Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе
на тему

Методы Эйлера и Рунге-Кутта

Выполнил: студент группы 153503
Кончик Денис Сергеевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Содержание

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутта.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что *f(x,y)* непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y функция в окрестности замкнутой области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0).

Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию *y=y(x)*, такую что $y'(x) = f(x, y(x))$ при всех $x \in [a, b]$ и $y(x_0) = y_0$.

Разобьем отрезок *[a, b]* с помощью точек разбиения $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ с шагом $h = (b-a)/n$. Тогда узлы разбиения имеют вид $x_k = x_0 + kh,\ k = \overline{0, n}$.

Пусть $y(x_0), y(x_1), ..., y(x_n)$ − значения функции в точках разбиения.

9.1. Метод ломаных Эйлера

Пусть $y = y(x)$ искомое решение задачи Коши. В точке *(x_0,y_0)* построим касательную (см. рис. 9.1) к графику $y = y(x)$.

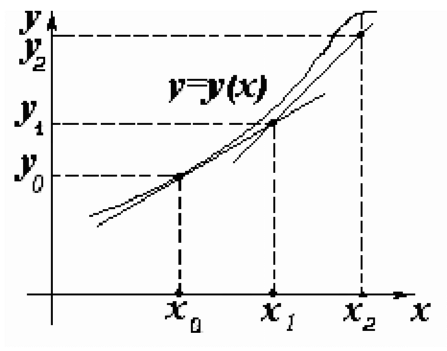


Рис. 9.1

Запишем уравнение касательной:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

и найдем точку пересечения этой касательной с прямой $x = x_1$: $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Запишем уравнение прямой

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

и найдем точку ее пересечения с прямой с $x = x_2$:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Продолжая процесс, получим рекуррентную последовательность:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \qquad k = 0,1... \tag{9.1}$$

$$y_0 = y(x_0),$$

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки (x_k, y_k), полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения $y = y(x)$. Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.

Выясним точность метода Эйлера. Сравним значения точного решения y(x) задачи Коши в узловых точках со значениями, полученными методом Эйлера:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + O(h^2),$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + O(h^2).$$

Поскольку

$$y'(x_k) = f(x_k, y(x_k)),$$

то $y(x_{k+1}) - y_{k+1} = O(h^2)$ при условии, что $y_k = y(x_k)$. То есть, точность метода на отдельном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ совпадает с $O(h^2)$. Тогда, очевидно, точность метода Эйлера на всем отрезке [*a, b*] будет *O(h)*.

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right), \qquad k = 0,1..., n-1. \tag{9.2}$$

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y, \; x \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Полагая $h = 0{,}2$ и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (9.1)

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.8 \cdot y_k .$$

С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.82 \cdot y_k \; .$$

Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция $y = e^{-x}$, можно сравнить точность обоих методов.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8	0.64	0.572	0.4086	0.3277
$y_k^{модиф}$	1	0.82	0.6724	0.5514	0.4521	0.3708
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

9.2. Методы Рунге-Кутта

1. <u>Метод Рунге-Кутта второго порядка (или метод типа «предиктор-корректор»).</u>

Метод состоит из двух этапов. Сначала находят по методу Эйлера грубое решение:

$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \; .$$

На следующем шаге это грубое решение сглаживается:

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})}{2}, \qquad k = 0,1\ldots,n-1 .$$

Выясним точность метода. Преобразуя y_{k+1}, получаем:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) =$$
$$= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) + \frac{h}{2}[f'_x(x_k, y_k) +$$
$$+ h \cdot f'_y(x_k, y_k) \cdot f(x_k, y_k) + O(h^2)] =$$
$$= y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_k, y_k) + + f'_y(x_k, y_k) \cdot f(x_k, y_k)] + O(h^3).$$

С другой стороны, разложим точное решение *y(x)* по формуле Тейлора. Получим

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + O(h^3) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) +$$
$$+ \frac{h^2}{2}[f'_x(x_k, y(x_k)) + f'_y(x_k, y(x_k))f(x_k, y(x_k)) + O(h^3).$$

Полагая $y(x_k) = y_k$, получаем погрешность на отдельном шаге равную $O(h^3)$. Тогда на всем отрезке погрешность составит $O(h^2)$.

Достоинство метода: его точность превосходит точность метод Эйлера.

2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов K_1, K_2, K_3, K_4:

$K_1 = hf(x_k, y_k)$;

$K_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2})$;

$K_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2})$;

$K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3)$.

Затем вычисляем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Данный метод имеет точность $O(h^4)$ на $[a,b]$.

Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

Пример. Требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ на отрезке [0, 1].

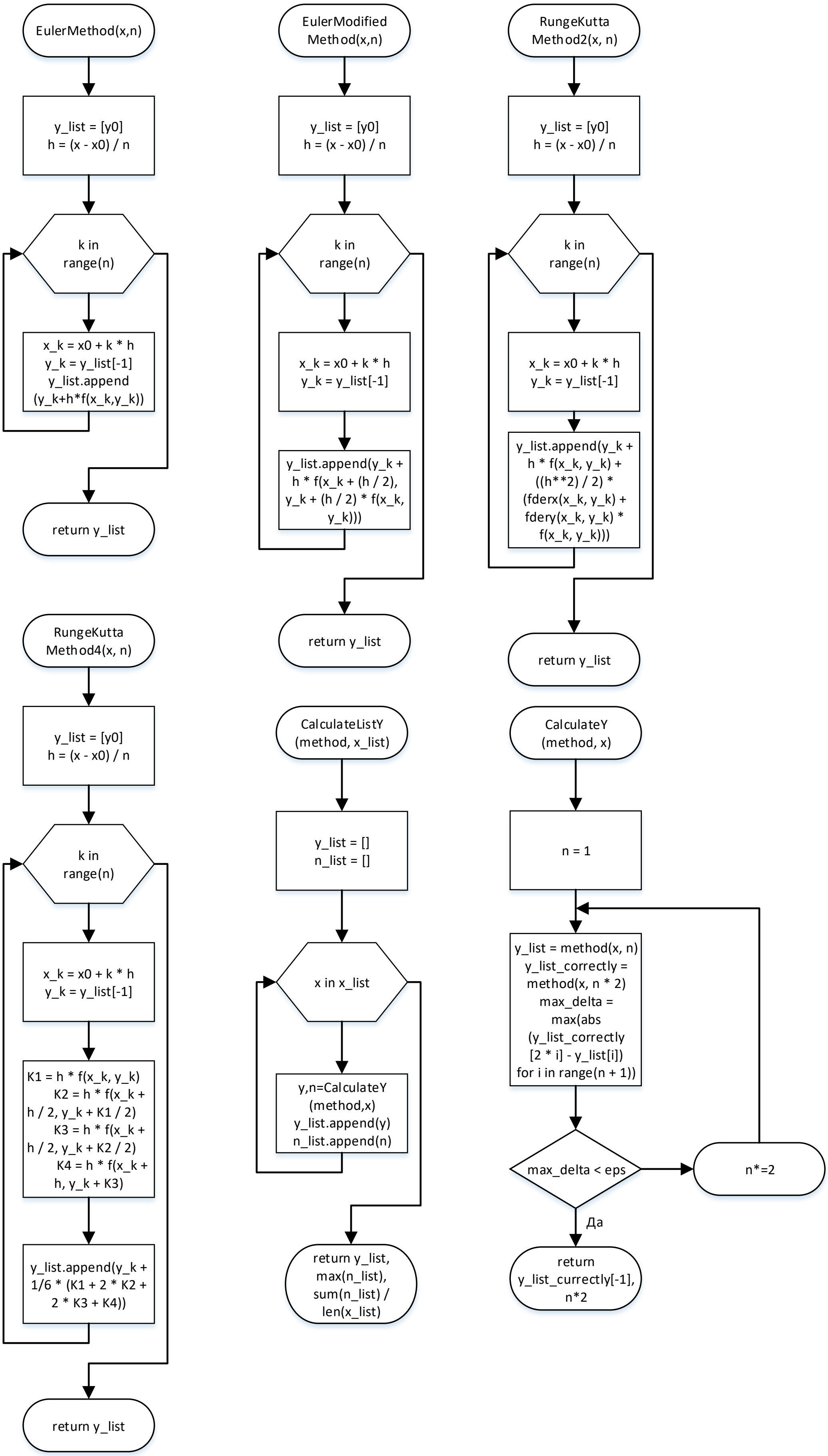
Выберем шаг $h = 0{,}2$. Результат вычислений поместим в таблицу.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8187	0.6703	0.5487	0.4493	0.3678
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Таким образом, метод Рунге-Кутта 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции f вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага h таким образом, чтобы $h^4 < \varepsilon$, где ε − заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений y_k со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше ε. В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ



4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy

plot_dots = 10**3
eps = 10**-3

# Задание
m, a = 1.5, 0.5
x0, y0 = 0, 0
L, R = 0, 1


def f(x, y): # y' = f(x,y)
    return (a * (1 - y**2)) / ((1 + m) * x**2  +  y**2 + 1)


def fderx(x, y):
    numerator = 2*a*x+2*a*m*x-2*a*x*(y**2)-2*a*m*x*(y**2)
    denominator = ((x**2)+m*(x**2)+(y**2)+1)**2
    return -numerator/denominator

def fdery(x, y):
    numerator = -2*a*(x**2)*y-2*a*m*(x**2)*y-4*a*y
    denominator = ((x**2)+m*(x**2)+(y**2)+1)**2
    return numerator / denominator

# Метод Эйлера
def EulerMethod(x, n):
    y_list = [y0]
    h = (x - x0) / n
    for k in range(n):
        x_k = x0 + k * h
        y_k = y_list[-1]
        y_list.append(y_k + h * f(x_k, y_k))
    return y_list

# Модифицированный метод Эйлера
def EulerModifiedMethod(x, n):
    y_list = [y0]
    h = (x - x0) / n
    for k in range(n):
        x_k = x0 + k * h
        y_k = y_list[-1]
        y_list.append(y_k + h * f(x_k + (h / 2), y_k + (h / 2) * f(x_k, y_k)))
    return y_list

# Метод Рунге-Кутта 2 порядка
def RungeKuttaMethod2(x, n):
    y_list = [y0]
    h = (x - x0) / n
    for k in range(n):
        x_k = x0 + k * h
        y_k = y_list[-1]
        y_list.append(y_k + h * f(x_k, y_k) + ((h**2) / 2) * (fderx(x_k, y_k) +
fdery(x_k, y_k) * f(x_k, y_k)))
    return y_list
```

```
# Метод Рунге-Кутта 4 порядка
def RungeKuttaMethod4(x, n):
    y_list = [y0]
    h = (x - x0) / n
    for k in range(n):
        x_k = x0 + k * h
        y_k = y_list[-1]
        K1 = h * f(x_k, y_k)
        K2 = h * f(x_k + h / 2, y_k + K1 / 2)
        K3 = h * f(x_k + h / 2, y_k + K2 / 2)
        K4 = h * f(x_k + h, y_k + K3)
        y_list.append(y_k + 1/6 * (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4))
    return y_list

# Вычислить Y по методу и X
def CalculateY(method, x):
    n = 1 # Количество узлов от x0 до x для точности eps

    while True:
        y_list = method(x, n)
        y_list_correctly = method(x, n * 2)
        max_delta = max(abs(y_list_correctly[2 * i] - y_list[i]) for i in range(n + 1))

        if (max_delta < eps):
            return y_list_correctly[-1], n * 2
        else:
            n *= 2

# Создать список Y по методу и списку X
def CalculateListY(method, x_list):
    y_list = [] # Список игреков
    n_list = [] # Список n (числа узлов) для каждой точки
    for x in x_list:
        y, n = CalculateY(method, x)
        y_list.append(y)
        n_list.append(n)

    return y_list, max(n_list), sum(n_list) / len(x_list)


print(f"Количество точек для построения графика: {plot_dots}")
print(f"Точность: {eps}")
#print(f"Функция: {func}")

x_list = []
for i in range(plot_dots + 1):
    x_list.append(L + (R - L) / plot_dots * i)



print("\nN_max – максимальное количество узлов для одной из точек, \nнеобходимое для
достижения заданной точности")
print("N_middle – среднее количество узлов по всем точкам при \nдостижении заданной
точности")

y_list, N_max, N_middle = CalculateListY(EulerMethod, x_list)
print("\nМетод Эйлера O(h):")
print(f"N_max: {N_max}")
print(f"N_middle: {int(N_middle)}")
print("На графике: красный")
plt.plot(x_list, y_list, 'red', linewidth = 4)
```

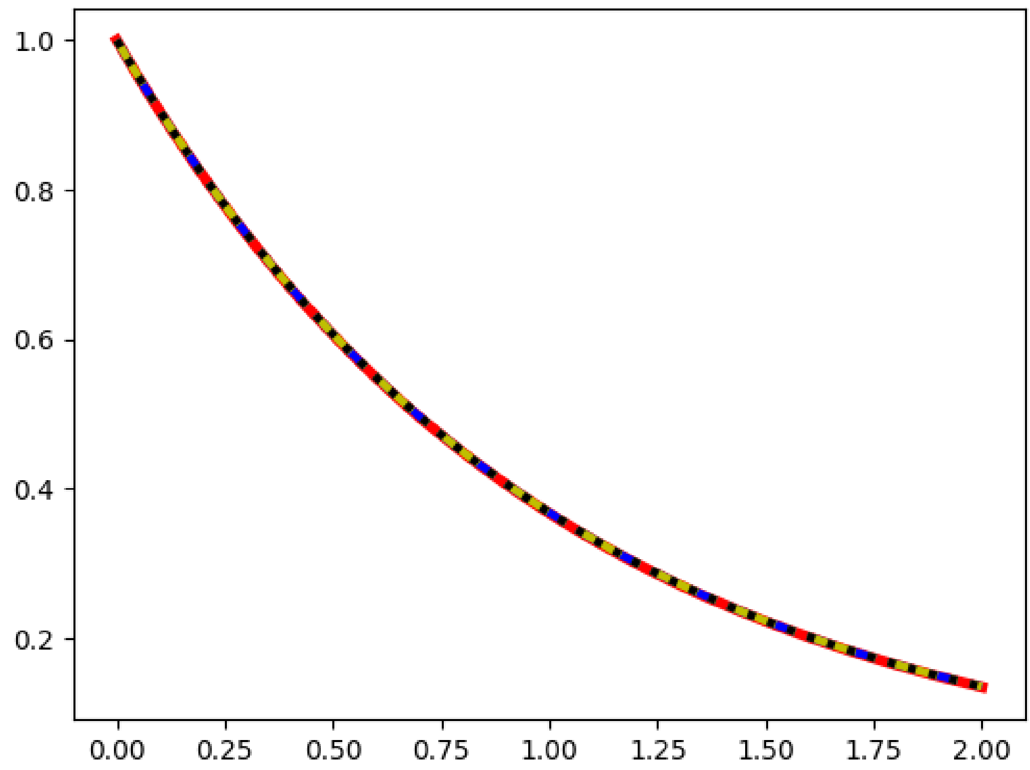
```
y_list, N_max, N_middle = CalculateListY(EulerModifiedMethod, x_list)
print("\nМетод Эйлера (модифицированный) O(h^2):")
print(f"N_max: {N_max}")
print(f"N_middle: {int(N_middle)}")
print("На графике: голубой")
plt.plot(x_list, y_list, '--b', linewidth = 3)

y_list, N_max, N_middle = CalculateListY(RungeKuttaMethod2, x_list)
print("\nМетод Рунге-Кутта 2 порядка O(h^2):")
print(f"N_max: {N_max}")
print(f"N_middle: {int(N_middle)}")
print("На графике: желтый")
plt.plot(x_list, y_list, '-.y', linewidth = 3)

y_list, N_max, N_middle = CalculateListY(RungeKuttaMethod4, x_list)
print("\nМетод Рунге-Кутта 4 порядка O(h^4):")
print(f"N_max: {N_max}")
print(f"N_middle: {int(N_middle)}")
print("На графике: черный")
plt.plot(x_list, y_list, ':k', linewidth = 3)


plt.show()
```

5. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Тестовый пример 1.1.

С помощью метода Эйлера[1], модифицированного метода Эйлера[2], метода Рунге-Кутта 2-го порядка[3], Рунге-Кутта 4-го порядка[4] найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Решение	Точность	Точек разбиения
$y' = -y$	$y(0) = 0$	$[0; 2]$	$y = e^{-x}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	10^2



1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный

Количество точек разбиения в методе				
	Эйлер	мод. Эйлер	Рунге-Кутт (2)	Рунге-Кутт (4)
Максимальное	512	32	32	8
Среднее	267	19	19	4

Тестовый пример 1.2.

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

Метод Эйлера O(h)			
x	0.3	0.9	1.4
$y = e^{\wedge}(-x)$	≈ 0.740818	≈ 0.406569	≈ 0.246597
Метод(x)	≈ 0.740295	≈ 0.405925	≈ 0.246125
Δ	$\approx 5.23 * 10^{-4}$	$\approx 6.44 * 10^{-4}$	$\approx 4.72 * 10^{-4}$

Модифицированный метод Эйлера O(h^2)			
x	0.3	0.9	1.4
$y = e^{\wedge}(-x)$	≈ 0.740818	≈ 0.406569	≈ 0.246597
Метод(x)	≈ 0.741038	≈ 0.406771	≈ 0.246711
Δ	$\approx 2.20 * 10^{-4}$	$\approx 2.02 * 10^{-4}$	$\approx 1.14 * 10^{-4}$

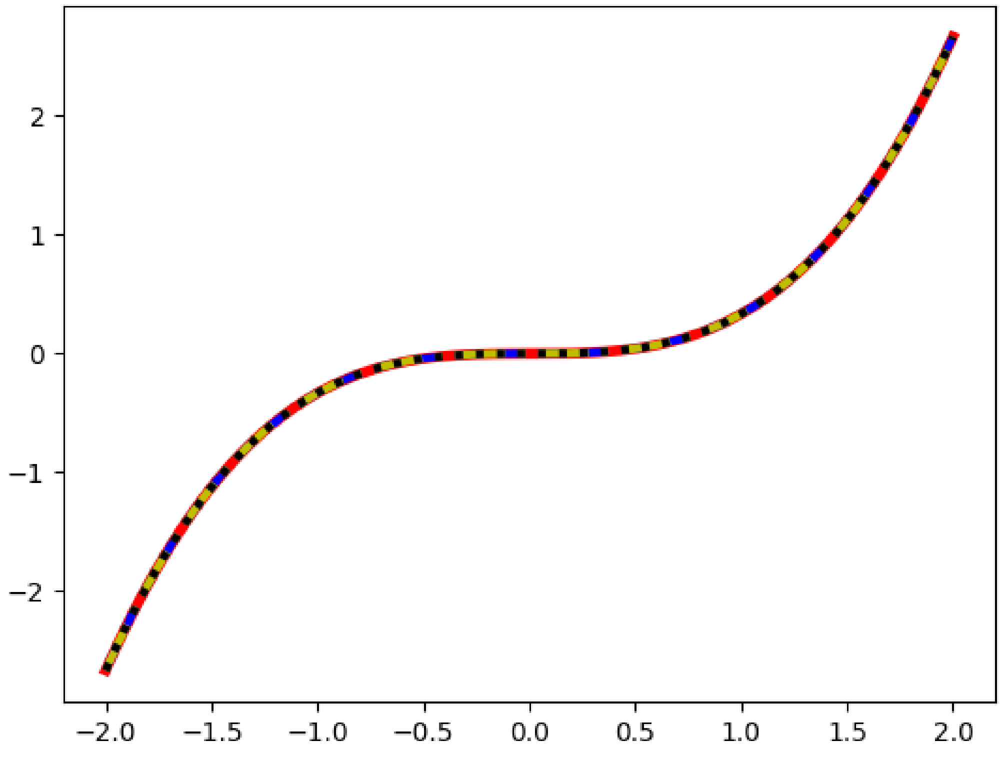
Метод Рунге-Кутта 2 порядка O(h^2)			
x	0.3	0.9	1.4
$y = e^{\wedge}(-x)$	≈ 0.740818	≈ 0.406569	≈ 0.246597
Метод (x)	≈ 0.741038	≈ 0.406771	≈ 0.246710
Δ	$\approx 2.20 * 10^{-4}$	$\approx 2.02 * 10^{-4}$	$\approx 1.13 * 10^{-4}$

Метод Рунге-Кутта 4 порядка O(h^4)			
x	0.3	0.9	1.4
$y = e^{\wedge}(-x)$	≈ 0.740818	≈ 0.406569	≈ 0.246597
Метод (x)	≈ 0.740819	≈ 0.406579	≈ 0.246600
Δ	$\approx 1.0 * 10^{-6}$	$\approx 1.0 * 10^{-5}$	$\approx 3.0 * 10^{-6}$

Тестовый пример 2.1.

С помощью метода Эйлера[1], модифицированного метода Эйлера[2], метода Рунге-Кутта 2-го порядка[3], Рунге-Кутта 4-го порядка[4] найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Решение	Точность	Точек разбиения
$y' = x^2$	$y(1) = \frac{1}{3}$	$[-2; 2]$	$y = \frac{x^3}{3}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	10^3



1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный

Количество точек разбиения в методе

	Эйлер	мод. Эйлер	Рунге-Кутт (2)	Рунге-Кутт (4)
Максимальное	8192	128	256	2
Среднее	1253	39	77	2

Тестовый пример 2.2.

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

Метод Эйлера O(h)			
x	0	0.7	1.7
$y = \frac{1}{3}x^3$	0	≈ 0.114333	≈ 1.637666
Метод(x)	$\approx 9.77 * 10^{-4}$	≈ 0.113735	≈ 1.637021
Δ	$\approx 9.77 * 10^{-4}$	$\approx 5.98 * 10^{-4}$	$\approx 6.45 * 10^{-4}$

Модифицированный метод Эйлера O(h^2)			
x	0	0.9	1.4
$y = \frac{1}{3}x^3$	0	≈ 0.114333	≈ 1.637665
Метод(x)	$\approx 3.25 * 10^{-4}$	≈ 0.114474	≈ 1.637555
Δ	$\approx 3.25 * 10^{-4}$	$\approx 1.41 * 10^{-4}$	$\approx 1.11 * 10^{-4}$

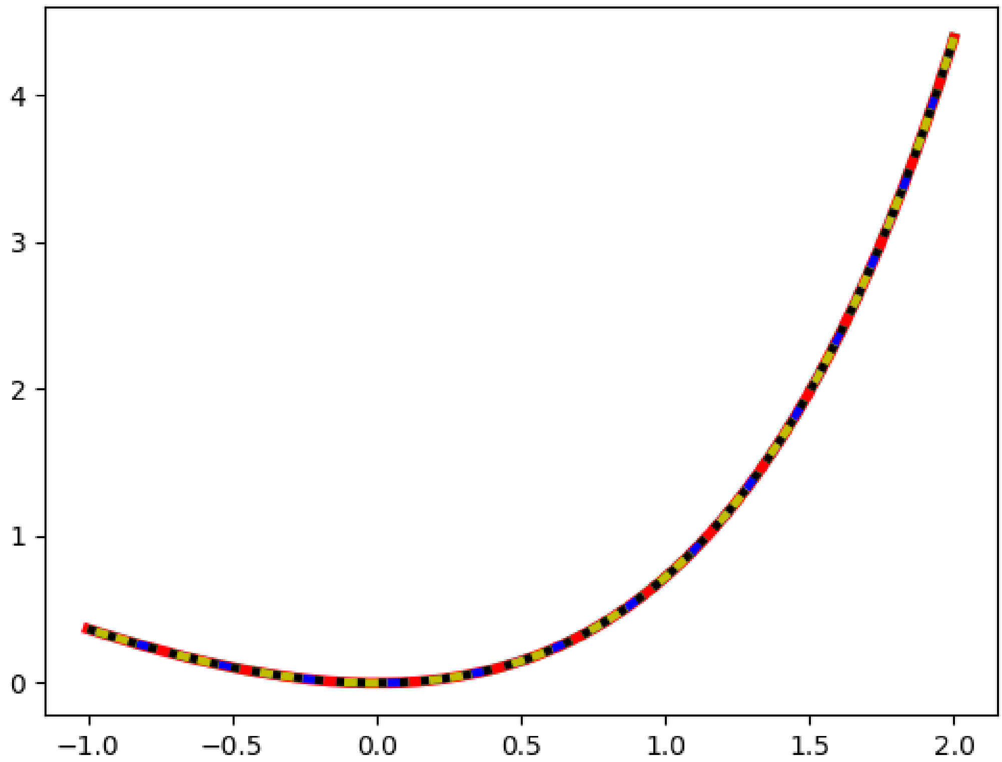
Метод Рунге-Кутта 2 порядка O(h^2)			
x	0	0.9	1.4
$y = \frac{1}{3}x^3$	0	≈ 0.114333	≈ 1.637666
Метод (x)	$\approx 3.25 * 10^{-4}$	≈ 0.114473	≈ 1.637555
Δ	$\approx 3.25 * 10^{-4}$	$\approx 1.40 * 10^{-4}$	$\approx 1.111 * 10^{-4}$

Метод Рунге-Кутта 4 порядка O(h^4)			
x	0	0.9	1.4
$y = \frac{1}{3}x^3$	0	0.114433 ...	1.637666 ...
Метод (x)	$\approx 2.08 * 10^{-17}$	0.114433 ...	1.637666 ...
Δ	$\approx 2.08 * 10^{-17}$	$\approx 1.37 * 10^{-17}$	$\approx 2.21 * 10^{-16}$

Тестовый пример 3.1.

С помощью метода Эйлера[1], модифицированного метода Эйлера[2], метода Рунге-Кутта 2-го порядка[3], Рунге-Кутта 4-го порядка[4] найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Решение	Точность	Точек разбиения
$y' = x + y$	$y(0) = 0$	$[-1; 2]$	$y = e^x - x - 1$	$\varepsilon = 10^{-3}$	10^3



1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный

Количество точек разбиения в методе				
	Эйлер	мод. Эйлер	Рунге-Кутт (2)	Рунге-Кутт (4)
Макс.	16384	256	256	16
Среднее	3063	54	64	5

Тестовый пример 3.2.

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

Метод Эйлера O(h)			
x	-0.5	0.5	1.5
$y = e^x - x - 1$	≈ 0.106531	≈ 0.148721	≈ 1.981689
Метод(x)	≈ 0.105937	≈ 0.147917	≈ 1.981037
Δ	$\approx 5.94 * 10^{-4}$	$\approx 8.04 * 10^{-4}$	$\approx 6.52 * 10^{-4}$

Модифицированный метод Эйлера O(h^2)			
x	-0.5	0.5	1.4
$y = e^x - x - 1$	≈ 0.106531	≈ 0.148721	≈ 1.981689
Метод(x)	≈ 0.106738	≈ 0.148590	≈ 1.981537
Δ	$\approx 2.07 * 10^{-4}$	$\approx 1.31 * 10^{-4}$	$\approx 1.52 * 10^{-4}$

Метод Рунге-Кутта 2 порядка O(h^2)			
x	-0.5	0.5	1.4
$y = e^x - x - 1$	≈ 0.106531	≈ 0.148721	≈ 1.981689
Метод (x)	≈ 0.106738	≈ 0.148590	≈ 1.981536
Δ	$\approx 2.07 * 10^{-4}$	$\approx 1.31 * 10^{-4}$	$\approx 1.53 * 10^{-4}$

Метод Рунге-Кутта 4 порядка O(h^4)			
x	-0.5	0.5	1.4
$y = e^x - x - 1$	≈ 0.106531	≈ 0.148721	≈ 1.981689
Метод (x)	≈ 0.106542	≈ 0.148694	≈ 1.981630
Δ	$\approx 1.1 * 10^{-5}$	$\approx 2.7 * 10^{-5}$	$\approx 5.9 * 10^{-5}$

6. ЗАДАНИЕ

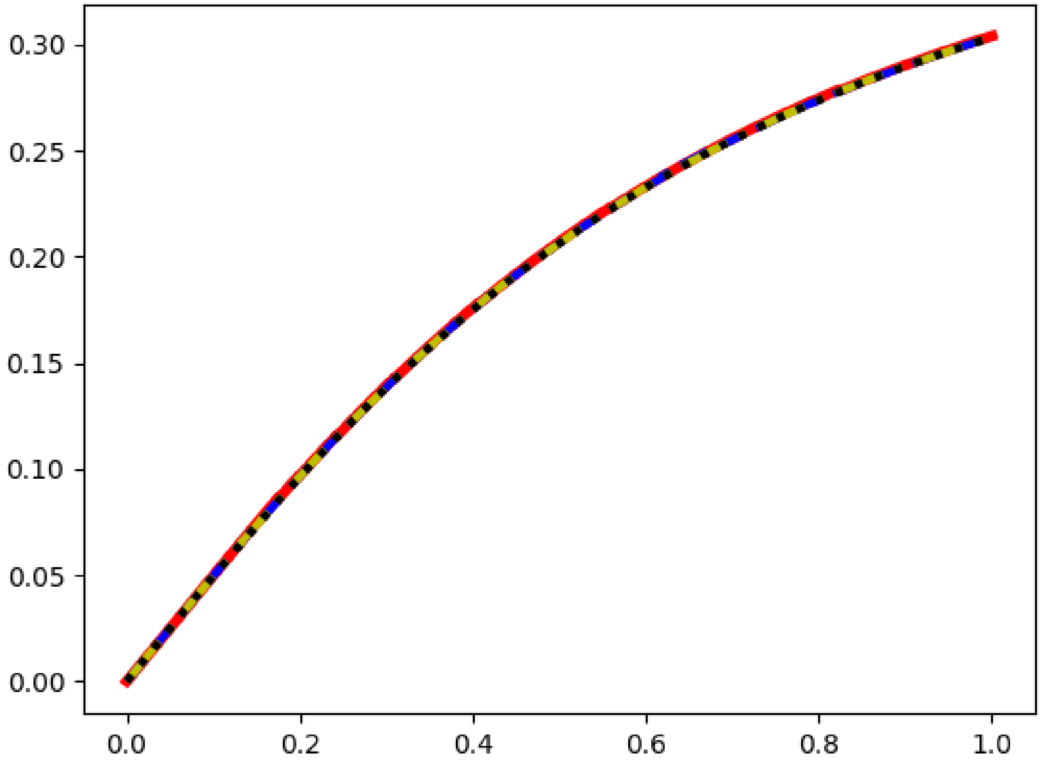
Вариант 11

С помощью метода Эйлера[1], модифицированного метода Эйлера[2], методов Рунге-Кутта[3, 4] (2 и 4 порядка) найти с точностью до 0.001 решение уравнения на отрезке [0; 1]. Сравнить результаты.

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2+y^2+1}\ (*)$$

$$y(0) = 0, m = 1.5, a = 0.5$$

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Точность	Точек разбиения
$(*)$	$y(0) = 0$	$[0; 1]$	$\varepsilon = 10^{-3}$	10^3



1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный

Количество точек разбиения в методе				
	Эйлер	мод. Эйлер	Рунге-Кутт (2)	Рунге-Кутт (4)
Максимальное	256	16	32	4
Среднее	93	5	12	2

7. ВЫВОД

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы был изучен метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера, методы Рунге-Кутта (2 и 4 порядка) для решения задачи Коши ОДУ 1 порядка. Составлен алгоритм и программа, проверена правильность её работы на тестовых примерах, с заданной точностью построены графики решения задачи Коши.

Исходя из тестовых примеров и задания и учитывая количество необходимых точек разбиения отрезка для достижения заданной точности, можно сделать вывод о трудоемкости методов: метод Эйлера самый трудоемкий, для модифицированного метода Эйлера и метода Рунге-Кутта 2 порядка количества точек разбиения – числа одного порядка и меньше, чем у метода Эйлера. Самый эффективным методом оказался метод Рунге-Кутта 4 порядка.