数据结构选讲

sycqwq

热身题

给定一个包含 $2n$ 个数字的数列，由 1 n 组成，且每个数字在数列中出现两次。

一次操作可以交换相邻两个数字，定义一个数列是整理的当且仅当所有相同的数字在数列中的位置相邻。

现在有 m 次修改，每次修改交换数列中的第 a 个数和第 b 个数，求第一次修改前和每次修改后使数列为整理的的最小操作次数。

$n \le 30000$，$m \le 30000$

我们考虑对于每一种数字在数列中的位置构成的二元组 (l_i, r_i)，每次我们让一种数字还原的代价显然为 $r_i - l_i - 1$。

考虑在还原一种数字时，会对其他数字产生的影响，我们将二元组看成线段，显然对于相离和包含的线段在还原的时候不会产生影响，而对于相交的线段，我们在还原其中一种的时候，会使另一种的还原代价 $+1$ 或者 -1，而如果我们按数列中的顺序从左到右还原，相交线段就只会产生 -1，这样显然最优。

此时的答案就应该为 $\sum_{i=1}^{n} r_i - l_r - 1 - f(i)$

$$f(i) = \sum_{j=1 \land j \neq i}^{n} [l_i < l_j \land r_i < r_j]$$

而对于修改，我们用树套树维护一下线段，然后暴力算答案的变化量即可。

CF603E

给定一张 n 个点的无向图，初始没有变。

依次加入 m 条带权的边，每次加入后询问是否存在一个边集，满足每个点的度数均为奇数。

若存在，则还需要最小化边集中的最大边权。

$n \le 10^5$，$m \le 3 \times 10^5$。

一道经典题

我们先考虑题目中对于边集的限制，不难发现，如果一个连通块的节点数为偶数，那么就是满足条件的。

证明大致就是，显然一个连通块的度数之和是偶数，而一个节点数为奇数的连通块若满足条件，度数之和将为奇数，所以对于点数为奇数的连通块不可能满足条件。

而对于度数为偶数的连通块，显然拉一颗生成树来，从下往上构造就可以得解。

接下来我们考虑最小化最大边权。

不难发现，如果一条边加入后就没有被加入边集，或者在某一个时刻被踢出了边集，那么在这之后这个点就再也不会进入边集了。

形式化的，对于一条边 i，其被加入边集的时刻为一段连续的区间 $[l_i, r_i]$，其中 $l_i = i$

。

我们先考虑静态的问题应该怎么做，直接排序做一遍 $Kruskal$，用并查集维护度数为奇数的连通块的数量即可。

而对于加边的问题，我们可以使用线段树分治。

由于一条边的覆盖范围是一个区间，我们可以考虑在线段树分治的过程中，在 r_i 的节点找出 i 这一条边，算出出现范围，然后再对于 $[l_i, r_i - 1]$ 区间加上这一条边。

具体的，我们可以维护一个 $Kruskal$ 的指针 pos，然后从右往左递归进行线段树分治，考虑显然位置越靠后的时间点，他的答案就越小，也就是说，在从右往左线段树分治的过程中 pos 是递增的。

我们考虑在一个时刻时，对于 $[1, pos]$ 中的边的贡献区间已经求出来了，这就意味着这一部分的贡献已经通过线段树分治贡献上了，而我们只需要考虑将 pos 往后推。

我们设当前时间点为 k，那么对于当前 pos 推到的节点 i，其的 $r_i = k$，通过线段树分治区间修改即可。

总时间复杂度 $O(m \log m \log n)$。

[国家集训队互测]第一代图灵机

给出一个长度为 n 的非负数字序列 $a_{1\dots n}$，每个数字有一个 $[1,m]$ 的颜色 c_i，要求进行 q 次操作，操作分为两类：

`1 l r`：询问区间 $[l,r]$ 中没有重复颜色且数字和最大的子区间的数字和。

`2 i w`：把 c_i 修改为 w。

我们先考虑没有重复颜色的限制。

对于一个点 i，我们维护一个 nxt_i 表示同种颜色的下一个位置，那么对于一个区间 $[l,r]$ 其符合条件当且仅当 $\min\limits_{i=l}^{r} nxt_i > r$。对于 nxt_i 的单点修改，我们可以考虑用 set 维护。

而对于答案，我们可以考虑用线段树维护，对于一个区间 $[l,r]$，维护他的 $nxtmin$ 和 $lans$，表示这段区间中 nxt_i 的最小值和当答案区间的左端点在 $[l,mid]$ 时，且我们只考虑 $[mid+1,r]$ 的 nxt_i 的限制的答案。

难点就在于我们如何在线段树上传标记时维护 $lans$。我们可以考虑在左区间中进行一个递归，假设我们当前的区间是 $[l,r]$，表示处理左端点在 $[l,r]$ 中时的答案，同时维护一个 $rmin$，表示右区间贡献过来的对右端点位置的限制。
而我们考虑当 $nxtmin[mid+1,r] < rmin$ 时，显然此时的答案要么是 $lans[l,mid]$，要么我么继续向右递归。而对于另外一种情况，要么我们就是取到答案区间 $[mid,rmin]$ 更新答案，要么就是继续向左递归找到左端点。

这样子我们就解决了维护 $lans$ 的问题，对于查询答案就很简单了。

我们可以从右向左递归区间，动态更新右边区间所贡献的 $rmin$，然后用类似的算法查找答案即可。

洛谷P5163 WD与地图

给你一张 n 个点，m 条边的有向图，每个点有点权。

有 q 次操作，一共三种：

`1 a b` 表示删掉 a 连向 b 的边，保证这条边存在。

`2 a b` 表示将 a 的点权增加 b。

`3 a b` 查询点 a 所在强连通分量前 b 大的点的点权和。

$n \le 100000$，$m \le 200000$,$q \le 200000$.

保证任何时刻点权 $\le 10^9$。

首先删边不好做，我们套路的把删边变为加边。

然后我们来考虑一个弱化版，当图为无向图时应该怎么做。

题目中所说的强连通分量即为连通块，用并查集维护一个点所在的快，然后用线段树合并维护答案。

现在考虑有向图的情况，我们可以发现，对于一个强连通分量里的边，我们把他变成无向边，不会影响强连通性，而对于一个强连通分量外的边，我们将它删去，也不会影响强连通性。

我们考虑一个点会在某一个时间点加入到强连通分量中，也就是变为有向边，我们算出这个时间点后就等同于无向图了。

考虑如何算出，我们可以使用整体二分，每次二分中，我们考虑先将出现时间在 $[l, mid]$ 中的边跑一遍缩点，而此时被加入在强连通分量中的边，其变为有向边的时间就在 $[l, mid]$，反之 $(mid, r]$。注意到我们不能忽视 $[1, l)$ 中的边的影响，我们只需要先递归左边，然后将左边缩点之后的信息用可撤销并查集贡献到右边，就可以解决这个问题，并且能够保证复杂度。

一道题

给定 n 个数的序列，每个元素由三元组 (c, w, a) 组成。

一次操作可以选择所有 c 相等的区间 $[l, r]$，将这个区间内的 a 值同时减去 1，代价为 $w_l + w_r$。

m 次操作：单点修改 a_i, w_i，区间覆盖 c，求清空区间 $[x, y]$ 所有 a 值的最小代价。

$n, m \leq 2 \times 10^5$

显然答案对于颜色段独立，我们考虑单一一种连续段。

考虑到，我们的操作区间如果相交，那么可以将其调整为不交，不会影响操作结果。

既然如此，一个点 i 作为左端点贡献的次数为 $\max(a_i - a_{i-1}, 0)$，右端点为 $max(a_{i+1} - a_i, 0)$。

推广到多段，形式化的，一个点作为左端点的贡献为

$$\begin{cases} \max(a_i - a_{i-1}, 0) & c_i = c_{i-1} \\ a_i & c_i \neq c_{i-1} \end{cases}$$

。

右端点同理。

那么我们可以用线段树来维护这个东西，维护区间的左右端点颜色，答案，当前区间如果颜色全相同时的答案。

我们合并两个区间的时候只需要修改左右端点的贡献即可。

而对于区间推平操作，显然很好维护。

CF796F

题意翻译

有一个 n n个数的数列 A，数列 A 中所有元素 $\leq 10^9$。

对数列 A 进行 m 次操作：

`1 l r x` 告诉你当前数列区间 $[l, r]$ 中的最大值为 x

`2 k d` 修改数列是的 $a[k] = d$

你需要构造一个最初的符合条件的数列 A，并输出任意一种所有值或起来最大的数列。

如果没有符合条件的数列，输出 NO。

$n, m \leq 3 \times 10^5$，$1 \leq x, d \leq 10^9$，保证 x 两两不同。

我们考虑对于一个 `1 l r x` 操作，如果其中有点被修改过，那么它将不会限制到修改过的点，对于其他的点，则会限制这些点在初始序列中的最大值。并且如果修改后的值等于 x，那么就不要求该区间内要取到 x，否则有要求。

考虑对于一个限制，要取到 x 的话，实际上我们可以在这一段区间里随便找一个值选的 x，因为 x 不同。

而除去这些值之外，我们假设一个数取到的最大值是 x，那么显然让这个数取到 $2^{log_2^x}-1$ 肯定是最优的，然后就做完了。

Odd Mineral Resource

给定一棵树，每个点有颜色 c_i，多次查询，每次给定 u, v, l, r，你需要给出一个颜色 x，使得 x 满足：

1. $x \in [l, r]$
2. x 在 u 到 v 的路径上出现了奇数次。

你需要对于每组查询给出 x，如果一组查询不存在合法的 x，则输出 -1。

$n, m \leq 3 \times 10^5$

Sol1:

考虑使用树上莫队+值域分块，复杂度 $O(n\sqrt(n))$。

Sol2:

考虑给每一种颜色随机赋权，如果 x 到 y 中的颜色在 $[l,r]$ 中的点权异或和不为 0，那么就说明存在一组解。

我们考虑二分出来第一个满足条件的答案，上述过程可以使用主席树维护。

使用主席树二分复杂度可以到 $O(n\log n)$，使用二分加主席树复杂度是 $O*(n\log^2 n)$，也可以通过本题。

Shortest Path Queries

给出一个连通带权无向图,边有边权,要求支持 q 个操作:

$1\ x\ y\ d$ 在原图中加入一条 x 到 y 权值为b 的边

$2\ x\ y$ 把图中 x 到 y 的边删掉

$3\ x\ y$ 表示询问 x 到 y 的异或最短路

保证任意操作后当前状态下的图连通无重边自环且操作均合法

$1 \leq n, m, q \leq 200000$。

我们可以先考虑没有修改操作我们应该怎么做.

我们可以在图中拉一颗生成树，然后我们先假设取到树上的路径。

然后再对于所有的返祖边构成的环，来增广这条链的路径，具体的，维护一个线性基，里面插入所有返祖边构成的环的环上的异或和，然后将树上路径在这个线性基中查询异或和最小值，具体可见 [WC2011] 最大XOR和路径。

然后对于题目中的操作，我们可以考虑线段树分治来使得其没有删除操作，现在我们只需要考虑如何在加边的时候维护出生成树的信息。

我们可以考虑用按秩合并并查集来进行维护，对于每一个点 x，维护 $dis[x]$ 表示 x 到其并查集的父亲上的路径异或和。

由于异或的优良性质，有 $dis[x,z]=dis[x,y]^dis[y,z]$，所以我们可以在并查集中暴力往上跳来算出一个点到并查集中的根的路径异或和，这样我们就可以求出任意两点间在生成树上的异或和路径了。

而对于环，我们只需要将环上的点的异或和加入线性基中，这个维护是显然的。

时间复杂度 $O(n\log^2 n)$。

Painting Edges

题面翻译

给定一张 n 个点 m 条边的无向图。

一共有 k 种颜色，一开始，每条边都没有颜色。

定义**合法状态**为仅保留**染成 k 种颜色中的任何一种颜色**的边，图都是一张二分图。

有 q 次操作，第 i 次操作将第 e_i 条边的颜色染成 c_i。

但并不是每次操作都会被**执行**，只有当执行后仍然合法，才会执行本次操作。

你需要判断每次操作是否会被执行。

$n, m, q \leq 5 \times 10^5$，$k \leq 50$。

我们考虑，对于 k 种颜色的限制，我们可以用 k 个可撤销并查集来维护。

而题目的重点在于判断每次操作会不会执行，合法后才会加入。

我们可以先通过线段树分治到一个询问，然后判断是否合法，再将其用线段树分治的 $update$ 加入，因为我们是从左网友递归的，所以可以保证在递归到每一个点时在其之前的操作都已被加入。

[NOI2022] 众数

一开始给定 n 个长度不一的正整数序列，编号为 $1 \sim n$，初始序列可以为空。这 n 个序列被视为存在，其他编号对应的序列视为不存在。

有 q 次操作，分别为：

`1 x y` 在 x 号序列末尾插入数字 y。

`2 x` 删除 x 号序列末尾的数字。

`3 m x1 x2 xm` 将 m 个序列拼接，求其众数。

`4 x1 x2 x3` 新建一个序列 x_3，其为序列 $x1$，$x2$ 顺次拼接的结果，同时删除序列 x_1，x_2；

注：众数的定义是出现次数严格大于区间一半的数

$1 \leq n, q, C_m, C_l \leq 5 \times 10^5$。

对于维护众数，我们可以考虑摩尔投票法。

我们每次选出一个数 now 作为当前的基准数，考虑记 cnt 为当前基准数的出现次数，那么，我们每次遇到一个和基准数相同的数，就将 $cnt+1$，否则将 $cnt-1$，当 $cnt=0$ 时，将下一个数作为基准数。

很显然，如果该序列存在严格众数的话，通过以上的抵消之后，剩下来的数一定是严格众数。

于是对于这道题，我们可以考虑用线段树维护出每一个序列摩尔投票之后的结果，然后再将这些结果进行合并。

容易发现，我们摩尔投票的顺序是可以交换的，所以在求严格众数的时候，信息是可合并的。

于是对于 3 操作，我们只需要合并 m 个序列摩尔投票的结果，然后再 $check$ 其是不是严格众数。

而对于 4 操作，我们可以通过链表来维护序列的信息，再用线段树合并维护每个数字的出现次数的合并，而对于 1 和 4 操作，我们直接在线段树上修改就行了。

谢谢大家