C01_S09_连续函数的运算与初等函数的连续性

第一章 函数与极限

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

目录

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

定理 1：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和（差）$f \pm g$、积 $f \cdot g$、商 $\frac{f}{g}$（当 $g(x_0) \neq 0$ 时）都在点 x_0 连续

二、反函数与复合函数的连续性

定理 2：如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续

定理 3：设函数 $y = f[g(x)]$ 由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0) \subset D_{f \circ g}$，若 $\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0$，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续，则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$$

定理 4：设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0) \subset D_{f \circ g}$，若函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续，且 $g(x_0) = u_0$，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 也连续

三、初等函数的连续性

基本初等函数在它们的定义域内都是连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的

定义区间：包含在定义域内的区间
幂指函数：$u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0, u(x) \not\equiv 1)$

三个常用的等价无穷小关系式：
（1）$\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$
（2）$e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$
（3）$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ (x \to 0)$