

ЛР №4

1. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток вызовов с интенсивностью $X = 0,4$ вызовов/мин. Средняя продолжительность разговора $t_{\text{обсл}} = 3$ мин; время разговора имеет показательное распределение. Найти финальные вероятности со стояний СМО: p_0 и p_n а также A , Q , $P_{\text{отк}}$, Сравнить пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы раз говор длился в точности 3 мин, а заявки шли одна за другой регулярно, без перерывов.
2. Имеется одноканальная СМО с отказами. Поток заявок — простейший с интенсивностью X . Время обслуживания — не случайное и в точности равно $t_{\text{обс}} = 1 / X$. Найти относительную и пропускную способность СМО в предельном стационарном режиме.
3. Железнодорожная сортировочная горка, на которую по дается простейший поток составов с интенсивностью $X = 2$ состава в час, представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (ропуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением $t_{\text{обсл}} = 20$ мин. Найти финальные вероятности состояний СМО, среднее число z составов, связанных с горкой, среднее число составов в очереди, среднее время $t_{\text{СОСТ}}$ пребывания состава в СМО, среднее время t_Q пребывания состава в очереди.
4. Условия предыдущей задачи усложняются тем, что в парке прибытия железнодорожной сортировочной горки могут находиться одновременно не более трех составов (включая обслуживаемый). Если состав прибывает в момент, когда в парке прибытия уже находится три состава, он вынужден ожидать своей очереди на внешних путях. За один час пребывания состава на внешних путях станция платит штраф S руб. Определить средний суточный штраф, который придется уплатить за

ожидание составов на внешних путях.

5. Автозаправочная станция (АЗС) имеет две колонки ($n = 2$); площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех автомобилей ($L = 4$). Поток автомобилей, прибывающих на станцию, простейший с интенсивностью $X = 1$ авт/мин. Время обслуживания автомобиля — показательное со средним значением $t_{обс} = 2$ мин. Найти финальные вероятности состояний АЗС и ее характеристики: A , Q , $POTK$, A_i , среднее число заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в системе.
6. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью $X = 4$ заявок/ч. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{обсл} = 0,8$ ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход $S = 4$ руб. Содержание каждого канала обходится 2 руб/ч. Решить: выгодно или невыгодно в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех?
7. Рассматривается простейшая СМО с практически неограниченным числом каналов ($n \rightarrow \infty$). На вход СМО поступает поток заявок с интенсивностью X ; интенсивность потока обслуживания (для одного канала) равна $1/t_{обсл}$. Найти финальные вероятности состояний СМО и среднее число занятых каналов k . $1/t_{обсл}$
8. Рассматривается одноканальная СМО с отказами; на ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью X . Время обслуживания — показательное с параметром $\gamma = 1 / t_{обс}$. Работающий канал может время от времени выходить из строя (отказывать); поток отказов канала — простейший с интенсивностью X . Восстановление (ремонт) вышедшего из строя канала начинается мгновенно после его отказа; время ремонта — показательное с параметром $R = 1 / t_p$. Заявка, которая обслуживалась в момент выхода канала из строя, покидает СМО необслуженной. Найти финальные вероятности состояний СМО: s_0 — канал свободен; s_1 — канал занят, исправен; s_2 — канал ремонтируется и характеристики СМО:

относительную и абсолютную пропускную способность системы

9. Условия задачи 8 повторяются, но с той разницей, что канал может выходить из строя и в неработающем состоянии (с интенсивностью $y' < y$).
10. Рассматривается простейшая одноканальная СМО с ограниченной очередью $m = 2$; работающий канал может иногда выходить из строя (отказывать). Заявка, которая обслуживается в момент отказа канала, становится в очередь, если в ней еще есть свободные места; если нет, она покидает СМО необслуженной. Интенсивность потока заявок X , потока обслуживания Y , потока отказов канала Z , потока восстановлений (ремонт) R . Перечислить состояния СМО и найти для них финальные вероятности, характеристики эффективности СМО: относительную и абсолютную пропускные способности системы, среднее время пребывания заявки в системе $X = 2, Y = 1, Z = 0,5, R = 1$.
11. Подсчитать характеристики эффективности для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди ($m = 3$) при условиях: $X = 4$ заявки/ч; $\text{тобс} = 1 / (x = 0,5 \cdot 2)$. ВЫЯСНИТЬ, как эти характеристики изменяются, если увеличить число мест в очереди до $m = 4$.
12. Система массового обслуживания — билетная касса с одним окошком ($p = 1$) и неограниченной очередью. В кассе продаются билеты в пункты А и В; пассажиров, желающих купить билет в пункт А, приходит в среднем трое за 20 мин, в пункт В — двое за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания — показательное. Установить, существуют ли финальные вероятности состояний СМО и если да — вычислить первые три из них. Найти характеристики эффективности СМО.
13. Одноканальная СМО — ЭВМ, на которую поступают заявки. Поток заявок — простейший со средним интервалом между заявками $t = 10$ мин. Время обслуживания тобсл распределено по закону Эрланга 3-го порядка с математическим ожиданием $\text{тобс} = 8$ мин. Определить среднее число z заявок в СМО и среднее число F заявок в очереди, а также средние

времена пребывания заявки в системе $t_{\text{сист}}$ и в очереди t_Q .

14. Система массового обслуживания — магазин, в котором каждый покупатель проходит три фазы обслуживания: 1) выбор товара; 2) оплата 3) получение товара. В магазин прибывает простейший поток покупателей с интенсивностью $X = 45$ чел/ч. В отделе выбора имеются четыре точки, занимая которые, покупатели могут самостоятельно выбирать и примерять товар. Среднее время примерки и выбора $t_x = 5$ мин. Выбравший товар покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь (касса в магазине одна). Среднее время оплаты товара в кассе $t_2 = 1$ мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают три продавца; Определить показатели эффективности магазина. Дополнительно ответить на следующие вопросы: 1) В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей?
15. Рассматривается простейшая двухканальная СМО с «не терпеливыми» заявками. Интенсивность потока заявок $X = 3$ заявки/ч; среднее время обслуживания одной заявки $t_{\text{обс}} = 1/X = 1$ ч; средний срок, в течение которого заявка «терпеливо» стоит в очереди, равен 0,5 ч. Подсчитать финальные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001. Найти характеристики эффективности СМО: абсолютную и относительную пропускные способности системы, среднее время пребывания заявки в системе, среднюю длину очереди.
16. Имеется p -канальная СМО с неограниченной очередью. На ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью X ; время обслуживания — показательное с параметром X . Обслуживание происходит без гарантии качества; с вероятностью p оно удовлетворяет заявку, а с вероятностью $q = 1 - p$ — не удовлетворяет, и заявка обращается в СМО вторично и либо сразу обслуживается, если нет очереди, либо становится в очередь, если она есть. Ввести состояния СМО (нумеруя их по числу заявок в СМО); найти финальные вероятности

состояний и характеристики эффективности СМО. Найти среднее число рекламаций, поданных в единицу времени, если каждая неудачно обслуженная заявка подает рекламацию с вероятностью R .

17. Оператор обслуживает n станков, которые время от времени отказывают (требуют наладки). Интенсивность потока отказов одного станка равна X . Если в момент отказа станка оператор свободен, он немедленно приступает к наладке; если нет — станок становится в очередь на наладку, поток отказов станка простейший, время наладки — показательное с параметром $Y = 1/t_{обс}$. Ввести состояния СМО, нумеруя их по числу неисправных станков; найти финальные вероятности состояний СМО и следующие характеристики ее эффективности: A — среднее количество станков, ремонтируемое рабочим в единицу времени; w — среднее число неисправных станков; R — среднее число станков, ожидающих ремонта в очереди; $P_{зан}$ — вероятность того, что оператор будет занят.
18. Имеется простейшая трехканальная СМО с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок $X = 4$ заявки/ч; среднее время обслуживания $t_{обсл} = 1/X = 0,5$ ч. Выгодно ли, имея в виду: 1) среднюю длину очереди, 2) среднее время пребывания заявки в очереди, 3) среднее время пребывания заявки в СМО, объединить все три канала в один, с вдвое меньшим средним временем обслуживания?
19. Рассматривается система массового обслуживания — стоянка такси, на которую поступают простейший поток пассажиров с интенсивностью X и простейший поток автомобилей с интенсивностью Y . Пассажиры образуют очередь, которая уменьшается на единицу, когда к стоянке подходит автомобиль. В случае, если на стоянке нет пассажиров, в очередь становятся автомобили. Число мест для автомобилей на стоянке ограничено (равно R); число мест в очереди для пассажиров также ограничено (равно I). Все потоки событий — простейшие. Посадка производится мгновенно. Построить граф состояний СМО, найти финальные вероятности состояний, среднюю длину очереди пассажиров,

среднюю длину очереди автомобилей, среднее время пребывания в очереди пассажира, среднее время пребывания в очереди такси и посмотреть, как эти характеристики изменятся при неограниченной очереди пассажиров и машин.

20. В столовой самообслуживания имеется один раздаточный пункт, на котором отпускаются как первые, так и вторые блюда. Поток посетителей столовой — простейший с интенсивностью X ; на отпуск как первого, так и второго блюда идет случайное время, распределенное по показательному закону с одним и тем же параметром p . Некоторые посетители берут и первое, и второе (доля таких посетителей равна q), другие — только второе (доля $1 - q$). Найти: 1) условия, при которых существует устойчивый, стационарный режим работы столовой; 2) среднюю длину очереди и среднее время пребывания посетителей в столовой, если посетитель съедает одно блюдо в среднем за время t , а два блюда — за время $2t$.
21. Пример простейшей СМО с отказами и с приоритетом. Имеется двухканальная СМО с отказами, на которую поступают два простейших потока заявок: первый (I) с интенсивностью X_1 и второй (II) с интенсивностью X_2 (будем кратко называть их «заявки I» и «заявки II»). Заявки I имеют перед заявками II приоритет, состоящий в следующем: если заявка I приходит в момент, когда все каналы заняты и хотя бы один из них обслуживает заявку II, то пришедшая заявка I «вытесняет» из обслуживания заявку II, становится на ее место, а та покидает СМО необслуженной. Если заявка I приходит в момент, когда все каналы заняты обслуживанием заявок I, то она получает отказ и покидает СМО. Заявка II получает отказ, если она приходит в момент, когда заняты оба канала (безразлично какими заявками). Построить размеченный граф состояний СМО, нумеруя со стояния двумя индексами (i, j) ; первый указывает число заявок I, второй — число заявок II, находящихся в системе. Найти следующие характеристики эффективности СМО: вероятности отказа для заявок первого и второго типов, среднее число обслуженных заявок каждого типа в единицу времени, среднее число

каналов, занятых обслуживанием заявок.

22. Имеется одноканальная СМО с двумя местами в очереди ($R = 2$). На вход СМО поступают два простейших потока заявок I и II с интенсивностями X_1 и X_2 . Времена обслуживания — показательные с параметрами. Заявка I, прибывшая в СМО, «вытесняет» заявку II, если она обслуживается, и занимает место в очереди перед ней, если она стоит в очереди. «Вытесненная» заявка II покидает СМО необслуженной, если в очереди уже нет мест, и становится в очередь, если места есть. Нумеруя состояния СМО двумя индексами g, j соответственно числу заявок I и II, находящихся в СМО, построить размеченный граф состояний СМО и написать уравнения для финальных вероятностей состояний. Определить: вероятности обслуживания заявок каждого типа, среднее время пребывания заявки в системе, среднее время пребывания в очереди любой заявки.
23. На вход n -канальной СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью X . Время обслуживания — показательное с параметром μ . Перед тем как начать обслуживание заявки, канал должен подготовиться («разогреться»). Время «разогрева» $T_{\text{разогр}}$ имеет показательное распределение с параметром λ и не зависит от того, как давно канал прекратил работу. Заявка, заставшая канал свободным, «занимает» его и ждет, пока он разогреется, после чего поступает на обслуживание. Заявка, заставшая все каналы занятыми (обслуживаемой или ожидающей заявкой), покидает СМО и остается необслуженной. Найти финальные вероятности СМО и характеристики ее эффективности: вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность Q , абсолютную пропускную способность, среднее число занятых каналов k .
24. Простейшая одноканальная СМО с очередью и «разогревом» канала. На одноканальную СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок с интенсивностью X . Время обслуживания — показательное с параметром μ . Перед тем как приступить к обслуживанию заявки, свободный до того канал должен «разогреться». Время «разогрева» —

показательное с параметром Z и не зависит от того, как давно канал закончил работу. Если обслуживание начинается сразу же после окончания обслуживания предыдущей заявки, «разогрева» не нужно. Составить граф состояний СМО и определить финальные вероятностей состояний, характеристики эффективности СМО: средние числа заявок в системе и в очереди, средние времена пребывания заявок в системе и в очереди.

25. Имеется одноканальная СМО с очередью, ограниченной числом мест $R = 2$. На вход СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью X . Время обслуживания распределено по обобщенному закону Эрланга с параметрами k, X_2 . Найти вероятности состояний СМО и характеристики эффективности СМО.
26. Простейшая СМО без очереди с неограниченной взаимопомощью между каналами. На n -канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью X . Каналы работают со «взаимопомощью» — если в момент обслуживания очередной заявки в СМО есть свободные каналы, то все они подключаются к обслуживанию данной заявки. Интенсивность простейшего потока обслуживания заявки есть некоторая функция $Y = \phi(k)$ от числа k каналов, одновременно обслуживающих ее. Построить граф состояний СМО и найти финальные вероятности состояний. Выразить через них характеристики эффективности СМО. Сравнить их с теми же характеристиками в случае отсутствия взаимопомощи между каналами.
27. Простейшая СМО без очереди с равномерной взаимопомощью между каналами. Имеется простейшая n -канальная СМО с отказами, на которую поступает поток заявок с интенсивностью X . Между каналами осуществляется взаимопомощь, но не объединением всех каналов в один, как в предыдущем примере, а так называемая «равномерная» организованная следующим образом. Если заявка приходит в момент, когда все n каналов свободны, то все каналы принимаются за ее обслуживание; если в момент обслуживания заявки приходит еще одна,

часть каналов переключается на ее обслуживание; если, пока обслуживаются эти две заявки, приходит еще заявка, часть каналов переключается на ее обслуживание и т.д., пока не окажутся занятыми все p каналов; если они все заняты, вновь пришедшая заявка получает отказ. Функция $\phi(k) = k/Y$ т.е. обслуживание k каналами в k раз быстрее обслуживания одним каналом. Составить размеченный граф состояний СМО, определить финальные вероятности состояний и характеристики эффективности. Сравнить с характеристиками эффективности для системы без взаимопомощи.

28. Для простейшей трехканальной СМО с отказами и пара метрами: $X = 4$ заявки/мин, среднее время обслуживания заявки одним каналом $1/Y = 0,5$ мин, интенсивность обслуживания заявки k каналами $\Phi\{k\} = k/Y$, определить характеристики эффективности СМО для трех вариантов использования: 1) при отсутствии взаимопомощи; 2) при неограниченной взаимопомощи; 3) при равномерной взаимопомощи между каналами.
29. Простейшая СМО с неограниченной очередью и со взаимопомощью между каналами. Имеется простейшая p -канальная СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью X ; время обслуживания заявки одним каналом — показательное с параметром Y . Интенсивность потока обслуживания заявки k каналами пропорциональна их числу. Каналы распределяются по заявкам, находящимся в СМО, произвольным образом, но при условии, что если в СМО находится хотя бы одна заявка, все p каналов заняты обслуживанием. Построить граф состояний, найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности.
30. На вход автоматизированного банка данных (АБД) подается в среднем $X = 335$ статей/ч. Первая операция по обработке входного потока первичных информационных документов (ПВД) состоит в отборе тех статей, которые должны вводиться в АБД. В отборе участвует 6 чел. (отборщиков); средняя производительность каждого отборщика $X = 60$ статей/ч. Известно, что в среднем из входного потока отбирается для ввода в АБД 61,3 % ПВД. Все потоки событий — простейшие.

Рассматривая систему отбора ПИД для ввода в АБД как шестиканальную ($n = 6$) СМО с неограниченной очередью, определить ее характеристики эффективности.

31. На вход СМО подается простейший поток заявок с интенсивностью X . Обслуживание состоит из двух последовательных фаз, выполняемых в СМО1 и СМО2. В СМО1 проводится обслуживание заявки, а в СМО2 контролируется качество проведенного в СМО1 обслуживания. Если в СМО2 не обнаружено недостатков в обслуживании, то заявка считается обслуженной в СМО; если в СМО2 обнаружены недостатки в обслуживании, то заявка возвращается на повторное обслуживание в СМО1. Вероятность того, что заявка, обработанная в СМО1, будет в результате контроля в СМО2 возвращена на повторное обслуживание, равна $1 - p$ и не зависит от того, сколько раз она была обработана в СМО1. СМО1 и СМО2 представляют собой n_1 - и n_2 -канальные системы с неограниченной очередью и интенсивностью потоков обслуживания в каждом канале γ_1 и γ_2 соответственно. Время повторного обслуживания заявки в канале в СМО1 и повторного контроля качества обслуживания заявки в канале в СМО2 распределено (так же, как и при проведении этих операций впервые) по показательному закону с параметрами γ_1 и γ_2 соответственно. Определить условия существования стационарного режима работы рассмотренной СМО, считая, что потоки заявок, поступающие в СМО1 и СМО2, простейшие.