

Co1_So6_极限存在准则 两个重要极限

第一章 函数与极限

第六节 极限存在准则 两个重要极限

目录

- [一、极限存在准则 I: 夹逼准则](#)
 - [1. 数列极限夹逼准则](#)
 - [2. 函数极限夹逼准则](#)
 - [3. 第一个重要极限](#)
- [二、极限存在准则 II](#)
 - [1. 数列极限存在准则 II](#)
 - [2. 函数极限存在准则 II](#)
 - [3. 第二个重要极限](#)
- [三、柯西极限存在准则](#)

一、极限存在准则 I: 夹逼准则

1. 数列极限夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

- (1) 从某项起, 即 $\exists n_0 \in N_+$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $y_n \leq x_n \leq z_n$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

2. 函数极限夹逼准则

如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件:

- (1) 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ (或 $|x| > M$) 时, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} h(x) = A$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)} f(x)$ 存在, 且等于 A

3. 第一个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

二、极限存在准则 II

1. 数列极限存在准则 II

单调有界数列必有极限

2. 函数极限存在准则 II

对于自变量的不同变化过程 ($x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$), 准则有不同的形式, 此处以 $x \rightarrow x_0^-$ 为例:

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在

3. 第二个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

三、柯西极限存在准则

也叫做柯西审敛原理

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $m > N, n > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$