> *#Лабораторная работа 2.*
#Вариант 1.
#Выполнил: Кончик Денис, 153503

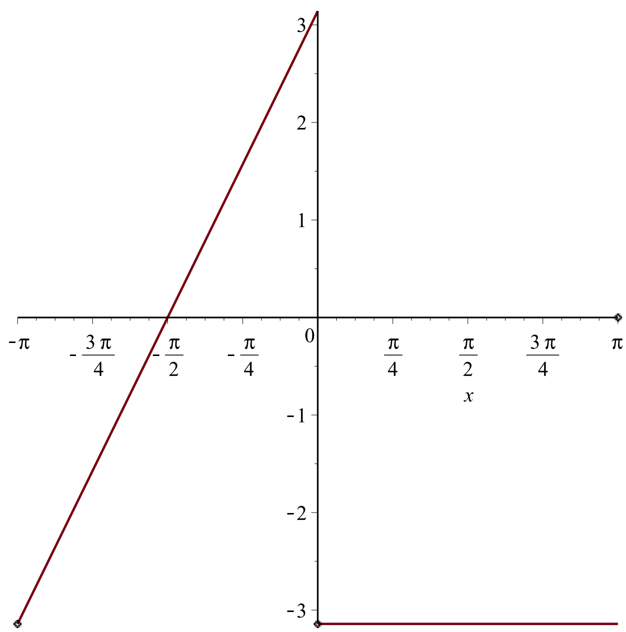
> *#Задание 1*
#Для 2 π—периодической кусочно-непрерывной функции f (x) по ее аналитическому определению на главном периоде получите разложение в тригонометрический ряд Фурье.
#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

> *#Создайте пользовательскую процедуру-функцию, осуществляющую построение тригонометрического ряда Фурье для произвольной функции, удовлетворяющей теореме Дирихле.*
#Постройте в одной системе координат на промежутке $[-3\pi, 3\pi]$ *графики частичных сумм* $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ *ряда* и *его суммы* $S(x)$.
#Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.

>
#Задание кусочно-непрерывной функции
$f := piecewise(-\mathrm{Pi} \le x < 0, \mathrm{Pi} + 2\cdot x, 0 \le x < \mathrm{Pi}, -\mathrm{Pi});$

$$f := \begin{cases} \pi + 2x & -\pi \le x \textbf{ and } x < 0 \\ -\pi & 0 \le x \textbf{ and } x < \pi \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

> *#График на главном периоде*
$plot(f, x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}, discont = true);$



> *#Коэффициенты Фурье*

> $a0 := simplify\left(\frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f, x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi})\right);$

$$a0 := -\pi \tag{2}$$

> $an := n \to \left(\frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f \cdot \cos(n \cdot x), x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi})\right):$
$simplify(an(n) \text{ assuming } n :: posint);$

$$\frac{2(-1)^{1+n}+2}{\pi n^2} \tag{3}$$

> $bn := n \to \left(\frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f \cdot \sin(n \cdot x), x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi})\right):$
$simplify(bn(n) \text{ assuming } n :: posint);$

$$-\frac{2}{n} \tag{4}$$

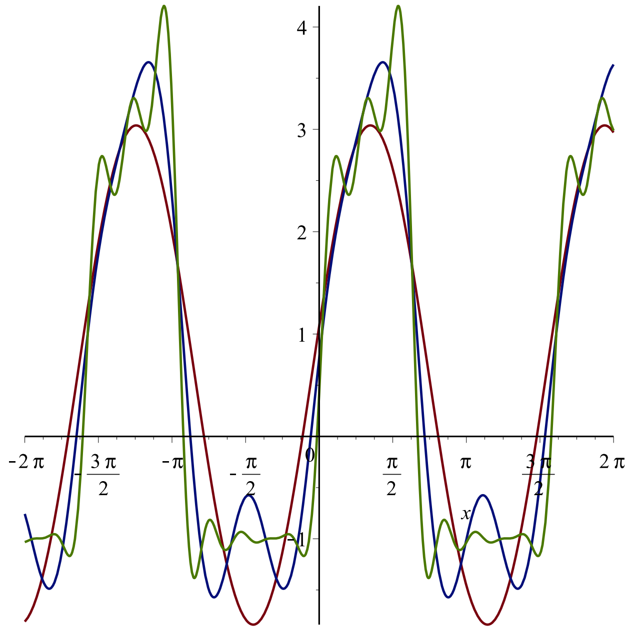
> *#Частичная сумма ряда Фурье*

> $Sn := (n, x) \to \frac{a0}{2} + sum(an(k) \cdot \cos(k \cdot x) + bn(k) \cdot \sin(k \cdot x), k=1..n);$

$$Sn := (n, x) \to \frac{1}{2}\, a0 + \sum_{k=1}^{n} (an(k) \cos(k\,x) + bn(k) \sin(k\,x)) \tag{5}$$

> *#Графики частичных сумм*

> $plot([Sn(1, x), Sn(3, x), Sn(7, x)], discont=true);$



> *#Значения суммы ряда в точках разрыва*

> $points := plots[pointplot]([seq([2 \cdot \text{Pi} \cdot k, 0], k = -1 ..1)])$:

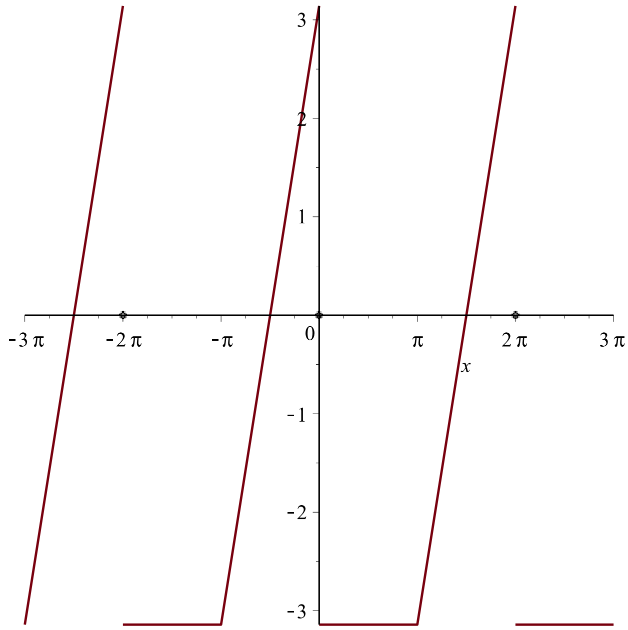
> *#График суммы ряда в точках непрерывности*

> $S := plot(Sn(infinity, x), x = -3 \cdot \text{Pi} ..3 \cdot \text{Pi}, discont = true)$:

>

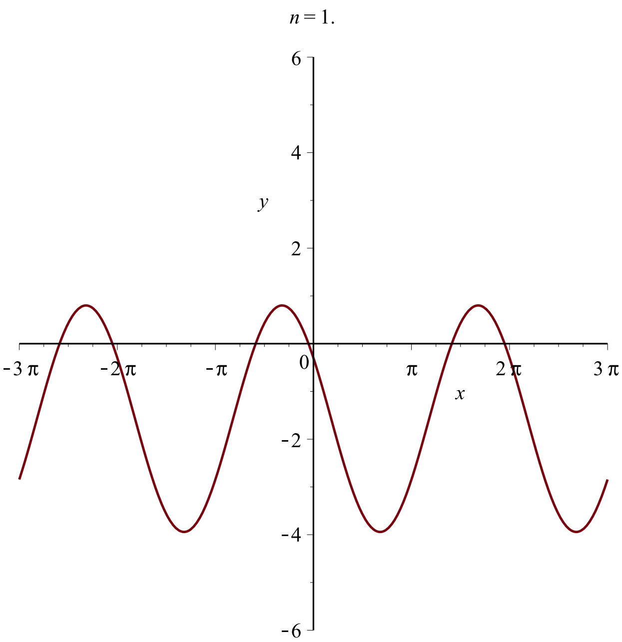
> *#В одной системе координат значения суммы ряда и в точках непрерывности,* и в *точках разрыва*

> $plots[display](points, S);$



> *#Анимированный процесс построения сумм ряда*

> $plots[animate](plot, [Sn(n, x), x = -3\cdot\mathrm{Pi}..3\cdot\mathrm{Pi}, y = -6..6], n = [seq(i, i = 1..10)]);$


n = 1.
6
4
y
2
-3 π
-2 π
-π
0
π
2 π
3 π
x
-2
-4
-6

> *#Задание 2*
#Разложите в ряд Фурье x_2 − периодическую функцию $y = f(x)$,
заданную на промежутке $(0, x_1)$ формулой $y = ax + b$, а *на $[x_1, x_2]$ — $y = c$.*
#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.
#Модифицируйте созданную ранее процедуру (задание 1).
#Постройте в одной системе координат графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$,
$S_7(x)$ ряда и *его суммы $S(x)$ на промежутке $[-2x_2, 2x_2]$.*
#Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.
Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда,
#взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

> *#Вариант 1*
#a=1, b=2, c=−1, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$
$T := 5;\ l := \frac{T}{2};$

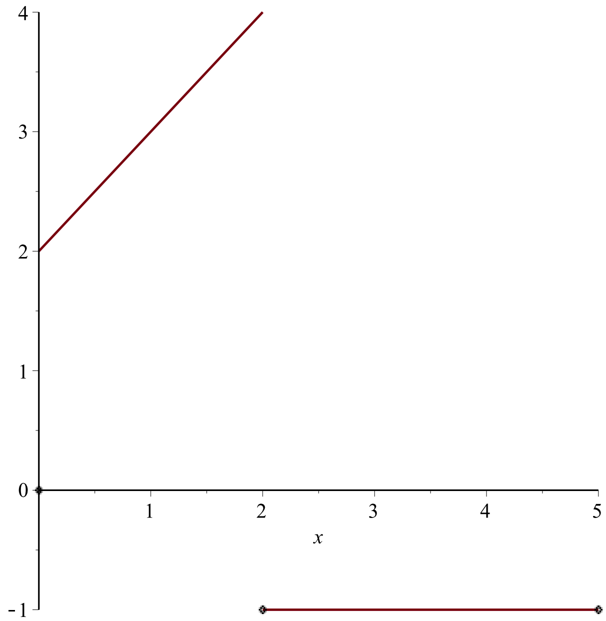
$$T := 5$$

$$l := \frac{5}{2} \qquad (6)$$

> *#Задание кусочно-непрерывной функции*
$f := piecewise(0 < x < 2, x + 2, 2 \le x \le 5, -1);$

$$f := \begin{cases} x + 2 & 0 < x \ \textbf{and}\ x < 2 \\ -1 & 2 \le x \ \textbf{and}\ x \le 5 \end{cases} \qquad (7)$$

> *#График на главном периоде*
$plot(f, x = 0..5, discont = true);$



> #Коэффициенты Фурье

> $a0 := \frac{1}{l} int(f, x = 0..5);$

$$a0 := \frac{6}{5} \qquad (8)$$

> $an := n \to \left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l}\right), x = 0..5\right)\right):$
$simplify(an(n) \text{assuming } n :: posint);$

$$\frac{5}{2} \frac{2 \sin\left(\frac{4}{5} n \pi\right) \pi n + \cos\left(\frac{4}{5} n \pi\right) - 1}{\pi^2 n^2} \qquad (9)$$

> $bn := n \to \left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l}\right), x = 0..5\right)\right):$
$simplify(bn(n) \text{assuming } n :: posint);$

$$\frac{1}{2} \frac{-10 \cos\left(\frac{4}{5} n \pi\right) \pi n + 6 n \pi + 5 \sin\left(\frac{4}{5} n \pi\right)}{\pi^2 n^2} \qquad (10)$$

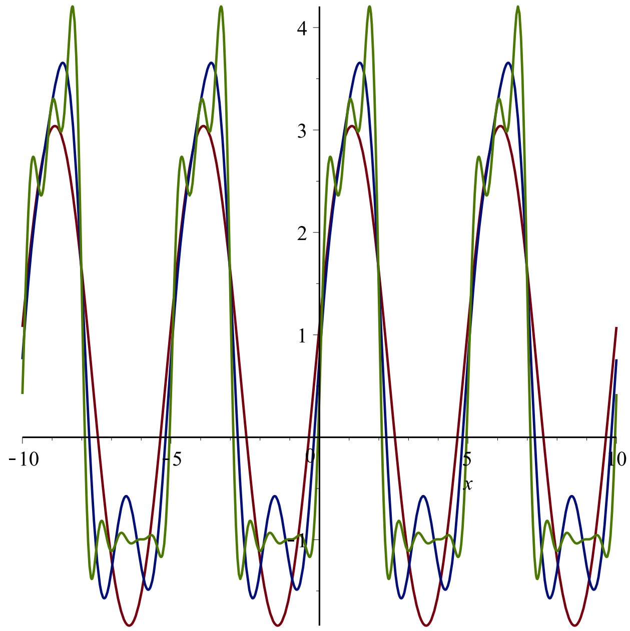
> #Частичная сумма ряда Фурье

> $Sn := (n, x) \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an(k)\cdot\cos\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right) + bn(k)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right), k=1..n\right);$

$$Sn := (n, x) \rightarrow \frac{1}{2}\, a0 + \sum_{k=1}^{n}\left(an(k)\,\cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{l}\right) + bn(k)\,\sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{l}\right)\right) \qquad \textbf{(11)}$$

> *#Графики частичных сумм*

> $plot([Sn(1, x), Sn(3, x), Sn(7, x)], x=-10..10);$



> *#Значения суммы ряда в точках разрыва*

> $points1 := plots[pointplot]\left(\left[seq\left(\left[5\cdot k, \frac{1}{2}\right], k=-1..1\right)\right]\right):$

$points2 := plots[pointplot]\left(\left[seq\left(\left[2+5\cdot k, \frac{3}{2}\right], k=-2..1\right)\right]\right):$

> *#График суммы ряда в точках непрерывности*

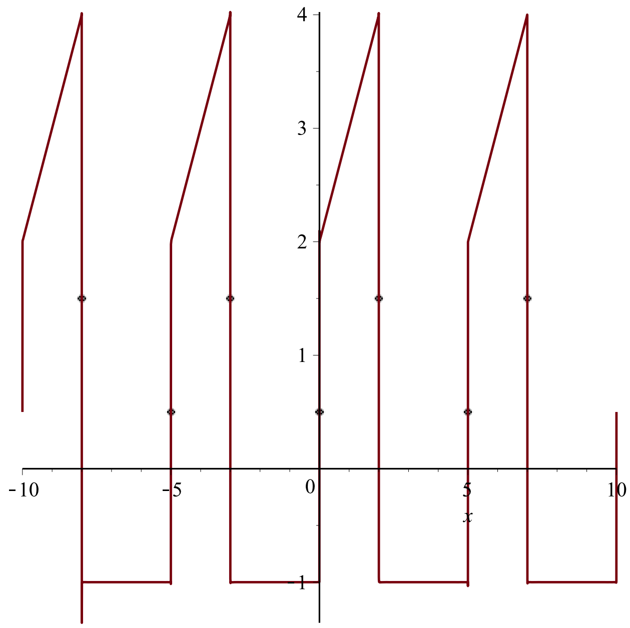
> $S := plot(Sn(20000, x), x=-10..10, discont=true):$

>

> *#В одной системе координат значения суммы ряда и в точках непрерывности,*

и в *точках разрыва*

> $plots[display](points1, points2, S);$



> *#Анимированный процесс построения сумм ряда*

> $plots[animate](plot, [Sn(n, x), x=-10..10, y=-2..5], n=[seq(i, i=1..10)]);$

> *#очень долго считает*

>

>

> *#Задание 3*

#Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратичной и линейной

#постройте три разоложения в тригонометрический ряд Фурье, считая, что функция определена:

#на полном периоде - 3.1, на полупериоде (является четной) - 3.2, на полупериоде (является нечетной) - 3.3.

#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple. Постройте графики сумм полученных рядов

#на промежутке, превышающем длину заданного в 3 раза. Сравните с гарфиками порождающих их функций.

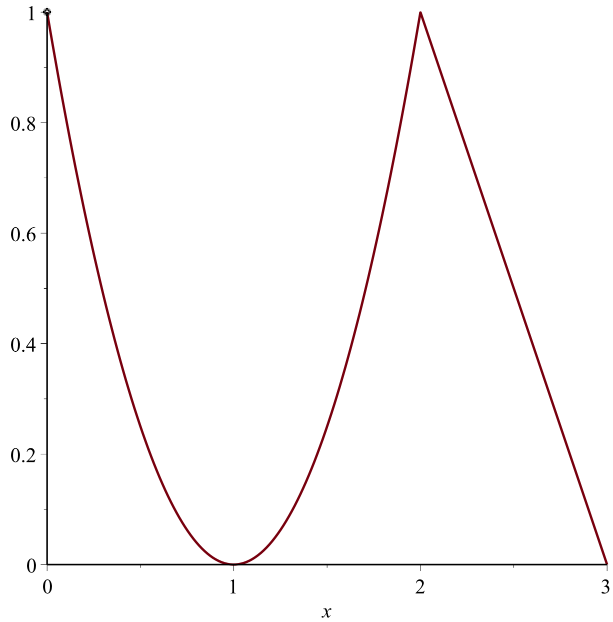
> *#(Задание 3.1) Задание кусочно-непрерывной функции. Функция ни четная, ни нечетная*
$f := piecewise\left(0 \le x \le 2,\ (x-1)^2,\ 2 \le x < 3,\ -x+3\right);$

$$f := \begin{cases} (x-1)^2 & 0 \le x \textbf{ and } x \le 2 \\ -x+3 & 2 \le x \textbf{ and } x < 3 \end{cases} \tag{12}$$

> $T := 3;\ l := \frac{T}{2};$

$$T := 3$$
$$l := \frac{3}{2} \tag{13}$$

> *#График на главном периоде*
$plot(f, x = 0..3, discont = true);$



> #Коэффициенты Фурье

> $a0 := \frac{1}{l} int(f, x = 0 ..3);$

$$a0 := \frac{7}{9} \tag{14}$$

> $an := n \rightarrow \left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l} \right), x = 0 ..3 \right) \right):$
> $simplify(an(n) \text{assuming } n :: posint);$

$$-\frac{3}{2} \frac{-3 \pi n \cos\left(\frac{4}{3} \pi n\right) - \pi n + 3 \sin\left(\frac{4}{3} \pi n\right)}{\pi^3 n^3} \tag{15}$$

> $bn := n \rightarrow \left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l} \right), x = 0 ..3 \right) \right):$
> $simplify(bn(n) \text{assuming } n :: posint);$

$$\frac{1}{2} \frac{2 \pi^2 n^2 + 9 \sin\left(\frac{4}{3} \pi n\right) \pi n + 9 \cos\left(\frac{4}{3} \pi n\right) - 9}{\pi^3 n^3} \tag{16}$$

> #Частичная сумма ряда Фурье

> $Sn := (n, x) \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an(k) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) + bn(k) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right), k = 1 .. n\right);$

$$Sn := (n, x) \rightarrow \frac{1}{2}\, a0 + \sum_{k=1}^{n} \left(an(k) \cos\left(\frac{k \pi x}{l}\right) + bn(k) \sin\left(\frac{k \pi x}{l}\right) \right) \tag{17}$$

> *#Значения суммы ряда в точках разрыва*

> $points := plots[pointplot]\left(\left[seq\left(\left[3 \cdot k, \frac{1}{2}\right], k = -2 .. 2\right)\right]\right):$

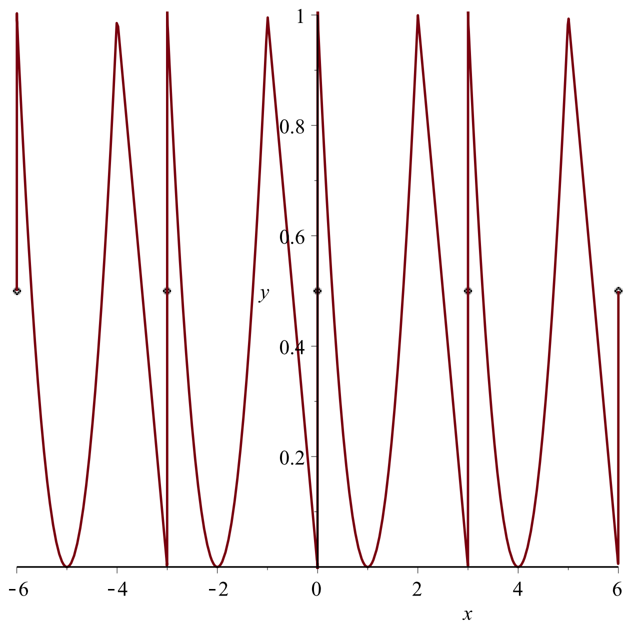
> *#График суммы ряда в точках непрерывности*

> $S := plot(Sn(10000, x), x = -6 .. 6, y = 0 .. 1, discont = true):$

>

> *#В одной системе координат значения суммы ряда и в точках непрерывности,* и в *точках разрыва*

> $plots[display](points, S);$



> *#Анимированный процесс построения сумм ряда*

> $plots[animate](plot, [Sn(n, x), x = -6 .. 6, y = 0 .. 1], n = [seq(i, i = 1 .. 10)]);$

> *#очень долго считает*

> #(Задание 3.2) Задание кусочно-непрерывной функции. Функция четная

$f := piecewise(-3 < x \le -2, x+3, -2 \le x \le 0, (x+1)^2, 0 \le x \le 2, (x-1)^2, 2 \le x < 3, -x+3);$

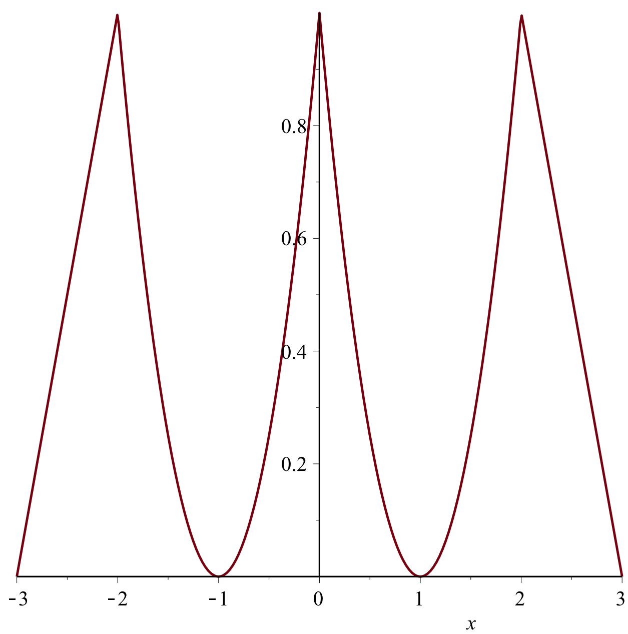
$$f := \begin{cases} x+3 & -3 < x \textbf{ and } x \le -2 \\ (x+1)^2 & -2 \le x \textbf{ and } x \le 0 \\ (x-1)^2 & 0 \le x \textbf{ and } x \le 2 \\ -x+3 & 2 \le x \textbf{ and } x < 3 \end{cases} \quad \textbf{(18)}$$

> $T := 6; l := \frac{T}{2};$

$$T := 6$$
$$l := 3 \quad \textbf{(19)}$$

> #График на главном периоде

$plot(f, x=-3..3);$



> #Коэффициенты Фурье

> $a0 := \frac{2}{l} int(f, x=0..3);$

$$a0 := \frac{7}{9} \quad \mathbf{(20)}$$

> $an := n \rightarrow \left(\frac{2}{l} \cdot int\left(f \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l} \right), x = 0..3 \right) \right):$
$simplify(an(n) \text{ assuming } n :: posint);$

$$\frac{18\, n\, \pi \cos\left(\frac{2}{3}\, n\, \pi\right) + 6\, (-1)^{1+n}\, \pi\, n + 12\, n\, \pi - 36 \sin\left(\frac{2}{3}\, n\, \pi\right)}{n^3\, \pi^3} \quad \mathbf{(21)}$$

> *#Частичная сумма ряда Фурье*

> $Sn := (n, x) \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an(k) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \right), k = 1..n \right);$

$$Sn := (n, x) \rightarrow \frac{1}{2}\, a0 + \sum_{k=1}^{n} an(k) \cos\left(\frac{k\, \pi\, x}{l} \right) \quad \mathbf{(22)}$$

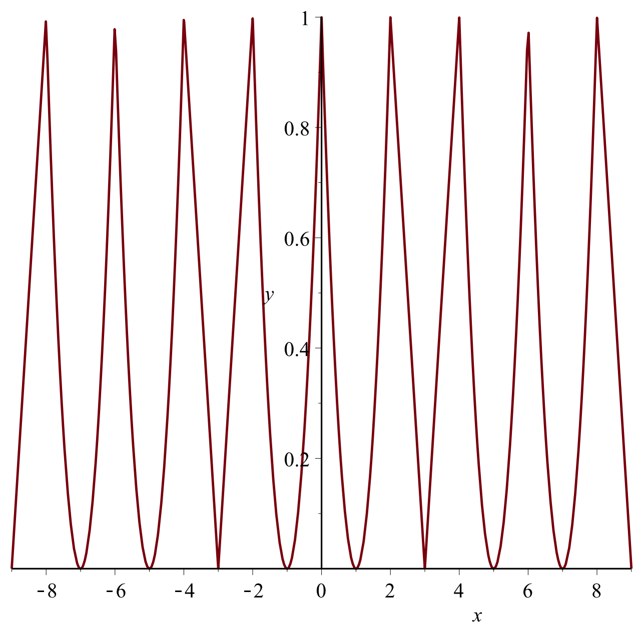
> *#График суммы ряда*

> $S := plot(Sn(10000, x), x = -9..9, y = 0..1, discont = true):$

>

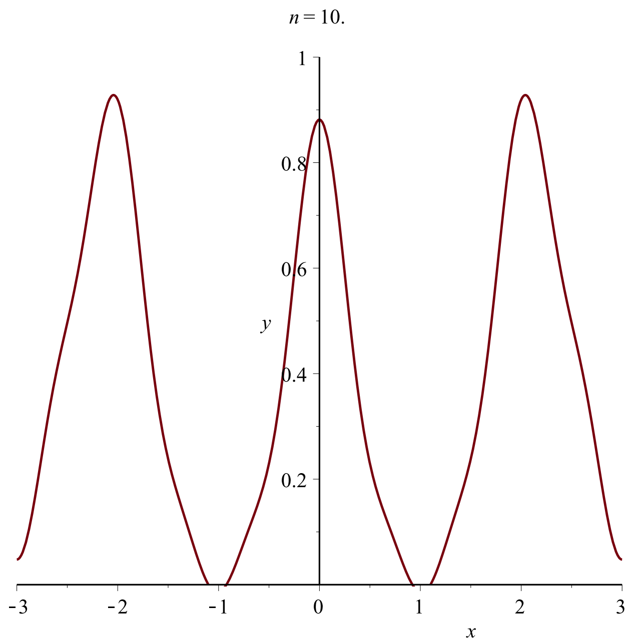
> *#Построение*

> $plots[display](S);$



> *#Анимированный процесс построения сумм ряда*

> $plots[animate](plot, [Sn(n, x), x=-3..3, y=0..1], n=[seq(i, i=1..10)]);$


$n = 10.$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

>

>

> #(Задание 3.3) Задание кусочно-непрерывной функции. Функция четная

$f := piecewise(-3 < x \le -2, -x-3, -2 \le x \le 0, -(x+1)^2, 0 \le x \le 2, (x-1)^2, 2 \le x < 3, -x+3);$

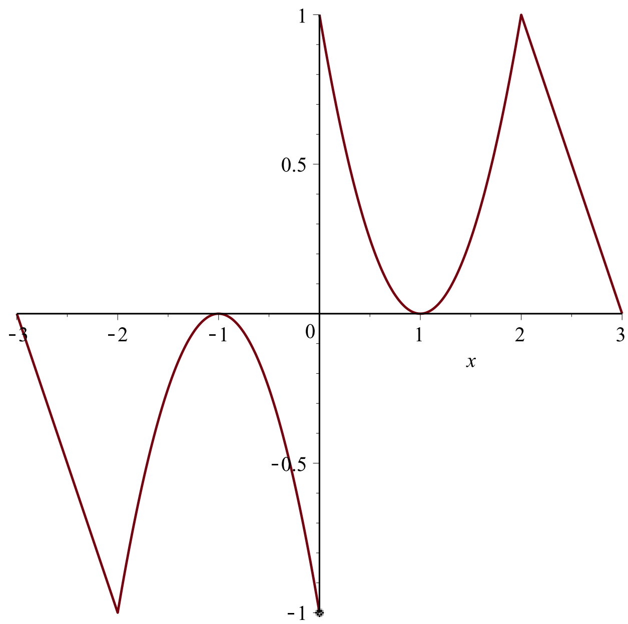
$$f := \begin{cases} -x-3 & -3 < x \text{ and } x \le -2 \\ -(x+1)^2 & -2 \le x \text{ and } x \le 0 \\ (x-1)^2 & 0 \le x \text{ and } x \le 2 \\ -x+3 & 2 \le x \text{ and } x < 3 \end{cases} \tag{23}$$

> $T := 6; l := \frac{T}{2};$

$$T := 6$$
$$l := 3 \tag{24}$$

> #График на главном периоде

$plot(f, x = -3..3, discont = true);$



> #Коэффициенты Фурье

> $bn := n \rightarrow \left(\frac{2}{l} \cdot int\left(f \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot x}{l} \right), x = 0..3 \right) \right):$

simplify(*bn*(*n*) assuming *n* :: *posint*);

$$\frac{2\,\pi^2\,n^2 + 18\,\pi\,n\,\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi\,n\right) + 36\,\cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\,n\right) - 36}{\pi^3\,n^3} \qquad \textbf{(25)}$$

> #Частичная сумма ряда Фурье

> $Sn := (n, x) \to sum\left(bn(k)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l}\right), k = 1\,..n\right);$

$$Sn := (n, x) \to \sum_{k=1}^{n} bn(k)\,\sin\left(\frac{k\,\pi\,x}{l}\right) \qquad \textbf{(26)}$$

> #График суммы ряда

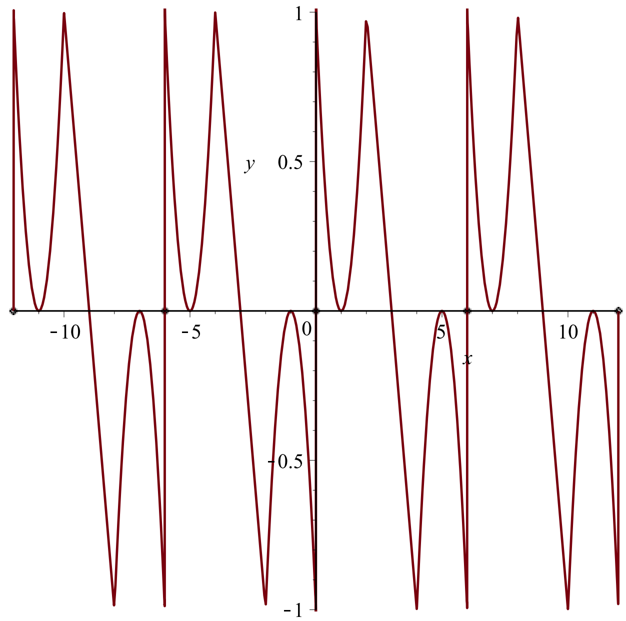
> *S* := *plot*(*Sn*(10000, *x*), *x* =-12 ..12, *y* = -1 .. 1, *discont* = *true*) :

> #Значения суммы ряда в точках разрыва

> *points* := *plots*[*pointplot*]([*seq*([6 ·*k*, 0], *k* =-2 ..2)]) :

> #В одной системе координат значения суммы ряда и в точках непрерывности, и в точках разрыва

> *plots*[*display*](*points*, *S*);



> #Анимированный процесс построения сумм ряда

> $plots[animate](plot, [Sn(n,x), x=-3..3, y=-1..1], n=[seq(i, i=1..10)]);$

> #долго считает

>