Если $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, то суммой $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \dots + a_n)$.

Этот предел, конечный или равный $+\infty$, всегда существует, так как последовательность $\{a_1 + \dots + a_n\}$, в силу условия $a_n > 0$, возрастает. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =^{def} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Суммы бесконечного числа слагаемых будут подробно рассмотрены во главе III.

Определение 5 *Множество X, лежащее на числовой оси, называется множеством лебеговой меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существет покрытие этого множества конечной или счетной системой интервалов, сумма длин которых меньше ε.*

Пример. Всякое конечное или счетное множество является множеством лебеговой меры нуль.

Пусть X $= \{x_n\}$ - конечное или счетное множество (индекс (n) может быть либо любым натуральным числом, когда X - счетное множество, либо принимать только значения, не превосходящие некоторого фиксированного натурального числа, тогда множество X конечно). Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Система итервалов $(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{(n+2)}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{(n+2)}})$, $n = 1, 2, \dots$, очевидно, покрывает множество X, а сумма их длин меньше ε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Например, множество всех рациональных чисел является множеством лебеговой меры нуль.

Задача 16. Построить пример несчетного множества лебеговой меры нуль.

Теорема 10 (теорема Лебега). *Для того чтобы ограниченная на отрезке функция была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва было множеством лебеговой меры нуль.*

Доказательство необходимости. Пусть функция f интегрируема на отрезке X $= [a, b]$ и X$_0$ $- .\varepsilon > 0$. Согласно критерию интегрируемости Дюбуа-Реймона, для каждого $n = 1, 2, \dots$