C03_S03_泰勒公式

第三章 微分中值定理与导数的应用

第三节 泰勒公式

目录

- 一、泰勒多项式
- 二、泰勒（Taylor）中值定理 1
- 三、泰勒（Taylor）中值定理 2
- 四、几个初等函数的麦克劳林公式
    - 1. e^x 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式
    - 2. $\sin x$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式
    - 3. $\cos x$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式
    - 4. $\ln(1+x)$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式
    - 5. $(1+x)^\alpha$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

一、泰勒多项式

n 次泰勒多项式：

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

二、泰勒（Taylor）中值定理 1

泰勒（Taylor）中值定理 1　如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{1}$$

，其中

$$R_n(x) = o(\ (x-x_0)^n\ ) \tag{2}$$

证明：记 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$，然后反复应用洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

说明：公式 (1) 称为 $f(x)$ 在 x_0 处（或按 $(x-x_0)$ 的幂展开）的带有佩亚诺（**Peano**）余项的 n 阶泰勒公式，而 $R_n(x)$ 的表达式 (2) 称为佩亚诺余项

三、泰勒（Taylor）中值定理 2

泰勒（Taylor）中值定理 2　如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数，那么对任一 $x \in U(x_0)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{3}$$

，其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{4}$$

，这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值。

证明：对函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 反复应用柯西中值定理

说明：公式 (3) 称为 $f(x)$ 在 x_0 处（或按 $(x-x_0)$ 的幂展开）的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式，而 $R_n(x)$ 的表达式 (4) 称为拉格朗日余项

延伸：在泰勒公式 (1) 中，如果取 $x_0=0$，则可得带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

. 在泰勒公式 (3) 中，如果取 $x_0=0$，则可得带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

四、几个初等函数的麦克劳林公式

1. e^x 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

2. $\sin x$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

$$R_{2m}(x)=\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}=(-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1)$$

3. $\cos x$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$$

$$R_{2m+1}(x)=\frac{\cos\left[\theta x+(m+1)\pi\right]}{(2m+2)!}x^{2m+2}=(-1)^{m+1}\frac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2}\quad(0<\theta<1)$$

4. $\ln(1+x)$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

5. $(1+x)^\alpha$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$