C01_S04_无穷小与无穷大

第一章 函数与极限

第四节 无穷小与无穷大

目录

- 一、无穷小
    - 1. 定义
    - 2. 无穷小与函数极限的关系
- 二、无穷大
    - 1. 定义
    - 2. 无穷大与无穷小的关系
- 三、函数极限与无穷大总结

一、无穷小

1. 定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小

特别地，极限为零的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷小

注意：不要把无穷小与很小的数混为一谈，无穷小是一个趋势

零是可以作为无穷小的唯一常数

2. 无穷小与函数极限的关系

定理：在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小

二、无穷大

1. 定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 |x| 大于某一正数时有定义）。如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$（或 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$），那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大

特别地，如果 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x) = +\infty$（或 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x) = -\infty$），那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的正无穷大（或负无穷大）

注意：不要把无穷大与很大的数混为一谈，无穷大是一个趋势

一般地说，如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$，那么直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线

2. 无穷大与无穷小的关系

定理：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大

三、函数极限与无穷大总结

x	$f(x) \to A$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to +\infty$	$f(x) \to -\infty$
① $x \to x_0$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 时， 即有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 时， 即有 $\lvert f(x) \rvert > M$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 时， 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 时， 即有 $f(x) < -M$
② $x \to {x_0}^+$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时， 即有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时， 即有 $\lvert f(x) \rvert > M$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时， 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时， 即有 $f(x) < -M$
③ $x \to {x_0}^-$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时， 即有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时， 即有 $\lvert f(x) \rvert > M$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时， 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时， 即有 $f(x) < -M$
④ $x \to \infty$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $\lvert x \rvert > X$ 时， 即有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $\lvert x \rvert > X$ 时， 即有 $\lvert f(x) \rvert > M$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $\lvert x \rvert > X$ 时， 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $\lvert x \rvert > X$ 时， 即有 $f(x) < -M$
⑤ $x \to +\infty$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时， 即有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时， 即有 $\lvert f(x) \rvert > M$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时， 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时， 即有 $f(x) < -M$
⑥ $x \to -\infty$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时， 即有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时， 即有 $\lvert f(x) \rvert > M$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时， 即有 $f(x) > M$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时， 即有 $f(x) < -M$