C03_S01_微分中值定理

第三章 微分中值定理与导数的应用

第一节 微分中值定理

目录

一、罗尔定理

1. 费马引理

费马引理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x \in U(x_0)$，有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0))$$

，那么 $f'(x_0) = 0$.

证明：根据左导数和右导数相等证明

通常称导数为 0 的点为函数的驻点（或稳定点，临界点）

2. 罗尔定理

罗尔定理　如果函数 $f(x)$ 满足
（1）在闭区间 $[a, b]$ 上连续
（2）在开区间 (a, b) 内可导
（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a) = f(b)$
那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi\ (a < \xi < b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明：根据费马引理证明

二、拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$ 满足
（1）在闭区间 $[a, b]$ 上连续
（2）在开区间 (a, b) 内可导
那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi\ (a < \xi < b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{1}$$

成立.

证明：引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-L(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

根据罗尔定理证明.

公式 (1) 叫做**拉格朗日中值公式**

特例：当 $f(a)=f(b)$ 时，可得罗尔定理

延伸：公式 (1) 在区间 $[x,x+\Delta x]$ 上就成为

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

，如果记 $f(x)$ 为 y，则又可写成

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1) \tag{2}$$

，此式给出了函数增量 Δy 的准确表达式。因此，拉格朗日中值定理也叫做**有限增量定理**，公式 (2) 称为**有限增量公式**.

有时也称该定理为**微分中值定理**

定理　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，I 内可导且导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数

三、柯西中值定理

柯西中值定理　如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足
（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续
（2）在开区间 (a,b) 内可导
（3）对任一 $x\in(a,b), F'(x)\neq 0$
那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{3}$$

成立.

证明：引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)$$

根据罗尔定理证明.

特例：当 $F(x)=x$ 时，可得拉格朗日中值定理