C06_S02_定积分在几何学上的应用

第六章 定积分的应用

第二节 定积分在几何学上的应用

目录

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

由曲线 $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$ 及直线 $x = a,\ x = b$ $\left(a < b\right)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

由曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ $\left(f(x) \geq g(x)\right)$ 所围成的区域的面积:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

2. 极坐标情形

由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ $\left(\rho(\theta) \geq 0\right)$ 及射线 $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ $\left(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi\right)$ 所围成的曲边扇形的面积:

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left[\rho(\theta)\right]^2 d\theta$$

二、体积

1. 旋转体的体积

旋转体、旋转轴、旋转椭球体

由连续曲线 $y = f(x)$、直线 $x = a,\ x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得到的立体的体积:

$$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

2. 平行截面面积已知的立体的体积

设 $A(x)$ 为立体垂直于 x 轴的截面面积，则立体的体积为：

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

三、平面曲线的弧长

曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长、可求长

定理 光滑曲线弧是可求长的

平面曲线的弧长：

1. 设曲线弧由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \left(\alpha \le t \le \beta\right)$$

给出，则弧长为：

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

2. 当曲线弧由直角坐标方程

$$y=f(x) \quad \left(a \le x \le b\right)$$

给出，则弧长为：

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$$

3. 当曲线弧由极坐标方程

$$\rho=\rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

给出，则弧长为：

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$$