



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
ICE 3233 Elementos Finitos

Avance de proyecto Elementos Finitos

José Galaz
Jaime Soto

July 1, 2014

1 Introducción

La intro es complicada, pero sera realizada el lunes

2 Deducción de la formulación fuerte y planteamiento del problema

Sea $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$ el dominio de interés, $t_f > 0$ el tiempo final de la simulación, $\mathbf{v} : [0, t_f] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo de velocidad, y $p : [0, t_f] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ el campo de presiones, de un fluido incompresible con densidad $\rho \in \mathbb{R}^+$, que escurre sobre un fondo (topografía - batimetría) de forma dada por $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si se desprecia efectos disipativos y se consideran fuerzas de volumen $\mathbf{f}_b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, las ecuaciones de Navier-Stokes son [?]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_b \\ v_3|_{z=\eta} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \eta \\ v_3|_{z=b} &= \frac{\partial b}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) b \\ p|_{z=\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Bajo el supuesto que las ondas son suficientemente largas, de forma que las aceleraciones verticales no tienen influencia significativa sobre el perfil de presiones hidrostático, y por medio de integración vertical entre el fondo b y la superficie libre η , las Ecuaciones No Lineales de Aguas Someras (Non-Linear Shallow water Equations, NSW) son, para una bahía con borde impermeable $\partial\Omega_h$ y línea nodal $\partial\Omega_g$ tales que $\partial\Omega = \partial\Omega_h \cup \partial\Omega_g$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\eta) + \frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) + \frac{\partial}{\partial y} (huv) &= -gh \frac{\partial}{\partial x} b \text{ si } x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} (hv) + \frac{\partial}{\partial x} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2) &= -gh \frac{\partial}{\partial y} b \text{ si } x \in \Omega \\ (hu, hv) \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\ \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g \end{aligned} \tag{2}$$

Donde, siguiendo la figura 1, $h(t, x, y) = \eta(t, x, y) - b(x, y) \geq 0$ es la altura de la columna de agua, y (u, v) las componentes de velocidad horizontal promediadas en la vertical, dadas por

$$(u, v) = \frac{1}{h} \int_b^\eta (v_1, v_2) dz$$

Las ecuaciones en (2), forman un sistema hiperbólico no lineal de ecuaciones diferenciales parciales que admite ondas de choque e interfaces seco-mojado. Sin embargo, es posible obtener una linealización del sistema (2) si se consideran pequeñas perturbaciones a una masa de agua en reposo, es decir si

$$\eta = h_0 + \eta' \quad u = 0 + u', \quad v = 0 + v'$$

donde la notación \square' indica pequeñas perturbaciones sobre \square , y $h_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ representa la altura de la columna de agua, de forma que ¹

$$\left| \frac{\eta'(t, x, y)}{h_0(x, y)} \right| \ll 1$$

¹Aquí el lector debe notar que este supuesto es equivalente a asumir que las ondas son de amplitud pequeña.

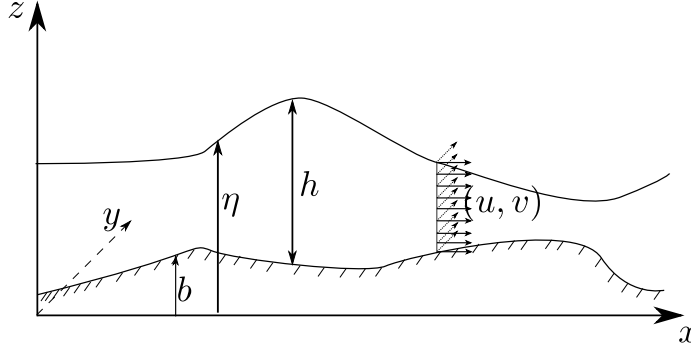


Figure 1: Schematic view of hydrodynamic variables defined for the Non-Linear Shallow Water Equations.

para cualquier $(t, x, y) \in [0, t_f] \times \Omega$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial h_0 u'}{\partial x} + \frac{\partial h_0 v'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta'}{\partial x} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial v'}{\partial t} + g \frac{\partial \eta'}{\partial y} &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 (h_0 u', h_0 v') \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
 \eta' &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
 \end{aligned} \tag{3}$$

Si ademàs $\eta', u', v' \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, multiplicando la segunda y tercera ecuación de (3), por h y derivando respecto a x e y es cierto que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (gh \nabla \eta) &= 0, \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
 \eta &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
 \end{aligned} \tag{4}$$

donde se cambió de notación al usar \square como \square' . Las ecuaciones (4) corresponden a la ecuación lineal de onda, de celeridad $c = \sqrt{gh}$, revelando la similitud entre la propagación de ondas de amplitud pequeña en una bahía, con la de ondas acústicas o elásticas lineales.

Finalmente, si se estudian ondas estacionarias, es posible separar variables y escribir (abusando de notación en u), con $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\eta(t, x, y) = \text{Re} \{ u(x, y) e^{-i\omega t} \} \tag{5}$$

lo cual, sustituyendo en (4) conduce a

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot gh_0 \nabla u + \omega^2 u &= 0 \text{ si } x \in \Omega \\
 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_h \\
 u &= 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_g
 \end{aligned} \tag{6}$$

El sistema (6) es más conocido como la Ecuación de Helmholtz, y denota un problema de valores y vectores propios del operador de Poisson ($\nabla \cdot c^2 \nabla \square$). Es posible demostrar [?], que la extensión débil del operador de Poisson definido sobre $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ posee una cantidad numerable de valores y vectores propios $(\lambda_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $u_n \neq 0$ y $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Además es fácil verificar, que para el caso en que $\partial\Omega_g = \emptyset$, como es el caso de una bahía cerrada, si $u(x, y) = K \in \mathbb{R}$ para cualquier $(x, y) \in \Omega$, entonces (6) se satisface trivialmente y $\lambda = 0$ es el primer valor propio. Lo anterior se debe tener en consideración al examinar los valores propios obtenidos numéricamente.

3 Formulaci3n variacional y de Galerkin

La formulaci3n fuerte del problema de valor de frontera es: (ecuaci3n (6))

Dados $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2) tal que:

$$\begin{aligned} \omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u_{,i} n_i &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_h \\ u &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_g \end{aligned} \quad (S)$$

Sean:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) / v|_{\partial\Omega_g} = 0\} \\ \mathcal{S} &= \{u \in H^1(\Omega) / u_{,i} n_i = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_h\} \end{aligned}$$

multiplicando la ecuaci3n de Helmholtz por $-v \in \mathcal{V}$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v (\omega^2 u + (ghu_{,i})_{,i}) d\mathbf{x} &= 0 \\ - \int_{\Omega} v (\omega^2 u) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} v (ghu_{,i}) n_i dS + \int_{\Omega} v_{,i} gh u_{,i} d\mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

Pero, por condici3n de borde: $u_{,i} n_i = 0 \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_h$, luego

$$- \int_{\Omega} v (\omega^2 u) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v_{,i} gh u_{,i} d\mathbf{x} = 0$$

O, en forma abstracta:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \quad (7)$$

Luego,

Dados $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar (u, ω^2) , $u \in \mathcal{S}$, $\omega \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a(v, u) - \omega^2(v, u) = 0 \quad (W)$$

Formulaci3n Galerkin:

Sean $u^h \in \mathcal{S}^h (\equiv \mathcal{V}^h)$ con $\mathcal{V}^h \in \mathcal{V}$
entonces:

$$a(v^h, u^h) - \omega^2(v^h, u^h) = 0$$

Luego la formulaci3n galerkin queda: