Co3_So5_函数的极值与最大值最小值

第三章 微分中值定理与导数的应用

第五节 函数的极值与最大值最小值

目录

一、函数的极值及其求法

1. 定义

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内的任一 x，有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0))$$

，那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点

2. 定理 1（必要条件）

定理 1（必要条件）　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$

3. 定理 2（第一充分条件）

定理 2（第一充分条件）　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导，那么
（1）若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值
（2）若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$，而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值
（3）若 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值

4. 求极值点及相应的极值

极值点可能存在的位置：
（1）$f'(x) = 0$ 的点
（2）$f'(x)$ 不存在的点
对（1）和（2）中得到的点，检查 $f'(x)$ 在每个点左、右两侧邻近的符号，如果两侧符号相反，则该点即为极值

点；如果是极值点，进一步确定是极大值点还是极小值点，并求出相应的极大值或极小值

5. 定理 3（第二充分条件）

定理 3（第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

二、最大值最小值问题

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值可能存在的位置：

（1）$f'(x)=0$ 的点

（2）$f'(x)$ 不存在的点

（3）区间端点，即 a 点和 b 点

对（1）、（2）、（3）中得到的点求相应的函数值，其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值