Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе
на тему

Метод Адамса

Выполнил: студент группы 153503
Кончик Денис Сергеевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Содержание

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Неявная схема метода Адамса.

Пусть есть дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y),$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Разбиваем отрезок $[a,b]$ с шагом h на n частей. То есть, получаем узлы $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, где $x_0 = a$.

Пусть $y = y(x)$ − решение. Тогда на $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо равенство

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx.$$

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла. Получим

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, то есть формулу Эйлера.

Очевидно это не самый точный метод вычисления интеграла.

Применим формулу трапеций для вычисления интеграла. Получим

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})}{2}, \qquad k = 0,1\ldots.$$

Вычисление более точно, но мы не можем найти y_{k+1} из полученной формулы. Однако в частном случае, когда дифференциальное уравнение линейно, т. е. имеет вид

$$y' = -p(x)y + q(x),$$

мы получим:

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{-p_k y_k + q_k - p_{k+1}y_{k+1} + q_{k+1}}{2},$$

где

$$p_k = p(x_k), \quad q_k = q(x_k).$$

Отсюда легко находится значение

$$y_{k+1} = \frac{(2 - hp_k)y_k + h(q_k + q_{k+1})}{2 + hp_{k+1}}.$$

2. Явная схема Адамса

Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = A_0 f(x_k, y_k) + A_1 f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$ где

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)A_i, \quad A_i = \int_a^b l_i(x)dx; \quad l_i(x) = \frac{\varpi_i(x)}{\varpi_i(x_i)}.$$

Найдем коэффициенты A_i методом неопределенных коэффициентов:

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} dx = A_0 + A_1;$$

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} xdx = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_0 = h - A_1 \\ \dfrac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}. \end{cases}$$

В итоге получим:

$$A_1 = -\frac{h}{2};$$

$$A_0 = h - A_1 = \frac{3h}{2}.$$

Откуда

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = \frac{3}{2}hf_k - \frac{h}{2}f_{k-1}, \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k).$$

Следовательно, получим

$$y_{k+1} = y_k + h(\frac{3}{2}f(x_k, y_k) - \frac{1}{2}f(x_{k-1}, y_{k-1}) \qquad k = \overline{1,n}..$$

Это формула Адамса второго порядка.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать дополнительно к начальному условию еще

$$y_{-1} = y(x_0 - h) \text{ или } y_1 = y(x_0 + h).$$

Методы Адамса — Башфорта [править | править код]

Явные методы Адамса — Башфорта[3]

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, (метод Эйлера)

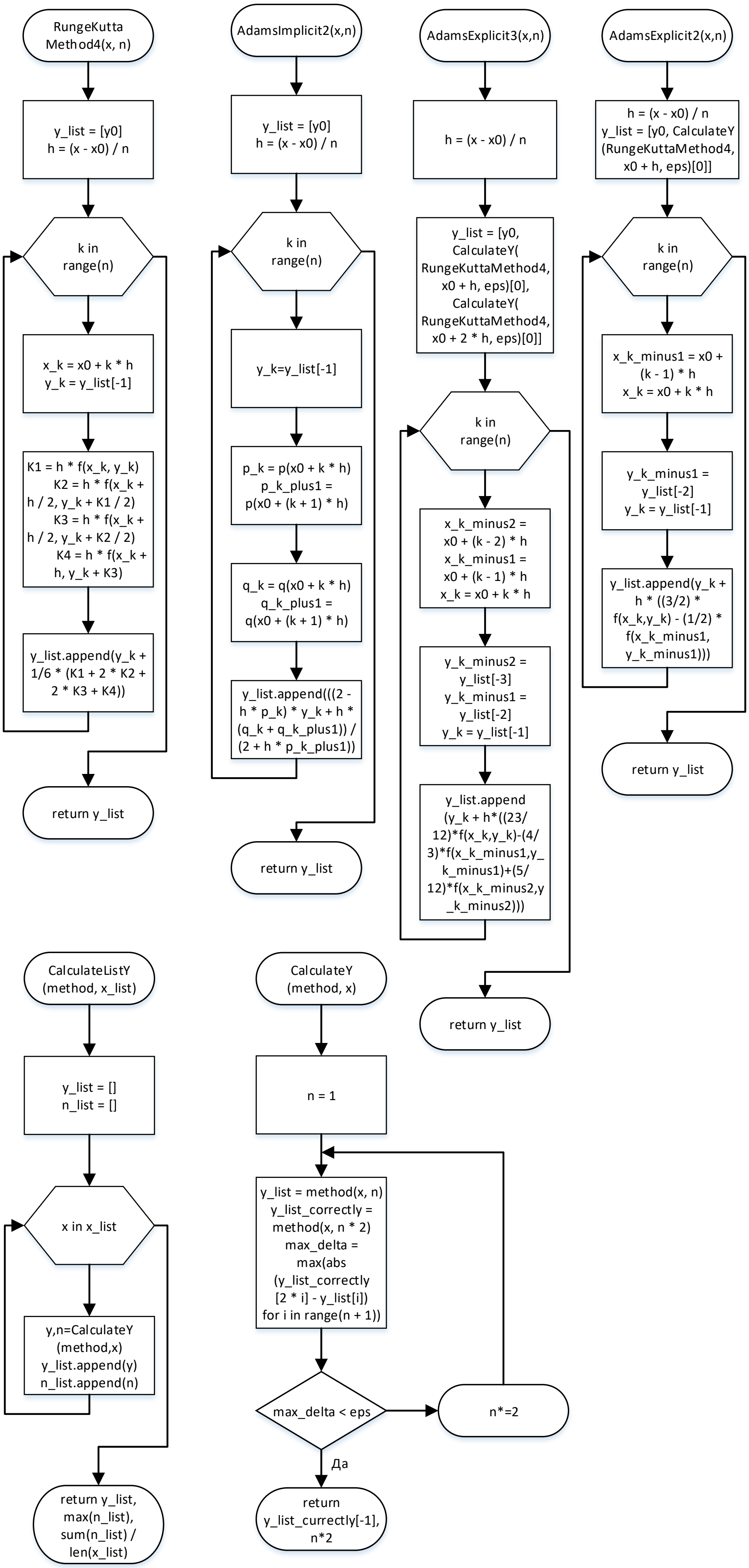
$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h\left(\frac{23}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{4}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{5}{12}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+4} = y_{n+3} + h\left(\frac{55}{24}f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \frac{59}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{37}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{3}{8}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+5} = y_{n+4} + h\left(\frac{1901}{720}f(t_{n+4}, y_{n+4}) - \frac{1387}{360}f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{109}{30}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{637}{360}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{251}{720}f(t_n, y_n)\right).$$

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ



4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

```
# -*- coding: cp1251 -*-
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sympy
import math

from calculate import CalculateListY
from calculate import CalculateY


plot_dots = 10**3
eps = 10**-3


# Тестовый пример 1
# y'= y + e^x
# y = x * e^x
x0, y0 = 1, math.e
L, R = 1, 2

def f(x, y):
    return y + math.e ** x

def p(x):
    return -1
def q(x):
    return math.e ** x

def ans(x):
    return round(x * math.e ** x, 6)


# Метод Рунге-Кутта 4 порядка
def RungeKuttaMethod4(x, n):
    y_list = [y0]
    h = (x - x0) / n
    for k in range(n):
        x_k = x0 + k * h
        y_k = y_list[-1]
        K1 = h * f(x_k, y_k)
        K2 = h * f(x_k + h / 2, y_k + K1 / 2)
        K3 = h * f(x_k + h / 2, y_k + K2 / 2)
        K4 = h * f(x_k + h, y_k + K3)
        y_list.append(y_k + 1/6 * (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4))
    return y_list

# Неявный метод Адамса 2 порядка
def AdamsImplicit2(x, n):
    y_list = [y0]
    h = (x - x0) / n
    for k in range(n):
        y_k = y_list[-1]
        p_k = p(x0 + k * h)
        p_k_plus1 = p(x0 + (k + 1) * h)
        q_k = q(x0 + k * h)
        q_k_plus1 = q(x0 + (k + 1) * h)
        y_list.append(((2 - h * p_k) * y_k + h * (q_k + q_k_plus1)) / (2 + h *
p_k_plus1))
    return y_list
```

```
# Явный метод Адамса 2 порядка
def AdamsExplicit2(x, n):
    h = (x - x0) / n
    y_list = [y0, CalculateY(RungeKuttaMethod4, x0 + h, eps)[0]]
    for k in range (1, n):
        x_k_minus1 = x0 + (k - 1) * h
        x_k = x0 + k * h
        y_k_minus1 = y_list[-2]
        y_k = y_list[-1]
        y_list.append(y_k + h * ((3/2) * f(x_k,y_k) - (1/2) * f(x_k_minus1, y_k_minus1)))
    return y_list


# Явный метод Адамса 3 порядка
def AdamsExplicit3(x, n):
    h = (x - x0) / n
    y_list = [y0, CalculateY(RungeKuttaMethod4, x0 + h, eps)[0],
CalculateY(RungeKuttaMethod4, x0 + 2 * h, eps)[0]]
    for k in range (2, n):
        x_k_minus2 = x0 + (k - 2) * h
        x_k_minus1 = x0 + (k - 1) * h
        x_k = x0 + k * h
        y_k_minus2 = y_list[-3]
        y_k_minus1 = y_list[-2]
        y_k = y_list[-1]
        y_list.append(y_k + h*((23/12)*f(x_k,y_k)-
(4/3)*f(x_k_minus1,y_k_minus1)+(5/12)*f(x_k_minus2,y_k_minus2)))
    return y_list


x_list = []
for i in range(plot_dots + 1):
    x_list.append(L + (R - L) / plot_dots * i)
xToCalculate = 1.5


print(f"Количество точек для построения графика: {plot_dots}")
print(f"Точность: {eps:.0e}")
print("\nN_max – максимальное количество узлов для одной из точек, \nнеобходимое для
достижения заданной точности")
print("N_middle – среднее количество узлов по всем точкам при \nдостижении заданной
точности")

print(f"\nТочка: {xToCalculate}")
print(f"Калькулятор: {ans(xToCalculate)}")

y_list, N_max, N_middle = CalculateListY(AdamsImplicit2, x_list, eps)
print("\nНеявный метод Адамса 2 порядка O(h^2):")
print(f"N_max: {N_max}")
print(f"N_middle: {int(N_middle)}")
print("На графике: красный")
print(f"В точке: {CalculateY(AdamsImplicit2, xToCalculate, eps)[0]}
[{CalculateY(AdamsImplicit2, xToCalculate, eps)[1]}]")
print(f"Delta = {abs(CalculateY(AdamsImplicit2, xToCalculate, eps)[0] -
ans(xToCalculate)):.2e}")
plt.plot(x_list, y_list, 'red', linewidth = 2)

y_list, N_max, N_middle = CalculateListY(AdamsExplicit2, x_list, eps)
print("\nЯвный метод Адамса 2 порядка O(h^2):")
print(f"N_max: {N_max}")
print(f"N_middle: {int(N_middle)}")
print("На графике: синий")
print(f"В точке: {CalculateY(AdamsExplicit2, xToCalculate, eps)[0]}
[{CalculateY(AdamsExplicit2, xToCalculate, eps)[1]}]")
print(f"Delta = {abs(CalculateY(AdamsExplicit2, xToCalculate, eps)[0] -
```

```
ans(xToCalculate)):.2e}")
plt.plot(x_list, y_list, '--b', linewidth = 2)

y_list, N_max, N_middle = CalculateListY(AdamsExplicit3, x_list, eps)
print("\nЯвный метод Адамса 3 порядка O(h^3):")
print(f"N_max: {N_max}")
print(f"N_middle: {int(N_middle)}")
print("На графике: желтый")
print(f"В точке: {CalculateY(AdamsExplicit3, xToCalculate, eps)[0]}
[{CalculateY(AdamsExplicit3, xToCalculate, eps)[1]}]")
print(f"Delta = {abs(CalculateY(AdamsExplicit3, xToCalculate, eps)[0] -
ans(xToCalculate)):.2e}")
plt.plot(x_list, y_list, ':y', linewidth = 2)

plt.show()



# Вычислить Y по методу и X
def CalculateY(method, x, eps):
    n = 1 # Количество узлов от x0 до x для точности eps

    while True:
        y_list = method(x, n)
        y_list_correctly = method(x, n * 2)
        max_delta = max(abs(y_list_correctly[2 * i] - y_list[i]) for i in range(n + 1))

        if (max_delta < eps):
            return round(y_list_correctly[-1], 6), n * 2
        else:
            n *= 2

# Создать список Y по методу и списку X
def CalculateListY(method, x_list, eps):
    y_list = [] # Список игреков
    n_list = [] # Список n (числа узлов) для каждой точки
    for x in x_list:
        y, n = CalculateY(method, x, eps)
        y_list.append(y)
        n_list.append(n)

    return y_list, max(n_list), sum(n_list) / len(x_list)
```

5. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Явные методы Адамса k-го порядка требуют предварительного вычисления решения в k начальных точках. Для вычисления начальных значений программа использует метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

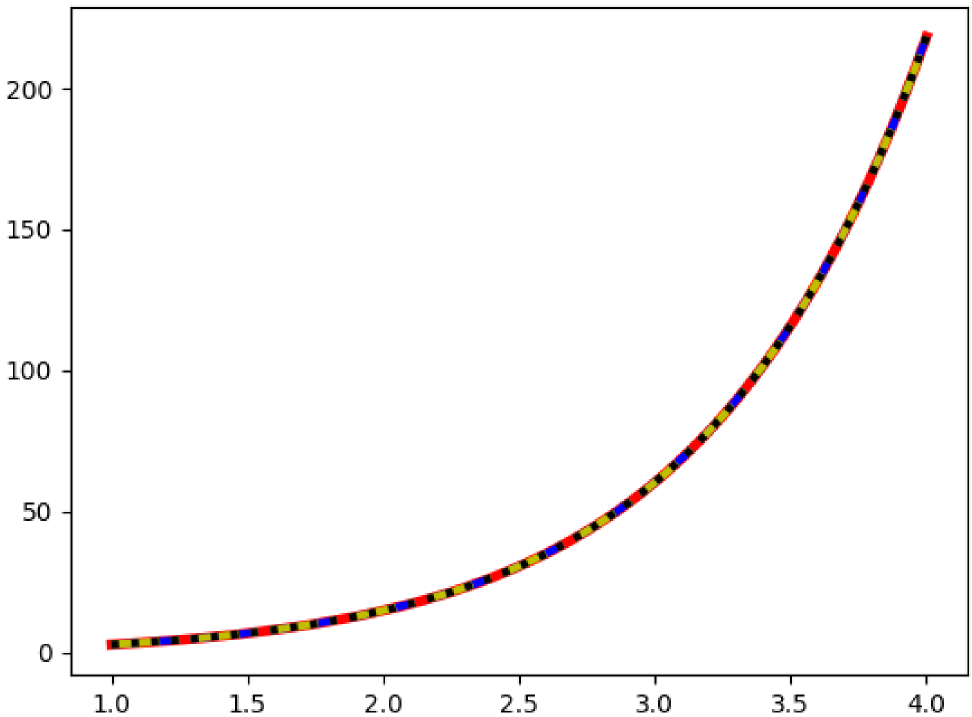
Для неявного метода Адамса 2-го порядка программа считает, что исходное дифференциальное уравнение является линейным.

Тестовый пример 1.1.

С помощью неявного метода Адамса 2 порядка[1], явных методов Адамса 2, 3, 4 порядков[2,3,4] найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Решение	Точность
$y' = y + e^x$	$y(1) = e$	$[1; 4]$	$y = xe^x$	$\varepsilon = 10^{-3}$

Точек для построения графиков: 10^3



1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный

Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе

	Адамс [2] (неявный)	Адамс [2] (явный)	Адамс [3] (явный)	Адамс [4] (явный)
Макс.	2048	4096	512	256
Ср.	556	1228	190	71

Тестовый пример 1.2.

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

n – число точек разбиения отрезка [1; x] для достижения заданной точности ε в точке x.

$h = \frac{x-1}{n}$ – шаг разбиения, соответствующий количеству точек разбиения n.

Неявный метод Адамса 2-го порядка $O(h^2)$			
x	2.0	2.7	3.4
$y = xe^x$	14.778112	40.175276	101.877940
Метод(x)	14.778281	40.175388	101.878111
Δ	$1.69 * 10^{-4}$	$1.12 * 10^{-4}$	$1.71 * 10^{-4}$
n	128	512	1024
h	0.007813	0.003320	0.002344

Явный метод Адамса 2-го порядка $O(h^2)$			
x	2.0	2.7	3.4
$y = xe^x$	14.778112	40.175276	101.877940
Метод(x)	14.777902	40.175135	101.877726
Δ	$2.10 * 10^{-4}$	$1.41 * 10^{-4}$	$2.14 * 10^{-4}$
n	256	1024	2048
h	0.003906	0.001660	0.001172

Явный метод Адамса 3-го порядка $O(h^3)$			
x	2.0	2.7	3.4
$y = xe^x$	14.778112	40.175276	101.877940
Метод(x)	14.778057	40.175150	101.877805
Δ	$5.50 * 10^{-5}$	$1.26 * 10^{-4}$	$1.35 * 10^{-4}$
n	64	128	256
h	0.015625	0.013281	0.009375

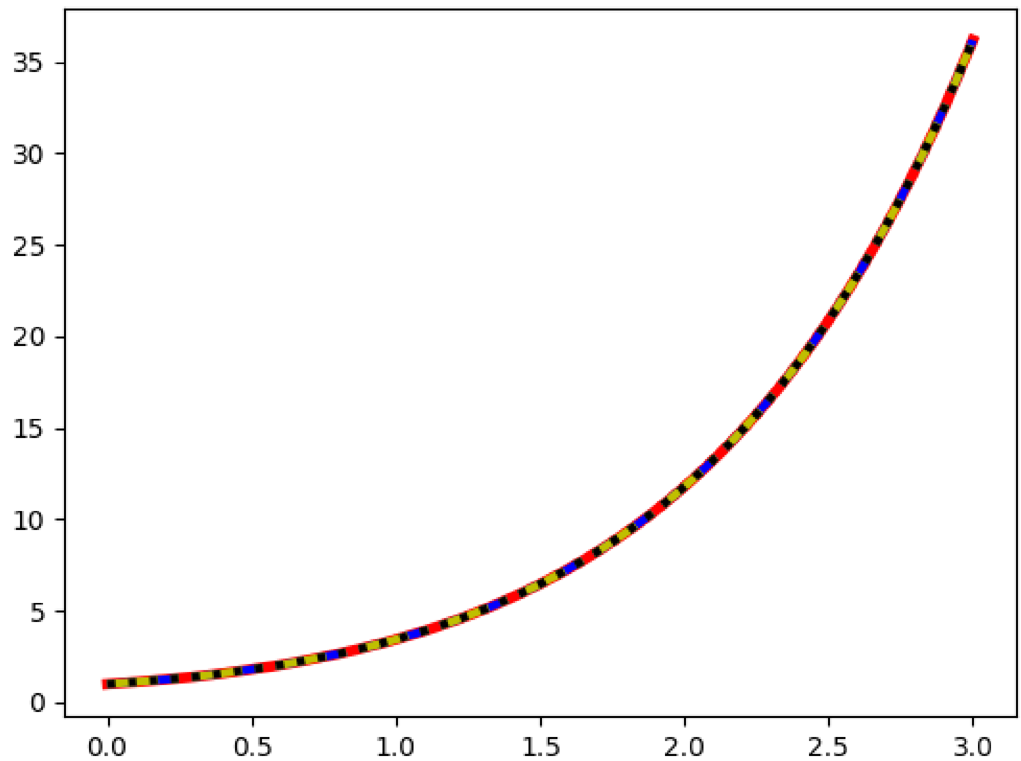
Явный метод Адамса 4-го порядка $O(h^4)$			
x	2.0	2.7	3.4
$y = xe^x$	14.778112	40.175276	101.877904
Метод(x)	14.778098	40.175248	101.877919
Δ	$1.40 * 10^{-5}$	$2.80 * 10^{-5}$	$2.10 * 10^{-5}$
n	32	64	128
h	0.031250	0.026563	0.018750

Тестовый пример 2.1.

С помощью неявного метода Адамса 2 порядка[1], явных методов Адамса 2, 3, 4 порядков[2,3,4] найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Решение	Точность
$y' = x + y$	$y(0) = 1$	$[0; 3]$	$y = 2e^x - x - 1$	$\varepsilon = 10^{-3}$

Точек для построения графиков: 10^3



1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный

Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе

	Адамс [2] (неявный)	Адамс [2] (явный)	Адамс [3] (явный)	Адамс [4] (явный)
Макс.	1024	2048	256	128
Ср.	197	456	92	39

Тестовый пример 2.2.

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

n – число точек разбиения отрезка [0; x] для достижения заданной точности ε в точке x.

$h = \frac{x}{n}$ – шаг разбиения, соответствующий количеству точек разбиения n.

Неявный метод Адамса 2-го порядка $O(h^2)$			
x	1.5	2.3	2.9
$y = 2e^x - x - 1$	6.463378	16.648365	32.448291
Метод(x)	6.463532	16.648674	32.448573
Δ	$1.54 * 10^{-4}$	$3.09 * 10^{-4}$	$2.82 * 10^{-4}$
n	128	256	512
h	0.011719	0.008984	0.005664

Явный метод Адамса 2-го порядка $O(h^2)$			
x	1.5	2.3	2.9
$y = 2e^x - x - 1$	6.463378	16.648365	32.448291
Метод(x)	6.463187	16.648269	32.448203
Δ	$1.91 * 10^{-4}$	$9.60 * 10^{-5}$	$8.80 * 10^{-5}$
n	256	1024	2048
h	0.005859	0.002246	0.001416

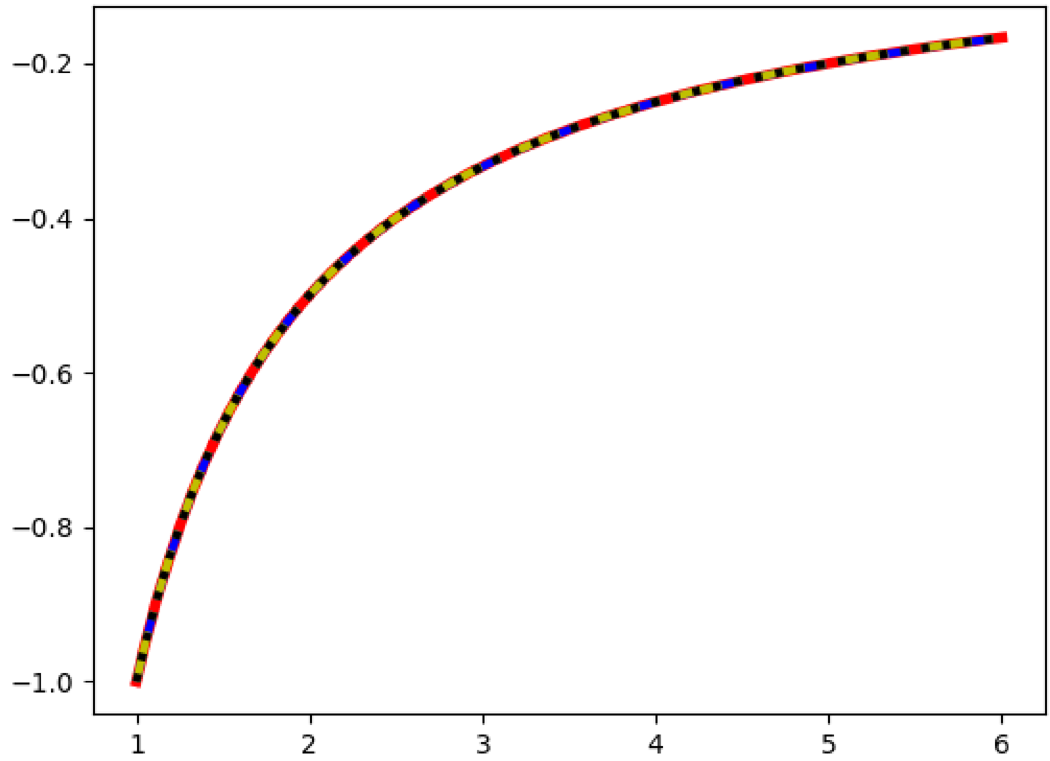
Явный метод Адамса 3-го порядка $O(h^3)$			
x	1.5	2.3	2.9
$y = 2e^x - x - 1$	6.463378	16.648365	32.448291
Метод(x)	6.463317	16.648269	32.448234
Δ	$6.10 * 10^{-5}$	$9.60 * 10^{-5}$	$5.70 * 10^{-5}$
n	64	128	256
h	0.023438	0.017969	0.011328

Явный метод Адамса 4-го порядка $O(h^4)$			
x	1.5	2.3	2.9
$y = 2e^x - x - 1$	6.463378	16.648365	32.448291
Метод(x)	6.463359	16.648341	32.448282
Δ	$1.90 * 10^{-5}$	$2.40 * 10^{-5}$	$9.00 * 10^{-6}$
n	32	64	128
h	0.046875	0.035938	0.022656

Тестовый пример 3.1.

С помощью неявного метода Адамса 2 порядка[1], явных методов Адамса 2, 3, 4 порядков[2,3,4] найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Решение	Точность
$y' = \frac{2}{x}y + \frac{3}{x^2}$	$y(1) = -1$	$[1;6]$	$y = -\frac{1}{x}$	$\varepsilon = 10^{-3}$
Точек для построения графиков: 10^3				



1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный

Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе

	Адамс [2] (неявный)	Адамс [2] (явный)	Адамс [3] (явный)	Адамс [4] (явный)
Макс.	1024	2048	512	256
Ср.	257	590	193	106

Тестовый пример 3.2.

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

n – число точек разбиения отрезка [1; x] для достижения заданной точности ε в точке x.

$h = \frac{x-1}{n}$ – шаг разбиения, соответствующий количеству точек разбиения n.

Неявный метод Адамса 2-го порядка $O(h^2)$			
x	2.0	3.5	5.0
y = -1/x	-0.500000	-0.285714	-0.200000
Метод(x)	-0.499905	-0.285598	-0.199847
Δ	$9.50 * 10^{-5}$	$1.16 * 10^{-4}$	$1.53 * 10^{-4}$
n	64	256	512
h	0.015625	0.009766	0.007813

Явный метод Адамса 2-го порядка $O(h^2)$			
x	2.0	3.5	5.0
y = -1/x	-0.500000	-0.285714	-0.200000
Метод(x)	-0.500115	-0.285858	-0.200188
Δ	$1.15 * 10^{-4}$	$1.44 * 10^{-4}$	$1.88 * 10^{-4}$
n	128	512	1024
h	0.007813	0.004883	0.003906

Явный метод Адамса 3-го порядка $O(h^3)$			
x	2.0	3.5	5.0
y = -1/x	-0.500000	-0.285714	-0.200000
Метод(x)	-0.499857	-0.285596	-0.199872
Δ	$1.43 * 10^{-4}$	$1.18 * 10^{-4}$	$1.28 * 10^{-4}$
n	32	128	256
h	0.031250	0.019531	0.0156250

Явный метод Адамса 4-го порядка $O(h^4)$			
x	2.0	3.5	5.0
y = -1/x	-0.500000	-0.285714	-0.200000
Метод(x)	-0.500015	-0.285820	-0.200097
Δ	$1.50 * 10^{-5}$	$1.06 * 10^{-4}$	$9.70 * 10^{-5}$
n	32	64	128
h	0.031250	0.039063	0.031250

6. ЗАДАНИЕ

Вариант 11

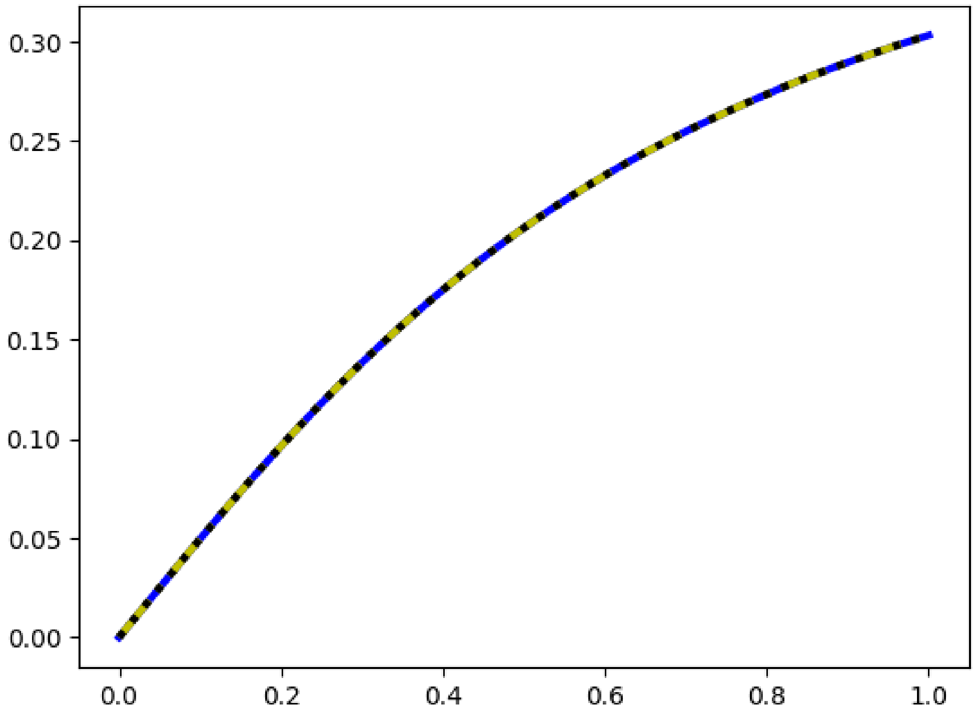
Найти с точностью до 0.001 решение уравнения на отрезке [0; 1].

$$y' = \frac{a(1 - y^2)}{(1 + m)x^2 + y^2 + 1} \quad (*)$$

$$y(0) = 0, m = 1.5, a = 0.5$$

ДУ	Начальное условие	Отрезок	Точность
$(*)$	$y(0) = 0$	$[0; 1]$	$\varepsilon = 10^{-3}$

Точек для построения графиков: 10^3



Цвета графиков, построенных явными методами:
Адамс [2] – синий, Адамс [3] – желтый, Адамс [4] – черный

Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе

	Адамс [2] (явный)	Адамс [3] (явный)	Адамс [4] (явный)
Макс.	32	32	16
Ср.	16	9	6

7. ВЫВОД

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы был изучены методы Адамса для решения задачи Коши ОДУ 1 порядка. Составлен алгоритм и программа, проверена правильность её работы на тестовых примерах, с заданной точностью построены графики решения задачи Коши.

Исходя из тестовых примеров и задания и учитывая количество необходимых точек разбиения отрезка для достижения заданной точности, можно сделать вывод о трудоемкости методов: методы Адамса (явный и неявный) 2-го порядка более трудоемкие по сравнению с методами 3-го и 4-го порядка (явные). Самым эффективным оказался явный метод Адамса 4-го порядка.