Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа (ПЗМА)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

Интегрирование дифференциальных
уравнений с помощью степенных рядов

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.153503 Кончик Д.С.

Руководитель: канд. ф.-м. н., доцент Анисимов В.Я.

Минск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Термин «дифференциальное уравнение» принадлежит Лейбницу (1676, опубликовано в 1684 г.). Начало исследований по дифференциальным уравнениям восходит ко временам Лейбница, Ньютона, в работах которых исследовались первые задачи, приводящие к таким уравнениям. Лейбниц, Ньютон, братья Я. и И. Бернулли разрабатывали методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве универсального способа использовались разложения интегралов дифференциальных уравнений в степенные ряды. Некоторые классы уравнений были приведены к уравнению с разделяющимися переменными [1, с. 431].

Решения многих дифференциальных уравнений не выражаются в элементарных функциях. В этих случаях пользуются приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде степенного ряда; сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому решению. Указанный степенной ряд находят способом неопределенных коэффициентов или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена) [2, с. 511].

Цель данной работы – проанализировать, собрать и обобщить теоретические данные по числовым, функциональным рядам и дифференциальным уравнениям, а также показать применение рядов при интегрировании дифференциальных уравнениях.

Исследование данной темы будет проходить в двух разделах. В первом разделе будут освящены понятия ряда, функционального ряда и дифференциального уравнения, применяемые в практической части.

Второй раздел посвящен примерам интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Также тут будет использоваться инструмент для решения математических задач – система компьютерной алгебры Maple.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, где $u_n = f(n)$, – бесконечная числовая последовательность. Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \cdots$$

называется бесконечным *числовым рядом*, а числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – *членами ряда*; $u_n = f(n)$ называется *общим членом*. Ряд часто записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ [7, с. 66].

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют n-*й частичной суммой ряда*:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Ряд называется *сходящимся*, если его n-я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т. е. если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называют *суммой* ряда. Если же n-я частичная сумма ряда при $n \to \infty$ не стремится к конечному пределу, то ряд называют *расходящимся* [7, с. 66].

Ряд

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots (|q| < 1),$$

составленный из членов любой убывающей геометрической прогрессии, является сходящимся и имеет сумму $\frac{a}{1-q}$.

Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

называемый *гармоническим*, расходится [7, с. 66].

Приведем основные теоремы о сходящихся числовых рядах.

1. Если сходится ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

и суммой его является число S, то сходится и ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + \cdots,$$

причем сумма последнего ряда равна aS*.*

2. Если сходится ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

то сходится и ряд

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots,$$

получаемый из данного ряда *отбрасыванием первых* m *членов*; наоборот, *из сходимости* m*-го остатка ряда вытекает сходимость данного ряда* [7, с. 66].

3. Если сходятся ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \; v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

имеющие соответственно суммы S_1 *и* S_2*, то сходится и ряд*

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \cdots,$$

причем сумма последнего ряда равна $S_1 + S_2$*.*

4. Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$*, т. е. при* $n \to \infty$ *предел общего члена сходящегося ряда равен нулю* **(необходимый признак сходимости ряда)**.

Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Перечислим важнейшие признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Первый признак сравнения. *Пусть даны два ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots, \tag{2}$$

причем каждый член ряда (1) *не превосходит соответствующего члена ряда* (2)*, т. е.* $u_n \leq v_n \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$*. Тогда если сходится ряд* (2)*, то сходится и ряд* (1)*; если расходится ряд* (1)*, то расходится и ряд* (2).

Этот признак остается в силе, если неравенства $u_n \leq v_n$ выполняются не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера $n = N$ [7, с. 67].

Второй признак сравнения. *Если существует конечный и отличный от нуля предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$, *то оба ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$*одновременно сходятся или расходятся* [7, с. 67].

Признак Коши. *Если для ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$, *то этот ряд сходится при* $C<1$ *и расходится при* $C>1$ [7, с. 67]..

Признак Даламбера. *Если для ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

существует $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D$, *то этот ряд сходится при* $D<1$ *и расходится при* $D>1$ [7, с. 67].

Интегральный признак. *Если* $f(x)$ *при* $x\geq 1$ *– непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, *где* $u_n=f(n)$, *сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл* $\int_N^{\infty}f(x)dx$ $(N\geq 1)$. [7, с. 67].

Рассмотрим ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т. е. ряды вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots,$$

где $u_n>0$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю,* т. е. если выполнятся следующие два условия: 1) $u_1>u_2>u_3>\cdots$ и 2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ [7, с. 68].

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$. В этом случае исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *условно сходящимся,* если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится [7, с. 68].

1.2. Функциональные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$, члены которого являются функциями от переменной x, называется функциональным.

При различных значениях x из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости [6, с. 350].

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются *степенные ряды* вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad (1)$$

или более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \ldots \quad (2)$$

Областью сходимости функционального ряда является один интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$ (для ряда 1) или $x = x_0$ (для ряда 2), который может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

Для определения области сходимости функциональных рядов обычно вначале используется признак Даламбера, а затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости (D = 1), исследуются особо, посредством других признаков сходимости рядов [6, с. 351].

1.3. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots,$$

где $a, a_0, a_1, \dots, a_n$ – действительный числа, называется *степенным.*

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что *если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится (и притом абсолютно) при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству* $|x-a| < |x_0 - a|$ (теорема Абеля).

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда *интервала сходимости* $|x-a| < R$ с центром в точке a, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится. На концах интервала сходимости (в точках $x = a \pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному.

Число R – половина интервала сходимости – называется *радиусом сходимости* степенного ряда [7, с. 81].

Для отыскания интервала и радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться один из следующих способов.

1. Если среди коэффициентов $a_1, \dots, a_n, \dots$ нет равных нулю, то

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует.

2. Если исходный ряд имеет вид

$$a_0 + a_1(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^{np} + \cdots,$$

(где p – некоторое определенное целое положительное число: 2, 3, …), то

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности

$(x-a)$ не образует арифметическую прогрессию, как в предыдущем случае, то радиус сходимости можно находить по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

в которой используются только значения a_n, отличные от нуля.

4. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленном из абсолютных величин членов исходного ряда.

Записав ряд в виде

$$u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

где $u_n(x) = a_n(x-a)^N$ и зависимость N от n может быть любой, находят интервал сходимости из неравенств

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Отметим следующее свойство степенных рядов: *ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости* [7, с. 82].

1.4. Ряд Тейлора

Определение ряда Тейлора. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0имеет производные всех порядков. Степенной ряд

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

называется *рядом Маклорена.* Эти ряды широко используются для получения приближения функции f в окрестности точки x_0 [3, с. 139].

Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и ее производные равномерно ограничены в этом интервале, т.е. существует такое положительное число C (не зависящее от n), что

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leq C\ (n=1,2,3,\dots)$$

при всех x из $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, то верно равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

во всем интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ [1, с. 417].

1.5. Дифференциальные уравнения

Понятие обыкновенного дифференциального уравнения. При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимые переменные и искомую функцию, но можно установить связь между этой функцией и ее производными, выражаемую *дифференциальным уравнением.*

Если искомая функция зависит от одного переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным.* Произвольное обыкновенное уравнение дифференциальное уравнение порядка n имеет следующий вид:

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \quad (1)$$

Здесь F есть заданная (известная) функция от $n+2$ переменных, обычно удовлетворяющая определенным условиям непрерывности и дифференцируемости, а $y = y(x)$ – функция от x – решение дифференциального уравнения, которую надо найти.

Решением дифференциального уравнения порядка n называется функция $y(x)$, имеющая на некотором интервале (a, b) производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ до порядка n включительно и удовлетворяющая этому уравнению. Это значит, что выполняется тождество по x:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0 \ (x \in (a, b)).$$

Каждому решению, вообще говоря, соответствует свой интервал. Кончено, если функция $y(x)$, заданная на интервале (a, b), есть решение дифференциального уравнения (1), то эта функция, рассматриваемая на интервале (c, d), принадлежащем к (a, b), тоже есть решение уравнения (1) [5, с. 12].

График решения обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка будем называть *интегральной кривой* этого уравнения.

Уравнения

$$y''' + 2y" + y = \sin(x),$$

$$y' + ky = \cos(x)$$

могут служить примерами обыкновенных дифференциальных уравнений. первое из них – третьего порядка, второе – первого.

Существует термин – *проинтегрировать дифференциальное уравнение.* Это значит, что надо найти те или иные решения данного дифференциального уравнения. Нахождение решения дифференциального уравнения всегда связано с необходимостью *интегрировать* входящие в это уравнение функции [5, с. 13].

Задача Коши.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Решением такого уравнения служит всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество, т. е.

$$F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right] \equiv 0.$$

Задача Коши для этого уравнения состоит в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, где x_0, y_0, y_1, $y_2, \dots, y_{n-1}$ – заданные числа, которые называются *начальными данными,* или *начальными условиями.*

Функция $y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n)$ называется *общим решением* данного дифференциального уравнения n-го порядка, если при соответствующем выборе произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ эта функция является решением любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения.

Всякое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$, называется *частным решением* этого уравнения. Для выделения из множества решений дифференциального уравнения определенного частного решения иногда используют и так называемые краевые решения [7, с. 139].

1.6. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Интеграл дифференциального уравнения не всегда можно выразить в элементарных функциях или посредством конечного числа квадратур (интегралов).

В большинстве случаев каждое дифференциальное уравнения определяет собой особую функцию, которую можно, вообще говоря, представить лишь в виде бесконечного функционального ряда.

Интегралы многих дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде степенного ряда, сходящегося в некотором интервале значений независимой переменной [6, с. 427].

В тех случаях, когда для уравнения $y' = f(x, y)$ требуется решить задачу Коши при начальном условии $y(x_0) = y_0$, решение можно искать с помощью ряда Тейлора:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находят последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования вместо $x, y, y', \ldots$ значений x_0, y_0, ${y'}_0$ и всех остальных найденных последующих производных. Аналогично с помощью ряда Тейлора можно интегрировать и уравнения высших порядков [7, с. 162].

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения ищут в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n.$$

Неопределенные коэффициенты C_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$ в обеих частях полученного равенства. Если удается найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости [7, с. 161].

Пример. Найти общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx} = y^2$ в виде степенного ряда.

Решение. Пусть искомый интеграл есть степенной ряд

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ неизвестные, подлежащие определению постоянные.

Допуская, что такой ряд существует и сходится в некотором интервале значений x, найдем ряд для $\frac{dy}{dx}$ его почленным дифференцированием

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

и ряд для y^2–почленным умножением ряда (1) самого на себя:

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + 2a_0 a_3 x^3 + \cdots + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + \cdots$$

Подставляя эти ряды вместо $\frac{dy}{dx}$ и y^2 в заданное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, поскольку два ряда будут тождественно равны только при этом условии, получим следующую систему:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & a_1 = a_0^2 \\ x^1 & 2a_2 = 2a_0 a_1 \\ x^2 & 3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2 \\ x^3 & 4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 \end{array}$$

....

Решая эту систему, найдем: $a_1 = a_0^2$; $a_2 = a_0^3$; $a_3 = a_0^4$; ...; $a_n = a_0^{n+1}$; ... [6, с. 427]

Следовательно, искомое разложение в степенной ряд общего интеграла данного уравнения есть

$$y = a_0(1 + a_0 x + a_0^2 x^2 + a_0^3 x^3 + \cdots + a_0^n x^n + \cdots),$$

где a_0 является произвольной постоянной.

Полученный ряд представляет бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = a_0 x$ и при $|q| < 1$ имеет сумму

$$y = \frac{a_0}{1 - a_0 x} = \left[C = \frac{1}{a_0}\right] = \frac{1}{C - x}. \qquad (1)$$

Решение этой задачи показывает достоверность метода интегрирования уравнений с помощью рядов, так как непосредственное интегрирование данного уравнения, как уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, дает тот же результат [6, с. 428].

Убедимся в этом:

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

Далее разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int dx = \int \frac{dy}{y^2} + C;\ x = -\frac{1}{y} + C;$$

$$y = \frac{1}{C - x}. \qquad (2)$$

Выражения (1) и (2) идентичны.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Примеры интегрирования

2.2. Интегрирование в Maple

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гусак А.А. и др. Справочник по высшей математике / А.А.Гусак, Г.М.Гусак, Е.А.Бричикова. — Мн.: ТетраСистемс. 1999. — 640 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов. — 13-е изд. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 560 с.
3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: [Учеб. Пособие для втузов]. Ч. III. — Мн.: Выш. шк., 1985. — 208 с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. — 3-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 432 с.
5. Бугров Я. С. Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; Под ред. В. А. Садовничего. — 6-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. Т.3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — 512 с.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 1966. - 464 с.
7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003. — 416 с.
8. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд, стереотип. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 352 с.
9. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие — Белгород: Изд. Белаудит, 2001. — 116 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. - М.: Физматлит, 1964. - 810 с.