PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
ICE 3233 Elementos Finitos

Avance de proyecto
Elementos Finitos

José Galaz
Jaime Soto

June 18, 2014

1 Introducción

La intro es complicada, pero sera realizada el lunes

2 Deducción de la formulación fuerte y planteamiento del problema

Sea $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$ el dominio de interés, $t_f > 0$ el tiempo final de la simulación, $\boldsymbol{v} : [0, t_f] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ el campo de velocidad, y $p : [0, t_f] \times \Omega \to \mathbb{R}$ el campo de presiones, luego las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible con densidad $\rho \in \mathbb{R}^+$, superficie libre $\eta : [0, t_f] \times \Omega \to \mathbb{R}$ sobre un fondo (topografía-batimetría) de forma dada por $b : \Omega \to \mathbb{R}$, sujeto a fuerzas por uindad de volumen $\boldsymbol{f}_b : \Omega \to \mathbb{R}^3$, cuando se desprecian efectos disipativos, son [?]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}_b \\ v_3|_{z=\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\eta \\ v_3|_{z=b} &= \frac{\partial b}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) b \\ p|_{z=\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Bajo el supuesto que las ondas son suficietemente largas es posible asumir que no existen aceleraciones verticales, y por medio de integración vertical entre el fondo b y la superficie libre η, las Ecuaciones No Lineales de Aguas Someras (Non-Linear Shallow water Equations, NSWE) son, para una bahía con borde impermeable $\partial\Omega_h$ y linea nodal Ω_g tales que $\partial\Omega = \partial\Omega_h \cup \partial\Omega_g$,

$$\begin{aligned} (\eta)_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + (huv)_y &= -ghb_x \text{ si } x \in \Omega \\ (hu)_t + (huv)_x + (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)_y &= -ghb_y \text{ si } x \in \Omega \\ (hu, hv) \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{2}$$

Donde, siguiendo la figura **??**, $h(t, x, y) = \eta(t, x, y) - b(x, y) \geq 0$ es la altura de la columna de agua, y (u, v) las componentes de velocidad horizontal promediadas en la vertical, dadas por

$$(u, v) = \frac{1}{h}\int_b^\eta (v_1, v_2) dz$$

Las ecuaciones en (**??**), forman un sistema hiperboólico no lineal de ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, si se consideran pequeñas perturbaciones a una masa de agua en reposo, es decir

$$\eta = h + \eta' \qquad u = 0 + u', \qquad v = 0 + v'$$

donde la notación f' indica pequeñas perturbaciones sobre f, y $h : \Omega \to \mathbb{R}$ se deduce las ecuaciones lineales de aguas someras, donde es posible asumir que h no depende del tiempo pero sí del espacio

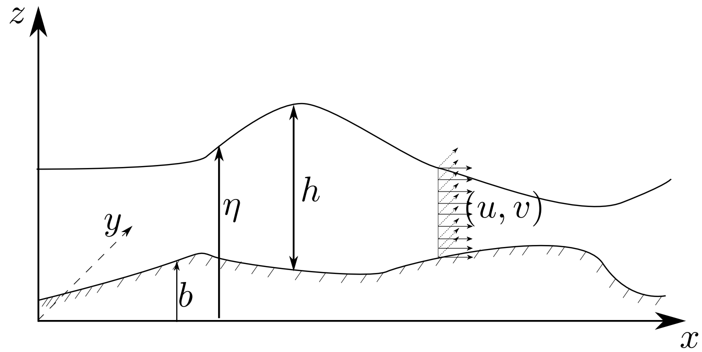

Figure 1: Schematic view of hydrodynamic variables defined for the Non-Linear Shallow Water Equations.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial h u'}{\partial x} + \frac{\partial h v'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
\frac{\partial u'}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
(hu', hv') \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
\eta' &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Si pedimos que la segunda derivada temporal de η', u', v' sea continua, y multiplicamos la segunda y tercera ecuación de (**??**), por h y derivamos respecto a x e y entonces se cumple que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (gh\nabla\eta) &= 0, \text{ si } x \in \Omega \\
\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{n}} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
\eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Finalmente, si se estudian ondas estacionarias, es posible separar variables y escribir (abusando de notación en u), con $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\eta(t, x, y) = Re\left\{u(x, y)e^{-i\Omega t}\right\} \tag{5}$$

lo cual, sustituyendo en **??** conduce a

$$\nabla \cdot gh\nabla u + \omega^2 u = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h u = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \tag{6}$$

3 Formulación variacional y de Galerkin

La formulacin fuerte del problema de valor de frontera es: (ecuación (**??**)

Dados g, $h : \Omega \to \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2) tal que:

$$
\begin{aligned}
\omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i} &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial n} = u_{,i} n_i &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h \\
u &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_g
\end{aligned}
\tag{S}
$$

Sean:

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \ / \ v|_{\partial\Omega_g} = 0 \right\}$$
$$\mathcal{S} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ / \ u_{,i}\, n_i = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h \right\}$$

multiplicando la ecuación de Helmholtz por $-v \in \mathcal{V}$ e integrando por partes:

$$-\int_\Omega v \left(\omega^2 u + (ghu_{,i}\,)_{,i} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

$$-\int_\Omega v(\omega^2 u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} v(ghu_{,i}\,)n_i \mathrm{d}S + \int_\Omega v_{,i}\, ghu_{,i}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

Pero, por condición de borde: $u_{,i}\, n_i = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_h$, luego

$$-\int_\Omega v(\omega^2 u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega v_{,i}\, ghu_{,i}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

O, en forma abstracta:

$$a(v,u) - \omega^2(v,u) = 0 \tag{7}$$

Luego,

Dados g, $h : \Omega \to \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2), $u \in \mathcal{S}$, $\omega \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a(v,u) - \omega^2(v,u) = 0 \qquad (W)$$

Formulación Galerkin:
Sean $u^h \in \mathcal{S}^h \left(\equiv \mathcal{V}^h \right)$ con $\mathcal{V}^h \in \mathcal{V}$
entonces:

$$a(v^h, u^h) - \omega^2(v^h, u^h) = 0$$

Luego la formulación galerkin queda: