

## 11. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНЫХ ВЕЛИЧИН

### 11.1 Смешанные моменты двумерной случайной величины

Смешанным начальным моментом порядка  $k+s$  называется математическое ожидание произведения  $X^k$  и  $Y^s$ :

$$\alpha_{k,s}(x, y) = M[X^k Y^s]. \quad (11.1)$$

Смешанным центральным моментом порядка  $k+s$  называется математическое ожидание произведения центрированных величин  $\overset{\circ}{X}^k$  и  $\overset{\circ}{Y}^s$ :

$$\mu_{k,s}(x, y) = M[\overset{\circ}{X}^k \overset{\circ}{Y}^s], \quad (11.2)$$

где  $\overset{\circ}{X} = X - m_x$ ,  $\overset{\circ}{Y} = Y - m_y$  - центрированные случайные величины.

Расчетные формулы:

$$\alpha_{k,s}(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{ij}, & \text{ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy. & \text{НСВ} \end{cases} \quad (11.3)$$

$$\mu_{k,s}(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij}, & \text{ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy. & \text{НСВ} \end{cases} \quad (11.4)$$

где  $p_{ij}$  - элементы матрицы вероятностей дискретной величины  $(X, Y)$ ;

$f(x, y)$ -совместная плотность вероятности непрерывной величины  $(X, Y)$ .

Рассмотрим наиболее часто используемые начальные и центральные моменты:

$$\alpha_{0,0}(x, y) = \mu_{0,0}(x, y) = 1;$$

Первые начальные моменты представляют собой уже известные нам **математические ожидания** величин  $X$  и  $Y$ , входящих в систему:

$$\alpha_{1,0}(x, y) = m_x; \quad \alpha_{0,1}(x, y) = m_y. \quad (11.5)$$

Совокупность математических ожиданий представляет собой характеристику положения системы. Геометрически это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание случайных точек  $(X, Y)$ .

$$\begin{aligned} \mu_{1,0}(x, y) &= M[X - m_x] = 0 & \mu_{0,1}(x, y) &= M[Y - m_y] = 0; \\ \alpha_{2,0}(x, y) &= \alpha_2(x) & \alpha_{0,2}(x, y) &= \alpha_2(y) \end{aligned} \quad (11.6)$$

На практике широко используются вторые центральные моменты системы. Два из них представляют собой **дисперсии**, которые характеризуют **рассеивание** случайной точки в направлении осей  $OX$  и  $OY$ :

$$\mu_{2,0}(x, y) = M[(X - m_x)^2] = D[X] = D_x; \quad \mu_{0,2}(x, y) = M[(Y - m_y)^2] = D[Y] = D_y; \quad (11.7)$$

Особую роль играет центральный момент порядка 1+1 или второй смешанный центральный момент, который называется **ковариацией или корреляционным моментом**

$$\mu_{1,1}(x, y) = K_{xy} = M[\overset{\circ}{X} \cdot \overset{\circ}{Y}] \quad (11.8)$$

Ковариация представляет собой математическое ожидание произведения центрированных случайных величин  $X$  и  $Y$  и характеризует степень линейной статистической зависимости величин  $X$  и  $Y$  и рассеивание относительно точки  $(m_x, m_y)$ :

$$K_{xy} = \mu_{xy} = M[(X - m_x) \cdot (Y - m_y)], \quad (11.9)$$

Или

$$K_{xy} = M[(X - m_x) \cdot (Y - m_y)] = M[XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y] = M[XY] - M[Xm_y] - M[Ym_x] + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y. \quad (11.10)$$

Расчетные формулы для определения ковариации:

$$K_{xy} = \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - m_x m_y. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - m_x m_y. \end{cases} \quad (11.11)$$

*Свойства корреляции:*

1.  $K_{xy} = K_{yx}$ . Это свойство очевидно.

2. Корреляционный момент двух независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  равен нулю.

*Доказательство:* т.к. случайные величины  $X$  и  $Y$  – независимы, то и их совместная плотность распределения представляется произведением плотностей распределения случайных величин  $f_x(x)$  и  $f_y(y)$ . Тогда:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - m_x m_y \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y) dy \right) - m_x m_y = 0. \end{aligned}$$

3. Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин не превышает среднего геометрического их дисперсий

$$|K_{xy}| \leq \sigma_x \cdot \sigma_y \quad \text{или} \quad |K_{xy}| \leq \sqrt{D_x \cdot D_y}$$

*Доказательство:* Введем в рассмотрение случайные величины  $Z_1 = \sigma_y X - \sigma_x Y$ ,  $Z_2 = \sigma_y X + \sigma_x Y$ , и вычислим их дисперсии

$$D(Z_1) = M[Z - m_z]^2 = 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 - 2\sigma_x \sigma_y \cdot K_{xy}$$

$$D(Z_2) = M[Z - m_z]^2 = 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 + 2\sigma_x \sigma_y \cdot K_{xy}$$

Т. к. дисперсия всегда неотрицательна, то

$$2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y \cdot K_{xy} \geq 0 \Rightarrow \sigma_x\sigma_y \geq K_{xy}$$

и

$$2\sigma_x^2\sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y \cdot K_{xy} \geq 0 \Rightarrow -\sigma_x\sigma_y \leq K_{xy}.$$

$$\text{Отсюда } -\sigma_x\sigma_y \leq K_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y \Rightarrow |K_{xy}| \leq \sigma_x\sigma_y.$$

Если  $K_{xy} \neq 0$ , случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *коррелированными*.

Если  $K_{xy} = 0$ , то необязательно, что  $X$  и  $Y$  независимы. В этом случае они называются *некоррелированными*. Итак, из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, но из зависимости еще не вытекает их коррелированность. Из независимости двух случайных величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя заключить о независимости этих величин.

Величина ковариации зависит единиц измерения каждой из случайных величин, входящих в систему и от того, насколько каждая из случайных величин отклоняется от своего математического ожидания (одна – мало, вторая – сильно, все равно  $K_{xy}$  будет мал).

Поэтому для характеристики связи между  $X$  и  $Y$  в чистом виде переходят к безразмерной характеристике, которая называется **Коэффициент корреляции**  $r_{xy}$  характеризует степень линейной зависимости величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (11.12)$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. Абсолютная величина коэффициента корреляции двух случайных величин не превышает единицы:  $|r_{xy}| \leq 1$

2.  $|r_{xy}| = 1$  если  $Y = aX + b$

Доказательство:  $M(Y) = M[aX + b] = aM(X) + b$

Подставим в выражение

$$K_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\} = M\{[X - M(X)][aX + b - aM(X) - b]\} =$$

$$= aM\{[X - M(X)][X - M(X)]\} = aM[X - M(X)]^2 = aD(X) = a\sigma_x^2$$

$$\text{т.к. } [Y - M(Y)] = [aX + b - aM(X) - b] = a[X - M(X)]$$

$$\text{Найдем дисперсию } Y: D(Y) = M[Y - M(Y)]^2 = a^2 M[X - M(X)]^2 = a^2 \sigma_x^2,$$

т.е.

$$\sigma_y = |a|\sigma_x, \text{ коэффициент корреляции: } r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x(|a|\sigma_x)} = \frac{a}{|a|} \Rightarrow |r_{xy}| = 1$$

Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между  $X$  и  $Y$ : чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к 1, тем связь сильнее, чем ближе к 0, тем слабее.

3. Если величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $r_{xy} = 0$ .

## 11.2. Условные числовые характеристики

Пусть  $(X, Y)$  – 2-мерная СВ с известным законом распределения  $F(X, Y)$  или  $f(x, y)$ . Условным математическим ожиданием компоненты  $X$  называется математическое ожидание СВ  $X$ , вычисленное при условии, что СВ  $Y$  приняла определенное значение  $Y=y$  и обозначается  $M(X/Y)$ . Аналогично определяется условное математическое ожидание и для СВ  $Y$ .

Используя формулы для вычисления числовых характеристик случайных величин можно вычислить и условные числовые характеристики, заменив безусловные законы распределения на условные.

$$M(X|Y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i / Y = y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x / y) dx \end{cases} \quad \text{и} \quad M(Y|X) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m y_j \cdot p(y_j / X = x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y / x) dy \end{cases} \quad (11.13)$$

Условное математическое ожидание СВ  $Y$  при заданном  $X=x$ :  $M[Y/x]=m_{y/x}$  называется регрессией  $Y$  на  $x$ ; аналогично  $M[X/y]=m_{x/y}$  называется регрессией  $X$  на  $y$ . Графики этих зависимостей от  $x$  и  $y$  называются **линиями регрессии** или «**кривыми регрессии**».

**Регрессионный анализ** позволяет выявить характер связи между величинами. Представим СВ  $Y$  в виде линейной функции  $X$ :

$$Y \cong g(x) = \alpha X + \beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – неизвестные величины.

**Теорема.** Линейная средняя квадратическая регрессия  $Y$  на  $X$  имеет вид

$$g(x) = m_y + r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (X - m_x),$$

здесь  $\beta = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  – **коэффициент регрессии  $Y$  на  $X$** ,

а прямую ~~дм~~  $m_y + r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (X - m_x)$  – называют **прямой среднеквадратической регрессии  $Y$  на  $X$** . Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии  $X$  на  $Y$ .

Обе прямые проходят через точку  $(m_x, m_y)$ , которую называют центром совместного распределения величин  $X$  и  $Y$ .

*Пример 11.1.* Определить коэффициент корреляции величин  $X$  и  $Y$  (См. пример 10.1).  
*Решение.* Определим математические ожидания величин  $X$  и  $Y$  по формуле (11.3):

$$m_x = \alpha_{1,0}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_i p_{ij} = 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0,2 + \\ + 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 = 0,7,$$

$$m_y = \alpha_{0,1}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 y_j p_{ij} = -1 \cdot 0,1 - 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + \\ + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,2 = -0,1.$$

Найдем значение  $K_{xy}$  по формуле (11.11):

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_i y_j p_{ij} - m_x m_y = 0 \cdot (-1) \cdot 0,1 + 0 \cdot 0 \cdot 0,2 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + \\ + 1 \cdot (-1) \cdot 0,2 + 1 \cdot 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 1 \cdot 0,2 - 0,7 \cdot (-0,1) = 0,07.$$

Определим дисперсии величин  $X$  и  $Y$  по формуле (11.4):

$$D_x = \mu_{2,0}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (x_i - m_x)^2 p_{ij} = (-0,7) \cdot 2 \cdot 0,1 + (-0,7) \cdot 2 \cdot 0,2 + \\ + (-0,7) \cdot 2 \cdot 0 + (0,3) \cdot 2 \cdot 0,2 + (0,3) \cdot 2 \cdot 0,3 + (0,3) \cdot 2 \cdot 0,2 = 0,21, \\ D_y = \mu_{0,2}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (y_j - m_y)^2 p_{ij} = (-1,1) \cdot 2 \cdot 0,1 + (-1,1) \cdot 2 \cdot 0,2 + \\ + (0,1) \cdot 2 \cdot 0,2 + (0,1) \cdot 2 \cdot 0,3 + (0,9) \cdot 2 \cdot 0 + (0,9) \cdot 2 \cdot 0,2 = 0,49.$$

Значение коэффициента корреляции  $R_{xy}$  вычислим по формуле

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{0,07}{\sqrt{0,21 \cdot 0,49}} \approx 0,22 \quad (11.14)$$

*Пример 11.2.* Двумерная случайная величина равномерно распределена в области  $D$ , ограниченной прямыми  $X = 0$ ,  $Y = 0$  и  $X + Y = 4$ . Определить коэффициент корреляции величин  $X$  и  $Y$ .

*Решение.* Запишем в аналитической форме совместную плотность вероятности:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4 - x \\ 0, & x \notin [0, 4], y \notin [0, 4 - x] \end{cases}.$$

Определим  $c$ , используя свойства плотности распределения (условие нормировки):

$$\int_0^4 \int_0^{4-x} c dx dy = c \int_0^4 (4 - x) dx = c \cdot 8 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{8}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины  $X$  по формулам (10.3) и (10.4) соответственно:

$$m_x = \alpha_{1,0}(x, y) = \int_0^4 \int_0^{4-x} x \frac{1}{8} dx dy = \frac{1}{8} \int_0^4 x dx \int_0^{4-x} dy = \frac{1}{8} \int_0^4 x(4 - x) dx = \frac{4}{3};$$

$$D_x = \mu_{2,0}(x, y) = \int_0^4 \int_0^{4-x} (x - m_x)^2 \frac{1}{8} dx dy = \frac{1}{8} \int_0^4 (x - \frac{4}{3})^2 (4 - x) dx = \frac{8}{9}.$$

Так как область  $D$  симметрична относительно осей координат, то величины  $X$  и  $Y$  будут иметь одинаковые числовые характеристики:  $m_x = m_y = 4/3$ ,  $D_x = D_y = 8/9$ .

Определим корреляционный момент  $K_{xy}$  по формуле (11.11):

$$K_{xy} = \int_0^4 \int_0^{4-x} xy \frac{1}{8} dx dy - m_x \cdot m_y = \frac{1}{8} \int_0^4 x dx \int_0^{4-x} y dy - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{16} \int_0^4 x(4 - x)^2 dx - \\ - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$$

Коэффициент корреляции величин  $X$  и  $Y$  будет равен (2.6):

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = -\frac{1}{2}$$