C07_S04_一阶线性微分方程

第七章 微分方程

第四节 一阶线性微分方程

目录

一、线性方程

1. 一阶线性微分方程的定义

方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

叫做一阶线性微分方程，如果 $Q(x) \equiv 0$，那么方程 (1) 是齐次的；如果 $Q(x) \not\equiv 0$，那么方程 (1) 是非齐次的.

2. 一阶线性微分方程的求解

- 第一步：通过分离变量法，求得对应于非齐次线性方程 (1) 的齐次线性方程

  $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2}$$

  的通解：

  $$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

- 第二步：通过常数变易法，将齐次线性方程 (2) 的通解中的 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，即作变换

  $$y = ue^{-\int P(x)dx} \tag{3}$$

  ，则

  $$\frac{dy}{dx} = u' e^{-\int P(x)dx} - uP(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

  ，将 (3) 和 (4) 代入方程 (1) 化简可得

$$u' e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

，进而得出

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

，代入 (3)，便可得出非齐次线性方程 (1) 的通解：

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

，即

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

上式右端第一项是对应的齐次线性方程 (2) 的通解，第二项是非齐次线性方程 (1) 的一个特解

二、伯努利方程*

1. 伯努利方程的定义

方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{5}$$

叫作伯努利方程

2. 伯努利方程的求解

以 y^n 除方程 (5) 的两端可得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{6}$$

，令 $z = y^{1-n}$，则

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

，代入方程 (6) 稍作变换便得线性方程

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

，求出此方程的通解后，将 $z = y^{1-n}$ 代入便可得伯努利方程的通解