C01_S08_函数的连续性与间断点

第一章 函数与极限

第八节 函数的连续性与间断点

目录

一、函数的连续性

增量：Δx、Δy

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续。

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续。

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

左连续：$f({x_0}^-)=f(x_0)$

右连续：$f({x_0}^+)=f(x_0)$

二、函数的间断点

1. 定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：
（1）在 $x=x_0$ 没有定义
（2）虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 不存在
（3）虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim_{x\to x_0}\neq f(x_0)$

那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点。

2. 分类

2.1 第一类间断点

点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但 $f({x_0}^-)$ 及 $f({x_0}^+)$ 都存在

可去间断点：$f({x_0}^-) = f({x_0}^+)$

跳跃间断点：$f({x_0}^-) \neq f({x_0}^+)$

2.2 第二类间断点

不是第一类间断点的任何间断点

无穷间断点、振荡间断点