C02_S05_函数的微分

第二章 导数与微分

第五节 函数的微分

目录

一、微分的定义

1. 定义

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

，其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy，即

$$dy=A\Delta x$$

2. 延伸

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且当 $f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分一定是 $dy=f'(x_0)\Delta x$

主部、线性主部

函数的微分：$dy=f'(x)\Delta x$

自变量的微分：$dx=\Delta x$，从而函数的微分又可记作 $dy=f'(x)dx$

微商：$\frac{dy}{dx}=f'(x)$

二、微分的几何意义

三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

导数公式	微分公式
$y'=f'(x)$	$dy=f'(x)dx$

请参照本章第二节（函数的求导法则）中基本初等函数的导数公式

2. 函数和、差、积、商的微分法则

（1）$d(u\pm v)=du\pm dv$

（2）$d(Cu)=Cdu$

（3）$d(uv)=vdu+udv$

（4）$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad(v\neq 0)$

3. 复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为

$$dy=y'_x dx=f'(u)g'(x)dx=f'(u)du$$

上式体现了微分形式不变性

四、微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

取 $x_0=0$ 得：$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$

几个工程中常用的近似公式（假定 $|x|$ 是较小的数值）：
（1）$(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x\quad(\alpha\in\mathbf{R})$
（2）$\sin x\approx x\quad(x$ 用弧度作单位来表达$)$
（3）$\tan x\approx x\quad(x$ 用弧度作单位来表达$)$
（4）$e^x\approx 1+x$
（5）$\ln(1+x)\approx x$

2. 误差估计*

间接测量误差

绝对误差：$|A - a|$ 叫做 a 的绝对误差

相对误差：$\frac{|A-a|}{|a|}$ 叫做 a 的相对误差

绝对误差限：δ_A ($|A - a| \leq \delta_A$) 叫做测量 A 的绝对误差限，常简称为绝对误差

相对误差限：$\frac{\delta_A}{|a|}$ ($|A - a| \leq \delta_A$) 叫做测量 A 的相对误差限，常简称为相对误差

如果已知测量 x 的绝对误差限是 δ_x，即

$$|\Delta x| \leq \delta_x$$

，那么，当 $y' \neq 0$ 时，y 的绝对误差

$$|\Delta y| \approx |dy| = |y'| \cdot |\Delta x| \leq |y'| \cdot \delta_x$$

，即 y 的绝对误差限约为

$$\delta_y = |y'| \cdot \delta_x$$

，y 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_y}{|y|} = \left|\frac{y'}{y}\right| \cdot \delta_x$$