C05_S05_反常积分的审敛法 Γ函数

第五章 定积分

第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数*

目录

一、无穷限反常积分的审敛法

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$. 如果函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,+\infty)$ 上有界，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

定理 2（比较审敛原理） 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果 $0\leq f(x)\leq g(x)$ $(a\leq x\leq +\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；如果 $0\leq g(x)\leq f(x)$ $(a\leq x\leq +\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散

定理 3（比较审敛法 1） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$. 如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$，使得

$$f(x)\leq \frac{M}{x^p}\quad (a\leq x<+\infty)$$

，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得

$$f(x)\geq \frac{N}{x}\quad (a\leq x<+\infty)$$

，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

证明：根据反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\quad (a>0)$$

当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散可证

定理 4（极限审敛法 1） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$. 如果存在常数 $p>1$，使得

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=c<+\infty$$

，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；如果

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=d>0 \quad （或 \lim_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty）$$

，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

定理 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

收敛，那么反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

也收敛

延伸：通常称满足定理 5 条件的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **绝对收敛**. 于是，定理 5 可简单地表达为：**绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 必定收敛**

二、无界函数的反常积分的审敛法

定理 6（比较审敛法 2） 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果存在常数 $M>0$ 及 $q<1$，使得

$$f(x)\leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a<x\leq b)$$

，那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得

$$f(x)\geq \frac{N}{x-a} \quad (a<x\leq b)$$

，那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

证明：根据反常积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

当 $0<q<1$ 时收敛，当 $q\geq 1$ 时发散可证

定理 7（极限审敛法 2） 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果存在常数 $0<q<1$，使得

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)^q f(x)=c<+\infty$$

，那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如果

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)f(x)=d>0 \quad （或 \lim_{x\to a^+} (x-a)f(x)=+\infty）$$

，那么反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

三、Γ 函数

1. Γ 函数的定义

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$$

2. Γ 函数的几个重要性质

1. 递推公式

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \quad (s>0)$$

2. 当 $s\to 0^+$ 时，$\Gamma(s)\to +\infty$

3. 余元公式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (0<s<1)$$

4. 在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx$ 中，作代换 $x=u^2$，有

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2s-1}\,du \tag{1}$$

再令 $2s-1=t$ 或 $s=\frac{1+t}{2}$，即有

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^t\,du=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1+t}{2}) \quad (t>-1)$$

在式 (1) 中，另 $s=\frac{1}{2}$，得

$$2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$