5.1. Случайные величины. Закон распределения вероятностей

Под с***лучайной величиной*** понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Возможные значения случайной величины образуют множество Ξ, которое называется ***множеством возможных значений*** случайной величины. Обозначения случайной величины: X, Y, Z; возможные значения случайной величины: x, y, z.

Примеры случайных величин:

1. Опыт –бросание двух монет. Тогда Ξ ={(г,г), (г,ц), (ц,г), (ц,ц)}. Числовая функция X (СВ X)– число выпадений герба, определенная на множестве Ξ={0,1,2} – герб может выпасть 0,1,2 раза.

2. Опыт - работа ЭВМ после ремонта, случайная величина T – время наработки на отказ. Множество возможных значений Ξ – теоретически вся правая половина оси абсцисс. Множество возможных значений для этого опыта несчетно.

В зависимости от вида множества Ξ случайные величины могут быть *дискретными* и *недискретными*. СВ X называется ***дискретной***, если множество ее возможных значений Ξ – счетное или конечное. Если множество возможных значений СВ несчетно, то такая СВ является ***недискретной***.

В теоретико-множественной трактовке основных понятий теории вероятностей случайная величина X есть функция элементарного события: $X=\varphi(\omega)$, где ω – элементарное событие, принадлежащее пространству Ω. При этом множество Ξ возможных значений СВ X состоит из всех значений, которые принимает функция $\varphi(\omega)$.

Законом распределения СВ называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной. (То есть, всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями.)

СВ будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т.е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое событие. Про случайную величину мы будем говорить, что она *подчинена данному закону распределения*.

5.2. Ряд распределения дискретной случайной величины.

Наиболее простую форму можно придать закону распределения дискретной случайной величины. *Рядом распределения* дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины X: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и вероятности этих значений $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, где $p_i=P\{X=x_i\}$ – вероятность того, что в результате опыта СВ X примет значение x_i ($i=1,2,\ldots, n, \ldots$).

Ряд распределения записывается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Так как события {X=x1}, {X=x2}, … несовместны и образуют полную группу, то сумма всех вероятностей, стоящих в нижней строке равна единице:

$$\sum_i P\{X = x_i\} = 1. \qquad (5.1)$$

Многоугольник вероятностей – есть графическое изображение ряда вероятностей – по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений. Для наглядности полученные точки соединяются отрезками прямых. Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения полностью характеризует случайную величину – и является одной из форм закона распределения.

5.3. Функция распределения

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для *всех* случайных величин (как дискретных, так и недискретных) является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции x:

$$F(x)=\mathrm{P}\{X<x\}.$$

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная точка X попадет левее заданной точки x (рис. 5.1). Из геометрической интерпретации наглядно можно вывести *основные свойства функции распределения.*

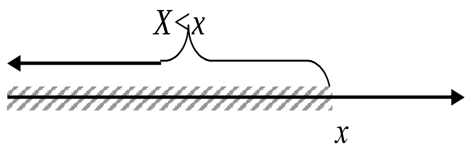

Рис. 5.1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0.$ (5.2)

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$ (5.3)

3. $F(x)$ – неубывающая функция своего аргумента, т.е. при $x_1 < x_2$

$F(x_1) \le F(x_2)$.

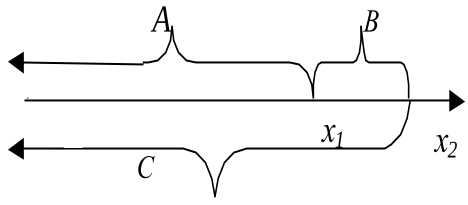

Рис. 5.2

Доказательство этого свойства иллюстрируется рис. 5.2.

Представим событие $C=\{X<x_2\}$ как сумму двух несовместных событий $C=A+B$, где $A=\{X<x_1\}$ и $B=\{x_1 \le X<x_2\}$.

По правилу сложения вероятностей

$$P(C)=P(A)+P(B),$$

т.е. $P\{X<x_2\}=P\{X<x_1\}+P\{x_1 \le X<x_2\}$, или

$$\mathrm{F}(x_2)=\mathrm{F}(x_1)+\mathrm{P}\{x_1 \le X<x_2\}.$$

Но P{$x_1 \le X < x_2$}≥0, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$

4. $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$, для $\forall[\alpha,\beta[\in R$. (5.4)

Доказательство этого свойства вытекает из предыдущего доказательства. *Вероятность того, что случайная величина X в результате опыта попадет на участок от α до β (включая α)* ***равна приращению функции распределения*** *на этом участке.*

Таким образом, *функция распределения F(x)любой случайной величины есть неубывающая функция своего аргумента, значения которой заключены между 0 и 1: 0≤F(x)≤1, причем F(-∞)=0, F(+∞)=1.*

5.4. Функция распределения дискретной случайной величины

Исходной информацией для построения функции распределения дискретной случайной величины *X* является ряд распределения этой СВ.

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n	$>x_n$
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	0
$F(x_i)$	0	p_1	p_1+p_2		$p_1+..+p_{n-1}$	1

$F(x_i)=P\{X<x_i\}=P\{(X=x_1)\cup(X=x_2)\cup \dots \cup(X=x_{i-1})\}= p_1+\dots+p_{i-1}$.

$F(x_i) = \sum_{n=1}^{i} p_n$

$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)$, то есть суммирование распространяется на все значения x_i, которые меньше x.

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятности этих значений.

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le x_1, \\ p_1, x_1 < x \le x_{2,} \\ p_1+p_2, x_2 < x \le x_{3,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1+p_2+\dots\dots p_i, x_i < x \le x_{i+1,} \\ 1, x > x_n \end{cases} \qquad (5.5)$$

Пример: СВ X – количество выпавших гербов при подбрасывании двух монет. Случайная величина X принимает следующие значения X={0, 1, 2}. Вероятности этих значений: *P(X*=0*)*=0,25*; P(X*=1*)*=0,5*; P(X*=2*)*=0,25. Тогда функция распределения этой случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 0{,}25, 0<x\le 1\\ 0{,}25+0{,}5, 1<x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

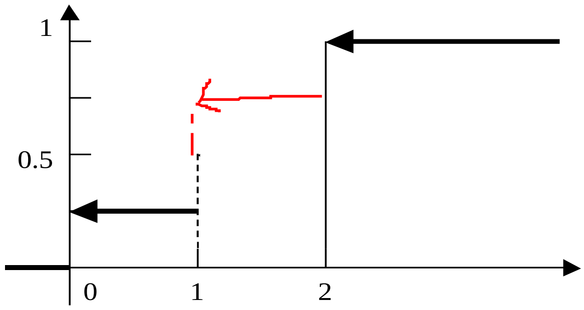

Рис. 5.3

случайная величина есть там где функция распределения растет;
величина скачка есть вероятность наступления события

5.5. Непрерывная случайная величина (НСВ). Плотность вероятности

Случайная величина Х называется ***непрерывной***, если ее функция распределения *F(x)* есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Так как для таких случайных величин функция *F(x)* нигде не имеет скачков, то *вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*

$P\{X=\alpha\}=0$ для любого α.

В качестве закона распределения, имеющего смысл только для непрерывных случайных величин существует понятие ***плотности распределения*** или ***плотности вероятности***.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины Х на участок от x до $x+\Delta x$ равна приращению функции распределения на этом участке:

$$\mathrm{P}\{x\le X<x+\Delta x\}=F(x+\Delta x)-F(x).$$

Плотность вероятности на этом участке определяется отношением

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x\le X\le x+\Delta x\}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{dF(x)}{dx}\qquad(5.6)$$

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке и обозначается $f(x)$. График плотности распределения называется кривой распределения.

Пусть имеется точка x и прилегающий к ней отрезок dx. Вероятность попадания случайной величины X на этот интервал равна $f(x)dx$. Эта величина называется **элементом вероятности.**

Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок $[a, b[$ равна сумме элементарных вероятностей на этом участке:

$$\mathrm{P}\{a\le X<b\}=\int_a^b f(x)dx.\qquad(5.7)$$

В геометрической интерпретации $\mathrm{P}\{\alpha\le X<\beta\}$ равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и опирающейся на участок (α,β) (рис. 5.4).

Это соотношение позволяет выразить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X через ее плотность:

$$F(x) = \mathrm{P}\{X < x\} = \mathrm{P}\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \quad (5.8)$$

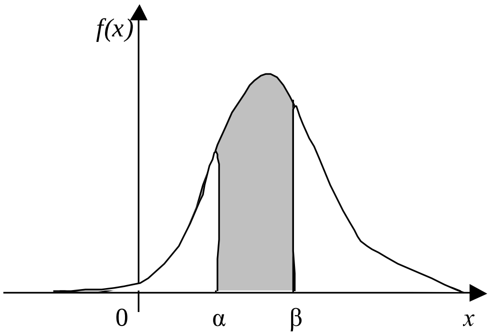

Рис. 5.4

В геометрической интерпретации $F(x)$ равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и лежащей левее точки x (рис. 5.5).

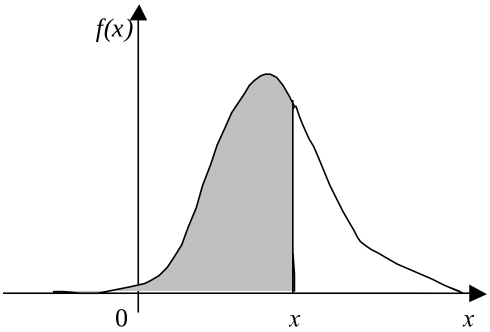

Рис. 5.5

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \geq 0$.
   Это свойство следует из определения *f(x)* – производная неубывающей функции не может быть отрицательной.

2. Условие *нормировки:* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Это свойство следует из формулы (5.8), если положить в ней x=∞.

Геометрически основные свойства плотности *f(x)* интерпретируются так:

1. вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;
2. полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

5.6. Смешанная случайная величина

Случайная величина называется *смешанной,* если функция распределения *F(x)* на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точках имеет разрывы (скачки).

На тех участках, где *F(x)* непрерывна, вероятность каждого отдельного значения случайной величины равна нулю. Вероятность тех значений, где функция распределения совершает скачки, отличны от нуля и равны величине скачка.

Пример 5.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,8. Построить ряд распределения числа попаданий.

Решение. Случайная величина X (число попаданий в цель) может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятность принятия величиной X этих значений, используя формулу Бернулли:

$$\mathrm{P}\{X = 0\} = (1-p)^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032\ ,$$

$$\mathrm{P}\{X = 1\} = C_5^1 p(1-p)^4 = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064,$$

$P\{X=2\}=C_5^2 p^2(1-p)^3 = 10\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$,

$P\{X=3\}=C_5^3 p^3(1-p)^2 = 10\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048$,

$P\{X=4\}=C_5^4 p^4(1-p) = 5\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2 = 0{,}4096$,

$P\{X=5\}= p^5 = 0{,}8^5 = 0{,}32768$.

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Пример 5.2. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases} c\cos x, -\pi/2\le x\le \pi/2 \\ 0, |x|>\pi/2 \end{cases}.$$

Найти константу c, функцию распределения $F(x)$ и вычислить $P\{|x|<\pi/4\}$.

Решение. Константу c вычислим исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\cos x dx = c\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c+c=2c=1,$$

откуда $c = 0{,}5$.

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности.

Для $x < -\pi/2$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0$

для $-\pi/2\le x\le\pi/2$ $F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{x}\frac{\cos y}{2}dy = \frac{\sin y}{2}\Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{1+\sin x}{2}$,

для $x > \pi/2$, $F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos y}{2}dy + \int_{\pi/2}^{x} 0dy = 1$.

Окончательно имеем

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<-\pi/2 \\ (1+\sin x)/2, |x|\le\pi/2 \\ 1, x>\pi/2 \end{cases}$$

Вероятность $P\{|x|<\pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.