> *#Лабораторная работа 3.1.*
#Вариант 1.
#Выполнил: Кончик Денис, 153503

> #Задание 1
#Для данного дифференциального уравнения методом изоклин постройте интегральную кривую, проходящую через точку М.
#$y' = y - x^2$, $M(1, 2)$.

> # Исходое ДУ
$de := diff(y(x), x) = y(x) - x^2 :$

> # Решение задачи Коши
$s := simplify(dsolve(\{de, y(1) = 2\}, y(x)));$

$$s := y(x) = x^2 + 2\,x + 2 - 3\,\mathrm{e}^{x-1} \tag{1}$$

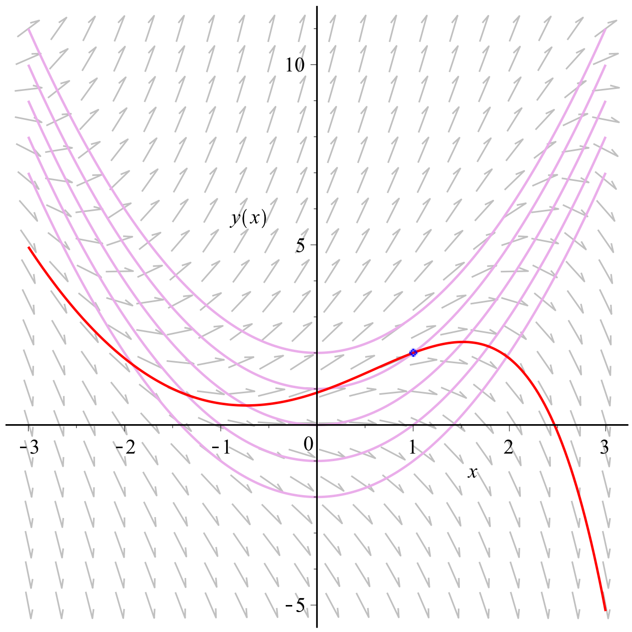
> # Интегральная кривая
$curve := plot(\mathrm{rhs(s)}, \mathrm{x} = -3 ..3, \mathrm{color} = \mathrm{red}) :$

> # Поле направлений
$field := DEtools[dfieldplot](de, y(x), x = -3 ..3, y = -5 ..11, color = gray) :$

> # Точка M(1,2)
$p := plots[pointplot]([1, 2], color = [blue]) :$

> # Изоклины
$isoclines := plot\left(\left[seq\left(x^2 + i, i = -2 ..2\right)\right], x = -3 ..3, color = \mathrm{plum}\right) :$

> # Построение
$plots[display](field, isoclines, curve, p);$



> *restart*

> #Задание 2.1
#Найдите линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точкое M нормальный вектор **MN** с концом на оси Oy
#имеет длину, равную a, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy. Сделайте чертеж.
1) $M_0(15, 1)$, $a = 25$

>

> #Уравнение нормали через M0: $y - y0 = -\dfrac{1}{y'(x0)}(x - x0)$

> #Найдем точку N пересечения нормали с Oy:

$$\begin{cases} \mathrm{y} - \mathrm{y0} = -\dfrac{1}{y'(x0)}(x - x0) \\ x = 0 \end{cases}$$

> # N (0; $y0 + x0/y'(x0)$)

> # А если взять уравнение нормали не через M0, а через произвольную точку M на кривой, то
N (0; $y + x/y'(x)$)

> # Длина вектора MN (= 25)

$$|\boldsymbol{MN}| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{y'(x)}\right)^2}$$

$$|MN| = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x)\right)^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

> # $x^2 + \left(\dfrac{x}{y'(x)}\right)^2 = 25^2$

> # Разрешим ДУ относительно y
$y'(x) = \pm\dfrac{x}{\mathrm{sqrt}(625 - x^2)}$

> # Решение ДУ

$$y := \pm\, simplify\left(\int \frac{x}{\mathrm{sqrt}(625 - x^2)}\, \mathrm{d}x\right) + C$$

$$y := -\sqrt{-x^2 + 625} + C \qquad \textbf{(3)}$$

> # Т.к MN образует острый угол с Oy, то
$y = -sqrt(625 - x^2) + C$

> # Найдем C

$C := 1 + \mathrm{sqrt}(25^2 - 15^2);$

$$C := 21 \qquad \textbf{(4)}$$

> # Искомая кривая:

$f := -\mathrm{sqrt}(625 - x^2) + \mathrm{C};$

$$f := -\sqrt{-x^2 + 625} + 21 \qquad \textbf{(5)}$$

> # Найдем прямую, проходящую через вектор M_0N

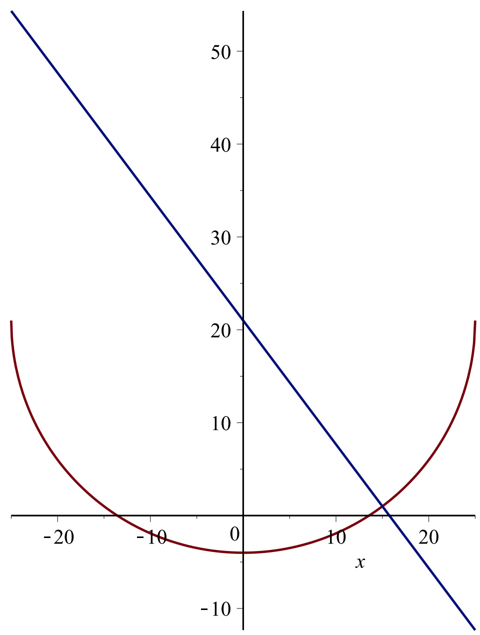
$$k := subs\left(x = 15.0,\ \frac{1}{diff(f, x)}\right);$$

$$k := 1.333333333 \qquad \textbf{(6)}$$

> $n := subs(x = 15.0, f) - k \cdot (x - 15);$

$$n := 21.00000000 - 1.333333333\,x \qquad \textbf{(7)}$$

> $plot([f, n], x = -25 ..25, scaling = constrained);$



> $restart$

(8)

> #Задание 2.2
#Найдите линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор MN с концом на оси Ox имеет проекцию

#на ось Ox,обратно пропорциональную абсциссе точки M. Коэффициент пропорциональности равен a. Сделайте чертеж.

2) $M_0(1, e)$, $a = -\frac{1}{2}$

> # (x,y) - координаты произвольной точки M на искомой кривой

> # Уравнение касательной к кривой в точке M
$y - y0 = y' \cdot (x - x0)$

> # По условию $x_N - x = \frac{a}{x}$

> # Точка N $(x_N, 0)$ принадлежит касательной, тогда
$y = y'(x - x_N)$, $x_N = x - \frac{y}{y'}$
$-\frac{y}{y'} = \frac{a}{x}$

> # Решаем ДУ с учетом y(1) = e (задача Коши)
$a := -\frac{1}{2} : de := \frac{y(x)}{diff(y(x), x)} = -\frac{a}{x};$

$$de := \frac{y(x)}{\frac{d}{dx} y(x)} = \frac{1}{2x} \tag{9}$$

> $f := rhs(simplify(dsolve(\{de, y(1) = e\}, y(x))));$

$$f := e^{x^2} \tag{10}$$

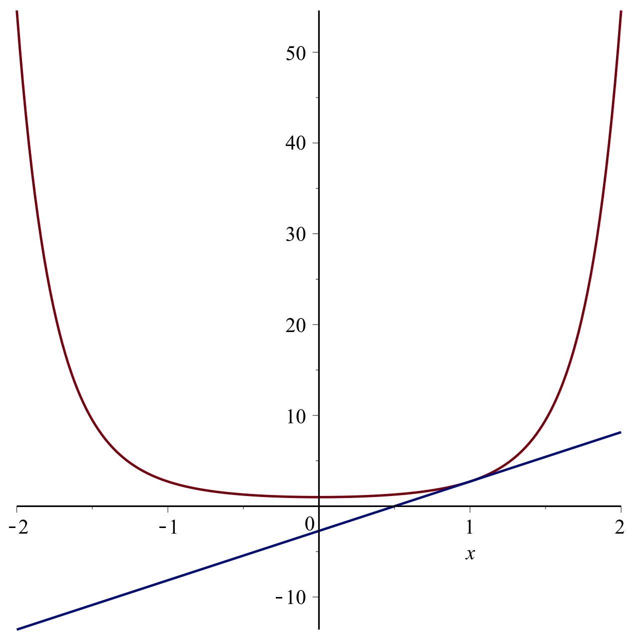
> # Найдем прямую, проходящую через вектор M_0N
$k := (subs(x = 1, diff(f, x)));$

$$k := 2\,e \tag{11}$$

> $m := subs(x = 1, f) + k \cdot (x - 1);$

$$m := e + 2\,e\,(x - 1) \tag{12}$$

> $plot([f, m], x = -2..2);$



> *restart*

> #Задание 3
#Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую.
#Сделайте вывод о типе особой точки.
$\# \, y' = \dfrac{4\,x + 21\,y - 25}{24\,x + y - 25}$

> # ДУ
$de := diff(y(x), x) = \dfrac{4 \cdot x + 21 \cdot y(x) - 25}{24 \cdot x + y(x) - 25};$

$$de := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = \frac{4\,x + 21\,y(x) - 25}{24\,x + y(x) - 25} \qquad \textbf{(13)}$$

> # Общий интеграл уравнения
$s := dsolve(de);$

$$s := 4\,\ln\left(-\frac{y(x) - 5 + 4\,x}{x - 1}\right) - 5\,\ln\left(\frac{-y(x) + x}{x - 1}\right) - \ln(x - 1) - \_C1 = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

> # Особая точка (числитель и знаменатель правой части ДУ, разрешенного относительно y, равны 0)
$special\_point := solve(\{4\,x + 21\,y - 25 = 0, 24\,x + y - 25 = 0\});$

$$special\_point := \{x = 1, y = 1\} \qquad \textbf{(15)}$$

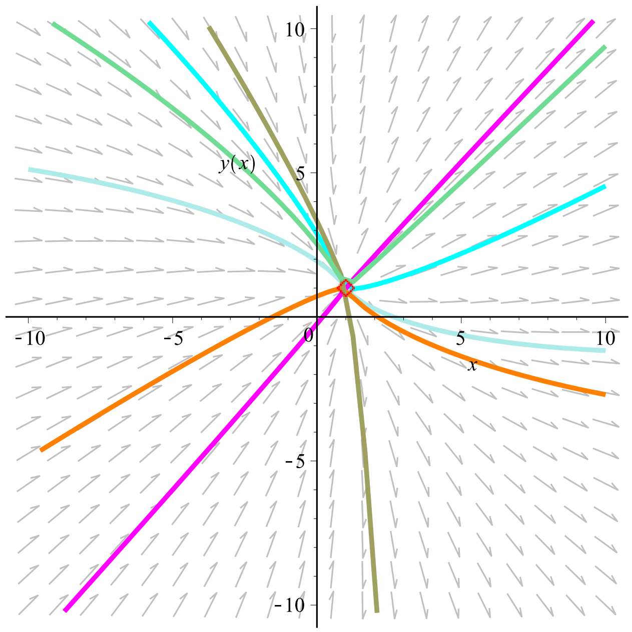
> $p := plots[pointplot]([\mathrm{rhs}(\mathrm{special\_point}[1]), rhs(special\_point[2])], color = red, symbolsize = 20):$

> # Интегральные кривые и поле направлений
$sol := DEtools[DEplot](\mathrm{de}, y(x), x = -10..10, y(x) = -10..10, [y(-2) = 3, y(-3) = 7, y(-5) = -6, y(7) = -2, y(2) = -9, y(-6) = 8], color = gray, linecolor = [\mathrm{turquoise, cyan, magenta, coral, khaki, aquamarine}]):$

>

> # Интегральные кривые и особая точка в одной системе координат

> $plots[display](sol, p);$



> *# Составим матрицу из коэффициентов исходного ДУ*
> $M := Matrix([[24, 1], [4, 21]]);$

$$M := \begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 4 & 21 \end{bmatrix} \tag{16}$$

> *# Характеристическое уравнение и его корни*
> $eq := linalg[det](M - \lambda \cdot Matrix([[1, 0], [0, 1]])) = 0$

$$eq := \lambda^2 - 45\,\lambda + 500 = 0 \tag{17}$$

> $solve(eq, \lambda);$

$$25, 20 \tag{18}$$

> *# Оба корня характеристического уравнения положительны, значит, особая точка -* ***неустойчивый узел***

> *restart*

> #Задание 4

> #Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой
> # $y'+xy=(1+x)\cdot e^{-x}\cdot y^2,\ y(0)=1$

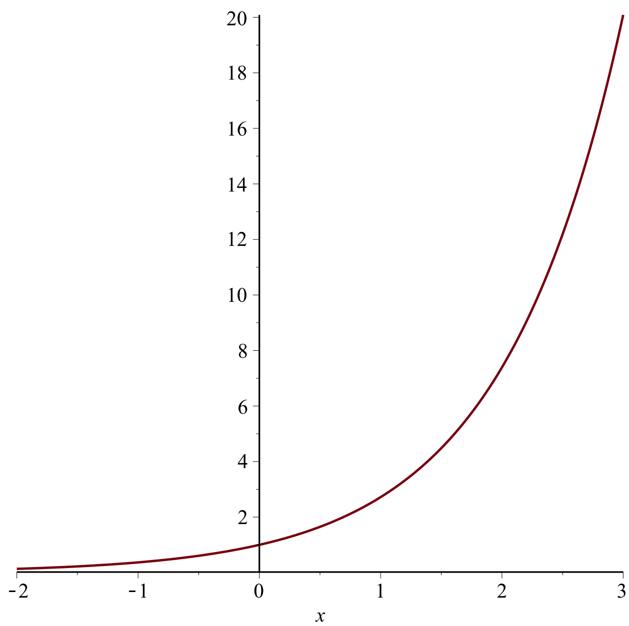
> # Исходное ДУ
> $de := diff(y(x), x) + x\cdot y(x) = (1+x)\cdot \mathrm{e}^{-x}\cdot (y(x))^2;$

$$de := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) + x\, y(x) = (1+x)\, \mathrm{e}^{-x}\, y(x)^2 \tag{19}$$

> # Решение задачи Коши
> $s := simplify(dsolve(\{de, y(0) = 1\}, y(x)));$

$$s := y(x) = \mathrm{e}^{x} \tag{20}$$

> # Чертеж интегральной кривой
> $plot(rhs(s), x = -2..3);$



> restart

> #Задание 5
#Решите дифференциальные уравнения. Постройте в одной системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной постоянной от -1 до 1

1) $x = y'\cdot arcsin(y') + \sqrt{1-(y')^2}$

2) $y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y'}{1-y'}\right| - y'$

> #5.1

> # Исходное ДУ
$de := x = subs\left(y' = diff(y(x), x), y'\cdot \arcsin(y') + \mathrm{sqrt}\left(1-y'^2\right)\right);$

$$de := x = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right)\arcsin\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right) + \sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right)^2} \quad \mathbf{(21)}$$

> # Решим ДУ в параметрическом виде
Функция x(t)
$x(t) := \mathrm{t}\cdot\arcsin(\mathrm{t}) + \mathrm{sqrt}\left(1-t^2\right);$

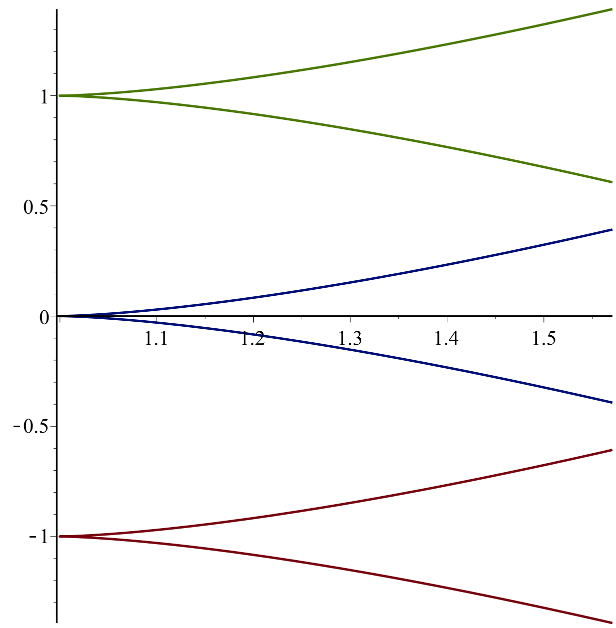
$$x := t \rightarrow t\arcsin(t) + \sqrt{1-t^2} \quad \mathbf{(22)}$$

> # Функция y(t)
$eq := dsolve(diff(y(t), t) = diff(x(t), t)\cdot t):$

> $y := unapply(rhs(eq), t);$

$$y := t \rightarrow \frac{1}{2}\,t^2\arcsin(t) + \frac{1}{4}\,t\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{4}\arcsin(t) + \_C1 \quad \mathbf{(23)}$$

> # Построение интегральных кривых
$plot([seq([x(t), subs(\_C1 = i, y(t)), t = -1..1], i = -1..1)]);$



> restart

> #5.2

> # Исходное ДУ

$de := y = subs\left(y' = diff\,(y(x), x),\ \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1+y'}{1-y'}\right| - y'\right);$

$$de := y(x) = \frac{1}{2}\ \ln\left|\frac{1+\frac{d}{dx}\ y(x)}{1-\left(\frac{d}{dx}\ y(x)\right)}\right| - \left(\frac{d}{dx}\ y(x)\right) \qquad \textbf{(24)}$$

> # Решим ДУ в параметрическом виде
> # Функция y(t)

$y(t) := \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) - t;$

$$y := t \rightarrow \frac{1}{2}\ \ln\left(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) - t \qquad \textbf{(25)}$$

> # Функция $x(t)$

$eq := dsolve(diff\,(y(t), t) = diff\,(x(t), t) \cdot t)\ :$

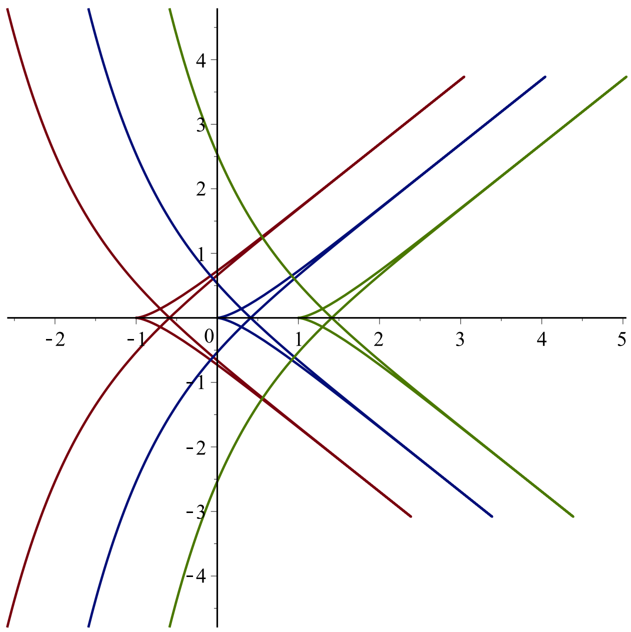
> $x := unapply(rhs(eq), t);$

$$x := t \rightarrow piecewise\left(t=-1, undefined, t=1, undefined, -\frac{1}{2}\ln((1+t)(t-1))\right) + \_C1 \qquad \textbf{(26)}$$

> $x := t \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\left|1-t^2\right|\right) + \_C1;$

$$x := t \rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(\left|1-t^2\right|\right) + \_C1 \qquad \textbf{(27)}$$

> *# Построение интегральных кривых*
> *plot*([*seq*([*subs*(_C1 = *i*, *x*(*t*)), *y*(*t*), *t* =−5 ..5], *i* =−1 ..1)]);



> *restart*

> *#Задание 6*
> *#Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат график особого решения и интегральных кривых*
> *#при целых значениях произвольной постоянной от −3 до 3.*
> *#* $y=xy'+2(y')^2-1$

> *# Исходное ДУ*
> $de := y(x) = x \cdot diff(y(x), x) + 2 \cdot diff(y(x), x)^2 - 1;$ 4

$$de := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - 1 \tag{28}$$

4

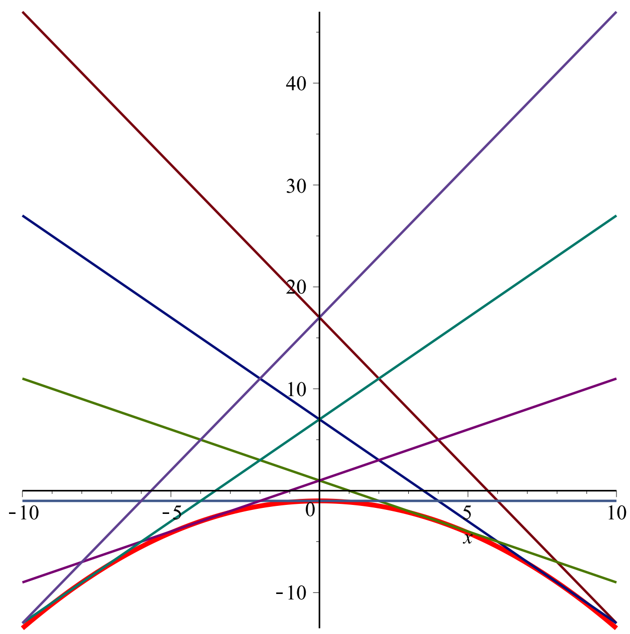
\> *# Все решения ДУ*
s := *dsolve*(*de*);

$$s := y(x) = -\frac{1}{8}\,x^2 - 1,\; y(x) = 2\,\_C1^2 + \_C1\,x - 1 \tag{29}$$

\> *# Особое решение*
special := *plot*(*rhs*(*s*[1]), *thickness* = 3, *color* = *red*) :

\> *# Интегральные кривые*
curves := *plot*([*seq*(*subs*(_C1 = *i*, *rhs*(*s*[2])), *i* = -3 ..3)]) :

\> *# Особое решение и интегральные кривые в одной системе координат*
plots[*display*](*special*, *curves*);



\> *restart*

\>