C07_S07_常系数齐次线性微分方程

第七章 微分方程

第七节 常系数齐次线性微分方程

目录

一、二阶常系数齐次线性微分方程

1. 定义

在二阶齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

中，如果 y'，y 的系数 $P(x)$，$Q(x)$ 均为常数，即 (1) 式成为

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

，其中 p，q 是常数，那么称方程 (2) 为二阶常系数齐次线性微分方程. 如果 p，q 不全为常数，称方程 (1) 为二阶变系数齐次线性微分方程

2. 求解

2.1 推导

选取 $y = e^{rx}$ 作为二阶常系数齐次线性微分方程 (2) 的特解，得到微分方程 (2) 对应的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{3}$$

，对特征方程求解，有三种不同情形：

（1）当 $p^2 - 4q > 0$ 时，特征方程有两个不相等的实根：$r_1 \neq r_2$. 此时可得微分方程 (2) 的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

（2）当 $p^2-4q=0$ 时，特征方程有两个相等的实根：$r_1=r_2$. 此时只得到微分方程 (2) 的一个特解

$$y_1=e^{r_1x}$$

，设另一个特解 $y_2=e^{r_1x}u(x)$，可求得 $u''=0$，选取 $u=x$，则

$$y_2=xe^{r_1x}$$

，y_1，y_2 线性无关，因此可得微分方程 (2) 的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$$

（3）当 $p^2-4q<0$ 时，特征方程的解是一对共轭复根：

$$r_1=\alpha+\beta i,\quad r_2=\alpha-\beta i$$

. 此时

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x},\quad y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}$$

，利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

，可得

$$y_1=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right),\quad y_2=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x-i\sin\beta x\right)$$

，根据叠加原理可知

$$y_1{}^*=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x\quad y_2{}^*=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

也是微分方程 (2) 的特解，且线性无关，因此微分方程 (2) 的通解为

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$$

2.2 结论

根据以上推导过程，求二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0\tag{2}$$

的通解的步骤如下：

1. 写出微分方程 (2) 的特征方程

$$r^2+pr+q=0\tag{3}$$

2. 求出特征方程 (3) 的两个根 r_1，r_2
3. 根据特征方程 (3) 的两个根 r_1，r_2 的不同情形写出微分方程 (2) 的通解

特征方程$r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1，r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1，r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$

一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

二、n 阶常系数齐次线性微分方程

1. 定义

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_n y=0 \tag{4}$$

，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},p_n$ 都是常数

微分算子：

$$D=\frac{d}{dx}$$

，则

$$Dy=\frac{dy}{dx},\ D^n y=\frac{d^n y}{dx^n}$$

，则方程 (4) 记作

$$(D^n+p_1 D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n)y=0 \tag{5}$$

微分算子 D 的 n 次多项式：

$$L(D)=D^n+p_1 D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+p_n$$

，于是方程 (4) 可记作

$$L(D)y=0$$

2. 求解

同样，选取 $y=e^{rx}$ 作为 n 阶常系数齐次线性微分方程 (4) 的特解，可得特征方程

$$L(r)=r^n+p_1 r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0 \tag{6}$$

，根据特征方程的根，可以根据下表写出微分方程 (4) 的通解

特征方程的根	微分方程的通解中的对应项
单实根 r	给出一项：Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出两项：$e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$
k 重实根 r	给出 k 项：$e^{rx}\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)$
一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出 $2k$ 项： $e^{rx}\left[\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x\right]$