C01_S03_函数的极限

第一章 函数与极限

第三节 函数的极限

目录

一、函数极限的定义

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限定义：

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

左极限：$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = A$ 或 $f({x_0}^-) = A$

右极限：$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = A$ 或 $f({x_0}^+) = A$

左极限和右极限统称为单侧极限

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在并且相等，即：$f({x_0}^-) = f({x_0}^+)$

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限定义：

$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$

水平渐近线

二、函数极限的性质

1. 函数极限的唯一性

定理：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一

2. 函数极限的局部有界性

定理：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\le M$

3. 函数极限的局部保号性

定理：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）

变异：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A\ (A\neq 0)$，那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，就有 $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$

推论：如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\ge 0$（或 $f(x)\le 0$），而且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\ge 0$（或 $A\le 0$）

4. 函数极限与数列极限的关系*

定理：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0\ (n\in N_+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x)$