计数

xgzc

长郡中学

组合数

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合数的相关性质

对称性

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

加法公式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

上指标求和

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

组合数的相关性质

吸收恒等式

$$m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$$
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

范德蒙德卷积

$$\sum_{i+j=m}\binom{k}{i}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{m}$$

加法公式应用

试试看!

求和:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$$

组合意义

试试看!

尝试使用组合意义的方法证明上面的所有公式。

组合意义

试试看!

尝试使用组合意义的方法证明上面的所有公式。

可以看出，有时组合意义的方法更加简洁。

格路

例 1

求 Catalan 数的通项公式 C_n。

例 2

求满足下列条件的序列 $\{a_n\}$ 的个数:

1. $\forall 1 \le i,j \le n, a_i \le a_j$。
2. $\forall i, 0 \le a_i \le m, a_i \in \mathbb{Z}$。

洛谷 P3266 [JLOI2015] 骗我呢

题目描述

现在有一个 $n \times m$ 的数组 $x_{i,j}(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$。
对于 $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$，满足 $0 \le x_{i,j} \le m$，且对于 $1 \le i \le n, 1 \le j < m$，满足 $x_{i,j} < x_{i,j+1}$，对于 $1 < i \le n, 1 \le j < m$，满足 $x_{i,j} < x_{i-1,j+1}$。
求可能的数组 $x_{i,j}$ 的解数模 $10^9 + 7$ 的结果。

数据范围

$1 \le m, n \le 10^6$。

行列式

一种特殊的容斥形式。

性质

1. 交换两行时行列式结果乘 -1。
2. 将一行加到另一行上时，行列式结果不变。
3. $|A \times B| = |A||B|$。
4. 上三角行列式很容易求值。

洛谷 P7736 [NOI2021] 路径交点

题目描述

有 k 层的图，第 i 层有 n_i 个点，每层的点从上到下排列，层从左到右排列。再给出连接相邻层的一些有向边（从 i 层连向 $i+1$ 层）。
对于 n_1 层每个点作为起点同时出发走到不同的 n_k 层的点的所有路径方案中，交点数量为偶数的减去为奇数的方案有多少个？
有 T 组询问。

数据范围

$1 \le k \le 100, 2 \le n_1 \le 100, n_1 = n_k, n_1 \le n_i \le 2n_1, 1 \le T \le 5$

矩阵树定理

线性递推

主要讨论常系数齐次线性递推。
利用特征方程解决问题。

线性递推

主要讨论常系数齐次线性递推。
利用特征方程解决问题。

例 3

求斐波那契数的通项公式。

线性递推

主要讨论常系数齐次线性递推。
利用特征方程解决问题。

例 3

求斐波那契数的通项公式。

特别注意重根的问题。

生成函数

OGF

对于序列 $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$，定义 $F(z) = \sum_{i\ge 0} f_i z^i$ 为序列 $\{f_n\}$ 的普通型生成函数（OGF）。

EGF

对于序列 $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$，定义 $F(z) = \sum_{i\ge 0} f_i \frac{z^i}{i!}$ 为序列 $\{f_n\}$ 的指数型生成函数（EGF）。

普通型生成函数

普通型生成函数一般用来解决无标号问题和递推问题。

普通型生成函数

普通型生成函数一般用来解决无标号问题和递推问题。

例 4

给定一个正整数 n，求它的无序拆分数。
$n \leq 10^5$。

普通型生成函数

普通型生成函数一般用来解决无标号问题和递推问题。

例 4

给定一个正整数 n，求它的无序拆分数。
$n \leq 10^5$。

例 5

1. 求斐波那契数的通项公式。

普通型生成函数

普通型生成函数一般用来解决无标号问题和递推问题。

例 4

给定一个正整数 n，求它的无序拆分数。
$n \le 10^5$。

例 5

1. 求斐波那契数的通项公式。
2. 求斐波那契数列前缀和的生成函数。

普通型生成函数

普通型生成函数一般用来解决无标号问题和递推问题。

例 4

给定一个正整数 n，求它的无序拆分数。
$n \le 10^5$。

例 5

1. 求斐波那契数的通项公式。
2. 求斐波那契数列前缀和的生成函数。

例 6

求 Catalan 数的生成函数并根据此计算通项公式。

求逆的意义？

对于一个生成函数 A，

$$\frac{1}{1-A}=\sum_{i\geq 0} A^i$$

求逆的意义？

对于一个生成函数 A，

$$\frac{1}{1-A}=\sum_{i\geq 0}A^i$$

从组合意义的观点看，就是有序拼接。

【UNR #4】校园闲逛

题目描述

给定一个 n 个点 m 条边（有边权，不超过 W）的无向图，多次询问从 u_i 到 v_i 的所有路径中（可以重复经过同一条边）权值和恰好为 w_i 的方案数对 998244353 取模的结果。

数据范围

$n \le 8, W \le 65000, w_i \le W$。

解题思想值得借鉴，但是具体实现难度远超提高组范围，建议大家在水平提升后再落实此题。

试试看！

简单生成函数练习题

求出

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} z^i$$

的封闭形式。

二项卷积

定义

设序列 $\{f_n\},\{g_n\},\{h_n\}$ 满足

$$h_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f_ig_{n-i}$$

那么称 $\{h_n\}$ 是 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 的二项卷积的结果。

指数型生成函数（EGF）

可以发现，指数型生成函数的卷积对应序列的二项卷积。
所以，指数型生成函数的意义也就水落石出：即在处理有顺序的的物品的排列问题时经常会使用。

指数型生成函数（EGF）

可以发现，指数型生成函数的卷积对应序列的二项卷积。
所以，指数型生成函数的意义也就水落石出：即在处理有顺序的的物品的排列问题时经常会使用。
当然，如果某个序列的 EGF 形式比 OGF 更加简洁，也会使用 EGF 作为工具进行处理（后面会讲到例子）。

指数型生成函数（EGF）

可以发现，指数型生成函数的卷积对应序列的二项卷积。
所以，指数型生成函数的意义也就水落石出：即在处理有顺序的的物品的排列问题时经常会使用。
当然，如果某个序列的 EGF 形式比 OGF 更加简洁，也会使用 EGF 作为工具进行处理（后面会讲到例子）。
为什么要叫指数型生成函数？

答

由泰勒展开：

$$e^z = \sum_{i \geq 0} \frac{z^i}{i!}$$

exp 的意义？

例

贝尔数：求把 n 个有区别的小球放到若干个（任意多个）无区别的非空盒子里的方案数。

exp 的意义？

例

贝尔数：求把 n 个有区别的小球放到若干个（任意多个）无区别的非空盒子里的方案数。

对于一个生成函数 $A(z)$，定义 $\exp A = \sum_{i\geq 0} \frac{A^i}{i!}$

exp 的意义？

例

贝尔数：求把 n 个有区别的小球放到若干个（任意多个）无区别的非空盒子里的方案数。

对于一个生成函数 $A(z)$，定义 $\exp A = \sum_{i\geq 0} \frac{A^i}{i!}$
用组合意义的观点看，就是有标号的无序组合。
所以贝尔数的生成函数是 $\exp(e^x - 1)$，记为 $\mathcal{B}(x)$。

ln 的意义？

例 7

求 n 个点的无向连通图个数。

ln 的意义？

例 7

求 n 个点的无向连通图个数。

可以发现，$\ln$ 是 $\exp$ 的逆运算（?），所以组合意义也刚好相反。

exp / ln 的其它意义？

例 8

现在有一个背包，有 n 种商品，每种商品体积为 v_i，都有无限件
给定 m，对于 $s \in [1, m]$，请你回答用这些商品恰好装 s 体积的方案数。

exp / ln 的其它意义？

例 8

现在有一个背包，有 n 种商品，每种商品体积为 v_i，都有无限件
给定 m，对于 $s \in [1, m]$，请你回答用这些商品恰好装 s 体积的方案数。

利用 $\exp$ 和 $\ln$ 的代数意义。

FFT?

以上有部分内容可能需要使用 FFT 相关的技术解决。
鉴于 FFT 是 10 级内容，这里不想展开。但是理解上面的思想的意义是重要的。

第二类斯特林数

定义

将 n 个互不相同的球放入 m 个非空盒子的方案数记为第二类斯特林数，用 $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$ 表示。

性质

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = [n = 0]$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{Bmatrix} + m \times \begin{Bmatrix} n-1 \\ m \end{Bmatrix}$$

第一类斯特林数

定义

n 个人坐在 m 张非空圆桌上的方案数记为第一类斯特林数，用 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ 表示。

性质

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = [n = 0]$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (n-1) \times \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$$

洛谷 P4609 [FJOI2016] 建筑师

题目描述

多次给定 n, A, B，求有多少个长度为 n 的排列满足恰好有 A 种前缀最大值和 B 种后缀最大值？

数据范围

$n \le 50000, 1 \le A, B \le 100$。

下降幂和上升幂

定义

$$a^{\underline{n}} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$$

$$a^{\overline{n}} = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$$

其中 $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$。

斯特林数的性质

第一类斯特林数

$$x^{\overline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$x^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k$$

第二类斯特林数

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

斯特林数的性质

第一类斯特林数

$$x^{\overline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$x^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k$$

第二类斯特林数

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

由上可知，第一类斯特林数的 OGF 比较简洁。

斯特林数的 EGF？

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = n![x^n y^m]\mathcal{B}(x)^y$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = n![x^n y^m]\left(\frac{1}{1-x}\right)^y$$

可以用来求一列斯特林数。

莫比乌斯反演（子集反演）

定义两个在集合上的函数（?）$\mathbf{f}, \mathbf{g}$，如果

$$\mathbf{f}(S) = \sum_{T \subseteq S} \mathbf{g}(T)$$

那么有

$$\mathbf{g}(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \mathbf{f}(T)$$

洛谷 P5206 [WC2019] 数树

题目描述

给定 n, y。
定义两棵树 $T_1 = G(V, E_1), T_2 = G(V, E_2)(|V| = n)$，定义两棵树的权值 $F(T_1, T_2) = y^{n-|E_1 \cap E_2|}$。
请解决以下问题：

1. 给定 E_1, E_2，求 $F(T_1, T_2)$。
2. 给定 E_1，计算 $\sum_{T_2} F(T_1, T_2)$。
3. 计算 $\sum_{T_1, T_2} F(T_1, T_2)$。

数据范围

$n \leq 10^5$。

二项式反演

子集反演的特殊情况。
定义序列 f, g，如果满足：

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} g_i$$

那么有

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} f_i$$

当然还有其它的一些类似等价形式，这里不再赘述。

推论

例 9

求错排数的计算式。

推论

例 9

求错排数的计算式。

例 10

证明第二类斯特林数的计算式：

$$\begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^m$$

斯特林反演

定义序列 f, g，如果满足：

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} g_i$$

那么有

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} \left[{m \atop k} \right] (-1)^{n-i} f_i$$

[BZOJ 4671] 异或图

题目描述

给定 S 张 n 个点的图。
定义图的异或是：如果一条边在两个图中出现次数和为 1，那么异或后的图中存在这条边，否则不存在。
问有多少图的集合满足异或后的图是连通图。

数据范围

$S \leq 60, n \leq 10$。

求和科技

显然

一切可求和的仅带一个 $\sum$ 的式子的项都可以裂项，即如果 $\sum_{i=1}^{n} a_i = s_n$ 那么 $a_n = s_n - s_{n-1}$。

求和科技

显然

一切可求和的仅带一个 $\sum$ 的式子的项都可以裂项，即如果 $\sum_{i=1}^{n} a_i = s_n$ 那么 $a_n = s_n - s_{n-1}$。

所以，聪明的人们就想到能不能万物皆可裂项。

有限微积分

定义

差分算子 Δ 满足 $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$。
平移算子 $\mathbf{E}$ 满足 $\mathbf{E}f(n)=f(n+1)$。

有限微积分

定义

差分算子 Δ 满足 $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$。
平移算子 $\mathbf{E}$ 满足 $\mathbf{E}f(n) = f(n+1)$。

性质

$\Delta uv = u\Delta v + \mathbf{E}v\Delta u$
对两边同时求和可以得到分部求和公式。

下降幂

性质

1. $\Delta(a^{\underline{n}}) = na^{\underline{n-1}}$
2. $(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{\underline{i}} b^{\underline{n-i}}$

由此可见，下降幂在求和方面具有及其优秀的性质，并且能够独立进行一些运算。

自然数幂和

例 11

给定 $n\ (n \le 10^9), k$，求

$$\sum_{i=1}^{n} i^k$$

对 998244353 取模的结果。

$k = 2$？$k = 3$？

自然数幂和

例 11

给定 $n\ (n \le 10^9), k$，求

$$\sum_{i=1}^{n} i^k$$

对 998244353 取模的结果。

$k = 2$？$k = 3$？

$k \le 1000$？$k \le 10^5$？

自然数幂和

例 11

给定 $n\ (n \le 10^9), k$，求

$$\sum_{i=1}^{n} i^k$$

对 998244353 取模的结果。

$k = 2$? $k = 3$?

$k \le 1000$? $k \le 10^5$?

利用普通幂转下降幂可以实现简单地求和。

拉格朗日插值

通过点值求解多项式的方法。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

拉格朗日插值

通过点值求解多项式的方法。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

众所周知，自然数幂和的结果是多项式，所以可以直接用插值求出。当然还有伯努利数的做法，这里不再赘述。