好题分享

2023 年 9 月 27 日

JOISC2022 D1T2

题意

在城市中，有 H 条东西方向的街道和 W 条南北方向的街道。从北数第 i 条街道和从西数第 j 条街道的交叉点记作路口 (i, j)。

对于每条街道，你的步行速度如下：

- 如果你在从北数第 i 条街道上行走单位长度，需要 A_i 秒。即从路口 (i, c) $(i \in [1, H], c \in [1, W))$ 走到路口 $(i, c+1)$ 需要 A_i 秒。
- 如果你在从西数第 j 条街道上行走单位长度，需要 B_j 秒。即从路口 (c, j) $(c \in [1, H), j \in [1, W])$ 走到路口 $(c+1, j)$ 需要 B_j 秒。

你现在在路口 $(1, 1)$，你想前往 (H, W)，你必须沿着街道行走，并且你不希望走远路，即你不会向北或向西走。请你求出从路口 $(1, 1)$ 前往路口 (H, W) 所需的最少时间。

$H, W \leq 10^5$。

JOISC2022 D1T2

$O(n \log n)$

考虑一个小方格。从右上走需要 $a_1 + b_2$ 的时间，从左下走需要 $a_2 + b_1$ 的时间。即若 $\Delta a = a_2 - a_1 \geq b_2 - b_1 = \Delta b$，就会从右上走。

注意到这个结论对于小方格边长不为 1 的情况也是成立的，此时的 Δ 是斜率，即 $\frac{a_j - a_i}{j - i}$。

取全局最大的 Δ，不妨设为 $a_i - a_{i-1}$。发现在不影响图连通性的情况下，把第 i 条横路删掉，对答案没有影响。竖的路同理。于是不断进行这个操作，直到删不了任何边。

考虑计算贡献。注意到一条路产生贡献，当且仅当删掉这一整条路之后图变得不连通，进一步地，这条路一定是当前的最后一条横路或竖路。不妨设横路 H 被删，且最后一条没被删的竖路是 i。则有对答案有 $(W - i) \times a_H$ 的贡献，并把终点变成 (H, i)。

使用 std::set 模拟上述过程，复杂度 $O(n \log n)$。

JOISC2022 D1T2

$O(n)$

发现只有 (i, a_i) 凸包上的横路有用。不在凸包上的边，删掉之后图一定仍然连通，不会产生贡献。竖路同理。

此时 a 和 b 分别是一个单调的斜率序列。从大往小删边，模拟上面那个过程是容易的。

CF1305G

题意

有 n 个人，第 i 个人年龄为 a_i。
第 i 个人和第 j 个人是朋友，当且仅当 $a_i \text{ and } a_j = 0$。
现在，有一个社团，第 i 个人有两种操作：

1. 若第 i 个人不在社团内，可主动加入社团，获得 0 的报酬。
2. 若第 i 个人已在社团内，可邀请自己的一个未加入社团的朋友加入社团，社团会奖励他 a_i 的报酬。

每个人只可以进入社团一次，每个人操作次数无限制，且这 n 个人操作没有先后顺序规定。

现在他们打算通力合作，求社团支付给这 n 个人的最大报酬。

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5, 0 \leq a_i \leq 2 \times 10^5$。

CF1305G

题解

把每个人抽象成一个点，按照加入关系可以得到一颗树：

- i 邀请 j 进入社团则连一条 $i \to j$ 的边；
- 令 $rt = n + 1, a_{rt} = 0$，主动申请则连边 $rt \to i$。

答案为这棵树上每个点父亲节点的权值。令 (i, j) 边权为 $a_i + a_j$，于是无论边的方向，答案便是树上所有边权和减去 $\sum a_i$。希望边权和最大，那么我们就是要求最大生成树。

CF1305G

$O(3^{\log_2 n}\alpha(a_i))$

按边权从大到小枚举，每次把边权 w 拆成 a_i, a_j 满足 $a_i \text{ and } a_j = 0, a_i + a_j = w$，因为 $a_i \text{ and } a_j = 0$，所以 $a_i + a_j = a_i \text{ or } a_j$，直接枚举子集。每次把所有权为 a_i 和 a_j 的点连通，并查集维护，连通这些点至少要 $cnt_{a_i} + cnt_{a_j} - 1$ 条边（树），然后缩成一个点，答案加上 $(cnt_{a_i} + cnt_{a_j} - 1) \times w$。

CF1305G

$O(n + a_i \log a_i \log n)$

使用 Boruvka 算法求最大生成树：这是一个类似于 Kruskal 的算法，每次扫所有边，对于每个连通块选一条连向外部的最大边，然后合并用并查集维护，这样每次少一半的连通块，最多迭代 $\log n$ 次。

所以现在需要对于 i 求出满足 $a_i \text{ and } a_j = 0$，$a_i + a_j$ 的最大值，相当于是 a_i 的补集的子集取 $\max$，这步直接使用 FWT 计算，然后放到连通块内选最大值，但在求这个 j 时可能找到一个和 i 在同一个连通块的 j，维护个次大值即可。

Gym103741C

题意

给定 n 和一个集合 $S \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$，$|S| = m$。对于 $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ 和 $s \in S$，在 i 和 $(i + 2^s) \bmod 2^n$ 之间连一条无向边。

你需要求 $D = \max_{0 \le i \le j < 2^n} \mathrm{dist}(i, j)$ 以及 $C = \sum_{0 \le i \le j < 2^n} [\mathrm{dist}(i, j) = D]$。

$1 \le m \le n \le 10^6$。

考虑 $(i, i+d)$ 的最短路，设 s 已经排好序了，设 $s_{m+1}=n$，记 d 在 s_i 到 $s_{i+1}-1$ 位之间的数是 a_i，考虑 DP：$f_{i,0/1}$ 表示考虑 $s_{1..i}$，s_{i+1} 是否有多出 1 的最小步数，转移是

$$\begin{cases} f_{i,0}=\min(f_{i-1,0}, f_{i-1,1}+1)+a_i \\ f_{i,1}=\min(f_{i-1,0}+1, f_{i-1,1})+2^{len_i}-a_i-1 \end{cases}$$

最后答案是 $\min(f_{m,0}, f_{m,1})$，希望它尽量大。
$f_{i,0}+f_{i,1}=\min(f_{i-1,0}, f_{i-1,1}+1)+\min(f_{i-1,0}+1, f_{i-1,1})+2^{len_i}-1 \geq f_{i-1,0}+f_{i-1,1}+2^{len_i}-1$，在 $|f_{i-1,0}-f_{i-1,1}| \leq 1$ 并且之前一直取等时才能取等。

则

$f_{m,0}+f_{m,1} \leq \lfloor \frac{\sum 2^{len_i-m+1}}{2} \rfloor \Rightarrow \min(f_{m,0}, f_{m,1}) \leq \sum 2^{len_i-1}-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$，是可以取到的。

Gym103741C

题解

当 m 是奇数时，$f_{m,0}+f_{m,1}$ 必须步步取到上界，容易发现对于奇数 i 都满足 $f_{i,0}=f_{i,1}$，偶数 i 都满足 $|f_{i,0}-f_{i,1}|=1$，并且任何一种可能都可以取到，方案数是 $2^{\lfloor m/2 \rfloor}$。

而 m 是偶数时，可以有一步 $f_{i+1,0}+f_{i+1,1}$ 比上界松 1，这样的 i 要满足 i 是奇数，而 a_i 可以取 2^{len_i-1} 或 $2^{len_i-1}-1$，但是 $len_i=1$ 时取不了第一种。所以方案数是 $2^{m/2-1}(\frac{m}{2}+\sum[len_{2i+1}\neq 1])+2^{m/2}$，后面是不松的方案。

P5540

题意

给出一张包含 n 个点的图，图上每条边 e 有权值 A_e, B_e。你需要求出图中的一棵生成树 T，使得树上所有边的 A 之和与 B 之和乘积最小。

$1 \leq n, A, B \leq 200$，$1 \leq m \leq 10000$

P5540

题解

将生成树 T 看成一个点 $(\sum_{e\in T} A_e, \sum_{e\in T} B_e)$，那么实际上我们要做的就是取函数 $xy=k$，不断增大 k 直到碰到第一个点，求此时 k 的值。

显然，碰到的点在左下凸壳上。那么只需要求出左下凸壳即可。

整个凸壳最左的点就是 A 的最小生成树，最下的点就是 B 的最小生成树。

得到凸包的两个端点 a, b 后，可以用一种神奇的方法求出凸包：

1. 找到直线 $l=ab$ 下方离它最远的点 c，c 一定在下凸壳上。
2. 递归 $l=ac, l=cb$，直到本次直线 l 严格下方没有点为止。

P5540

题解

考虑怎么找 c。c 到 ab 的距离最大可以转化为 $S_{\triangle abc}$ 最大，即叉积最大。叉积为：

$$\begin{aligned}
&(x_a - x_c)(y_b - y_c) - (y_a - y_c)(x_b - x_c) \\
&= x_a y_b - x_c y_b - x_a y_c + x_c y_c - x_b y_a + y_c x_b + x_c y_a - x_c y_c \\
&= x_a y_b - x_b y_a + x_c(y_a - y_b) + y_c(x_b - x_a)
\end{aligned}$$

前两项不用管。后两项相当于给每条边 e 赋权 $A_e \times (y_a - y_b) + B_e \times (x_b - x_a)$ 后跑最小生成树的结果。

那么可以在 $O(m \log m)$ 的时间内找到 c。

每轮一定会找到一个点，因此总时间复杂度 $O((nV)^{\frac{2}{3}} m \log m)$。

ARC165E

题意

给出一棵 n 个点的无根树。给出一个数 k。

每次在树上找到所有满足「包含 u 的连通块大小至少为 $k+1$」的点 u，在这些点中随机取一个点，并删除它的所有连边。

求使得树上不存在大小至少为 $k+1$ 的连通块的期望时间，在模 998244353 意义下的值。

$1 \le k \le n \le 100$。

ARC165E

题解

显然删去一个点的所有连边时，也可以删掉这个点。

对于树上任意时刻出现的一个极大的连通块 C，若其大小大于等于 $k+1$，则它内部肯定会被删去一个点，把这个点的贡献视为 C 的贡献，可以发现这样不重不漏。那么一个大小大于等于 $k+1$ 的极大连通块 C 的贡献就是其在整个过程中出现过的概率 $P(C)$。

每次删的点要在一个大小至少为 $k+1$ 的连通块中，这不好处理。考虑允许在大小小于 $k+1$ 的连通块中删点（记这样的删点为「无效的」，否则为「有效的」）。可以发现这对任意大小大于等于 $k+1$ 的极大连通块的出现概率 P 都没有影响。

ARC165E

题解

一个简单的证明是，允许无效删点的情况下，考虑所有有效删点时删去的点，所形成的序列 S。显然如果确定每种 S 的出现概率，就能确定每一个连通块 C 的出现概率。

一个 $S = S_{1\dots x}$ 的出现概率就是对于每个 S_i，计算删去 $S_{1\dots i-1}$ 后所有大小至少为 $k+1$ 的连通块大小之和 siz_i，然后计算 $\prod_{i=1}^{x} \frac{1}{siz_x}$。

于是允许无效删点并不影响每个 S 的出现概率，因为删去 $S_{1\dots i-1}$ 后，容易得到下一个有效删点为 S_i 的概率仍为 $\frac{1}{siz_i}$。

ARC165E

题解

可以限制每个点只能删一次。于是对于一个包含 $s \geq k+1$ 个点，边界上有 c 个需要删除的点（即不包含于 C 且与 C 有边相连的点）的极大连通块 C，其出现概率即为边界上的 c 个点均在内部的 s 个点之前被删除的概率，即 $\frac{c!s!}{(c+s)!}$。

需要统计 $g_{s,c}$ 表示包含 s 个点，边界上有 c 个需要删除的点的极大连通块的个数。

可以枚举连通块的根，设 $f_{u,s,c}$ 表示连通块的根为 u，包含 s 个点，边界上有 c 个点（u 的父亲暂不计入 c）的连通块的个数。可以 DP。

s 与 c 的转移形式都是背包，于是复杂度比看上去少一个 n。总时间复杂度为 $O(n^4)$。