Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа (ПЗМА)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.153503 Кончик Д.С.

Руководитель: канд. ф.-м. н., доцент Анисимов В.Я.

Минск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 4
1.1. Числовые ряды 4
1.2. Функциональные ряды 4
1.3. Степенные ряды 4
1.4. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена 4
1.5. Дифференциальные уравнения 4
1.5. Интегрирование ДУ с помощью степенных рядов 4
2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 4
2.1. Примеры интегрирования 4
2.1. Интегрирование в Maple 4
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 3
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 6

ВВЕДЕНИЕ

Термин «дифференциальное уравнение» принадлежит Лейбницу (1676, опубликовано в 1684 г.). Начало исследований по дифференциальным уравнениям восходит ко временам Лейбница, Ньютона, в работах которых исследовались первые задачи, приводящие к таким уравнениям. Лейбниц, Ньютон, братья Я. и И. Бернулли разрабатывали методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве универсального способа использовались разложения интегралов дифференциальных уравнений в степенные ряды. Некоторые классы уравнений были приведены к уравнению с разделяющимися переменными [1, с. 431].

Решения многих дифференциальных уравнений не выражаются в элементарных функциях. В этих случаях пользуются приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде степенного ряда; сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому решению. Указанный степенной ряд находят способом неопределенных коэффициентов или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена) [2, с. 511].

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Числовые ряды

Пусть дана числовая последовательность

$$(a_n) = a_1, a_2 \dots, a_n, \dots$$

Образуем последовательность частичных сумм (S_n) :

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1 \\ &S_2 = a_1 + a_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \\ &S_{n+1} = S_n + a_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Выражение

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots \qquad (1.1)$$

обозначается символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и называется *числовым рядом*. $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ — *члены ряда*, a_n— n-й член ряда. Сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_i$ называется *n-й частичной суммой ряда*.

Числовой ряд (1.1) *сходится*, если последовательность частичных сумм $(\mathrm{S_n})$ сходится к числу S — *сумме* ряда.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \qquad (1.2)$$

В этом случае пишут

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \qquad (1.3)$$

Ряд называется *расходящимся*, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности $(\mathrm{S_n})$ не существует или равен бесконечности.

Пример 1. Рассмотрим *геометрическую прогрессию*

$$b_1, b_1 q, \cdots, b_1 q^{n-1}, \cdots$$

Сумма первых n членов данной ГП:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (1.4)$$

При $|q| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, ряд расходится.

При $q = 1$ $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ряд расходится.

При $|q| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$, ряд сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$, его сумма $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$, а при $|q| \geq 1$ расходится.

Суммой двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n).$$

Произведением ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на действительное число α называется ряд

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n).$$

Пусть некоторый числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ сходится к числу S — сумме ряда. Введем некоторый числовой ряд $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ — *остаток ряда*. Тогда из (1.3) имеем равенство:

$$S = S_n + r_n. \tag{1.5}$$

Теорема 1.1. Для того чтобы ряд (1.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Теорема 1.2 (необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.6}$$

Доказательство.

Пусть $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n$,

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$ ■

Итак, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то всегда выполнено условие (1.6). Отсюда следует, что если условие (1.6). не выполнено, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Это является *достаточным условием, или признаком расходимости ряда.*

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то выполнено необходимое условие сходимости ряда (1.6), но из условия (1.6) не следует сходимость ряда. Если же это условие не выполнено, то ряд расходится, что является *достаточным условием расходимости ряда*.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \tag{1.7}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0$ — необходимое условие сходимости выполняется. Найдем n-ую частичную сумму ряда S_n.

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} =$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, значит, ряд (1.7) расходится.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гусак А.А. и др. Справочник по высшей математике / А.А.Гусак, Г.М.Гусак, Е.А.Бричикова. — Мн.: ТетраСистемс. 1999. — 640 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов. — 13-е изд. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 560 с.
3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: [Учеб. Пособие для втузов]. Ч. III. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. — 3-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 432 с.
5. Бугров Я. С. Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; Под ред. В. А. Садовничего. — 6-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. Т.3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — 512 с.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 1966. - 464 с.
7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003. — 416 с.
8. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд, стереотип. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 352 с.
9. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие — Белгород: Изд. Белаудит, 2001. — 116 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. - М.: Физматлит, 1964. - 810 с.