Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа (ПЗМА)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.153503 Кончик Д.С.

Руководитель: канд. ф.-м. н., доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Термин «дифференциальное уравнение» принадлежит Лейбницу (1676, опубликовано в 1684 г.). Начало исследований по дифференциальным уравнениям восходит ко временам Лейбница, Ньютона, в работах которых исследовались первые задачи, приводящие к таким уравнениям. Лейбниц, Ньютон, братья Я. и И. Бернулли разрабатывали методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве универсального способа использовались разложения интегралов дифференциальных уравнений в степенные ряды. Некоторые классы уравнений были приведены к уравнению с разделяющимися переменными [1, с. 431].

Решения многих дифференциальных уравнений не выражаются в элементарных функциях. В этих случаях пользуются приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде степенного ряда; сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому решению. Указанный степенной ряд находят способом неопределенных коэффициентов или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена) [1, с. 511].

Цель данной работы – показать применение функциональных рядов при интегрировании дифференциальных уравнений.

В соответствии с поставленной целью основными задачами являются: собрать и обобщить теоретические сведения о рядах и дифференциальных уравнениях; проанализировать методы интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов и применить их на практике.

Исследование данной темы будет проходить в двух разделах. В первом разделе будут освящены применяемые в практической части понятия ряда, функционального ряда и дифференциального уравнения.

Второй раздел посвящен примерам интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Также тут будет использоваться инструмент для решения математических задач – система компьютерной алгебры Maple.

Результат проверки работы на оригинальность (система antiplagiat.ru):

тут скрин

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, где $u_n = f(n)$, – бесконечная числовая последовательность. Выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \cdots \qquad (1.1)$$

называется бесконечным *числовым рядом*, а числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – *членами ряда*; $u_n = f(n)$ называется *общим членом*. Ряд часто записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ [7, с. 66].

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют n-*й частичной суммой ряда*:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \qquad (1.2)$$

Ряд называется *сходящимся*, если его n-я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называют *суммой* ряда. Если же n-я частичная сумма ряда при $n \to \infty$ не стремится к конечному пределу, то ряд называют *расходящимся* [7, с. 66].

Ряд

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots\ (|q| < 1), \qquad (1.3)$$

составленный из членов любой убывающей геометрической прогрессии, является сходящимся и имеет сумму $\frac{a}{1-q}$.

Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \qquad (1.4)$$

называемый *гармоническим*, расходится [7, с. 66].

Приведем основные теоремы о сходящихся числовых рядах.

1 Если сходится ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \qquad (1.5)$$

и суммой его является число S, то сходится и ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + \cdots, \qquad (1.6)$$

причем сумма последнего ряда равна aS.

2 Если сходится ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \tag{1.7}$$

то сходится и ряд

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots, \tag{1.8}$$

получаемый из данного ряда *отбрасыванием первых m членов*; наоборот, *из сходимости m-го остатка ряда вытекает сходимость данного ряда* [7, с. 66].

3 Если сходятся ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \; v_1 + v_2 + v_3 + \cdots, \tag{1.9}$$

имеющие соответственно суммы S_1 и S_2, то сходится и ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \cdots, \tag{1.10}$$

причем сумма последнего ряда равна $S_1 + S_2$.

4 Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{1.11}$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, т. е. при $n \to \infty$ предел общего члена сходящегося ряда равен нулю **(необходимый признак сходимости ряда)**.

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Перечислим важнейшие признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Первый признак сравнения. *Пусть даны два ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.12}$$

и

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots, \tag{1.13}$$

причем каждый член ряда (1) *не превосходит соответствующего члена ряда* (2), *т. е.* $u_n \leq v_n \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Тогда если сходится ряд* (1.13), *то сходится и ряд* (1.12); *если расходится ряд* (1.12), *то расходится и ряд* (1.13).

Этот признак остается в силе, если неравенства $u_n \leq v_n$ выполняются не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера $n = N$ [7, с. 67].

Второй признак сравнения. *Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или расходятся* [7, с. 67].

Признак Коши. *Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.14}$$

существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$, *то этот ряд сходится при* $C < 1$ *и расходится при* $C > 1$ [7, с. 67]..

Признак Даламбера. *Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.15}$$

существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, *то этот ряд сходится при* $D < 1$ *и расходится при* $D > 1$ [7, с. 67].

Интегральный признак. *Если* $f(x)$ *при* $x \geq 1$ *– непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *где* $u_n = f(n)$, *сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл* $\int_N^{\infty} f(x)dx$ $(N \geq 1)$. $[7, \text{с.} 67]$.

Рассмотрим ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т. е. ряды вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots, \tag{1.16}$$

где $u_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю,* т. е. если выполнятся следующие два условия: 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ [7, с. 68].

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. В этом случае исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится [7, с. 68].

1.2 Функциональные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$, члены которого являются функциями от переменной x, называется функциональным.

При различных значениях x из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости [6, с. 350].

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются *степенные ряды* вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad (1.17)$$

или более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \ldots \quad (1.18)$$

Областью сходимости функционального ряда является один интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$ (для ряда 1.17) или $x = x_0$ (для ряда 1.18), который может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

Для определения области сходимости функциональных рядов обычно вначале используется признак Даламбера, а затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости (D = 1), исследуются особо, посредством других признаков сходимости рядов [6, с. 351].

1.3 Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots, \quad (1.19)$$

где $a, a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительный числа, называется *степенным.*

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что *если степенной ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится (и притом абсолютно) при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству* $|x - a| < |x_0 - a|$ (теорема Абеля).

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда *интервала сходимости* $|x - a| < R$ с центром в точке a, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится. На концах интервала сходимости (в точках $x = a \pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному.

Число R – половина интервала сходимости – называется *радиусом сходимости* степенного ряда [7, с. 81].

Для отыскания интервала и радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться один из следующих способов.

1 Если среди коэффициентов $a_1, \dots, a_n, \dots$ нет равных нулю, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{1.20}$$

при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует.

2 Если исходный ряд имеет вид

$$a_0 + a_1(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^{np} + \cdots, \tag{1.21}$$

(где p – некоторое определенное целое положительное число: 2, 3, …), то

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}. \tag{1.22}$$

3 Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $(x-a)$ не образует арифметическую прогрессию, как в предыдущем случае, то радиус сходимости можно находить по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{1.23}$$

в которой используются только значения a_n, отличные от нуля.

4 Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленном из абсолютных величин членов исходного ряда.

Записав ряд в виде

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \cdots, \tag{1.24}$$

где $u_n(x) = a_n(x-a)^N$ и зависимость N от n может быть любой, находят интервал сходимости из неравенств

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1 \text{ или } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1 \tag{1.25}$$

Отметим следующее свойство степенных рядов: *ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости* [7, с. 82].

1.4 Ряд Тейлора

Определение ряда Тейлора. Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0имеет производные всех порядков. Степенной ряд

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (1.26)$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (1.27)$$

называется *рядом Маклорена.* Эти ряды широко используются для получения приближения функции f в окрестности точки x_0 [3, с. 139].

Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и ее производные равномерно ограничены в этом интервале, т.е. существует такое положительное число C (не зависящее от n), что

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le C\ (n=1,2,3,\dots) \quad (1.28)$$

при всех x из $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, то верно равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (1.29)$$

во всем интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ [1, с. 417].

Приведем разложения в ряд Маклорена следующих функций [7, с. 81]:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots, -\infty<x<+\infty$$

$$sh(x)=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots, -\infty<x<+\infty$$

$$ch(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\cdots, -\infty<x<+\infty$$

$$\sin(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots, -\infty<x<+\infty$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!}+\cdots, -\infty<x<+\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, -1<x\le 1$$

$$arctg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots, -1\le x\le 1$$

1.5 Дифференциальные уравнения

Понятие обыкновенного дифференциального уравнения. При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимые переменные и искомую функцию, но можно установить связь между этой функцией и ее производными, выражаемую *дифференциальным уравнением.*

Если искомая функция зависит от одного переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным.* Произвольное обыкновенное уравнение дифференциальное уравнение порядка n имеет следующий вид:

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.30}$$

Здесь F есть заданная (известная) функция от $n + 2$ переменных, обычно удовлетворяющая определенным условиям непрерывности и дифференцируемости, а $y = y(x)$ – функция от x – решение дифференциального уравнения, которую надо найти.

Решением дифференциального уравнения порядка n называется функция $y(x)$, имеющая на некотором интервале (a, b) производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ до порядка n включительно и удовлетворяющая этому уравнению. Это значит, что выполняется тождество по x:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0 \ \left(x \in (a, b)\right). \tag{1.31}$$

Каждому решению, вообще говоря, соответствует свой интервал. Кончено, если функция $y(x)$, заданная на интервале (a, b), есть решение дифференциального уравнения (1.30), то эта функция, рассматриваемая на интервале (c, d), принадлежащем к (a, b), тоже есть решение уравнения (1.30) [5, с. 12].

График решения обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка будем называть *интегральной кривой* этого уравнения.

Уравнения

$$y''' + 2y" + y = \sin(x),$$
$$y' + ky = \cos(x)$$

могут служить примерами обыкновенных дифференциальных уравнений. первое из них – третьего порядка, второе – первого.

Существует термин – *проинтегрировать дифференциальное уравнение.* Это значит, что надо найти те или иные решения данного дифференциального уравнения. Нахождение решения дифференциального уравнения всегда связано с необходимостью *интегрировать* входящие в это уравнение функции [5, с. 13].

Задача Коши. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1.32)$$

Решением такого уравнения служит всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество, т. е.

$$F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right] \equiv 0. \qquad (1.33)$$

Задача Коши для этого уравнения состоит в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, где x_0, y_0, y_1, $y_2, \dots, y_{n-1}$ – заданные числа, которые называются *начальными данными,* или *начальными условиями.*

Функция $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \dots,\, C_n)$ называется *общим решением* данного дифференциального уравнения n-го порядка, если при соответствующем выборе произвольных постоянных C_1, C_2, … , C_n эта функция является решением любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения.

Всякое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, … , C_n, называется *частным решением* этого уравнения. Для выделения из множества решений дифференциального уравнения определенного частного решения иногда используют и так называемые краевые решения [7, с. 139].

1.6 Интегрирование ДУ с помощью степенных рядов

Решения многих дифференциальных уравнений не выражаются в элементарных функциях. В этих случаях пользуются приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде степенного ряда; сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому решению. Указанный степенной ряд находят способом неопределенных коэффициентов или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена).

Способ неопределенных коэффициентов особенно удобен в применении к линейным уравнениям, т. е. уравнениям вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \qquad (1.34)$$

и состоит в следующем. Если все коэффициенты $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ этого уравнения и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряд по степеням $(x - a)$, сходящиеся в интервале $(a - h, a + h)$, то искомое решение $y = f(x)$ также представляется степенным рядом

$$y(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \cdots + C_n(x - a)^n + \cdots, \qquad (1.35)$$

сходящимся в этом же интервале. Подставляя в уравнение функцию $y(x)$ и ее производные, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях $(x - a)$. Из полученных при этом уравнений и заданных начальных условий находят коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \ldots$ [1, с. 511].

В тех случаях, когда для уравнения $y' = f(x, y)$ требуется решить задачу Коши при начальном условии $y(x_0) = y_0$, решение можно искать с помощью ряда Тейлора:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (1.36)$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находят последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования вместо $x, y, y', \ldots$ значений x_0, y_0, y'_0 и всех остальных найденных последующих производных. Аналогично с помощью ряда Тейлора можно интегрировать и уравнения высших порядков [7, с. 162].

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1 Примеры интегрирования

Пример 1 [1, с. 512]. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего условию $y = 1/2$ при $x = 0$.

Решение.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(IV)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

Найдем выражения для трех последующих производных, дифференцируя данное уравнение $y' = x^2 + y^2$:

$$y'' = 2x + 2yy', y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', y^{(IV)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy'''.$$

Вычислим значения производных при $x = 0$, принимая во внимание начальное условие $y(0) = 1/2$:

$$y'(0) = 0 + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$y'''(0) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{8}, y^{(IV)}(0) = \frac{11}{4}.$$

Подставляя эти значения в формулу (1), получаем

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \cdots$$

Пример 2 [1, с. 512]. С помощью степенного ряда проинтегрировать уравнение $(1 - x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Пусть $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots$, тогда

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots,$$

$$y'' = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + \cdots$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в данное уравнение, получаем

$$(1 - x)(2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + \cdots) +$$

$$+x(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots) -$$

$$-(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots) = x^2 - 2x + 2$$

или

$$(2C_2 - C_0) + (2\cdot 3C_3 - 2C_2 + C_1 - C_1)x + (3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + 2C_2 - C_2)x^2 +$$
$$+(4\cdot 5C_5 - 3\cdot 4C_4 + 3C_3 - C_3)x^3 + (5\cdot 6C_6 - 4\cdot 5C_5 + 4C_4 - C_4)x^4 + \cdots =$$
$$= x^2 - 2x + 2.$$

Так как y – решение уравнения, то последнее равенство выполняется тождественно; коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства равны между собой:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 2C_2 - C_0 = 2, \\
x^1 & 2\cdot 3C_3 - 2C_2 = -2, \\
x^2 & 3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + C_2 = 1, \\
x^3 & 4\cdot 5C_5 - 3\cdot 4C_4 + 2C_3 = 0, \\
x^4 & 5\cdot 6C_6 - 4\cdot 5C_5 + 3C_4 = 0.
\end{array}$$

....

$$\begin{array}{c|l}
x^n & (n+1)(n+2)C_{n+2} - n(n+1)C_{n+1} + (n-1)C_n = 0.
\end{array}$$

....

Решая эту систему, находим

$$C_2 = \frac{2 + C_0}{2} = 1 + \frac{C_0}{2}, C_3 = \frac{C_0}{3!}, C_4 = \frac{C_0}{4!}, C_5 = \frac{C_0}{5!}, C_6 = \frac{C_0}{6!}, \ldots$$

Таким образом, все коэффициенты, начиная с C_2, выражены через коэффициент C_0, который остается произвольным; остается произвольным и C_1 (этот коэффициент не входит в полученную систему). Следовательно, искомое решение представляется рядом

$$y = C_0 + C_1 x + \left(1 + \frac{C_0}{2}\right)x^2 + \frac{C_0}{3!}x^3 + \frac{C_0}{4!}x^4 + \frac{C_0}{5!}x^5 + \frac{C_0}{6!}x^6 + \cdots,$$

сходящимся при всех x. Это решение является общим:

$$y = C_0\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + (C_1 - C_0)x + x^2,$$
$$y = C_0 e^x + C'x + x^2,$$

где $C_1 - C_0 = C'$ – произвольная постоянная.

Пример 3 [1, с. 513]. Найти первые пять членов разложения в ряд частного решения уравнения $y'' - 2y' + y = e^x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Решение. Пусть искомое решение представляется сходящимся степенным рядом $y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots$. Дважды дифференцируя этот ряд в его интервале сходимости, получаем

$$y'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots,$$
$$y''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3C_3x + 3\cdot 4C_4x^2 + 4\cdot 5C_5x^3 + \cdots$$

При $x = 0$ имеет $y(0) = C_0, y'(0) = C_1$; принимая во внимание начальные условия $y(0) = 0, y'(0) = 1$, находим два первых коэффициента разложения для $y(x)$: $C_0 = 0, C_1 = 1$. подставив в данное дифференциальное уравнение выражения для $y(x), y'(x), y''(x)$ и разложение в ряд функции e^x, получим

$$2C_2 + 2\cdot 3C_3x + 3\cdot 4C_4x^2 + 4\cdot 5C_5x^3 + \cdots -$$
$$-2(1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots) +$$
$$+x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$

или

$$(2C_2 - 2) + (2\cdot 3C_3 - 4C_2 + 1)x + (3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + C_2)x^2 +$$
$$+(4\cdot 5C_5 - 2\cdot 4C_4 + C_3)x^3 + (5\cdot 6C_6 - 2\cdot 5C_5 + C_4)x^4 + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого равенства, получаем систему уравнений для определения коэффициентов $C_2, C_3, C_4, \ldots$:

$$2C_2 - 2 = 1, 2\cdot 3C_3 - 4C_2 + 1 = 1, 3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + C_2 = \frac{1}{2},$$
$$4\cdot 5C_5 - 2\cdot 4C_4 + C_3 = \frac{1}{3!}, 5\cdot 6C_6 - 2\cdot 5C_5 + C_4 = \frac{1}{4!}, \ldots$$

Решая эту систему, находим $C_2 = 3/2$, $C_3 = 1$, $C_4 = 5/12$, $C_5 = 1/8$, … . Таким образом, частное решение выражается формулой

$$y = x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{8}x^5.$$

Пример 4 [6, с. 427]. Найти общий интеграл уравнения $\frac{dy}{dx} = y^2$ в виде степенного ряда.

Решение. Пусть искомый интеграл есть степенной ряд

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ неизвестные, подлежащие определению постоянные.

Допуская, что такой ряд существует и сходится в некотором интервале значений x, найдем ряд для $\frac{dy}{dx}$ его почленным дифференцированием

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

и ряд для y^2 – почленным умножением ряда самого на себя:

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + 2a_0 a_2 x^2 + 2a_0 a_3 x^3 + \dots + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + \dots$$

Подставляя эти ряды вместо $\frac{dy}{dx}$ и y^2 в заданное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, поскольку два ряда будут тождественно равны только при этом условии, получим следующую систему:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & a_1 = a_0^2 \\ x^1 & 2a_2 = 2a_0 a_1 \\ x^2 & 3a_3 = 2a_0 a_2 + a_1^2 \\ x^3 & 4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 \end{array}$$

....

Решая эту систему, найдем: $a_1 = a_0^2;\ a_2 = a_0^3;\ a_3 = a_0^4; \dots;\ a_n = a_0^{n+1}; \dots$

Следовательно, искомое разложение в степенной ряд общего интеграла данного уравнения есть

$$y = a_0(1 + a_0 x + a_0^2 x^2 + a_0^3 x^3 + \dots + a_0^n x^n + \dots),$$

где a_0 является произвольной постоянной.

Полученный ряд представляет бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = a_0 x$ и при $|q| < 1$ имеет сумму

$$y = \frac{a_0}{1 - a_0 x} = \left[C = \frac{1}{a_0}\right] = \frac{1}{C - x}. \qquad (2.1)$$

Решение этой задачи показывает достоверность метода интегрирования уравнений с помощью рядов, так как непосредственное интегрирование данного уравнения, как уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, дает тот же результат.

Убедимся в этом:

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

Далее разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int dx = \int \frac{dy}{y^2} + C;\ x = -\frac{1}{y} + C;$$

$$y = \frac{1}{C - x}. \tag{2.2}$$

Выражения (2.1) и (2.2) идентичны.

Пример 5 [4, с. 294]. Найти решение уравнения $y'' = 2xy' + 4y$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Решение. Полагаем

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Тогда

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

На основании начальных условий находим $a_0 = 0, a_1 = 1$.

Следовательно,

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

Подставляя написанные выражения в заданное уравнения и приравнивания коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$2a_2 = 0,$ откуда $a_2 = 0$

$2 \cdot 3a_3 = 2 + 4,$ откуда $a_3 = 1$

$4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2,$ откуда $a_4 = 0$

$n(n-1)a_n = (n-2) \cdot 2a_{n-2} + 4a_{n-2},$ откуда $a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$

Следовательно,

$$a_5 = \frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}, a_7 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}, a_9 = \frac{1}{4!}, \dots, a_{2k+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}, \dots,$$

$$a_4 = 0, a_6 = 0, \dots, a_{2k} = 0, \dots$$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем искомое решение

$$y = x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \cdots$$

Полученный ряд сходится при всех значениях x.

Заметим, что найденное частное решение можно выразить через элементарные функции: вынося x за скобку, получим в скобках разложение функции e^{x^2}. Следовательно,

$$y = xe^{x^2}.$$

Пример 6 [6, с. 428]. Найти в виде степенного ряда частный интеграл уравнения $y'' + \frac{y\prime}{x} + y = 0$, удовлетворяющий начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Полагая, что искомый интеграл представляет сходящийся степенной ряд, найдем ряды для y' и y'' его почленным дифференцированием

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов: $y(0) = a_0 = 1$; $y'(0) = a_1 = 0$.

Подставляя ряды для y, y', y'' в заданной уравнения и сделав приведение подобных членов, получим

$$(1 + 2^2a_2) + 3^2a_3x + (a_2 + 4^2a_4)x^2 + (a_3 + 5^2a_5)x^3 + \cdots$$
$$\dots + [a_n + (n+2)^2a_{n+2}]x^n + \dots = 0.$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты ряда, находящегося в левой части этого равенства, так как только при этом условии ряд будет тождественно равен нулю, получим систему $1 + 2^2a_n = 0$; $3^2a_3 = 0$; $a_2 + 4^2a_4 = 0$; $a_3 + 5^2a_5 = 0$; ...; $a_n + (n+2)^2a_{n+2} = 0$; ..., из которой определяются следующие значения всех остальных коэффициентов: $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2m+1} = \dots = 0$;

$$a_2 = -\frac{1}{2^2};\ a_4 = \frac{1}{2^2 4^2};\ a_6 = -\frac{1}{2^2 4^2 6^2}; \dots;$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^2 4^2 \dots (2m)^2} = \frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2}; \dots$$

Таким образом, искомый частный интеграл данного уравнения есть степенной ряд

$$y = 1 - \frac{x^2}{4(1!)^2} + \frac{x^4}{4^2(2!)^2} - \frac{x^6}{4^3(3!)^2} + \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m(m!)^2} + \cdots,$$

который сходится при любом значении x (согласно признаку Даламбера, так как здесь абсолютная величина отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\frac{x^{2m+2}}{4^{m+1}[(m+1)!]^2} : \frac{x^{2m}}{4^m(m!)^2} = \frac{x^2}{4(m+1)^2}$$

при любом x и при неограниченном возрастании m стремится к нулю).

2.2 Интегрирование в Maple

Для нахождения аналитических решений дифференциальных уравнений в Maple применяется команда $dsolve(eq, var, options)$, гдеeq – дифференциальное уравнение, var – неизвестные функции, $options$ – параметры. Параметры могут указывать метод решения задачи, например, по умолчанию ищется аналитическое решение: $type = exact$. При составлении дифференциальных уравнений для обозначения производной применяется команда $diff$, например, дифференциальное уравнение $y'' + y = x$ записывается в виде: $diff(y(x),\ x\$2) + y(x) = x$ [9, с. 76].

Команда $dsolve$ может найти решение задачи Коши или краевой задачи, если помимо дифференциального уравнения задать начальные или краевые условия для неизвестной функции [9, с. 78].

Для многих типов дифференциальных уравнений не может быть найдено точное аналитическое решение. В этом случае дифференциальное уравнение можно решить с помощью приближенных методов, и, в частности, с помощью разложения в степенной ряд неизвестной функции [9, с. 80].

Чтобы найти приближенное решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда, в команде $dsolve$ следует после переменных указать параметр $type = series$. Для того, чтобы указать порядок разложения n, т.е. порядок степени, до которой производить разложение, следует перед командой $dsolve$ вставить определение порядка с помощью команды $Order \coloneqq n$.

Если ищется общее решение дифференциального уравнения в виде разложения в степенной ряд, то коэффициенты при степенях x найденного разложения будут содержать неизвестные значения функции в нуле $y(0)$ и ее производных $y'(0)$, $y''(0)$ и т.д. Полученное в строке вывода выражение будет иметь вид, похожий на разложение искомого решения в ряд Маклорена, но с другими коэффициентами при степенях x. Для выделения частного решения следует задать начальные условия $y(0) = y_1$, $y'(0) = y_2$, $y''(0) = y_3$ и т.д., причем количество этих начальных условий должно совпадать с порядком соответствующего дифференциального уравнения.

Разложение в степенной ряд имеет тип $series$, поэтому для дальнейшей работы с этим рядом его следует преобразовать в полином с помощью команды $convert(\%, polynom)$, а затем выделить правую часть полученного выражения командой $rhs(\%)$ [9, с. 81].

Пример 1 [9, с. 81]. Найти решение задачи Коши: $y' = y + x \cdot e^{y}$, $y(0) = 0$ в виде степенного ряда с точностью до 5-го порядка.

> Order := 5:
> de := diff(y(x),x)=y(x)+x·exp(y(x)):
> dsolve({de,y(0)=0},y(x),type=series);

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + O(x^5)$$

В полученном решении слагаемое $O(x^5)$ означает, что точность разложения была до 5-го порядка.

Пример 2 [9, с. 81]. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y^3 = e^{-x} \cdot \cos(x)$ в виде разложения в степенной ряд до 4-го порядка. Найти разложение при начальных условиях: $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

> Order := 4:
> de := diff(y(x),x$2)-y(x)^3=exp(-x)*cos(x)
> f := dsolve(de,y(x),type=series);

$$f \coloneqq y(x) = y(0) + D(y)(0)x + \left(\frac{1}{2}y(0)^3 + \frac{1}{2}\right)x^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}y(0)^2 D(y)(0) - \frac{1}{6}\right)x^3 + O(x^4)$$

Замечание: в полученном разложении запись $D(y)(0)$ обозначает производную в нуле: $y'(0)$. Для нахождения частного решения осталось задать начальные условия:

> y(0) := 1
> D(y)(0) := 0
> f;

$$y(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

Пример 3 [9, с. 82]. Найти приближенное решение в виде степенного ряда до 6-го порядка и точное решение задачи Коши: $y''' - y' = 3 \cdot (2 - x^2) \cdot$ $\cdot \sin(x), y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$. Построить на одном рисунке графики точного и приближенного решений.

> Order := 6:
> de := diff(y(x),x$3)-diff(y(x),x)=3*(2-x^2)*sin(x):
> cond := y(0)=1, D(y)(0)=1, (D@@2)(y)(0)=1:
> dsolve({de,cond},y(x));

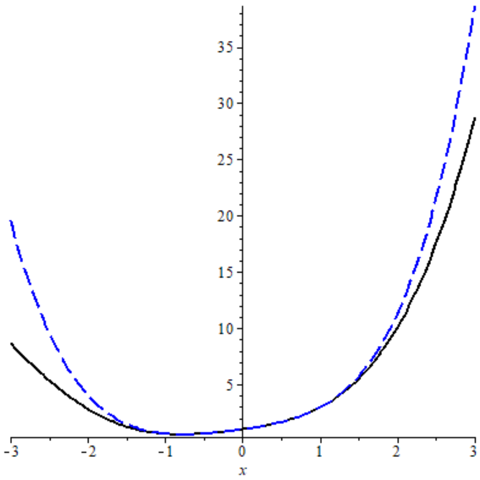
$$y(x) = \frac{21}{2}\cos(x) - \frac{3}{2}x^2\cos(x) + 6x \cdot sin(x) - 12 + \frac{7}{4}e^{x} + \frac{3}{4}e^{-x}$$

```
> y1 := rhs(%):
> dsolve({de,cond},y(x),series);
```

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

Замечание: тип решения дифференциального уравнения в виде ряда есть $series$, поэтому для дальнейшего использования такого решения (вычислений или построения графика) его обязательно следует конвертировать в полином с помощью команды $convert$.

```
> convert(%,polynom):
> y2 := rhs(%):
> p1 := plot(y1,x=-3..3,thickness=2,color=black):
> p2 := plot(y2,x=-3..3,linestyle=3,thickness=2,color=blue):
> with(plots): display(p1,p2);
```



На этом рисунке видно, что наилучшее приближение точного решения степенным рядом достигается примерно на интервале $-1 < x < 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был рассмотрен теоретический материал, необходимый для решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов; рассмотрены понятия ряда и дифференциальных уравнений, на практике проведены приближенные вычисления с помощью рядов.

В результате выполнения работы были выполнены следующие задачи:

1 Обобщены теоретические данные, связанные с рядами и дифференциальными уравнениям.

2 Рассмотрены методы интегрирование дифференциальных уравнений с помощью функциональных рядов.

3 Решены дифференциальные уравнения вручную и с использованием системы компьютерной алгебры Maple.

Проделанная работа может служить основой для дальнейшего исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Гусак А.А. и др. Справочник по высшей математике / А.А.Гусак, Г.М.Гусак, Е.А.Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс. 1999. – 640 с.

[2] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.

[3] Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: [Учеб. Пособие для втузов]. Ч. III. – Мн.: Выш. шк., 1985. – 208 с.

[4] Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с.

[5] Бугров Я. С. Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; Под ред. В. А. Садовничего. – 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. Т.3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – 512 с.

[6] Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 464 с.

[7] Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003. – 416 с.

[8] Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд, стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 352 с.

[9] Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.

[10] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Физматлит, 1964. - 810 с.