

Título del proyecto final ó nombre del artículo

José Galaz, Jaime Soto

Abstract

A menudo la propagación y superposición de ondas en bahías puede generar oscilaciones de períodos largos que ocasionan inundación y daño inesperado en embarcaciones y estructuras, sin embargo, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes es posible deducir que, cuando estas ondas largas poseen pequeña amplitud, las frecuencias y modos de oscilación corresponden a los valores y vectores propios dados por la ecuación de Helmholtz. En este trabajo ha sido posible desarrollar una formulación variacional del problema, e implementar computacionalmente el método de Galerkin para calcular los modos de resonancia aproximados para una bahía de geometría arbitraria. Ha sido posible validar con soluciones analíticas y se ha aplicado el método para estudiar la bahía de Talcahuano, Chile, encontrando que los períodos de oscilación son de orden de magnitud esperado y la forma de los modos principales concuerda con lo que se reporta en la literatura [CITA AL PAPER DE RESONANCIA].

1 Introducción

La función de la sección *Introducción* es

- Establecer el contexto general de la investigación (ej: por qué es importante/interesante resolver problemas del tipo que usted resuelve). Generalmente comprende un estudio de la literatura existente que motivaron y sobre la que se basa la investigación, no olvide incluir citas en esta sección (mínimamente aquellas incluidas en su propuesta).
- Describir claramente el objetivo principal de la investigación, incluyendo objetivos específicos, hipótesis empleadas, y los problemas que se quieren resolver o las preguntas que guían a investigación.
- Explique (sin entrar en detalles demasiado técnicos) como abordará el problema a investigar. Un punto de partida es la metodología entregada en la propuesta de investigación.

No olvide en esta sección citar a los autores y sus trabajos relevantes para su proyecto (en L^AT_EX las citas se hace con el comando `\cite`, por ejemplo, [2] y [5]. En particular, este *template* se inspiró en la referencia [4].

2 Marco Teórico

2.1 Ecuaciones fundamentales

Sea $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$ el dominio de interés, $t_f > 0$ el tiempo final de la simulación, $\vec{v} : [0, t_f] \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo de velocidad, y $p : [0, t_f] \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ el campo de presiones, de un fluido incompresible

con densidad $\rho \in \mathbb{R}^+$, que escurre sobre un fondo (topografía - batimetría) de forma dada por $b : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$. Si se desprecian efectos disipativos y se consideran fuerzas de volumen $\vec{f}_b = (0, 0, -g)^T$, las ecuaciones de Navier-Stokes son [?]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \nabla \cdot \vec{v} \otimes \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}_b \\ v_3|_{z=\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \eta \\ v_3|_{z=b} &= \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) b \\ p|_{z=\eta} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

En particular, en una bahía de interior $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con borde impermeable $\partial\Omega_h$ y línea nodal $\partial\Omega_g$ tales que $\partial\Omega = \partial\Omega_h \cup \partial\Omega_g$, y bajo el supuesto que las ondas son suficientemente largas, de forma que las aceleraciones verticales no tienen influencia significativa sobre el perfil de presiones hidrostático, y por medio de integración vertical entre el fondo b y la superficie libre η , las Ecuaciones No Lineales de Aguas Someras (Non-Linear Shallow water Equations, NSW E) son,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\eta) + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -gh \frac{\partial}{\partial x}b \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= -gh \frac{\partial}{\partial y}b \text{ si } x \in \Omega \\ (hu, hv) \cdot \vec{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g\end{aligned}\tag{2}$$

donde, viendo la figura 1, $h : (t, x, y) \in [0, t_f] \times \Omega \rightarrow \eta(t, x, y) - b(x, y) \in \mathbb{R}^+$ es la altura de la columna de agua, y (u, v) las componentes de velocidad horizontal promediadas en la vertical, dadas por

$$(u, v) = \frac{1}{h} \int_b^\eta (v_1, v_2) dz$$

Las ecuaciones en (2), forman un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que admite ondas de choque e interfaces seco-mojado, cuando h tiende a 0. Sin embargo, es posible obtener una linealización del sistema (2) si se consideran pequeñas perturbaciones a una masa de agua en reposo, es decir si

$$\eta = h_0 + \eta' \quad u = 0 + u', \quad v = 0 + v'$$

donde la notación \square' indica pequeñas perturbaciones sobre \square , y $h_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ representa la altura de la columna de agua, de forma que ¹

$$\left| \frac{\eta'(t, x, y)}{h_0(x, y)} \right| \ll 1$$

¹ Aquí el lector debe notar que este supuesto es equivalente a asumir que las ondas son de amplitud pequeña.

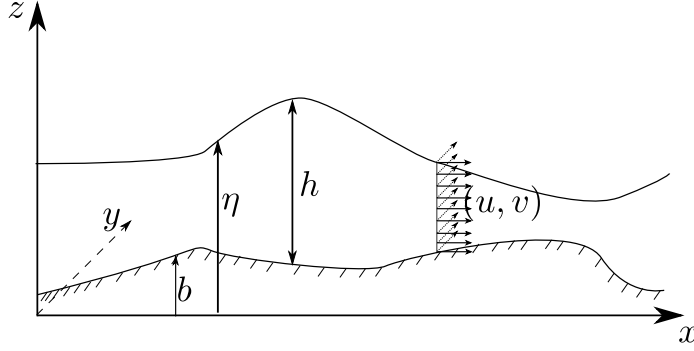


Figure 1: Vist esquemática de ls variables hidrodinámicas definidas para las Ecuaciones No Lineales de Aguas Somers (NSWE).

para cualquier $(t, x, y) \in [0, t_f] \times \Omega$. Bajo estos supuestos, se deducen las Ecuaciones Lineales de Aguas Someras (LSWE), dadas por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial h_0 u'}{\partial x} + \frac{\partial h_0 v'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta'}{\partial x} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial v'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 (h_0 u', h_0 v') \cdot \vec{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
 \eta' &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
 \end{aligned} \tag{3}$$

Si ademias $\eta', u', v' \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, multiplicando la segunda y tercera ecuación de (3), por h y derivando respecto a x e y es cierto que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (gh \nabla \eta) &= 0, \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \vec{n}} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
 \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
 \end{aligned} \tag{4}$$

donde se cambió de notación al usar \square como \square' . Las ecuaciones (4) corresponden a la ecuación lineal de onda, de celeridad $c = \sqrt{gh}$, revelando la similitud entre la propagación de ondas de amplitud pequeña en una bahía, con la de ondas acústicas o elásticas lineales.

Finalmente, si se estudian ondas estacionarias, es posible separar variables y escribir (abusando de notación en u), con $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\eta(t, x, y) = \text{Re} \{ u(x, y) e^{-i\omega t} \} \tag{5}$$

lo cual, sustituyendo en (4), conduce a

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (gh_0 \nabla u) + \omega^2 u &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
 u &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
 \end{aligned} \tag{6}$$

El sistema (6) es más conocido como la Ecuación de Helmholtz, y denota un problema de valores y vectores propios del operador diferencial de la ecuación de Poisson $(\nabla \cdot c^2 \nabla \square)$. Es posible demostrar [1], que la extensión débil del operador de Poisson definido sobre $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ posee una cantidad numerable de valores y vectores propios $(\lambda_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $u_n \neq 0$ y $0 \leq \lambda_1$ y $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Además es fácil verificar, que para el caso en que $\partial\Omega_g = \emptyset$, como es el caso de una bahía cerrada, si $u(x, y) = K \in \mathbb{R}$ para cualquier $(x, y) \in \Omega$, entonces (6) se satisface trivialmente y $\lambda = 0$ es el primer valor propio, lo cual corresponde físicamente a cuando la superficie libre del agua está a un nivel constante, es decir, cuando la masa de agua está en reposo. Lo anterior se debe tener en consideración al examinar los valores propios obtenidos numéricamente.

2.2 Formulación variacional y de Galerkin

La formulación fuerte del problema de valor de frontera es: (ecuación (6))

Dados $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2) tal que:

$$\begin{aligned} \omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u_{,i} n_i &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_h \\ u &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_g \end{aligned} \quad (S)$$

Sean:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid v|_{\partial\Omega_g} = 0\} \\ \mathcal{S} &= \{u \in H^1(\Omega) \mid u_{,i} n_i = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_h\} \end{aligned}$$

multiplicando la ecuación de Helmholtz por $-v \in \mathcal{V}$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v (\omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i}) d\mathbf{x} &= 0 \\ - \int_{\Omega} v (\omega^2 u) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} v (ghu_{,i}) n_i dS + \int_{\Omega} v_{,i} gh u_{,i} d\mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

Pero, por condición de borde: $u_{,i} n_i = 0 \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_h$, luego

$$- \int_{\Omega} v (\omega^2 u) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v_{,i} gh u_{,i} d\mathbf{x} = 0$$

O, en forma abstracta:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \quad (7)$$

Luego,

Dados $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2) , $u \in \mathcal{S}$, $\omega \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \quad (W)$$

Formulación Galerkin:

Sean $u^h \in \mathcal{S}^h (\equiv \mathcal{V}^h)$ con $\mathcal{V}^h \in \mathcal{V}$
entonces:

$$a(v^h, u^h) - \omega^2(v^h, u^h) = 0$$

Luego la formulación galerkin queda:

3 Validación del modelo

Para validar los resultados de la implementación del algoritmo, y estudiar la convergencia de éste, se ha escogido una solución anítica al problema presentado en la ecuación (6). Este caso corresponde a una bahía cuadrada de largo unitario cuyo interior es $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, la cual se encuentra cerrada por bordes impermeables, es decir, $\partial\Omega_g = 0$, y fondo a profundidd $h_0 \in \mathbb{R}^+$. Por medio de separación de variables, al asumir que u puede escribirse como $u(x, y) = f(x)g(y)$, y al considerar las condiciones de borde, se deduce que los modos de oscilación vienen dados por

$$u_{nm} = A_{nm} \cos(n\pi) \cos(m\pi) \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ y } A_{nm} \in \mathbb{R} \quad (8)$$

y el período de oscilación asociado

$$T_{nm} = \frac{2}{\sqrt{gh}} (n^2 + m^2)^{-1/2} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (9)$$

4 Resultados

asfadsf un resultado muy bacán En esta sección usted debe presentar los resultados obtenidos de su investigación, en una secuencia lógica. En esta sección usted NO debe interpretar los resultados ni concluir algo a partir de estos. Sin embargo, si puede destacar algunos resultados importantes (por ejemplo, *es importante notar que el valor del estiramiento principal mayor alcanzan valores sobre 1.5, que corresponden a una deformación axial del 50 %*) que serán el punto de partida de sus conclusiones en la sección de discusión. Los gráficos deben ser confeccionados con mucha atención, de manera de ser muy claros y no tener demasiada información que dificulte leerlos. Sin embargo, sea elegante y eficiente, y no genere gráficos que no reporten información importante. No olvide agregar leyendas para las figuras (con el comando `\caption`) que ayuden la compresión de estas (no repita información en el texto principal). Para un ejemplo, vea la figura ??.

5 Discusion

En esta sección usted debe interpretar sus resultados presentados en la sección anterior, y compararlos/contrastarlos con resultados conocidos previamente en otros artículos o libros. Lo anterior le permitirá generar conclusiones a partir de la interpretación de sus resultados. Sea claro en los pasos de su razonamiento que lo llevan a sus conclusiones. La sección de discusión debe responder las preguntas o verificar las hipótesis planteadas en la sección de *introducción*. Es recomendable

también incluir en la discusión cuales son las limitantes de su investigación, y cómo pueden afectar los resultados y conclusiones obtenidas. Finalmente, es recomendable incluir posibles ideas ó proyectos futuros que nacen a raíz del trabajo de investigación presentado en el artículo.

References

- [1] M. Nica. Eigenvalues and Eigenfunctions of the Laplacian. *The Waterloo Mathematics Review* 2011; **1**, No.2, 23–34.
- [2] T.J.R. Hughes, *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, 2000.
- [3] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Sixth edition, Butterworth-Heinemann, 2006.
- [4] <http://www.ruf.rice.edu/bioslabs/tools/report/reportform.html>
- [5] S. Göktepe and E. Kuhl. Computational modeling of cardiac electrophysiology: A novel finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; **79**, 156–178.

A Sobre los apéndices

Los apéndices contienen información que no es de carácter esencial para entender el artículo. Muchas derivaciones de ecuaciones, demostraciones de teoremas (con la salvedad de artículos en revistas de matemática), tablas de datos, etc., son incluidas en el apéndice.

B Sobre la evaluación del artículo final

El artículo final será evaluado tanto en los aspectos académicos (calidad de los resultados obtenidos) como en aspectos de presentación y redacción. En particular, se considerará en la evaluación la redacción, diagramación, ortografía, correcta referenciación (incluir las citas y bibliografía), gráficos y figuras, entre otros.