

# Co3\_So7\_曲率

## 第三章 微分中值定理与导数的应用

### 第七节 曲率

#### 目录

- [一、弧微分](#)
- [二、曲率及其计算公式](#)
- [三、曲率圆与曲率半径](#)
- [四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线](#)

#### 一、弧微分

弧微分公式:  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$

#### 二、曲率及其计算公式

平均曲率:

$$\bar{K} = \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$$

曲率:

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$

因为

$$\tan \alpha = y'$$

, 所以

$$\begin{aligned} \sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dx} &= y'' \\ \frac{d\alpha}{dx} &= \frac{y''}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{y''}{1 + y'^2} \end{aligned}$$

, 于是

$$d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx$$

, 从而

..

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

### 三、曲率圆与曲率半径

曲率圆、曲率中心、曲率半径 ( $\rho=\frac{1}{K}$ )

### 四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

函数  $y=f(x)$  的曲线在对应点  $M(x,y)$  的曲率中心  $D(\alpha,\beta)$  的坐标为

$$\begin{cases} \alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

渐屈线、渐伸线