C07_S08_常系数非齐次线性微分方程

第七章 微分方程

第八节 常系数非齐次线性微分方程

目录

一、二阶常系数非齐次线性微分方程的定义

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式是

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

，其中 p, q 是常数

二、二阶常系数非齐次线性微分方程的求解

下面介绍当方程 (1) 中的 $f(x)$ 取两种常见形式时，通过待定系数法求得特解 y^* .

1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

$$y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x}$$

，其中 k 的取值按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根、是特征方程的重根依次取为 0、1、2

推广　上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程，但此时 k 的取值为特征方程含根 λ 的重复次数（即若 λ 不是特征方程的根，则 k 取为 0；若 λ 是特征方程的 s 重根，则 k 取为 s）

2. $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

，其中 $m = \max\{l,\ n\}$，k 的取值按 $\lambda + \omega i$（或 $\lambda - \omega i$）不是特征方程的根、是特征方程的单根依次取为 0、1

推广　上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程，但此时 k 的取值为特征方程中含根 $\lambda + \omega i$（或 $\lambda - \omega i$）的重复次数