C07_S03_齐次方程

第七章 微分方程

第三节 齐次方程

目录

一、齐次方程

1. 齐次方程的定义

如果一阶微分方程 $y' = f(x, y)$可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式，那么就称这方程为齐次方程

2. 齐次方程的求解

在齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

中，令

$$u = \frac{y}{x}$$

，则有

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

，代入方程 (1)，便得方程

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

，分离变量，得

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

，两端积分，得

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

，求出积分后，再将 u 代入，便可求得齐次方程的通解

二、可化为齐次的方程

对于微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1} \tag{2}$$

，当 $c = c_1 = 0$ 时，方程是齐次的，否则是非齐次的. 在非齐次的情况下，令

$$x = X + h,\ y = Y + k$$

，则方程 (2) 成为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1 X + b_1 Y + a_1 h + b_1 k + c_1}$$

，对于方程组

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \end{cases}$$

，如果 $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$，则方程组有解，方程 (2) 便化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1 X + b_1 Y}$$

，如果 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$，则方程组无解，但此时令 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$，则方程 (2) 可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}$$

，引入新变量 $v = ax + by$，则

$$\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right)$$

，代入方程 (2) 得到可分离变量的微分方程

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right) = \frac{v + c}{\lambda v + c_1}$$