C05_S01_定积分的概念与性质

第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

目录

一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

曲边梯形、曲边、窄曲边梯形、窄矩形

2. 变速直线运动的路程

二、定积分的定义

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分（简称积分），记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

，其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$ 叫做积分区间

定理 1　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定理 2　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

三、定积分的近似计算

矩形法、梯形法、抛物线法（又称辛普森法）

四、定积分的性质

性质 1　设 α 与 β 均为常数，则

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

性质 2　设 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

性质 3　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，那么

$$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b-a$$

性质 4　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，那么

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a<b)$$

推论 1　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq g(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a<b)$$

推论 2

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a<b)$$

性质 5　设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a<b)$$

性质 6（定积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使下式成立:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a\leq\xi\leq b)$$

由积分中值定理所得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值