C01_S05_极限运算法则

第一章 函数与极限

第五节 极限运算法则

目录

一、定理 1

两个无穷小的和是无穷小

用数学归纳法可证：有限个无穷小之和也是无穷小

二、定理 2

有界函数与无穷小的乘积是无穷小

推论 1：常数与无穷小的乘积是无穷小

推论 2：有限个无穷小的乘积是无穷小

三、定理 3

如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，那么

（1）$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

（2）$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

（3）若又有 $B \neq 0$，则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$

推论 1：如果 $\lim f(x)$ 存在，而 c 为常数，那么 $\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$

推论 2：如果 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，那么 $\lim\, [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

四、定理 4

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，如果

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = B$$

那么

（1）$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$

（2）$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$

（3）当 $y_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ 且 $B \neq 0$ 时，$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$

五、定理 5

如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$，而 $\lim \varphi(x) = A$，$\lim \psi(x) = B$，那么 $A \geq B$

六、定理 6：复合函数的极限运算法则

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0, \lim_{u\to u_0} f(u) = A$$

，且存在 $\delta_0 > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时，有 $g(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = A$$