C01_S10_闭区间上连续函数的性质

第一章 函数与极限

第十节 闭区间上连续函数的性质

目录

一、有界性与最大值最小值定理

定理 1（有界性与最大值最小值定理）：在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值

二、零点定理与介值定理

如果 x_0 使 $f(x_0)=0$，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点

定理 2（零点定理）：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(x)\cdot f(b)<0$），则在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$

定理 3（介值定理）：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A,\quad f(b)=B$$

，则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得

$$f(\xi)=C\quad (a<\xi<b)$$

推论：在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 的值域为闭区间 $[m,M]$，其中 m 与 M 依次为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值

三、一致连续性*

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意给定的整数 ε，总存在正数 δ，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1、x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续

定理 4（一致连续性定理）：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在该区间上一致连续