C07_S06_高阶线性微分方程

第七章 微分方程

第六节 高阶线性微分方程

目录

一、二阶线性微分方程

1. 二阶线性微分方程举例

自由振动的微分方程、强迫振动的微分方程

串联电路的振荡方程

2. 二阶线性微分方程的定义

方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x) \tag{1}$$

，叫做二阶线性微分方程. 当方程右端 $f(x)\equiv 0$ 时，方程是齐次的，此时可得对应于此方程的二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \tag{2}$$

；当 $f(x)\not\equiv 0$ 时，方程是非齐次的

二、线性微分方程的解的结构

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 (2) 的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

也是方程 (2) 的解，其中 C_1,C_2 是任意常数

引入（函数组的线性相关性） 设函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为定义在区间 I 上的 n 个函数，如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n \equiv 0$$

成立，那么称这 n 个函数在区间 I 上线性相关；否则称线性无关

定理 2 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 (2) 的两个线性无关的特解，那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

就是方程 (2) 的通解，其中 C_1, C_2 是任意常数

推论 如果 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解，那么，此方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数

定理 3 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程 (1) 的一个特解. $Y(x)$ 是与方程 (1) 对应的齐次方程 (2) 的通解，则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是二阶非齐次线性方程 (1) 的通解

定理 4（叠加原理） 设二阶非齐次线性方程 (1) 的右端 $f(x)$ 是两个函数之和，即

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \tag{3}$$

，而 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 就是原方程 (3) 的特解

三、常数变易法*

1. 已知齐次方程的通解的常数变易法

以二阶线性方程为例，如果已知二阶齐次线性方程 (2) 的通解为

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

，通过常数变易法，令

$$y = y_1(x)v_1 + y_2(x)v_2$$

，则

$$y' = y_1 {v_1}' + y_2 {v_2}' + {y_1}' v_1 + {y_2}' v_2$$

，为了使 y'' 中不含 v_1'' 和 v_2''，可设

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0 \tag{4}$$

，从而

$$y' = y_1' v_1 + y_2' v_2$$

，再求导，得

$$y'' = y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2$$

，把 y, y', y'' 代入二阶非齐次线性方程 (1)，化简可得

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' = f \tag{5}$$

，联立方程 (4) 与方程 (5)，在系数行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

时，可解得

$$v_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad v_2' = \frac{y_1 f}{W}$$

，对上两式积分，得

$$v_1 = C_1 - \int \frac{y_2 f}{W}\,dx, \quad v_2 = C_2 + \int \frac{y_1 f}{W}\,dx$$

，于是得非齐次方程 (1) 的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W}\,dx$$

2. 已知齐次方程的一个不恒为零的特解的常数变易法

以二阶线性方程为例，如果已知二阶齐次线性方程 (2) 的一个不恒为零的特解为 $y_1(x)$，那么利用变换 $y = u y_1(x)$，把

$$y = y_1 u,\ y' = y_1 u' + y_1' u,\ y'' = y_1 u'' + 2 y_1' u' + y_1'' u$$

，代入二阶非齐次线性方程 (1) 化简可得

$$y_1 u'' + (2 y_1' + P y_1) u' = f$$

，令 $u' = z$，上式即化为一阶线性方程

$$y_1 z' + (2 y_1' + P y_1) z = f$$

，对此一阶线性方程求解后，求出 u，代入 $y = u y_1(x)$ 即可求出二阶非齐次线性方程 (1) 的通解. 此方法对于求二阶齐次线性方程 (2) 的通解同样适用