计数

Dengtingyu

成都石室中学

2025 年 7 月

计数概述

计数问题考察选手主要的能力在于进行事件的分类，和对计数方法的优化，前者主要是思维方面的考察。
但与此同时后者则多涉及到一些经典的模型，因此了解计数的经典模型也是必要的，本节课以介绍此类模型为主。

目录

组合数基础--几个性质和恒等式

性质：$C(n+1,m) = C(n,m) + C(n,m-1)$

从 $n+1$ 个不同元素中任取 m 个元素，考虑其中一个特定的元素 A。

- 若不取元素 A，那么就是从剩下的 n 个元素中取 m 个元素，组合数为 $C(n,m)$。
- 若取元素 A，那么还需要从剩下的 n 个元素中取 $m-1$ 个元素，组合数为 $C(n,m-1)$。

这两种情况涵盖了从 $n+1$ 个元素中取 m 个元素的所有可能，所以总的组合数就是这两种情况的组合数之和，即 $C(n+1,m) = C(n,m) + C(n,m-1)$。

组合数基础--几个性质和恒等式

性质：C (n + 1,m) = C (n,m) + C (n,m - 1)

根据这个性质，我们可以很轻松的通过裂项计算 $\sum_i C(i,n)$

同时我们可以递推计算 f_n，其中 $f_n = \sum_{i=l}^{r} C(n,i)$

组合数基础--几个性质和恒等式

范德蒙德恒等式：$\sum_{k=0}^{r} C(m,k)C(n,r-k) = C(m+n,r)$

从组合意义出发证明：考虑从 m + n 个不同元素（其中 m 个属于集合 A，n 个属于集合 B）中取 r 个元素的组合数，显然为 C (m + n,r)。换一种方式，这 r 个元素可分为从 A 中取 k 个、从 B 中取 r - k 个（k=0,1,...,r）。每种情况的组合数为 C (m,k) C (n,r - k)，所有情况总和即为 $\sum_{k=0}^{r} C(m,k)C(n,r-k)$。两种方法计算同一问题，故等式成立。

组合数基础--几个性质和恒等式

恒等式：$\sum_{k=0}^{n}[C(n,k)]^2 = C(2n,n)$
大家可以先想一下如何证明

组合数基础--几个性质和恒等式

恒等式：$\sum_{k=0}^{n}[C(n,k)]^2 = C(2n,n)$
大家可以先想一下如何证明

由范德蒙德恒等式推导：令 m = n，r = n，可得
$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)C(n,n-k) = \sum_{k=0}^{n}[C(n,k)]^2 = C(2n,n)$，得证。
组合意义解释：从 2n 个元素中取 n 个，等价于将其分为两个 n 元集合，从第一组取 k 个且从第二组取 n - k 个（k=0 到 n）的总和。

Lucas 定理

定理陈述：

设 p 为素数，m, n 为非负整数，将其表示为 p 进制：

$m = m_k p^k + \cdots + m_0$，$n = n_k p^k + \cdots + n_0$

则组合数满足：

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}$$

其中 $\binom{m_i}{n_i} = 0$ 若 $n_i > m_i$。

示例：

取 $p = 5$，$m = 7 = 1 \times 5 + 2$，$n = 3 = 0 \times 5 + 3$

因 $n_1 = 3 > m_1 = 2$，故 $\binom{7}{3} \equiv \binom{1}{0} \times \binom{2}{3} \equiv 1 \times 0 \equiv 0 \pmod{5}$

验证：$\binom{7}{3} = 35$，$35 \mod 5 = 0$，成立。

证明思路与应用

将 m, n 按上面的方法分解 $m = m_k p^k + \cdots + m_0$,
$n = n_k p^k + \cdots + n_0$

证明核心：

1. 利用费马小定理：$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p$
2. 展开 $(1+x)^m = \prod_{i=0}^{k}(1+x)^{m_i p^i} \equiv \prod_{i=0}^{k}(1+x^{p^i})^{m_i} \pmod p$
3. 比较两边 x^n 系数，得证。

组合计数经典模型--卡特兰数

处理卡特兰数相关的问题我们常常把它转化为走格子的问题。
即转化为：能向上向右走，计算从 $(0,0)$ 到 (n,n) 不越过对角线的路径数

下面举一个转化的例子：
对于经典的括号匹配问题，我们将左括号视作向右，右括号视作向上就可以了。

组合计数经典模型--反射容斥

我们画一条 $y = x + 1$ 的线。
考虑一条非法路径，发现它一定碰到了这条线，我们把它在第一个碰点进行翻折，发现对应了一条到 (n-1,n+1) 的路径
同时我们可以发现一条到 (n-1,n+1) 的路径也唯一对应了一条非法路径。
因此我们可以发现非法路径数为 $\binom{2n}{n-1}$
总合法数量为 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

组合计数经典模型--反射容斥

更普适的，实际上就是能向上向右走, 到 (n,m) 不能碰到一条直线 $y = x + k$ 的方案数
同时，我们考虑如果有两条线 $(l1, l2)$ 呢?

组合计数经典模型--反射容斥

更普适的，实际上就是能向上向右走, 到 (n,m) 不能碰到一条直线 $y = x + k$ 的方案数
同时，我们考虑如果有两条线 $(l1, l2)$ 呢?
还会是简单的两次反射吗？实际上并不是，在减去两条线分别的反射点后，还要再加上反射两次 (先 $l1$ 反射再 $l2$ 反射和先 $l2$ 反射再 $l1$ 反射) 的反射点，接下来继续减去反射三次的，一直这样直到反射点移出边界。

核心定义与公式

基本思想：通过" 包含" 符合条件的元素，" 排除" 重复计数的元素，解决多约束计数问题。

一般形式：
对 n 个集合 $A_1, \ldots, A_n$：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\},S\neq\varnothing} (-1)^{|S|+1} \left|\bigcap_{i\in S} A_i\right|$$

其中 S 为非空子集，$|S|$ 表示子集大小。

证明

我们考虑对这每个包含再其中的元素，显然它对左式的贡献是 1，那我们考虑它对右式的贡献。

我们假设它在 k 个集合中出现。我们可以得到它贡献的表达式：$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i} = 1 + \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i} = 1$

启示--二项式反演

我们发现实际上容斥的时候我们就是在设计系数使得两边的贡献一致。
那在一个函数不好计算的时候，我们是否也可以通过设计系数来用另一个函数反过来计算它。这里先主要介绍二项式反演
具体的，我们提出这样一个问题，。

核心定义与公式

基本思想：通过已知的组合计数序列 $\{f(n)\}$，反推另一序列 $\{g(n)\}$，二者通过二项式系数关联。

两种等价形式

- **形式一（前缀和型）**：
  若对任意 $n \geqslant 0$，有

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k)$$

  则反演为

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

核心定义与公式（续）

两种等价形式（续）

- **形式二（后缀和型）**：
  若对任意 $n \geqslant 0$，有

$$f(n) = \sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} g(k) \quad (m \geqslant n)$$

则反演为

$$g(n) = \sum_{k=n}^{m} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} f(k)$$

公式证明（形式一）

目标： 从 $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k)$ 推出 $g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$。

证明步骤：

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} g(i) \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i}$$

（交换求和顺序）

关键技巧

1. 交换双重求和顺序
2. 利用组合数恒等式：
$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$
3. 应用二项式定理：
$$\sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} (-1)^t = (1-1)^m$$

公式证明（续）

继续推导：

$$\sum_{i=0}^{n} g(i) \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} g(i) \binom{n}{i} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-i}{k-i} \quad \text{（组合数恒等式）}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} g(i) \binom{n}{i} \sum_{t=0}^{n-i} (-1)^{(n-i)-t} \binom{n-i}{t} \quad \text{（令 } t = k-i\text{）}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} g(i) \binom{n}{i} (1-1)^{n-i} \quad \text{（二项式定理）}$$

$$= g(n) \cdot 1 + \sum_{i \neq n} g(i) \cdot 0 = g(n)$$

典型应用场景

恰好 k 个元素满足条件的计数

设 $f(k)$ 为「指定 k 个元素满足条件」的方案数，则「恰好 k 个」的方案数 $g(k)$ 为：

$$g(k) = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} f(i)$$

例：计算恰好 m 个不动点的排列数（错位排列是 $m = 0$ 的特例）。

实例解析

例：不动点计数

已知 $f(m)$ 为「至少 m 个元素在原位置」的排列数，求恰好 m 个不动点的排列数 $g(m)$。

- 计算 $f(m)$：先选 m 个不动点，剩余 $n-m$ 个任意排列：
  $f(m)=\binom{n}{m}(n-m)!$
- 应用二项式反演：
  $g(m)=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}f(k)=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{n}{k}(n-k)!$
- 简化得：
  $g(m)=\binom{n}{m}\sum_{t=0}^{n-m}(-1)^{t}\frac{(n-m)!}{t!}$　（令 $t=k-m$）
- 当 $m=0$ 时，即为错位排列数 $D(n)$。

特殊情况研究--错位排列

记 n 个元素的错位排列数为 $D(n)$

递推关系

对于 $n \geqslant 2$，错位排列数满足：

$$D(n) = (n-1) \cdot [D(n-1) + D(n-2)]$$

初始条件：$D(1) = 0$，$D(2) = 1$。

考虑元素 1 的位置：

1. 元素 1 必放在位置 $2, 3, \ldots, n$ 中的某一个（共 $n-1$ 种选择）。
2. 假设元素 1 放在位置 k：
   - 若元素 k 放在位置 1，则剩余 $n-2$ 个元素需错位排列，方案数为 $D(n-2)$。
   - 若元素 k 不放在位置 1，则等价于 $n-1$ 个元素的错位排列（位置 1 视为元素 k 的原位置），方案数为 $D(n-1)$。

通项公式与容斥原理推导

通项公式

$$D(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

容斥原理推导

- 总排列数：$n!$。
- 减去至少 1 个元素在原位的排列数，加上至少 2 个元素在原位的排列数……

注意当 $n->+\infty, D(n)->\frac{n!}{e}$

核心思想与价值

为什么需要矩阵加速?

许多计数问题可表示为 ** 线性递推关系 **:

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_k f(n-k)$$

直接递推计算的时间复杂度为 $O(n)$，当 n 达到 10^9 时无法胜任。

矩阵的关键作用

- 将线性递推转化为矩阵乘法：$\boldsymbol{F}(n) = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{F}(n-1)$
- 利用矩阵快速幂将复杂度降至 $O(k^3 \log n)$（k 为递推阶数）。

矩阵与线性递推的转化（基础）

二阶线性递推示例

对递推关系：$f(n) = p \cdot f(n-1) + q \cdot f(n-2)$，有：

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \end{bmatrix}$$

记：

$$\boldsymbol{F}(n) = \begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则递推关系可简写为：

$$\boldsymbol{F}(n) = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{F}(n-1)$$

矩阵与线性递推的转化（推广）

k 阶递推的转移矩阵

对于 k 阶线性递推：

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_k f(n-k)$$

需构造 $k \times k$ 的转移矩阵：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵快速幂原理

核心依据：结合律

矩阵乘法满足结合律，故：

$$\boldsymbol{M}^n = \begin{cases} \boldsymbol{M}^{n/2} \cdot \boldsymbol{M}^{n/2} & \text{若 } n \text{为偶数} \\ \boldsymbol{M}^{(n-1)/2} \cdot \boldsymbol{M}^{(n-1)/2} \cdot \boldsymbol{M} & \text{若 } n \text{为奇数} \end{cases}$$

计算步骤：

1. 指数 n 二进制分解（如 $13 = 8 + 4 + 1$）。
2. 预处理 $\boldsymbol{M}^1, \boldsymbol{M}^2, \boldsymbol{M}^4, \ldots$。
3. 按二进制位相乘：$\boldsymbol{M}^{13} = \boldsymbol{M}^8 \cdot \boldsymbol{M}^4 \cdot \boldsymbol{M}^1$

复杂度对比：

- 直接计算：$O(n)$ 次乘法
- 快速幂：$O(\log n)$ 次乘法
- 单次乘法：$O(k^3)$（k 为矩阵阶数）
- 总复杂度：$O(k^3 \log n)$

实例 1：斐波那契数列计数

问题定义

计算斐波那契数列第 n 项：
$f(1)=1, f(2)=1, f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ （$n\geqslant 3$）。

矩阵转化

$$\begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \end{bmatrix}$$

转移矩阵：$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

实例 2：图论路径计数（矩阵乘法经典应用）

问题描述

给定含 k 个节点的有向图，求从节点 u 到节点 v 的长度为 n 的路径数（路径长度指边的数量，$n \leqslant 10^9$）。

核心原理：邻接矩阵的幂次意义

定义邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A}[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{若存在从节点}i\text{到}j\text{的边} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{A}^m[i][j]$ 表示从 i 到 j 的长度为 m 的路径数。

递推依据：

长度为 m 的路径可分解为：长度为 1 的边 + 长度为 $m-1$ 的路径，即

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{m-1}$$

结语

计数问题的关键在于对事件的分类以及对问题的转化。
我们在遇到困难的计数时应该考虑一一映射的转化，或者是正难则反。
与此同时，验证是否重复计数或者遗漏也是重点。