CH 1 矩陣 A

row matrix : A 只有 1 列 列矩陣
column matrix : A 只有 1 行 行矩陣
square matrix : A 列數行數相同 方陣

diagonal matrix : 對角矩陣
除對角項外，均為 0
$\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ d_i 為第 i 個對角項

→ if 對角項全 1 ⇒ 單位矩陣 I_n (n 階)

triangular matrix : A 之對角線上/下全為 0
A_{ij}

→ upper triangular matrix : $i > j$ $a_{ij} = 0$
→ lower 〃 〃 : $i < j$ $a_{ij} = 0$
strictly upper 〃 〃 : $i \geq j$ $a_{ij} = 0$
〃 lower 〃 〃 : $i \leq j$ $a_{ij} = 0$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$
$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$
$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$
$$B = [b_{ij}]_{n\times p}$$

$$C = AB = [c_{ij}]_{m\times p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad 1 \leq i \leq m \qquad 1 \leq j \leq p$$

✲ $A^0 = I$ $\qquad A^{k+1} = A^k A = A A^k$

✲ $J_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$ 全是 "1"

☆矩陣乘法性質

1. 結合律 associative

$$(AB)C = A(BC)$$

2. 分配律 distributive

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)A = BA + CA$$

3. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

$\uparrow$
constant

4. 與零矩陣相乘恆為零矩陣

$$A_{m\times n} \times O_n = O_{m\times n}$$

$$O_m \times A_{m\times n} = O_{m\times n}$$

5. 與單位矩陣相乘恆為本身

$$A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$$
$$I_m \times A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

6. 指數

$$A^r A^s = A^{r+s}$$
$$(A^r)^s = A^{rs}$$

7. 上(下, 對角)三角矩陣相乘必為
上(下, 對角)三角矩陣

☆ idempotent 冪等 $H^2 = H$

矩陣乘法不恆成立之性質

1. 交換律

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 不恆成立

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

not same

2. if $A \neq 0 \wedge B \neq 0$

則 $AB \neq 0$ 不恆成立

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

但 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. 正整數 n, if $A^n = 0$ 則 $A = 0$ 不恆成立

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

4. if $A^2 = A$, 則 $A = 0 \vee I$ 不恆成立

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$

5. if $A^2 = I$, 則 $A = I \vee -I$ 不恆成立

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

6. 消去律 if $AB = AC$, 且 $A \neq 0$, 則 $B = C$

不恆成立

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = AC$ 但 $B \neq C$

☆ 矩陣分割 (partition)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

A：方塊矩陣

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{(1)} \\ B_{(2)} \\ B_{(3)} \end{bmatrix}$$

$B_{(i)}$：B的列向量

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{bmatrix}$$

$C^{(i)}$：C的行向量

if $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

則 $AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$

CH 3 向量空間

vector space

1. 加法結合性 $\forall u, v, w \in V$