PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
ICE 3233 Elementos Finitos

Avance de proyecto
Elementos Finitos

José Galaz
Jaime Soto

July 2, 2014

1 Introducción

La intro es complicada, pero sera realizada el lunes

2 Deducción de la formulación fuerte y planteamiento del problema

Sea $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$ el dominio de interés, $t_f > 0$ el tiempo final de la simulación, $\boldsymbol{v} : [0, t_f] \times \Omega' \to \mathbb{R}^3$ el campo de velocidad, y $p : [0, t_f] \times \Omega' \to \mathbb{R}$ el campo de presiones, de un fluido incompresible con densidad $\rho \in \mathbb{R}^+$, que escurre sobre un fondo (topografía - batimetría) de forma dada por $b : \Omega' \to \mathbb{R}$. Si se desprecian efectos disipativos y se consideran fuerzas de volumen $\boldsymbol{f}_b = (0, 0, -g)^T$, las ecuaciones de Navier-Stokes son [**?**]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}_b \\ v_3|_{z=\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\eta \\ v_3|_{z=b} &= \frac{\partial b}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) b \\ p|_{z=\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

En particular, en una bahía de interior $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con borde impermeable $\partial\Omega_h$ y linea nodal $\partial\Omega_g$ tales que $\partial\Omega = \partial\Omega_h \cup \partial\Omega_g$, y bajo el supuesto que las ondas son suficietemente largas, de forma que las aceleraciones verticales no tienen influencia significtiva sobre el perfil de presiones hidrostático, y por medio de integración vertical entre el fondo b y la superficie libre η, las Ecuaciones No Lineales de Aguas Someras (Non-Linear Shallow water Equations, NSWE) son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\eta) + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -gh\frac{\partial}{\partial x}b \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= -gh\frac{\partial}{\partial y}b \text{ si } x \in \Omega \\ (hu, hv) \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{2}$$

donde, viendo la figura **??**, $h : (t, x, y) \in [0, t_f] \times \Omega \to \eta(t, x, y) - b(x, y) \in \mathbb{R}^+$ es la altura de la columna de agua, y (u, v) las componentes de velocidad horizontal promediadas en la vertical, dadas por

$$(u, v) = \frac{1}{h}\int_b^\eta (v_1, v_2)dz$$

Las ecuaciones en (**??**), forman un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que admite ondas de choque e interfaces seco-mojado, cuando h tiende a 0. Sin embargo, es posible obtener una linealización del sistema (**??**) si se consideran pequeñas perturbaciones a una masa de agua en reposo, es decir si

$$\eta = h_0 + \eta' \qquad u = 0 + u', \qquad v = 0 + v'$$

donde la notación $\Box'$ indica pequeñas perturbaciones sobre $\Box$, y $h_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ representa la altura de la columna de agua, de forma que [1]

$$\left| \frac{\eta'(t, x, y)}{h_0(x, y)} \right| << 1$$

[1] Aquí el lector debe notar que este supuesto es equivalente a asumir que las ondas son de amplitud pequeña.

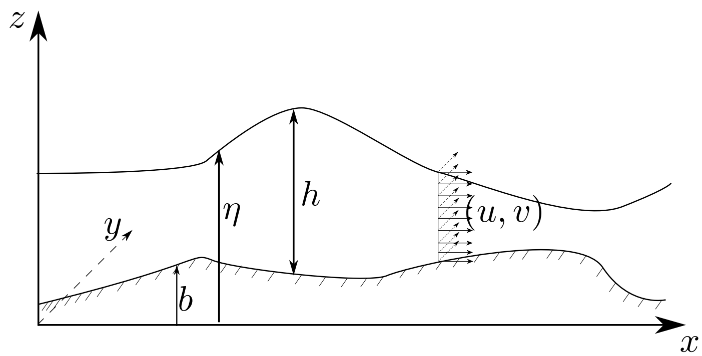

Figure 1: Vist esquemtica de ls varibles hidrodinámicas definidas para las Ecuaciones No Lineales de Aguas Somers (NSWE).

para cualquier $(t, x, y) \in [0, t_f] \times \Omega$. Bajo estos supuestos, se deducen las Ecuaciones Lineales de Aguas Someras (LSWE), dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial h_0 u'}{\partial x} + \frac{\partial h_0 v'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + g\frac{\partial \eta'}{\partial x} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + g\frac{\partial \eta'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ (h_0 u', h_0 v') \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta' &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{3}$$

Si ademas $\eta', u', v' \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, multiplicando la segunda y tercera ecuación de (**??**), por h y derivando respecto a x e y es cierto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (gh\nabla\eta) = 0, \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{4}$$

donde se cambió de notación al usar $\square$ como $\square'$. Las ecuaciones (**??**) corresponden a la ecuación lineal de onda, de celeridad $c = \sqrt{gh}$, revelando la similitud entre la propagación de ondas de amplitud pequeña en una bahía, con la de ondas acústicas o elásticas lineales.

Finalmente, si se estudian ondas estacionarias, es posible separar variables y escribir (abusando de notación en u), con $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\eta(t, x, y) = Re\left\{u(x, y)e^{-i\omega t}\right\} \tag{5}$$

lo cual, sustituyendo en (**??**), conduce a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (gh_0\nabla u) + \omega^2 u = 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ u = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{6}$$

El sistema (**??**) es más conocido como la Ecuación de Helmholtz, y denota un problema de valores y vectores propios del operador diferencial de la ecuación de Poisson ($\nabla \cdot c^2 \nabla \square$). Es posible demostrar [**?**], que la extensión débil del operador de Poisson definido sobre $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ posee una cantidad numerable de valores y vectores propios $(\lambda_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $u_n \neq 0$ y $0 \leq \lambda_1$ y $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Además es fácil verificar, que para el caso en que $\partial\Omega_g = \varnothing$, como es el caso de una bahía cerrada, si $u(x, y) = K \in \mathbb{R}$ para cualquier $(x, y) \in \Omega$, entonces (**??**) se satisface trivialmente y $\lambda = 0$ es el primer valor propio, lo cual corresponde fśicamente a cuando la superficie libre del agua está a un nivel constante, es decir, cuando la masa de agua está en reposo. Lo anterior se debe tener en consideración al examinar los valores propios obtenidos numéricamente.

3 Formulación variacional y de Galerkin

La formulacin fuerte del problema de valor de frontera es: (ecuación (**??**)

Dados g, $h : \Omega \to \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2) tal que:

$$\begin{aligned} \omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i} &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u_{,i}\, n_i &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h \\ u &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_g \end{aligned} \qquad (S)$$

Sean:

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \;/\; v|_{\partial\Omega_g} = 0 \right\}$$
$$\mathcal{S} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \;/\; u_{,i}\, n_i = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h \right\}$$

multiplicando la ecuación de Helmholtz por $-v \in \mathcal{V}$ e integrando por partes:

$$-\int_\Omega v \left(\omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

$$-\int_\Omega v(\omega^2 u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} v(ghu_{,i})n_i \mathrm{d}S + \int_\Omega v_{,i}\, ghu_{,i}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

Pero, por condición de borde: $u_{,i}\, n_i = 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h$, luego

$$-\int_\Omega v(\omega^2 u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega v_{,i}\, ghu_{,i}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

O, en forma abstracta:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \qquad (7)$$

Luego,

Dados g, $h : \Omega \to \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2), $u \in \mathcal{S}$, $\omega \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \qquad (W)$$

Formulación Galerkin:
Sean $u^h \in \mathcal{S}^h \left(\equiv \mathcal{V}^h\right)$ con $\mathcal{V}^h \in \mathcal{V}$
entonces:

$$a(v^h, u^h) - \omega^2(v^h, u^h) = 0$$

Luego la formulación galerkin queda:

Dados $g,\ h : \Omega \to \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2), $u \in \mathcal{V}^h$, $\omega \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a(v^h, u^h) - \omega^2 (v^h, u^h) = 0 \qquad (W)$$

Para hallar las ecuaciones matriciales asociadas, debemos expresar v^h y u^h en términos de las funciones de forma $N(\boldsymbol{x})$:

$$v^h = \sum_{A \in \eta} N_A(\boldsymbol{x}) v_A$$

$$u^h = \sum_{A \in \eta} N_A(\boldsymbol{x}) u_A$$

donde η: Nodos del dominio

Reemplazando, se tiene:

$$\sum_{A \in \eta} v_A \left\{ \sum_{B \in \eta} (N_A(\boldsymbol{x}), N_B(\boldsymbol{x})) u_B - \omega^2 \sum_{B \in \eta} a(N_A(\boldsymbol{x}), N_B(\boldsymbol{x})) u_B \right\} = 0$$

Como $v_A \neq 0$, entonces:

$$\left(\sum_{B \in \eta} (N_A(\boldsymbol{x}), N_B(\boldsymbol{x})) - \omega^2 \sum_{B \in \eta} a(N_A(\boldsymbol{x}), N_B(\boldsymbol{x})) \right) u_B = 0$$

Luego, el problema matricial queda:

$$(M - \omega^2 K) \boldsymbol{u_B} = 0$$

donde:

$K_{AB} = a(N_A(\boldsymbol{x}), N_B(\boldsymbol{x})) = \int_\Omega g h N_{A},_i (\boldsymbol{x}) N_{B},_i (\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$M_{AB} = (N_A(\boldsymbol{x}), N_B(\boldsymbol{x})) = \int_\Omega N_A(\boldsymbol{x}) N_B(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

A nivel de elemento:

$K_{ab} = a(N_a(\boldsymbol{x}), N_b(\boldsymbol{x})) = \int_{\Omega_e} g h N_{a},_i (\boldsymbol{x}) N_{b},_i (\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$M_{ab} = (N_a(\boldsymbol{x}), N_b(\boldsymbol{x})) = \int_{\Omega_e} N_a(\boldsymbol{x}) N_b(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

Los elementos utilizados en este estudio fueron elementos isoparamétricos Tri3.