14. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

14.1. Закон распределения многомерной случайной величины

N-мерной случайной величиной **$(X_1, X_2, \dots X_n)$** называется совокупность одномерных величин X_i, которые принимают значение в результате проведения одного и того же опыта.

Это можно интерпретировать как случайные точки или случайные векторы в n-мерном пространстве. Например, совокупность n последовательных измерений с.в. X- система n случайных величин.

Полной характеристикой системы служит закон распределения, который может быть задан функцией распределения или плотностью вероятности.

Функцией распределения n случайных величин $(X_1, X_2 \dots X_n)$ называется вероятность выполнения n неравенств вида $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2 \dots x_n) = P((X_1 < x_1)(X_2 < x_2) \dots (X_n < x_n)).$$

Плотностью распределения системы n непрерывных с.в. называется n-я смешанная частная производная функции $F(x_1, x_2 \dots x_n)$, взятая один раз по каждому аргументу:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2 \dots x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Плотность распределения систем случайных величин обладает следующими свойствами:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) = 1.$
2. $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$

Зная закон распределения системы, можно определить законы распределения отдельных величин, входящих в систему. Функция распределения каждой из величин, входящих в систему можно получить, если положить все остальные аргументы равными ∞: $F_1(x_1) = F(x_1, \infty \dots \dots \infty)$ или при выделении из системы случайных величин $(X_1, X_2, \dots X_n)$ подсистемы случайных величин $(X_1, X_2, \dots X_к)$

$$F_{1\dots к}(x_1, \dots, x_к) = F(x_1 \dots \dots x_к, \infty \dots \dots \infty).$$

Плотность распределения каждой из величин, входящих в систему, можно получить, интегрируя плотность распределения системы в бесконечных пределах по всем остальным аргументам:

$$f_1(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2 \dots \dots, x_n) dx_2 \dots \dots dx_n$$

Плотность распределения частной системы случайных величин *(*$X_1, X_2, \dots X_n$*)* подсистемы с.в. *(*$X_1, X_2, \dots X_k$*)* определяется так*:*

$$f_{1,2\dots k}(x_1, x_2 \cdots x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f\ (x_1, x_2 \dots\dots x_n) dx_{k+1} dx_{k+2} \dots\dots dx_n$$

<u>*Условным законом*</u> распределения системы случайных величин *(*$X_1, X_2, \dots X_n$*)* называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что остальные величины *(*$X_{k+1}, X_{k+2}, \dots X_n$*)* приняли значение *(*$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$*)*.

Условная плотность может быть вычислена по формуле:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_k | x_{k+1}, x_{k+2} \cdots x_n) = \frac{f(x_1, x_2 \cdots x_n)}{f_{k+1,\dots n}(x_{k+1}, x_{k+2} \cdots x_n)}$$

Случайные величины *(*$X_1, X_2, \dots X_n$*)* называются *независимыми*, если закон распределения каждой частной системы, выделенной из системы *(*$X_1, X_2, \dots X_n$*)*, не зависит от того, какие значения приняли остальные случайные величины.

Плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots \cdot f_n(x_n).$$

Вероятность попадания случайной точки *(*$X_1, X_2, \dots X_n$*)* в пределы *n*-мерной области *D* выражается *n*-кратным интегралом:

$$P((X_1, \dots, X_n) \subset D) = \int \dots \int_{(D)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

Эта формула является основной формулой для вычисления вероятностей событий, не сводящихся к схеме случаев. Переходят от схемы событий к схеме случайных величин (чаще всего – непрерывных) и сводят событие А к событию, состоящему в том, что система случайных величин *(*$X_1, X_2, \dots X_n$*)* окажется в пределах некоторой области *D* . Тогда вероятность события А может быть вычислена по этой формуле.

14.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Как и в случае одномерных случайных величин, при невозможности точно установить законы распределения, применяют приближенное описание системы случайных величин с помощью минимального количества числовых характеристик.

В качестве основных числовых характеристик используем следующие:

1. *Вектор математических ожиданий* $M=(m_1, m_2, \dots m_n)$ – характеризующих средние значения величин

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1,\dots,x_n) dx_1 \dots dx_n$$

2. *Вектор дисперсий* $\boldsymbol{D}=(D_1,D_2,\dots D_n)$ – характеризующих их рассеивание

$$D_i = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)^2 f(x_1,\dots,x_n) dx_1 \dots dx_n$$

3. *Корреляционная матрица*

$$K_{ij} = M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j \right],$$

где $\overset{\circ}{X}_i = X_i - m_i \quad \overset{\circ}{X}_j = X_j - m_j$ или матрица коэффициентов корреляции

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_x \sigma_y},$$

характеризующих попарную корреляцию всех величин, входящих в систему.

Дисперсия каждой из случайных величин X_i есть, по существу, не что иное, как корреляционный момент X_i и той же величины X_i: $D_i = K_{ii} = M[\overset{\circ}{X}{}_i^2] = M[\overset{\circ}{X}_i \cdot \overset{\circ}{X}_i]$, поэтому корреляционная матрица и матрица коэффициентов корреляции принимает вид:

$$\|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} D_1 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & D_2 & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & D_n \end{vmatrix},$$

где

$$K_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) f(x_1,\dots,x_n) dx_1 \dots dx_n$$

В случае, когда случайные величины не коррелированы, все элементы, кроме диагональной, равны 0 и корреляционная матрица принимает вид диагональной матрицы:

$$\|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n \end{vmatrix}$$

Помимо корреляционной матрицы для описания систем случайных величин может быть использована матрица коэффициентов корреляции. Это матрица, составленная не из корреляционных моментов, а из коэффициентов корреляции (нормированная корреляционная матрица):

$$\left\| r_{ij} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

где

$$R_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{D_i D_j}}$$

Для некоррелированных случайных величин матрица коэффициентов корреляции вырождается в единичную матрицу:

$$\left\| r_{ij} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

14.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $Y = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$, где $X_1, X_2, \dots X_n$ - случайные величины с известной совместной n-мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2 \dots x_n)$.

Начальные моменты:

$$\alpha_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Центральные моменты:

$$\mu_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x_1, \dots, x_n) - m_y)^k f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Основные числовые характеристики:

- Математическое ожидание функции от произвольного числа случайных аргументов. Для непрерывных величин:

$$m_y = M[\varphi(X_1, X_2 \dots X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) f(x_1, x_2 \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где

$f(x_1, x_2 \dots x_n)$- плотность распределения системы $(X_1, X_2 \dots X_n)$.

- Дисперсия функции от произвольного числа аргументов для непрерывных случайных величин

$$D_y = D[\varphi(X_1, X_2 \ldots . X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2 \ldots . x_n) - m_\varphi]^2 f(x_1, x_2 \ldots . x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

или аналогичная форма

$$D[\varphi(X_1, X_2 \ldots . X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2 \ldots . x_n)]^2 f(x_1, x_2 \ldots . x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - m^2{}_\varphi$$

На практике редко известна совместная плотность вероятности; известны лишь числовые характеристики. Определение числовых характеристик функций по заданным числовым характеристикам аргументам значительно упрощает решение задач теории вероятностей. Чаще всего такие упрощенные функции относятся к линейным функциям, однако некоторые элементарные нелинейные функции также подразумевают подобный подход.

Пусть известны векторы М [x_i] = m_i D [x_i]= D_i системы случайных величин (X_1 , X_2 ,…X_n) - с известной совместной n-мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2 \ldots . x_n)$, $||K_{ij}||$ - корреляционная матрица

Задача определения числовых характеристик *Y* в таком случае разрешима только для определения классов функций φ.

14.4. Числовые характеристики суммы случайных величин

1. *Математическое ожидание суммы случайных величин.*

Пусть случайная величина $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Тогда математическое ожидание суммы М[*У*] равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M[Y] = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i].$$

2. *Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин* $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$, ($a_i, b$ неслучайные коэффициенты) равно линейной функции их математических ожиданий:

$$m_y = M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{xi} + b, \quad m_{xi} = M\left[X_i\right].$$

2. *Дисперсия суммы случайных величин* определяется так:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

или

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} .,$$

где двойная сумма распространяется на все элементы корреляционной матрицы системы случайных величин *(X_1, X_2, …X_n)*.

Докажем это соотношение.

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_{xi}\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - m_{xi})\right)^2\right] =$$

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})\right] = \sum_{i-1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M[(X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}.$$

Если все случайные величины *(X_1, X_2, ...X_n)*, входящие в систему, некоррелированы, т.е. $K_{ij} = 0, i \neq j$, то формула (12.7) принимает вид:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i],$$

т.е. дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

4. *Дисперсия линейной функции* случайных величин определяется соотношением

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}.$$

Доказательство: Рассмотрим дисперсию случайной величины $Y = \sum_{i=1}^{n} (a_i X_i) + b$. Согласно свойствам дисперсий можно записать:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right].$$

Дисперсия этой случайной величины

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i m_{xi}\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\,(X_i - m_{xi})\right)^2\right] =$$

$$M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})\right] = \sum_{i-1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j M[(X_i - m_{xi})(X_j - m_{xj})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j K_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{ij}.$$

Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i].$$

14.3. Числовые характеристики произведения случайных величин.

Пусть *Z=XY*, где *X* и *Y* – случайные величины с известными числовыми характеристиками.

1. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс их ковариация:

$$M[XY] = M[X]\,M[Y] + K_{xy}. \qquad (12.20)$$

Доказательство:

$$K_{xy} = M[\dot{X}\dot{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - m_x M[Y] -$$
$$- m_y M[X] + m_x m_y = M[XY] - M[Y]M[X]$$

Математическое ожидание произведения некоррелированных (независимых) величин равно произведению математических ожиданий

$$\mathrm{M}[X_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{X_J}] = m_{\mathrm{j}} \cdot m_{\mathrm{i}}$$

2. Дисперсия произведения <u>независимых</u> случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выражается формулой:

$$D\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n}(D[X_i] - m_{xi}^2) - \prod_{i=1}^{n} m_{xi}^2 . \qquad (12.21)$$

Пример 12.1. Случайная величина X равномерно распределена от -1 до +1. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = X^2$. Вычислить корреляционный момент величин X и Y.

Решение. Плотность вероятности X равна:

Вычислим математическое ожидание Y

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5, -1 \le x \le 1 \\ 0, x < -1, x > 1 \end{cases}$$

$$m_y = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 0{,}5 dx = \frac{1}{3}$$

и дисперсию D_y

$$D_y = \int_{-1}^{1} (x^2)^2 0{,}5 dx - m_y^2 = \frac{4}{45}$$

Вычислим корреляционный момент K_{xy} по формуле (11.11):

K_{xy} = M[XY] - $m_x m_y$ = M[$X \cdot X^2$] - $m_x m_y$ =M[X^3] - $m_x m_y$.

Так как $m_x = (a + b)/2 = (-1 + 1)/2 = 0$, то

$$K_{xy} = M\left[X^3\right] = \int_{-1}^{1} x^3 0{,}5 dx = 0.$$

Пример 12.2. Величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют следующие числовые характеристики:

$m_1 = 2$, $m_2 = -3$, $m_3 = 0$, $D_1 = 4$, $D_2 = 13$, $D_3 = 9$.

Определить коэффициент корреляции r_{zy} величин Y и Z:

$$Y = 3X_1 - X_2,$$

$$Z = X_3 - 2X_1.$$

Решение. Вычислим математические ожидания Y и Z по формуле (12.5):

$$m_y = 3 \cdot m_1 - 1 \cdot m_2 = 9,$$
$$m_z = m_3 - 2 \cdot m_1 = -4.$$

Вычислим дисперсию D_y и D_z по формуле (12.9)

$$D_y = (3)^2 \cdot D_1 + (-1)^2 \cdot D_2 = 49,$$
$$D_z = D_3 + (-2)^2 D_1 = 25.$$

Рассчитаем корреляционный момент K_{yz}. Для этого определим M[YZ]

$$\text{M}[YZ] = \text{M}[(3X_1 - X_2)(X_3 - 2X_1)] = \text{M}[3X_1X_3 - 6X_1^2 -$$
$$- X_2X_3 + 2X_2X_1] = 3m_1m_3 - 6\text{M}[X_1^2] -$$
$$- m_2m_3 + 2m_2m_1 = -6\text{M}[X_1^2] - 12.$$

Так как $D_1 = \text{M}[X_1^2] - m_1^2$, то $\text{M}[X_1^2] = D_1 + m_1^2 = 8$.

Таким образом M[YZ] = -60. Тогда

$K_{yz} = \text{M}[YZ] - \text{m}_y \text{m}_z = -60 - 9(-4) = -24$.

Величину r_{yz} определим так:

$$r_{YZ} = \frac{K_{YZ}}{\sqrt{D_y D_Z}} = -\frac{24}{35}.$$