

# Resonancia en bahías utilizando el método de elementos finitos

José Galaz, Jaime Soto

## Abstract

A menudo la propagación y superposición de ondas en bahías origina oscilaciones de períodos largos que ocasionan inundación y daño inesperado en embarcaciones y estructuras, sin embargo, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes es posible deducir que, cuando estas ondas largas poseen pequeña amplitud, las frecuencias y modos de oscilación corresponden a los valores y vectores propios dados por la ecuación de Helmholtz. En este trabajo ha sido posible desarrollar una formulación variacional del problema, e implementar computacionalmente el método de Galerkin para calcular los modos de resonancia aproximados para una bahía de geometría arbitraria. Ha sido posible validar con soluciones analíticas y se ha aplicado el método para estudiar la bahía de Concepción, Chile, encontrando que los períodos de oscilación son de orden de magnitud esperado, y similares a los de un tsunami, y que la forma de los modos principales concuerda con lo que se reporta en la literatura [10].

## 1 Introducción

El fenómeno de resonancia al interior de una región semicerrada reviste una especial importancia en el estudio del comportamiento de ondas que se propagan desde el océano hacia zonas costeras y que puede inducir la amplificación de éstas al ingresar a una región semicerrada [6]. El fenómeno de resonancia puede condicionar el diseño de puertos y comportamiento de naves al interior de estos [8], la inundación por efecto de tormentas y marejadas [6] y en la amplificación y/o aparición de ondas de tsunami tardía, horas después de la llegada de la primera onda [6]. Esta última podría ser una explicación para describir las características que tuvo el tsunami de Maule 2010 [9].

Existen varias formas de aproximarse a una identificación y cuantificación de los modos propios de oscilación al interior de una bahía. Una de éstas es propagar varias ondas (distinta frecuencia y dirección) hacia el interior y cuantificar la amplificación de estas. Esta propagación puede ser lineal o no lineal [7]. Otra aproximación consiste en calcular directamente los modos propios de oscilación de la bahía [10, 7]. Esta última aproximación es la utilizada en este trabajo.

El objetivo de este trabajo es implementar un software computacional que permita determinar los modos de oscilación de una bahía de geometría arbitraria utilizando una aproximación por elementos finitos. La mayor dificultad que presenta una aproximación directa para la determinación de los modos propios es la de seleccionar una condición de borde apropiada a cada caso [7, 11]. Como una primera aproximación se considerará una bahía cerrada.

Para encontrar una aproximación a los modos propios se resuelve la ecuación de Helmholtz mediante el método de elementos finitos, aplicado a una bahía cerrada con condiciones de borde Neumann  $u_{,i} n_i = 0$ . La ecuación de Helmholtz es deducida de las ecuaciones de Navier-Stokes y

presentada en su formulación fuerte. Se obtiene la formulación variacional y de Galerkin asociada al problema fuerte y se implementan elementos tipo **tri3** para la resolución de la ecuación matricial. El modelo es validado en una geometría rectangular cuya solución analítica es conocida y aplicado al caso real de la Bahía de Talcahuano

## 2 Marco Teórico

### 2.1 Ecuaciones fundamentales

Sea  $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$  el dominio de interés,  $t_f > 0$  el tiempo final de la simulación,  $\vec{v} : [0, t_f] \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo de velocidad, y  $p : [0, t_f] \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  el campo de presiones, de un fluido incompresible con densidad  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , que escurre sobre un fondo (topografía - batimetría) de forma dada por  $b : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ . Si se desprecian efectos disipativos y se consideran fuerzas de volumen  $\vec{f}_b = (0, 0, -g)^T$ , con  $g$  la aceleración de gravedad, las ecuaciones de Navier-Stokes son [15]

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \nabla \cdot \vec{v} \otimes \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}_b \\ v_3|_{z=\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \eta \\ v_3|_{z=b} &= \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) b \\ p|_{z=\eta} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

En particular, en una bahía de interior  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , con borde impermeable  $\partial\Omega_h$  y línea nodal  $\partial\Omega_g$  tales que  $\partial\Omega = \partial\Omega_h \cup \partial\Omega_g$ , y bajo el supuesto que las ondas son suficientemente largas, de forma que las aceleraciones verticales no tienen influencia significativa sobre el perfil de presiones hidrostático, y por medio de integración vertical entre el fondo  $b$  y la superficie libre  $\eta$ , las Ecuaciones No Lineales de Aguas Someras (Non-Linear Shallow water Equations, NSW) son,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\eta) + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -gh \frac{\partial}{\partial x}b \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= -gh \frac{\partial}{\partial y}b \text{ si } x \in \Omega \\ (hu, hv) \cdot \vec{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g\end{aligned}\tag{2}$$

donde, viendo la figura 1,  $h : (t, x, y) \in [0, t_f] \times \Omega \rightarrow \eta(t, x, y) - b(x, y) \in \mathbb{R}^+$  es la altura de la columna de agua, y  $(u, v)$  las componentes de velocidad horizontal promediadas en la vertical, dadas por

$$(u, v) = \frac{1}{h} \int_b^\eta (v_1, v_2) dz$$

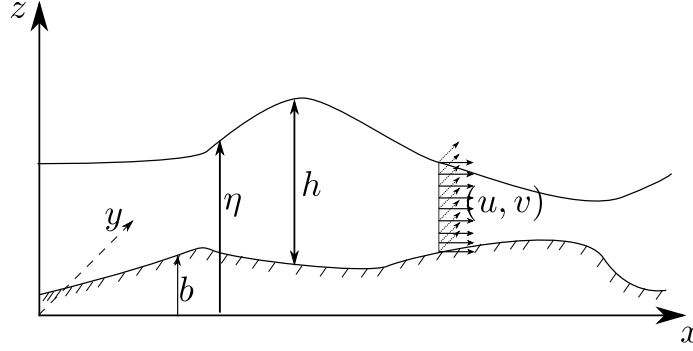


Figure 1: Vist esquemática de ls variables hidrodinámicas definidas para las Ecuaciones No Lineales de Aguas Somers (NSWE).

Las ecuaciones en (2), forman un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que admite ondas de choque e interfaces seco-mojado, cuando  $h$  tiende a 0. Sin embargo, es posible obtener una linealización del sistema (2) si se consideran pequeñas perturbaciones a una masa de agua en reposo, es decir si

$$\eta = h_0 + \eta' \quad u = 0 + u', \quad v = 0 + v'$$

donde la notación  $\square'$  indica pequeñas perturbaciones sobre  $\square$ , y  $h_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  representa la altura de la columna de agua, de forma que <sup>1</sup>

$$\left| \frac{\eta'(t, x, y)}{h_0(x, y)} \right| \ll 1$$

para cualquier  $(t, x, y) \in [0, t_f] \times \Omega$ . Bajo estos supuestos, se deducen las Ecuaciones Lineales de Aguas Someras (LSWE), dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial h_0 u'}{\partial x} + \frac{\partial h_0 v'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta'}{\partial x} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ (h_0 u', h_0 v') \cdot \vec{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta' &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{3}$$

Si además  $\eta', u', v' \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ , multiplicando la segunda y tercera ecuación de (3), por  $h$  y derivando respecto a  $x$  y  $y$  es cierto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (gh \nabla \eta) &= 0, \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial \eta}{\partial \vec{n}} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{4}$$

<sup>1</sup>Aquí el lector debe notar que este supuesto es equivalente a asumir que las ondas son de amplitud pequeña.

donde se cambió de notación al usar  $\square$  como  $\square'$ . Las ecuaciones (4) corresponden a la ecuación lineal de onda, de celeridad  $c = \sqrt{gh}$ , revelando la similitud entre la propagación de ondas de amplitud pequeña en una bahía, con la de ondas acústicas o elásticas lineales.

Finalmente, si se estudian ondas estacionarias, es posible separar variables y escribir (abusando de notación en  $u$ ), con  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\eta(t, x, y) = \text{Re} \{ u(x, y) e^{-i\omega t} \} \quad (5)$$

lo cual, sustituyendo en (4), conduce a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (gh_0 \nabla u) + \omega^2 u &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ u &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \quad (6)$$

El sistema (6) es más conocido como la Ecuación de Helmholtz, y denota un problema de valores y vectores propios del operador diferencial de la ecuación de Poisson ( $\nabla \cdot c^2 \nabla \square$ ). Es posible demostrar [1], que la extensión débil del operador de Poisson definido sobre  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$  posee una cantidad numerable de valores y vectores propios  $(\lambda_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tales que  $u_n \neq 0$  y  $0 \leq \lambda_1$  y  $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ . Además es fácil verificar, que para el caso en que  $\partial\Omega_g = \emptyset$ , como es el caso de una bahía cerrada, si  $u(x, y) = K \in \mathbb{R}$  para cualquier  $(x, y) \in \Omega$ , entonces (6) se satisface trivialmente y  $\lambda = 0$  es el primer valor propio, lo cual corresponde físicamente a cuando la superficie libre del agua está a un nivel constante, es decir, cuando la masa de agua está en reposo. Lo anterior se debe tener en consideración al examinar los valores propios obtenidos numéricamente.

## 2.2 Formulación variacional y de Galerkin

La formulación fuerte del problema de valor de frontera es: (ecuación (6))

Dados  $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrar  $(u, \omega^2)$  tal que:

$$\begin{aligned} \omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= u_{,i} n_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_h \\ u &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_g \end{aligned} \quad (S)$$

Sean:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid v|_{\partial\Omega_g} = 0\} \\ \mathcal{S} &= \{u \in H^1(\Omega) \mid u_{,i} n_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_h\} \end{aligned}$$

multiplicando la ecuación de Helmholtz por  $-v \in \mathcal{V}$  e integrando por partes:

$$-\int_{\Omega} v (\omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i}) \, d\mathbf{x} = 0$$

$$-\int_{\Omega} v(\omega^2 u) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} v(ghu_{,i}) n_i dS + \int_{\Omega} v_{,i} gh u_{,i} d\mathbf{x} = 0$$

Pero, por condición de borde:  $u_{,i} n_i = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_h$ , luego

$$-\int_{\Omega} v(\omega^2 u) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v_{,i} gh u_{,i} d\mathbf{x} = 0$$

O, en forma abstracta:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \quad (7)$$

Luego,

Dados  $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrar  $(u, \omega^2)$ ,  $u \in \mathcal{S}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \quad (W)$$

Formulación Galerkin:

Sean  $u^h \in \mathcal{S}^h (\equiv \mathcal{V}^h)$  con  $\mathcal{V}^h \in \mathcal{V}$

entonces:

$$a(v^h, u^h) - \omega^2(v^h, u^h) = 0$$

Luego la formulación galerkin queda:

Dados  $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrar  $(u, \omega^2)$ ,  $u \in \mathcal{V}^h$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$a(v^h, u^h) - \omega^2(v^h, u^h) = 0 \quad (W)$$

Para hallar las ecuaciones matriciales asociadas, debemos expresar  $v^h$  y  $u^h$  en términos de las funciones de forma  $N(\mathbf{x})$ :

$$v^h = \sum_{A \in \eta} N_A(\mathbf{x}) v_A$$

$$u^h = \sum_{A \in \eta} N_A(\mathbf{x}) u_A$$

donde  $\eta$ : Nodos del dominio

Reemplazando, se tiene:

$$\sum_{A \in \eta} v_A \left\{ \sum_{B \in \eta} (N_A(\mathbf{x}), N_B(\mathbf{x})) u_B - \omega^2 \sum_{B \in \eta} a(N_A(\mathbf{x}), N_B(\mathbf{x})) u_B \right\} = 0$$

Como  $v_A \neq 0$ , entonces:

$$\left( \sum_{B \in \eta} (N_A(\mathbf{x}), N_B(\mathbf{x})) - \omega^2 \sum_{B \in \eta} a(N_A(\mathbf{x}), N_B(\mathbf{x})) \right) u_B = 0$$

Luego, el problema matricial queda:

$$(M - \omega^2 K) \mathbf{u}_B = 0$$

donde:

$$K_{AB} = a(N_A(\mathbf{x}), N_B(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} gh N_{A,i}(\mathbf{x}) N_{B,i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$M_{AB} = (N_A(\mathbf{x}), N_B(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} N_A(\mathbf{x}) N_B(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

A nivel de elemento:

$$K_{ab} = a(N_a(\mathbf{x}), N_b(\mathbf{x})) = \int_{\Omega_e} gh N_{a,i}(\mathbf{x}) N_{b,i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$M_{ab} = (N_a(\mathbf{x}), N_b(\mathbf{x})) = \int_{\Omega_e} N_a(\mathbf{x}) N_b(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Los elementos utilizados en este estudio fueron elementos isoparamétricos Tri3.

## 3 Resultados

### 3.1 Bahía rectangular de ancho unitario

Para validar los resultados de la implementación del algoritmo, y estudiar la convergencia de éste, se ha escogido una solución anítica al problema presentado en la ecuación (6). Este caso corresponde a una bahía cuadrada de largo unitario cuyo interior es  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , la cual se encuentra cerrada por bordes impermeables, es decir,  $\partial\Omega_g = 0$ , y fondo a profundidd  $h_0 \in \mathbb{R}^+$ . Por medio de separación de variables, al asumir que  $u$  puede escribirse como  $u(x, y) = f(x)g(y)$ , y al considerar las condiciones de borde, se deduce que los modos de oscilación vienen dados por

$$u_{nm}(x, y) = A_{nm} \cos(n\pi x) \cos(m\pi y) \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ y } A_{nm} \in \mathbb{R} \quad (8)$$

y el período de oscilación asociado

$$T_{nm} = \frac{2}{\sqrt{gh}} (n^2 + m^2)^{-1/2} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (9)$$

Asimismo la longitud de onda queda expresada por:

$$L_{nm} = 2 (n^2 + m^2)^{-1/2} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (10)$$

Se utiliza esta última, porque permite comparar y verificar directamente con la geometría de la bahía cuadrada.

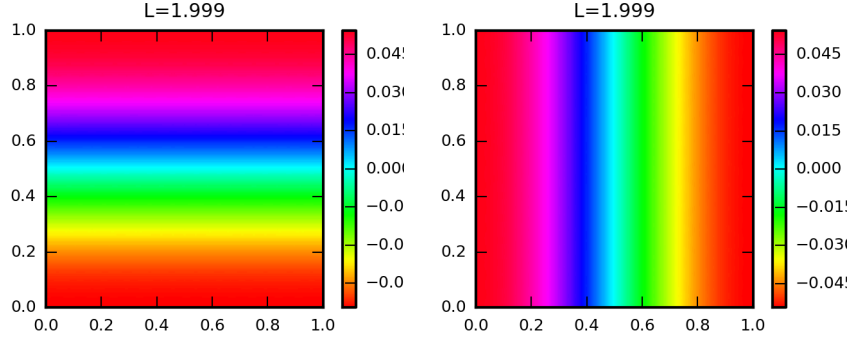


Figure 2: Ejemplo de la multiplicidad de valores propios: modos de oscilación 1 y 2 usando  $h = 1/25$  mediante el método de Elementos Finitos.

La solución mediante FEM es implementada para distintas resoluciones de malla y su convergencia es estimada calculando el error asociado a la determinación del valor propio y el vector propio correspondiente, respecto de la solución analítica. Cabe destacar que los modos propios analizados no son consecutivos debido a la multiplicidad de valores propios al ser una región con ambas dimensiones equivalentes (ver figura 2)

Para la determinación del error en el valor propio ( $E_L$ ) se utiliza norma natural de  $\mathbb{R}$

$$E_L = |L^h - L|$$

donde  $L$  es la longitud de onda obtenida mediante la solución analítica  $L^h$  es la longitud de onda obtenida mediante aproximación por FEM.

La figura 3 muestra los errores como función de la longitud  $h$  del elemento, para los 6 primeros valores propios en cada resolución de malla. Se verifica que los 6 primeros valores propios se aproximan de manera ordenada a los valores propios de la solución analítica.

Para estimar el orden de convergencia se ajusta una curva a los datos  $(\log(E), \log(h))$  para cada resolución de malla, ajustando una recta  $\log(E) = \log(C) + p \log(h)$  donde  $p$  nos indica la tasa de convergencia.

La siguiente tabla muestra los resultados de convergencia para los 6 primeros modos.

Modo	C	p
1	0.62007961	2.4403783
3	0.39830035	2.33894099
5	0.69813644	2.26494859
7	0.71017628	2.33846474
9	0.68486822	2.12311422
11	0.70325574	2.17136287

Table 1: Coeficientes del ajuste de las curvas  $\log(E_L) = \log(C) + p \log(h)$  para los 6 primeros modos.

Para el caso del error de los vectores propios (que corresponde a la desnivelación instantánea), este se calcula mediante la norma de  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$

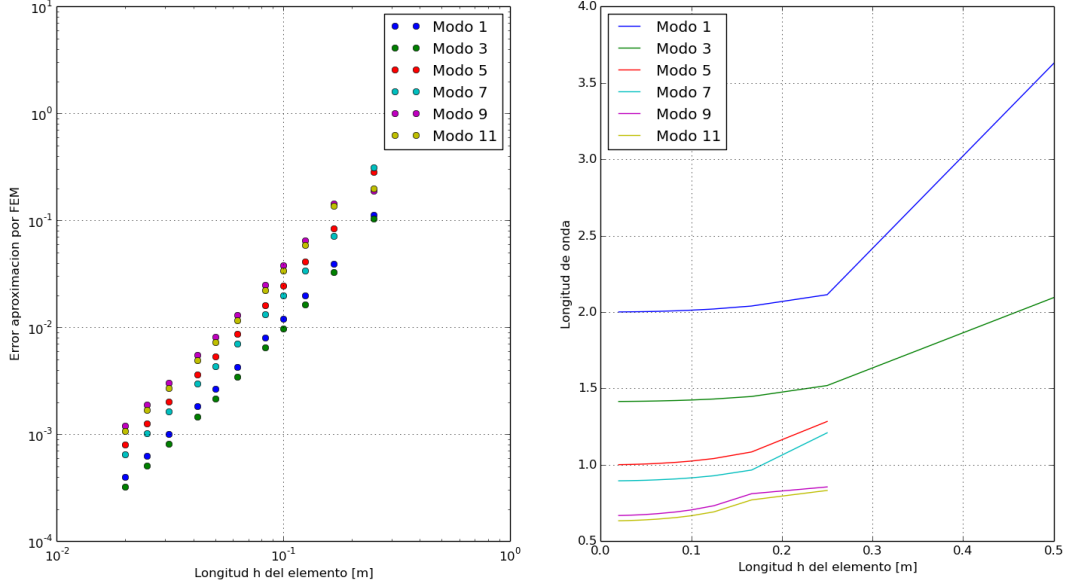


Figure 3: Resultados aproximación valores propios mediante FEM y errores asociados

Modo	C	p
1	0.0765871	2.04894336
3	0.29036431	2.09300275

Table 2: Coeficientes de ajuste de las curvas  $\log(E_u) = \log(C) + p \log(h)$

$$E_u = \left( \int_{\Omega} (u^h - u) d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

Los resultados obtenidos para cada resolución de malla se muestran en la figura 4.

Para estimar la tasa de convergencia se ajusta una curva a los datos  $(\log(E_u), \log(h))$ , de manera similar a los valores propios. Los resultados para los dos primeros modos se muestran la siguiente tabla. Es importante sealar que para estimar el error se debe escalar los resultados de FEM, pues en la solución analítica se utilizó una amplitud máxima de 1 con valores positivos en el borde izquierdo. En ambos casos se puede ver que la tasa de convergencia es de orden 2.

### 3.2 Aplicación a la bahía de Concepción

A partir de información de cartas náuticas del Servicio Hidrográfico y Oceánico de la Armada de Chile [14] se interpoló la topografía y batimetría correspondiente a la zona de la bahía de Concepción, y se utilizó el software computacional AnuGA [13] para generar la malla de elementos triangulares en el lugar de interés, como se puede ver en la figura 6. La malla posee un total de 2697 nodos y 57600 triángulos, y se impuso que el área de cada triángulo fuera menor que  $57600m^2$ .

La condición de borde por el lado que da hacia el océano no es trivial de implementar, y como una primera aproximación se simuló como un borde sólido, lo cual es consistente con el caso límite



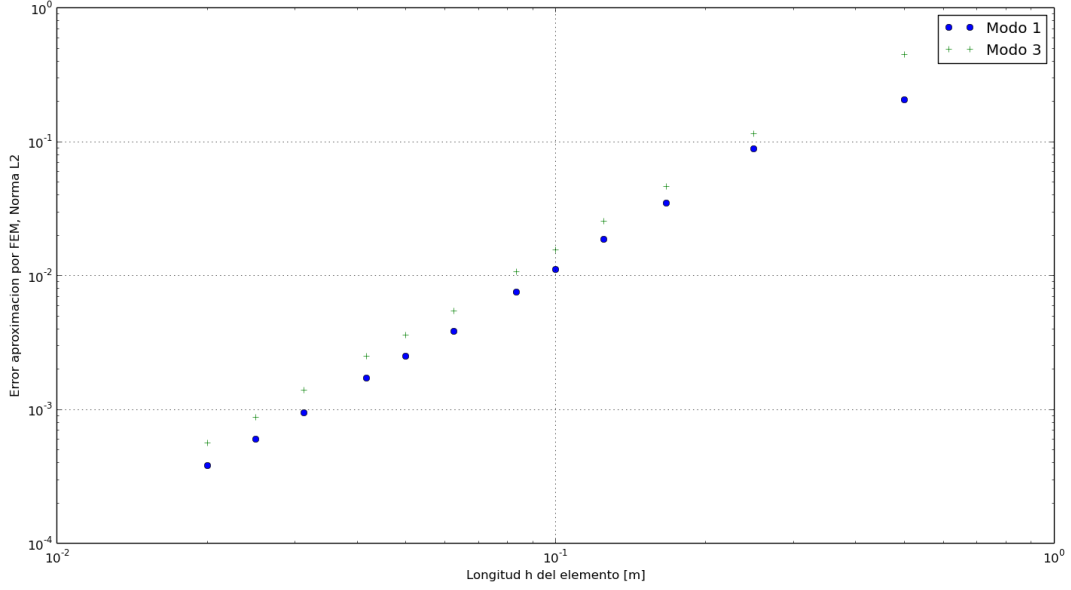


Figure 4: Errores en norma  $\mathcal{L}^2$  de los vectores asociados a cada modo propio

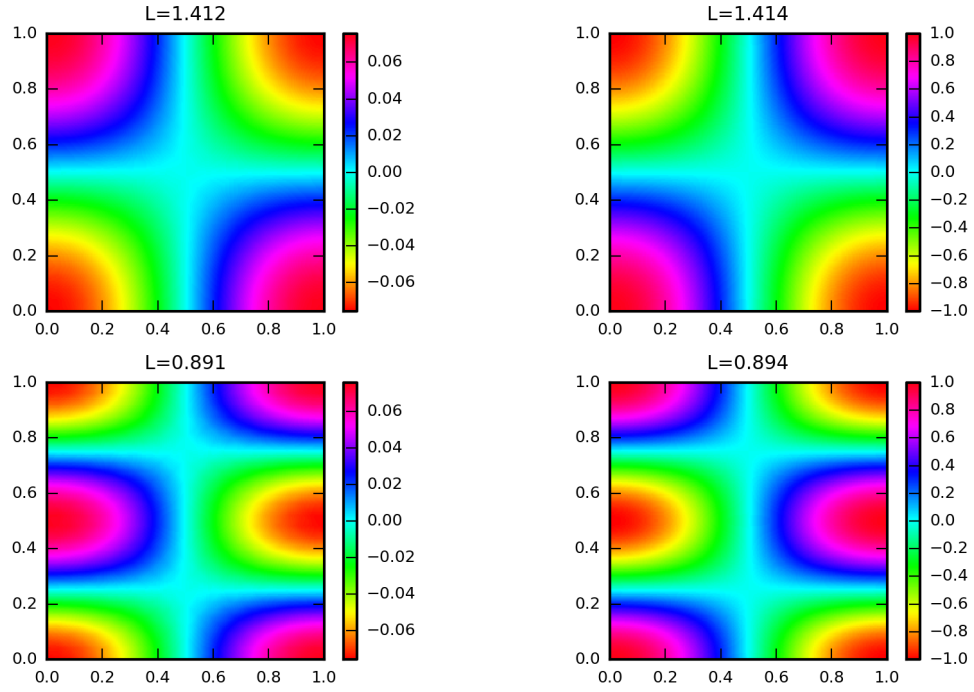


Figure 5: Modos de oscilación 3 y 6 obtenidos numéricamente para  $h = 1/25$  (primera columna) y mediante la solución analítica para  $(n, m) = (1, 1)$  y  $(n, m) = (1, 2)$  (segunda columna)

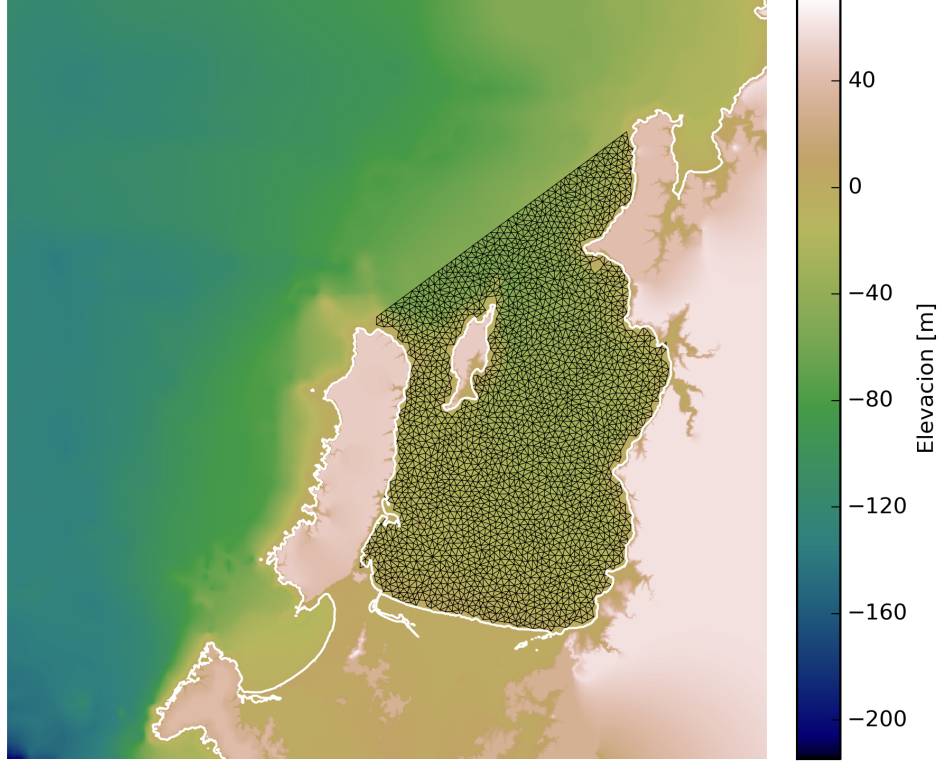


Figure 6: Batimetría y topografía de Talcahuano y malla triangular utilizada en la bahía de Concepción

en que las ondas quedan completamente atrapadas al interior. De esta forma, la bahía completa se consideró como si estuviera cerrada por todos los bordes.

Dadas estas definiciones, los seis primeros modos de oscilación y los períodos asociados se encuentran representados en la figura 7.

## 4 Discusión

Para el caso de la bahí rectangular se verifica lo mencionado en el último párrfo de la sección 2.1, dado que el menor de los valores propios calculados, en particular, siempre es igual a 0. Sin embargo, el método numérico para obtener el vector propio asociado, implementado en la función `numpy.linalg.eig`, falla, entregando un vector que no se asemeja al exacto. También se verifica la multiplicidad de valores propios con vectores propios diferentes, como los de la figura ??, o como se puede ver en la figura 2, y que para este caso en particular obedece a las características de simetrí de la bahía, por ejemplo, pero que también se pueden encontrar en otros casos como cuando  $\sqrt{n^2 + m^2}$  es un número natural (cuadrado perfecto). Sin embargo, todos los valores propios obtenidos numéricamente dieron valores no complejos, con lo cual se verifica lo expresado en la sección 2.1[1]. Además, en la figura 2 se observa que una mejor discretización, además de permitir una mejor representación de los modos con longitud de onda largas, permite añadir longitudes más cortas a la colección de modos propios obtenidos por el método.

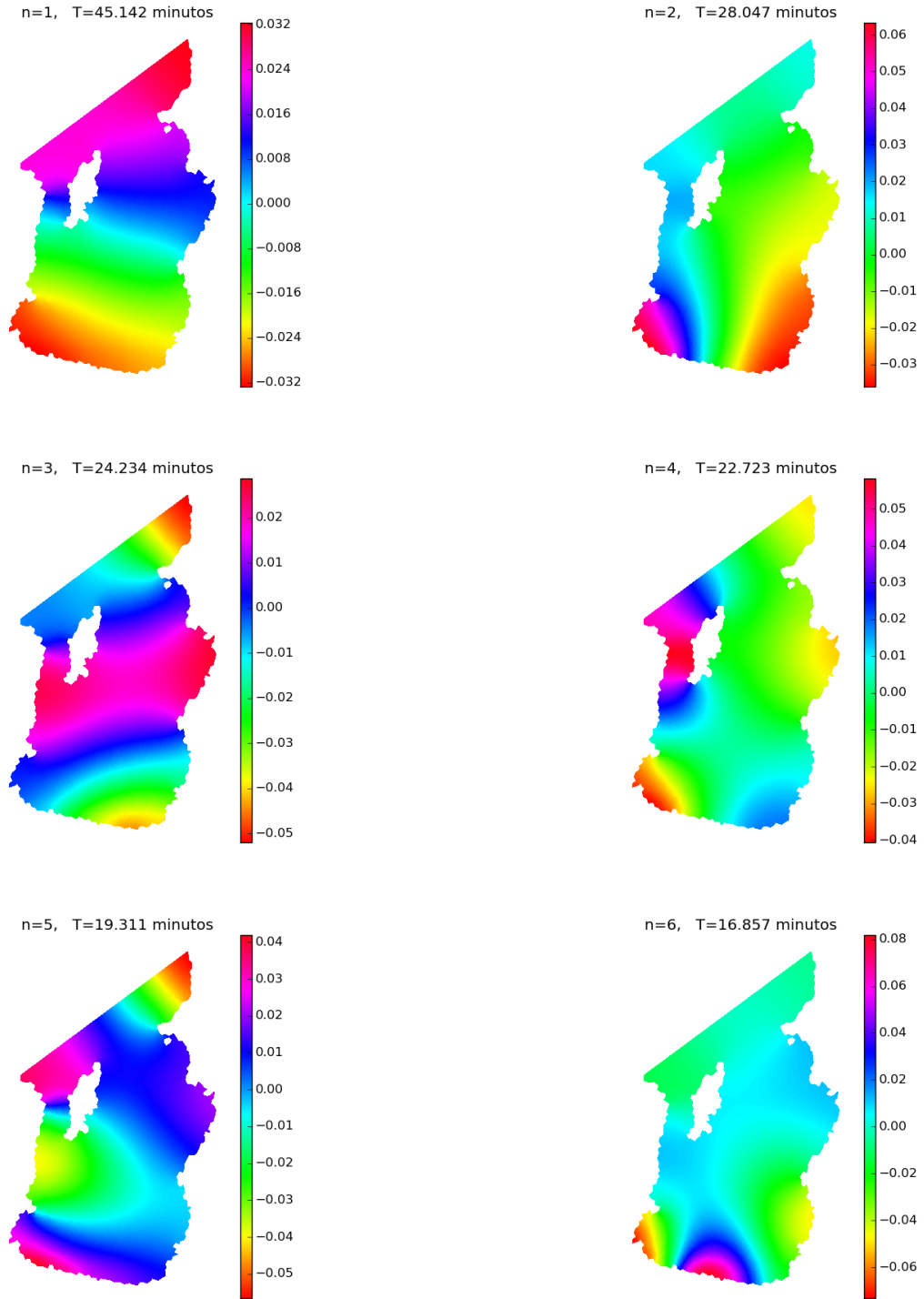


Figure 7: Primeros seis modos y períodos de oscilación obtenidos para la configuración de la bahía de Concepción

En la comparación entre la solución analítica y la aproximación de Elementos Finitos se observa que cualitativamente los vectores asociados a cada modo propio muestran notable similitud en términos de los nodos, antinodos y geometría general, lo cual se puede verificar, por ejemplo, en la figura 5. En términos cuantitativos, la convergencia de los vectores y valores propios asociados a los primeros modos de oscilación puede tener orden 2 o superior, al medirlo experimentalmente usando la norma de  $\mathcal{L}^2$  y de  $\mathbb{R}$  respectivamente, como se ve en las tablas 1 y 2.

En el caso de la bahía de Concepción, se verifica que los vectores propios obtenidos, mostrados en la figura 7, presentan forma similar a los que se encuentran en la literatura para estudios similares en puertos. Además se puede observar que los primeros vectores propios son, a grandes rasgos, similares a los de la bahía rectangular, y caracterizados por tener el primero una línea nodal ( $u = 0$ ) en la dirección  $x$  y dos antinodos en los extremos Norte y Sur de la bahía; el segundo una línea nodal vertical; el tercero dos líneas nodales de orientación prominentemente horizontal; y el cuarto dos líneas nodales con orientación NorOeste - SurEste, pero que ya muestran una distorsión más drástica que en los otros casos.

En particular, los resultados aquí obtenidos por la distribución espacial de los vectores asociados a los modos propios, presentan, en forma cualitativa, similitud respecto a lo reportado en la literatura [10], lo cual sugiere la validez de la implementación aquí realizada. Además, al examinar la información disponible en la literatura respecto al tsunami del 2010 [12], se encuentra que el período principal de oscilación de éste es del orden de 40 minutos, y que corresponde al primer período de oscilación aquí obtenido. Una siguiente etapa de este trabajo incluirá la investigación de los fenómenos de resonancia que se pudieron haber observado en la bahía de Concepción para el caso del tsunami del 2010.

## References

- [1] M. Nica. Eigenvalues and Eigenfunctions of the Laplacian. *The Waterloo Mathematics Review* 2011; **1**, No.2, 23–34.
- [2] T.J.R. Hughes, *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, 2000.
- [3] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Sixth edition, Butterworth-Heinemann, 2006.
- [4] <http://www.ruf.rice.edu/bioslabs/tools/report/reportform.html>
- [5] S. Göktepe and E. Kuhl. Computational modeling of cardiac electrophysiology: A novel finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; **79**, 156–178.
- [6] Z. Kowalik and T.S. Murty. *Numerical modeling of ocean dynamics. Advanced Series on Ocean Engineering, vol. 5*. World Scientific, Singapore. 1993;
- [7] C. Mei, M. Stiassnie and D. Yue *Theory and application of surface ocean Waves, vol. 5*. World Scientific, Singapore. 2005;
- [8] <http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/10618/>

- [9] <http://ciperchile.cl/2012/01/18/tsunami-paso-a-paso-los-escandalosos-errores-y-omisiones-del-shoa-y-la-onemi/>
- [10] G. Belloti, R. Briganti, G. M. Beltrami, L. Franco. Modal analysis of semi-enclosed basins. *Coastal Engineering* 2012; **64**, 16–25.
- [11] A.B. Rabinovich. Seiches and harbor oscillations. *Handbook of coastal and ocean engineering*. World Scientific Publ 2009; **64**, 193–236.
- [12] Y. Yamazaki and K. F. Cheung. Shelf resonance and impact of near-field tsunami generated by the 2010 Chile earthquake. *Geophysical Research Letters*. Vol 38. (2011)
- [13] O. Nielsen, S. Roberts, D. Gray, A. McPherson and A. Hitchman. Hydrodynamic modelling of coastal inundation. URL: [http://www.ga.gov.au/webtemp/image\\_cache/GA7981.pdf](http://www.ga.gov.au/webtemp/image_cache/GA7981.pdf)
- [14] Servicio Hidrográfico y Oceanográfico de la Armada de Chile. <http://www.shoa.cl>
- [15] E. Toro. Shock capturing methods for free surface shallow flows. John Wiley, 2001.