C03_S04_函数的单调性与曲线的凹凸性

第三章 微分中值定理与导数的应用

第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

目录

一、函数单调性的判定法

定理 1　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，那么
（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加
（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少

证明：利用拉格朗日中值定理证明

二、曲线的凹凸性与拐点

1. 定义

定义　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1,x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

，那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凹的（或凹弧）；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

，那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凸的（或凸弧）

2. 定理 2

定理 2　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么
（1）如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的
（2）如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的

3. 拐点

凹凸性改变的点称为拐点

拐点可能存在的位置:

（1）$f''(x) = 0$ 的点

（2）$f''(x)$ 不存在的点

对（1）和（2）中得到的点，检查$f''(x)$ 在每个点左、右两侧邻近的符号，如果两侧符号相反，则该点即为拐点