(X) + \mu \rho_*(Y)$
3. $\rho_*([X, Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)]$

Die letzten beiden Eigenschaften bestimmen: ρ_* ist ein Lie-Algebra Homomorphismus.

7.3.1 Recap

$$\rho : G \to GL(V) \text{ Darstellung}$$
$$\rho_* : \mathrm{Lie}(G) \to gl(V) = \mathrm{Lie}(GL(V)) \text{ Lie-Algebra Homomorphismus}$$
$$X \in \mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Mat}_{n\times n}$$
$$\rho_*(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ \rho(\exp(tX)) \in \mathbb{C}^\infty \text{ Abbildung von Lie-Algebra auf Lie-Algebra}$$
$$= D\rho|_{\mathbb{1}} \text{ Ableitung}$$

Die Darstellung hat ein Bild vom Tangentialraum an der Identität $\mathrm{Lie}(G)$ von G auf den Tangentialraum an der Identität von $GL(V)$, also auf $gl(V)$.

$$\varphi : G \to H \text{ Gruppenhomomorphismus, stetig}$$
$$\varphi_* = D\varphi|_{\mathbb{1}} : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H) \text{ Abbildung von Lie-Algebren}$$

Definition — Definition 106

Sei G eine Lie-Algebra über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Eine $\mathbb{R}$-lineare oder $\mathbb{C}$-lineare Darstellung von g auf einem Vektorraum $V \neq \{0\}$ eine $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\tau : g \to gl(V)$$

sodass

$$[\tau(X), \tau(Y)] = \tau([X, Y])$$
$$\Leftrightarrow \tau \text{ Lie-Algebra Homomorphismus } g \to gl(V)$$

1. $U \subset V$ ist ***g*-invariant**, falls
$$\tau(X)U \subset U \forall X \in g$$
2. τ **irreduzibel** falls die einzigen Unterräume $U = 0, V$ sind.
3. τ **vollständig reduzibel** falls V eine direkte Summe ($\bigoplus$) von g-invarianten Unterräumen $U_1, ..., U_n$ ist.

Satz — Satz 107

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der Matrix-Lie-Gruppe G. Dann ist ρ_* eine Darstellung der ($\mathbb{R}$ −) Lie Algebra $\mathrm{Lie}(G)$ auf $gl(V)$.

Die Einschränkung von ρ auf $G_0 \subset G$ (Zusammenhangskomponente der Identität) ist durch τ_* eindeutig bestimmt, wobei τ_* eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(G_0)$ auf $gl(V)$ ist.

Beweis:

Zu zeigen: Der Teil mit der Einschränkung. Bewiesen durch Formel:

Sei $g \in G_0$ gegeben. Wir können g schreiben als Produkt von Bildern der Exponentialabbildung (7.4.3).

$$g = \exp(X_1)... \exp(X_n), X_1, ..., X_n \in \mathrm{Lie}(G)$$

Also gilt:

$$\rho(g) = \rho(\exp(X_1))...\rho(\exp(X_n))$$
$$= \exp(\rho_*(X_1))... \exp(\rho_*(X_n))$$

■

Das bedeutet, dass bei der Bildung einer Lie-Algebra aus einer Gruppe keine Information verloren geht, da die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(G)$ die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(G_0)$ enthält.

Satz — Satz 108

Sei $\rho : G \to GL(V)$ wie oben eine Darstellung der Matrix-Lie-Gruppe G und zusätzlich G zusammenhängend.

Dann ist ρ genau dann irreduzibel bzw. vollständig reduzibel, wenn ρ_* irreduzibel bzw. vollständig reduzibel ist.

Beweis:

Wir müssen prüfen, ob die invarianten Unterräume von ρ_* die gleichen sind wie die von ρ.

Zu zeigen: $W \subset V$ invariant $\rho \Leftrightarrow W \subset V$ invariant ρ_*.

1. $\Rightarrow$ Sei $w \in W, X \in \mathrm{Lie}(G)$:
$$\rho_*(X)w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ \rho(\exp(tX))w \in W$$
2. $\leq$ Sei $g \in G \Rightarrow$Zusammenhängend:$\exists X_1, ...X_2$
$$g = \exp(X_1)... \exp(X_n), w \in W$$
$$\rho(g)w = \rho(\exp(X_1))...\rho(\exp(X_n))w$$
$$= \exp(\rho_*(X_1))... \exp(\rho_*(X_n))w \in W \text{ induktiv}$$

■

Beispiele:

1. Triviale Lie-Algebra ($V = \mathbb{C}$):
$$\tau(X) = 0 \forall X \in \mathrm{Lie}(G)$$
2. Adjungierte Darstellung ($V = g = \mathrm{Lie}(G)$):
$$\text{Sei } Ad : G \to GL(g)$$
$$Ad(g)X = gXg^{-1} \forall \in \mathrm{Lie}(G)$$
adjungierte Darstellung von G auf g.

   Die adjungierte Darstellung von g auf g ist
$$ad = Ad_* : g \to gl(g), ad(X)Y = [X, Y]$$

Für jede Darstellung einer Lie-Gruppe bekommen wir eine Darstellung der Lie-Algebra.

7.4 Irreduzible Darstellungen von $SU(2)$

Unser Ziel ist es, alle endlich dimensionalen Darstellungen zu klassifizieren.

Dies erreichen wir, indem wir die irreduziblen Darstellungen klassifizieren, da jede Darstellung eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen ist.

Elemente von $SU(2)$ sind complexe 2x2 Matrizen, aber $\mathrm{Lie}(SU(2))$ ist eine reelle Lie-Algebra. Man darf also, obwohl die Matrix komplexe Einträge hat, diese nicht mit komplexen Zahlen multiplizieren.

Die definierende Eigenschaft war $X^* = -X$. Dies funktioniert aber nicht mehr mit $(iX)^* = +iX$

Wir schauen uns nun an, wass passiert wenn wie die Lie-Algebra von $SU(2)$ mit komplexen Zahlen multiplizieren.

Lemma $SL(2)$ Lemma 109

1. Jede Matrix $Z \in sl(n, \mathbb{C}) = \{\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(X) = 0\}$ kann man eindeutig schreiben als:
$$Z = X + iY, X, Y \in su(n)$$
$sl(n)$ ist also die komplexifizierte Lie-Algebra von $su(n)$.
2. Sei τ eine Darstellung von $su(n)$ auf $V \subset \mathbb{C}^m$.

   Dann $\tau : su(n) \to gl(V)$. Dies ist aber erstmal nur eine $\mathbb{R}$ lineare Abbildung.

   Dann ist
$$\tau_{\mathbb{C}} : sl(n, \mathbb{C}) \to gl(V)$$
$$\tau_{\mathbb{C}(X+iY)} = \tau(X) + i\tau(Y)$$
   eine $\mathbb{C}$ lineare Darstellung von $sl(n, \mathbb{C})$ auf V, die auf $su(n) \subset sl(n, \mathbb{C})$ mit τ übereinstimmt.
   1. τ ist vollständig reduzibel oder irreduzibel <=> $\tau_{\mathbb{C}}$ ist vollständig reduzibel oder irreduzibel.

Beweis:

1. $$X = \frac{1}{2}(Z - Z^*)$$
$$Y = \frac{1}{2i}(Z + Z^*)$$
2. $\tau_{\mathbb{C}}$ ist $\mathbb{C}$ linear: klar
$$\left[\tau_{\mathbb{C}(Z_1)}, \tau_{\mathbb{C}(Z_2)}\right] = [\tau(X_1) + i\tau(Y_1), \tau(X_2) + i\tau(Y_2)]$$
$$= \ldots = \tau_{\mathbb{C}([Z_1, Z_2])}$$

Nun wollen wir die Darstellungen von $sl(2, \mathbb{C})$ klassifizieren.

Basis von $sl(2, \mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Diese Basis kann jede 2x2 Matrix mit Spur 0 darstellen.

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$[h, e] = 2e$$
$$[h, f] = -2f$$
$$[e, f] = h$$

Sei (τ, V) eine $\mathbb{C}$-lineare Darstellung von $sl(2, \mathbb{C})$. Sei
$$H = \tau(h), E = \tau(e), F = \tau(f) \in gl(V)$$

Der kommutator muss unter τ invariant sein:
$$[H, E] = [\tau(h), \tau(e)] = \tau([h, e]) = 2\tau(e) = 2E$$
$$[H, F] = -2F$$
$$[E, F] = \tau([e, f]) = \tau(h) = H$$

Umgekehrt: sind $H, E, F \in gl(V)$ gegeben, sodass die Kommutatorrelationen gelten, so definiert die Definition von H, E, F eine Darstellung τ von $sl(2, \mathbb{C})$ auf V.

Sei (τ, V) eine irreduzible Darstellung von $sl(2, \mathbb{C})$.

Wir schauen uns H an. Es ist irgend eine komplexwertige 2x2 Matrix mit mindestens einem Eigenwert und Eigenvektor. Wir wählen den Eigenvektor v_0 mit dem grössten realen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.
$$Hv_0 = \lambda v_0, v_0 \neq 0$$

Lemma Lemma 110

1. $$Ev_0 = 0$$
2. $$v_k = F^k v_0$$
$$\Rightarrow Hv_k = (\lambda - 2k)v_k$$
$$Ev_k = k(\lambda - k + 1)v_{k-1}$$

Beweis:

1. $$H(Ev_0) = EHv_0 + 2Ev_0$$
$$= (2 + \lambda)(Ev_0)$$
$$\mathrm{Re}(\lambda + 2) = \mathrm{Re}(\lambda) + 2 > \mathrm{Re}(\lambda)$$
   Nach Konstruktion ist $\lambda + 2$ also kein Eigenwert. Da dann diese Geleichung gilt, ist $Ev_0 = 0$.
2. Induktion:

   Verankerung $k = 0$: $Ev_0 = 0$.

   Induktionsschritt $k \to k + 1$:

   (Der dritte Schritt fügt den Kommutator $-2F$ hinzu weil wir die Reihenfolge vertauschen.)
$$Hv_{k+1} = HFv_k = FHv_k - 2Fv_k$$
$$= (\lambda - 2k)v_{k+1} - 2Fv_{k+1}$$
$$= (\lambda - 2(k + 1))v_{k+1}$$
$$\Rightarrow Ev_{k+1} = EFv_k = FEv_k + Hv_k$$
$$= k(\lambda - k + 1)Fv_{k-1} + (\lambda - 2k)v_k$$
$$= k(\lambda - k + 1)v_k + (\lambda - 2k)v_k$$
$$= k((\lambda - k + 1) + \lambda - 2k)v_k$$
$$= (k + 1)(\lambda - k)v_k$$
■

Insbesondere ist $\mathrm{span}(v_0, v_1, \ldots) \neq 0 \subset V$ invariant unter τ.

Da τ irreduzibel ist, muss $\mathrm{span}(v_0, v_1, \ldots) = V$ sein, da V oder 0 die einzigen τ-invarianten Unterräume sind.

Wir haben aber unendlich viele v_k gefunden, wir wissen aber dass V endlichdimensional ist weil unsere Darstellung endlichdimensional ist. Das heisst, dass $v_k = 0$ für $k > n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wir können sehen, dass jedes $v_k \neq 0$ ein Eigenvektor zu einem seperaten Eigenwert ist. Das heisst, alle $v_k \neq 0$ sind linear unabhängig.

Sei $v_{n+1} = 0$ der erste Vektor, der 0 ist. Die höheren Vektoren v_k sind auch 0. Wir haben also $n + 1$ Vektoren gefunden, die linear unabhängig sind. Das heisst, dass $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n + 1$ ist.

$$v_{n+1} = 0, v_n \neq 0$$
$$0 = E0 = Ev_{n+1} = (n + 1)(\lambda - n)v_n$$
$$\Rightarrow \lambda = n$$

Es gibt also für Dimension $n + 1$ höchstens eine irreduzible Darstellung von $sl(2, \mathbb{C})$.

Satz — Satz 111

Sei $n = 0, 1, 2...$ und $v_0, v_1, ...v_n$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^{n+1} = V_n$.

Dann definieren die Abbildungsvorschriften mit

$$\begin{aligned} Hv_k)(n-2k)v_k \\ Ev_k &= k(n+1-k)v_{k-1} \\ Fv_k &= v_{k+1}, (v_{n+1} = 0) \end{aligned}$$

und

$$H = \tau(h), E = \tau(e), F = \tau(f)$$

eine irreduzible Darstellung von $sl(2, \mathbb{C})$ auf V_n.

Jede $n+1$ dimensionale, irreduzible, $\mathbb{C}$-lineare Darstellung von $sl(2, \mathbb{C})$ ist isomorph zu dieser Darstellung. τ_n

Beweis:

Wir müssen noch zeigen τ_n die Kommutatorrelationen erfüllt.

$$\begin{aligned} [H, F]v_k &= HFv_k - FHv_k \\ &= Hv_{k+1} - (n-2k)Fv_k \\ ((n-2k-2) &- (n-2k))v_{k+1} \\ &= -2v_{k+1} = (-2F)v_k \\ [H, E]v_k &= ... = 2Ev_k \\ [E, F]v_k &= EFv_k - FEv_k \\ &= Ev_{k+1} - Fv_{k-1}(k(n+1-k)) \\ &= ((k+1)(n-k) - k(n+1-k))v_k \\ &= (n-2k)v_k = Hv_k \end{aligned}$$

Wir zeigen auch, dass τ_n irreduzibel ist.

Sei $W \subset V_n$ ein τ_n-invarianter Unterraum.

$H|_W$ habe Eigenwert μ mit Eigenvektor $w \neq 0 \in W \Rightarrow w$ Eigenvektor von H zum Eigenwert μ. Da alle Eigenwerte verschieden sein müssen, muss μ in der Liste der vorherigen Eigenwerte $0, 1, ..., n$ sein und $w \propto v_k$ für ein k.

Da $n + 1 - m \neq 0 \forall m = 0, 1, ...$ kann man durch Anwenden von E und F aus v_k alle v_m gewinnen. $\Rightarrow W = V_n$. Also irreduzibel.

■

Für jedes n konstruieren wir also eine irreduzible Darstellung von $sl(2, \mathbb{C})$ auf V_n mit Dimension $n + 1$.

Bemerkung:

In der Physik nennt man die Operatoren E, F Auf- und Absteigeoperatoren.

H hat oft die Bedeutung der Energie bzw. dem Hamiltonoperator.

Sei U_n der Raum der homogenen Polynome von grad n:

$$\mathbb{C}[z_1, z_2]_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j z_1^j z_2^{n-j} \right\}$$

Betrachte die Darstellung $\rho_n : SL(2, \mathbb{C}) \to GL(U_n)$.

$$\rho_{n(A \in SL(2,\mathbb{C}))} = (p(z) \to p(A^{-1}z))$$

Wir wollen nun die Lie-Algebra $su(2)$ von $SL(2, \mathbb{C})$ auf U_n bilden.

Beispiel — Example 112

Lie-Algebra Wir wollen die zugehörige Darstellung

$$\rho_{n*} : sl(2, \mathbb{C}) \to gl(U_n) \in \mathrm{End}(U_n)$$

finden.

$$\begin{aligned} (\rho_{n*}(h)p)(z_1, z_2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ \rho_{n(\exp(th))}(z_1, z_2) \\ &p \in U_n \\ \Rightarrow &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ p(\exp(th)^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ p\left(\exp(-th)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \mid h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ p\left(\begin{pmatrix} e^{-t}z_1 \\ e^t z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &\text{Kettenregel} \\ &= \frac{\partial p}{\partial z_1}(z_1, z_2)(-z_1) + \frac{\partial p}{\partial z_2}(z_1, z_2)z_2 \\ &= -z_2\frac{\partial p}{\partial z_1}(z_1, z_2) + z_1\frac{\partial p}{\partial z_2}(z_1, z_2) \\ \Rightarrow \rho_{n*}(h) &= -z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} \in \mathrm{End}(U_n) \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} (\rho_{n*}(e)p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ p\left(\exp(-te)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \exp(-te) = \mathbb{1} - te \text{ nilpotent} \\ \Rightarrow &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ p\left(\begin{pmatrix} z_1 - tz_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{\partial p}{\partial z_1}(-z_2) \\ \Rightarrow \rho_{n*}(e) &= -z_2\frac{\partial}{\partial z_1} \in \mathrm{End}(U_n) \end{aligned}$$

Und auch

$$\rho_{n*}(f) = ... = -z_1\frac{\partial}{\partial z_2} \in \mathrm{End}(U_n)$$

Lemma — Lemma 113

Die Darstellung von

$$\rho_{n*} : sl(2, \mathbb{C}) \to gl(U_n)$$

ist äquivalent zur Darstellung τ_n von vorher mit dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} \psi : V_n &\to U_n \\ v_k &\mapsto \frac{(-1)^k}{(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \end{aligned}$$

Beweis:

Wir müssen noch zeigen, dass ψ ein Isomorphismus ist.

$$\begin{aligned}\rho_{n*}(h)\psi(v_m) &= \frac{(-1)^m}{(n-m)!}\rho_{n*}(h)(z_1^m z_2^{n-m}) \\ &= \frac{(-1)^m}{(n-m)!}(-m+n-m)z_1^m z_2^{n-m} \\ &= \frac{(-1)^m}{(n-m)!}(n-2m)z_1^m z_2^{n-m} \\ &= \psi((n-2m)v_m) \\ &= \psi(Hv_m) \\ &= \psi\left(\tau_{n(h)}v_m\right)\end{aligned}$$

Gleiches muss man nun für die anderen Basisvektoren E, F zeigen.

$$\rho_{n*}(e)\psi(v_m) = \psi(\tau_n(e)v_m) = Ev_m$$
$$\rho_{n*}(f)\psi(v_m) = \psi(\tau_n(f)v_m) = Fv_m$$

■

Unitarität:

Lemma Lemma 114

Betrachte wieder die Darstellung $\tau_n : sl(2, \mathbb{C}) \to gl(V_n)$.

$$\begin{aligned}Hv_m &= (n-2m)v_m \\ Ev_m &= m(n+1-m)v_{m-1} \\ Fv_m &= v_{m+1}\end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned}u_m &= \sqrt{\frac{(n-m)!}{m!}}v_m \\ Hu_m &= (n-2m)u_m \\ Eu_m &= \sqrt{m(n+1-m)}u_{m-1} \\ Fu_{m-1} &= \sqrt{m(n+1-m)}u_m\end{aligned}$$

Beachte: $E^T = E^* = F$ Bezüglich des Skalarprodukts für das $(u_0, ..., u_n)$ eine Orthonormalbasis ist, gilt

$$H^* = H, E^* = F, F^* = E$$

Wir definieren das Skalarprodukt auf V_n sodass $u_0, ..., u_n$ Orthonormalbasis ist, also $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned}H^* &= H, E^* = F, F^* = E \\ &\Rightarrow \forall A \in sl(2,\mathbb{C}) : \tau_n(A)^* = \tau_n(A^*) \\ &\Rightarrow \forall x \in su(2) \subset sl(2,\mathbb{C}) : \tau_n(x)^* = \tau_n(x^*) = -\tau_n(x) \\ &\Rightarrow \tau_n \in u(V_n) \cong u(n+1) \\ &\Rightarrow \text{unitar } \tau_n\end{aligned}$$

Für die entsprechende Darstellung der Gruppe $\tilde{\rho}_n$ gilt also:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_n(A \in SU(2)) &= \tilde{\rho}_n(\exp(x)) = \exp(\tilde{\rho}_{n*}(x)) \\ &= \exp(\tau_n(x) \in u(V_n)) \in U(V_n) \\ &\Rightarrow \rho_n \text{ unitäre Darstellung } SU(2) \text{ auf } V_n\end{aligned}$$

Sart Satz 115

Zu jedem $n = 0, 1, ...$ gibt es bis auf àquivalenz genau eine irreduzible, Darstellung (ρ_n, U_n) von $SU(2)$ der Dimension $n+1$.

Die explizite Konstruktion: $U_n = \mathbb{C}[z_1, z_2]_n$ mit $(\rho(n)(A))(z) = p(A^{-1}z)$.

ρ_n ist unitär bezüglich des Skalarproduktes, für das die Basis $\frac{z_1^m z_2^{n-m}}{\sqrt{m!(n-m)!}}), m = 0, ..., n$ eine Orthonormalbasis ist.

Beweis:

Alles gezeigt bis auf Normierungsfaktor.

Erinnerung: Isomorphismus $V_n \to U_n, v_m \mapsto \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}z_1^m z_2^{n-m}$.

èberträgt man das Skalarprodukt auf V_n bezüglich dessen U_m eine Orthonormalbasis auf U_n, so ist in V_n die normierte Basis wie im Satz.

Bemerkung Remark 116

Irreduzible Darstellungen von $SO(3)$

Erinnerung $\varphi : SU(2) \to SO(3)$.

$$\ker(\varphi) = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$$

Gegeben $\rho : SO(3) \to GL(V)$

Es folgt:

$$\rho \circ \varphi : SU(2) \to GL(V)$$

ist eine Darstellung von $SU(2)$ auf V. $\rho \circ \varphi$ hat das gleiche Bild wie ρ. Die invarianten Unterräume von ρ sind die gleichen wie die von $\rho \circ \varphi$.

Das bedeutet ρ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $\rho \circ \varphi$ ist irreduzibel.

Also falls ρ irreduzibel ist, so ist $\rho \circ \varphi$ isomorph zu einer Darstellung ρ_n mit $n = \dim(\rho - 1)$

$$(\rho \circ \varphi)(\pm \mathbb{1}) = \mathbb{1}_V$$

aber

$$\rho_n(-\mathbb{1}) = \left(-\mathbb{1}_{V_n}\right)^n = \begin{cases}\mathbb{1}_V n \text{ ungerade} \\ \mathbb{1}_V n \text{ gerade}\end{cases}$$

nur für gerade n kann $\rho_n \cong \rho \circ \varphi$ gelten:

Umgekernt sei n gerade und betrachte $\rho_n : SU(2) \to GL(V_n)$. Setze für $R \in SO(3)$:

$$\tilde{\rho}_n(R) = \rho_n(A) \in GL(V_n)$$
$$\text{mit } A \in \varphi^{-1}(R = \{\pm A\}) \text{ beliebig}$$

Wegen $\rho_n(-A) = \rho_n((-\mathbb{1})A))\rho_n(-\mathbb{1}) = \rho_n(A)$ ist $\tilde{\rho}_n$ wohldefiniert.

Ausserdem $\tilde{\rho}_n = \rho_n$. Ausserdem ist $\tilde{\rho}_n$ ein Gruppenhomomorphismus.

Somit ist $\tilde{\rho}_n$ eine Darstellung von $SO(3)$ auf V_n.

Satz Satz 117

Sei $\rho : SO(3) \to GL(V)$ eine irreduzible Darstellung mit $\dim(\rho) = n+1$.

Dann gilt: $\dim(\rho)$ ungerade (n gerade) und

$$\rho \cong \rho_n$$

8 Crashkurs Tensorprodukt

8.1 Definition

Definition Tensorprodukt — Definition 118

Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

$$(e_i)_{i\in I} \text{ Basis von } V$$
$$(f_j)_{j\in J} \text{ Basis von } W$$

Dann ist

$$V \otimes W = \sum_{i\in I, j\in J} \lambda_{i,j} \in \mathbb{K} e_i \otimes f_j$$

der Vektorraum der endlichen Linearkombinationen.

Also: $(e_i \otimes f_j)$ bilden eine Basis von $V \otimes W$.

1. Andere Wahl der Basen ergibt einen isomorphen Vektorraum.
2. Sind V, W endlichdimensional, dann ist $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.
3. Notation: Für $v = \sum_{i\in I} v_i e_i \in V, w = \sum_{j\in J} w_j f_j \in W$ schreibe:
$$v \otimes w = \sum_{i\in I, j\in J} (v_i, w_j) e_i \otimes f_j \Rightarrow - \otimes - : V \times W \to V \otimes W$$
4. Sind U, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, so gilt:
$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$$
$$(d_k \otimes e_i) \otimes f_j \to d_k \otimes (e_i \otimes f_j)$$

8.2 Mehrfaches Tensorprodukt

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n = V_1 \otimes (V_2 \otimes (\dots \otimes V_n)\dots)$$

Basis:

$$\left(e_{1,i_i} \otimes \dots \otimes e_{n,i_n}\right)_{i_1\in I_1,\dots,i_n\in I_n}$$

8.3 Abbildungen von Tensorprodukten

1. Lineare Abbildung $V \otimes W \to U$ ist das gleiche wie eine bilineare Abbildung $V \times W \to U$.
2. Seien $F : V \to V', G : W \to W'$ linear. Dann ist
$$F \otimes G : V \otimes W \to V' \otimes W'$$
definiert durch
$$(F \otimes G)(e_i \otimes f_j) = F(e_i) \otimes G(f_j)$$
$$\text{bzw } (F \otimes G)(v \otimes w) = F(v) \otimes G(w)$$
Endlichdimensional: $A = (a_{ij})$ Matrix von F, $B = (b_{kl})$ Matrix von G.

Matrix von $F \otimes G$ ist dann:
3. Ordnung der Basiselemente von $V \otimes W$ hat 2 mögliche Sortierungen:
   1. $e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots$

      oder
   2. $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, \dots$

   In der Ordnung 1. ist die Matrix von $F \otimes G$ gegeben durch:
$$\begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \dots & Ab_{1m} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \dots & Ab_{2m} \\ \dots \\ Ab_{n1} & Ab_{n2} & \dots & Ab_{nm} \end{pmatrix}$$
   In der Ordnung 2. ist die Matrix von $F \otimes G$ gegeben durch:
$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Anwendung:

Tensorprodukte sind sehr konkret und nützlich.

8.4 lineares Gleichungsystem:

$$Ax = y, A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}^m$$

Aber oft kommen Gleichungssysteme in einer anderen Form vor:

$$AXB = Y, A \in \mathrm{Mat}_{M\times m}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times N}, X \in \mathrm{Mat}_{M\times N}$$

Dies wäre möglich mit unserer klassischen Methode aber Tensoren geben uns eine bessere Sichtweise.

Die obige Gleichung ist äquivalent zu einem klassischen

$$Cx = y, x\mathbb{R}^{n\cdot m}$$

Die Idee: lineare Abbildungen:

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$$
$$x \mapsto AxB$$

bildet ab: $uv^T \mapsto Auv^T B = (Au)(B^T v)^T$.

Identifizieren: $\mathrm{Mat}_{p\times q} \cong R^p \otimes \mathbb{R}^q \Rightarrow u \otimes v \mapsto uv^T$.

8.5 Symmetrisches und äusseres Produkt

Betrachte einen Vektorraum V mit Basis $(e_i)_{i=1,\dots,m}$.

Sei $V^{\otimes N} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$. Die Basis ist dann gegeben durch:

$$(e_{ii} \otimes \dots \otimes e_{iN})$$
$$\dim(V^{\otimes N}) = m^N$$

$V^{\otimes N}$ trägt eine Darstellung ρ von S_N durch Vertauschung der Faktoren:

$$\rho(\sigma \in S_N)(V_1 \otimes \dots \otimes V_N) = V_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes V_{\sigma^{-1}(N)}$$

Wahl der Konvention:

1. Das symmetrische Produkt ist:
$$\widetilde{S^N V} = \{x \in V^{\otimes N} \mid \rho(\sigma)x = x \forall \sigma \in S_N\} \subset V^{\otimes N}$$
2. Das äussere Produkt ist:
$$\widetilde{\wedge^N V} = \{x \in V^{\otimes N} \mid \rho(\sigma)x = \mathrm{sgn}(\sigma)x \forall \sigma \in S_N\} \subset V^{\otimes N}$$
3. Alternative Definition:
$$S^N V = V^{\otimes N} / \operatorname{span}(\{x - \rho(\sigma)x \mid \rho \in S_N, x \in V^{\otimes N}\})$$
$$\wedge^N V = V^{\otimes N} / \operatorname{span}(\{x - \mathrm{sgn}(\sigma)\rho(\sigma)x \mid \rho \in S_N, x \in V^{\otimes N}\})$$

Satz — Satz 119

$$\widetilde{S^N V} \to S^N V$$
$$\widetilde{\wedge^N V} \to \wedge^N V$$

sind Isomorphismen.

Eine Basis von $S^N V$ ist gegeben durch:

$$\left[e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_N} \mid 1 \le i_1 \le \dots \le i_N\right]$$

Eine Basis von $\wedge^N V$ ist gegeben durch:

$$\left[e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_N} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_N\right]$$

$$\dim(S^N V) = \binom{m+N-1}{N}$$
$$\dim(\wedge^N V) = \binom{m}{N} = 0 \text{ falls } N > m$$

8.6 Tensorprodukte von $SU(2)$-Darstellungen

Seien $\rho : G \to GL(V), \rho' : G \to GL(V')$ zwei Darstellungen. Dann ist die Tensorproduktdarstellung gegeben durch:

$$\rho \otimes \rho' : G \to GL(V \otimes V')$$
$$g \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g)$$
$$((\rho(g) \otimes \rho'(g))(v \otimes v')) = (\rho(g)v) \otimes (\rho'(g)v')$$

Ziel: Für $G = SU(2)$ Zerlege $\rho_n \otimes \rho_{n'}$ in irreduzible Darstellungen.

Es gilt: $\rho \otimes (\rho' \otimes \rho'') \cong (\rho \otimes \rho') \otimes \rho''$.

Ist G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $g = \mathrm{Lie}(G)$, so gilt

$$(\rho \otimes \rho')_*(X \in g) = (\rho_*(X)) \otimes \mathbb{1}_{V'} + \mathbb{1}_V \otimes (\rho'_*(X))$$

Wichtige Unterscheidung. Also auf der Gruppe wirkt man gleichzeitig von links und rechts. Bei der Lie-Algebra wirkt man wie oben beschrieben.

Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ (\rho \otimes \rho')(\exp(tX))$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ (\rho(\exp(tX)) \otimes \rho'(\exp(tX)))$$
$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ \rho(\exp(tX))\right) \otimes \mathbb{1}_{V'} + \mathbb{1}_V \otimes \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\ \rho'(\exp(tX))\right)$$
$$= (\rho_*(X)) \otimes \mathbb{1}_{V'} + \mathbb{1}_V \otimes (\rho'_*(X))$$

■

Definition Definition 120

Seien $\tau : g \to gl(V), \tau' : g \to gl(V')$ zwei Darstellungen der Lie-Algebra $g = \mathrm{Lie}(G)$. Dann ist die Tensorproduktdarstellung gegeben durch:

$$\tau \otimes \tau' : g \to gl(V \otimes V')$$
$$X \mapsto \tau(X) \otimes \mathbb{1}_{V'} + \mathbb{1}_V \otimes \tau'(X)$$

$G = SU(2)$

Wie zerfällt $\rho_{n'} \otimes \rho_{n''} = \rho$ in irreduzible Darstellungen ρ_n von $SU(2)$?

Dazu betrachten wir die zugehörige $\mathbb{C}$-lineare Darstellung der Lie_Algebra $sl(2, C)$, und die Wirkung der Basisvektoren $e, f, h \in sl(2, C)$.

Basis von $V_{n'} : v'_0, ..., v'_{n'}$. Darstellung $\tau_{n'} = (\rho_{n'})_*$ erfüllt

$$Hv'_j = \tau_{n'}(h)v'_j = (n' - 2j)v'_j$$
$$Ev'_j = \tau_{n'}(e)v'_j = j(n' + 1 - j)v'_{j-1}$$
$$Fv'_j = \tau_{n'}(f)v'_j = v'_{j+1}$$

Analog für Darstellung $\tau_{n''}$ von $V_{n''}$.

$V_{n'} \otimes V_{n''}$ hat Basis

$$v'_j \otimes v''_k, j = 0, ..., n', k = 0, ..., n''$$

Es gilt mit $\tau = \rho_* = (\rho_{n'} \otimes \rho_{n''})$:

$$\tau(h)\big(v'_j \otimes v''_k\big) = \big(\tau_{n'}(h)v'_j\big) \otimes v''_k + v'_j \otimes \big(\tau_{n''}(h)v''_k\big)$$
$$= (n' - 2j + n'' - 2k)\big(v'_j \otimes v''_k\big) = (n' + n'' - 2(j+k))\big(v'_j \otimes v''_k\big)$$

Wir bekommen sogar Eigenwerte von $\tau(h)$ $\lambda = n' + n'' - 2(j + k)$. So oft wie wir Wege haben die Summe $j + k$ aus unseren Grenzen n', n'' zu bilden.

Sei nun $\rho \cong \oplus_\alpha \rho_\alpha \otimes \mathbb{C}^{n-\alpha}$. Eigenwerte von $\tau(h)$ sind: Jede Kopie von τ_α trägt bei $\alpha, \alpha - 2, ..., -\alpha$.

$\rho_\alpha \otimes \mathbb{C}^{n-\alpha} \Rightarrow$ alle kommen mit Vielfachheit n_α vor.

$\Rightarrow$ Vergleiche Eigenwerte + Vielfachheiten:

$$n_\alpha = 0, \alpha > n' + n''$$
$$n_{n'+n''} = 1$$
$$n_{n'+n''-1} = 0$$
$$n_{n'+n''-2} = 1$$
$$n_{n'+n''-3} = 0$$
$$n_\alpha = 0 \text{ falls } n' + n'' = \alpha \bmod 2$$
$$n_{n'+n''-2p} = 1 \text{ für } p = 0, 1, ..., \min(n', n'')$$
$$n_\alpha = 0 \text{ sonst}$$

Satz Clebsch-Gordan-Zerlegung Satz 121

$$\rho_{n'} \otimes \rho_{n''} \cong \rho_{n'+n''} \oplus \rho_{n'+n''-2} \oplus ... \oplus \rho_{|n'-n''|}$$

Die irreduzible Unterdarstellung $\rho_{n'+n''-2l}$ wird aufgespannt durch

$$w_l, Fw_l, ..., F^{n'+n''-2l}w_l$$
$$F = \tau(f)$$
$$\text{mit } w_l = \sum_{j=0}^{l} (-1)^j \frac{(n'-j)!(n''-l+j)!}{j!(l-j)!} v'_j \otimes v''_{l-j}$$

Beweis:

1. $$\tau(h)w_l = Hw_l = (n' + n'' - 2l)w_l$$
$$\Rightarrow w_l = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j v'_j \otimes v''_{l-j}, \lambda_j \in \mathbb{C}$$

2. $$\tau(e)w_l = Ew_l = 0$$

$$E_l) = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j (j(n' + 1 - j))v'_{j-1} \otimes v''_{l-j} + (l - j)(n'' + 1 - l + j)v'_j \otimes v''_{l-j+1}$$
$$= ...$$

Beispiele:

$n' = n'' = 1 \Leftrightarrow$ 2 Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen

Hilbertraum $V_1 \otimes V_1$. Wir wollen wissen, wieviele Spinzustände gibt es?

$$V_1 \otimes V_1 \cong V_2 \oplus V_0$$
$$V_2 : \text{Spin } 1$$
$$V_0 : \text{Spin } 0$$

Der Hamiltonian degeneriert in den Zustand der energetisch günstiger ist.

Physikernotation:

$$v_0, v_1 \text{ Basis von } V_1 : |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$$

Basis von $V_1 \otimes V_1$:

$$|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$$

Basis von $V_0 \subset V_1 \otimes V_1$:

$$V_0 : |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$$
$$V_2 : |\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$$

Dies gilt für ein System mit unterscheidbaren Teilchen.

Bei ununterscheidbaren Teilchen ist der Hilbertraum eines N-Teilchensystems:

$$\wedge^N H \text{ Fermionen}$$
$$S^N H \text{ Bosonen}$$

Diese kann man auch in irreduzible Darstellungen zerlegen.

Beispiel:

Zerlege $\wedge^2 \rho_2, S^2\rho_2$ in irreduzible Darstellungen.

$$V_2 \otimes V_2 = V_4 \oplus V_2 \oplus V_0$$
$$\dim : 9 = 5 + 3 + 1$$
$$\dim(\wedge^2 V_2) = \binom{3}{2} = 3$$
$$\dim(S^2 V_2) = \binom{3+2-1}{2} = 6$$
$$S^2 V_2 \cong \widehat{S^2 V_2} \subset V_2 \otimes V_2$$

Aus Dimensionsgründen folgt:

$$S^2 V_2 \cong V_4 \oplus V_0$$
$$\wedge^2 V_2 \cong V_2$$

Alternativ kann man die Formel für das w_l aus dem Satz verwenden und sehen, in welchem Unterraum die jeweilige Darstellung liegt.

Beispiel: Höhere Tensorräume.

$$\rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \rho_1 \cong (\rho_1 \otimes \rho_1) \otimes \rho_1$$
$$= (\rho_2 \oplus \rho_0) \otimes \rho_1$$
$$= \rho_3 \oplus \rho_1 \oplus \rho_1$$

Symmetrische Produkte:

$$S^3 V_1$$
$$\dim(S^3 V_1) = 4$$
$$S^3 V_1 \cong V_3 \text{ oder } V_1 \oplus V_1$$
$$S^2 V_1 \Rightarrow \dim = 3$$
$$S^2 V_1 \cong V_2$$
$$S^3 V_1 \cong \widehat{S^2 V_1} \oplus V_1 \subset V_1 \otimes V_1 \otimes V_1$$
$$\widehat{S^2 V_1} = V_2 \otimes V_1 \cong V_3 \oplus V_1$$
$$\Rightarrow S^3 V_1 \cong V_3$$

9 Notizen

Für endliche Gruppen sind folgende Beweistechniken essenziell:

- Mittelwertbildung
- Lemma von Schur

Für bilden von Irreduziblen Darstellungen benutzen wir:

- Die Charaktertafel
- Ihre Orthogonalität

In der Prüfung wird eine aufgabe wie die Methanaufgabe drankommen (symmetrien zu eigenschwindungen)

- gegeben eine Lie-Gruppe G müssen wir in der Lage sein, die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(G)$ zu bestimmen
- Gegeben darstellung von Gruppe oder Gruppenhomomorphismus, die aufgabe ist die Darstellung der Lie-Algebra zu bestimmen.

  Rezept:

  Nehme darstellung ρ, setze ein $\exp(tX)$ und differenziere an der stelle 0. Das gibt $\rho_*(X)$.

10 Prüfung

120 Minuten Schriftlich

2 Seiten Zusammenfassung

Struktur:

- 1 Multiple Choice (1 of 4) (viel theorie)
- 1 Boxaufgabe: Einfüllen von Box (z.B. Dimension von Young diagram, wieviele zusammenhangskomponenten hat lorentzgruppe, welche dimension hat $SO(n)$, zerfällt jede darstellung einer endlichen gruppe in irreduzible untersarstellungen, ist die folgende formel eine darstellung, oft einfache rechnungen)
- 3-4 Textaufgaben (dieses mal kürzere prüfung. Erste teilaufgabe kann boxaufgabe sein)

  Falls nicht als box bemerkt, dann ist eine begründung nötig.

  Textaufgaben sind meistens rechenaufgaben, die etwas aufwendiger sind.

  - Anwendung lemma von Schur
  - Schwindungen von molekülen :identifiziere symmetriegruppe, identifiziere irreduzible darstellungen, was kann man daraus folgern: mögliche eigenfrequenzen.
  - Zeigen sie irgendwas ist eine lie-gruppe (lie-klammer aufschreiben)
  - berechne lie-algebra von jener lie-gruppe
  - berechne charaktertafel