Лабораторная работа 2
«Отсекающее ограничение Гомори»

Метод отсекающих ограничений Гомори предназначен для решения задач целочисленного линейного программирования

$$\begin{cases} c^\intercal x \to \max, \\ Ax = b, \\ x \geqslant 0, \\ x \in \mathbb{Z}^n, \end{cases} \tag{DP}$$

где $x^\intercal = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — вектор переменных, $c \in \mathbb{Z}^n$ — вектор стоимостей, $b \in \mathbb{Z}^m$ — вектор свободных членов и A — матрица размера $m \times n$, состоящая из целых чисел.

В настоящей лабораторной работе необходимо реализовать метод порождения отсекающего ограничения. На вход методу поступает задача целочисленного линейного программирования (DP). На выходе метод возвращает либо отсекающее ограничение Гомори, которое необходимо добавить к задаче, либо оптимальный план задачи, либо сообщение о том, что задача несовместна или её целевая функция неограничена сверху на множестве допустимых планов.

Метод порождения отсекающего ограничения.

Вход. Задача целочисленного линейного программирования (DP)

Выход. Отсекающее ограничение Гомори или оптимальный план задачи, или сообщение о том, что задача несовместна / её целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов.

Шаг 1. Решаем симплекс-методом задачу линейного программирования, которая получается из задачи (DP) отбрасыванием условий целочисленности на переменные.

Шаг 2. Если симплекс-метод завершил работу и сообщил о том, что задача линейного программирования несовместна или её целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов, то стоп — метод завершает свою работу и возвращает ответ: «задача (DP) несовместна или её целевая функция неограничена сверху на множестве допустимых планов».

Шаг 3. Если симплекс-метод вернул оптимальный план $\overline{x}$ (вместе с упорядоченным набором базисных индексов B) и план $\overline{x}$ состоит только из целых чисел, то стоп — метод завершает свою работу и возвращает план $\overline{x}$ в качестве оптимального плана задачи (DP).

Шаг 4. Если симплекс-метод вернул оптимальный план $\overline{x}$ (вместе с упорядоченным набором базисных индексов B) и в плане $\overline{x}$ есть дробные компоненты, то строим отсекающее ограничение Гомори следующим образом.

Шаг 5. Находим дробную компоненту $\overline{x}_i$ в плане $\overline{x}$. Её индекс базисный, т.е. $i \in B$. Пусть индекс i идёт в наборе B k-ым по счёту

$$j_k = i.$$

Шаг 6. Строим базисную матрицу[1] A_B и небазисную матрицу[2] A_N.

Шаг 7. Разбиваем набор переменных x на два: набор базисных переменных x_B (базисные переменные идут последовательно друг за другом так, что порядок следования их индексов совпадает с их порядком в B) и набор небазисных переменных x_N (небазисные переменные идут друг за другом так, что их индексы образуют возрастающую последовательность).

Шаг 8. Находим A_B^{-1}.

Шаг 9. Находим произведение матриц $Q = A_B^{-1} A_N$.

Шаг 10. Выделим в матрице Q строку ℓ, которая идёт k-ой по счёту.

Шаг 11. Отсекающее ограничение имеет вид

$$\sum_{p}^{t} \{\ell_p\}(x_N)_p - s = \{\overline{x}_i\},$$

где t — число компонент в строке ℓ, $\{\alpha\} = (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)$ — дробная часть числа α, ℓ_p — p-ая по счету компонента строки ℓ, $(x_N)_p$ — p-ая по счёту небазисная переменная. Стоп.

Пример. Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования

$$\begin{cases} x_2 \to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вектор переменных

$$x^{\mathsf{T}} = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

вектор стоимостей

$$c^{\mathsf{T}} = (0, 1, 0, 0),$$

вектор правых частей

$$b^{\mathsf{T}} = (6, 0),$$

матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В исходной задаче отбросим условия целочисленности на переменные. В результате получим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} x_2 \to \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[1] Матрица, составленная из столбцов матрицы A, чьи индексы принадлежат набору B

[2] Матрица, составленная из столбцов матрицы A, чьи индексы не принадлежат набору B. Столбцы в A_N располагаются так, что их индексы образуют возрастающую последовательность

Решаем эту задачу симплекс-методом и находим оптимальный план

$$\overline{x}^{\mathsf{T}} = \left(1, \frac{3}{2}, 0, 0\right)$$

с упорядоченным набором базисных индексов

$$B = (j_1 = 1, j_2 = 2).$$

Поскольку оптимальный план $\overline{x}$ не целочисленный, то мы должны построить отсекающую плоскость Гомори. Дробной компонентой является вторая компонента плана $\overline{x}$. Индекс 2 базисный и он идёт вторым по счёту в наборе B

$$j_2 = 2,\ k = 2.$$

Разбиваем матрицу A на базисную и небазисную части. Базисная матрица A_B состоит из первого и второго столбцов матрицы A, а небазисная матрица A_N состоит из третьего и четвёртого столбцов матрицы A

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким же образом разбиваем набор переменных на базисные и небазисные

$$x_B = (x_1, x_2),\ x_N = (x_3, x_4).$$

Обращаем базисную матрицу

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Находим произведение матриц A_B^{-1} и A_N

$$A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

В результирующей матрице нас интересует k-я строка, т.е. вторая строка

$$\ell = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Найдём дробные части элементов этой строки

$$\{\ell_1\} = \left\{\frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4} - \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4},\quad \{\ell_2\} = \frac{1}{4}$$

и умножив их на соответствующие небазисные переменные сложим

$$\{\ell_1\}(x_N)_1 + \{\ell_2\}(x_N)_2 = \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4.$$

Из получившейся суммы вычтем новую переменную $s \geqslant 0$ и приравняем результат к

$$\{\overline{x}_2\} = \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Отсекающее ограничение Гомори

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 - s = \frac{1}{2}.$$

Вектор коэффициентов при переменных $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$ и свободный член $\frac{1}{2}$.