Исследование операций

Лабораторная работа 8 «Максимальный поток»

Задана сеть G с полюсами s и t. Предполагаем, что сеть вместе с каждой своей дугой содержит ее обратную дугу. Множество дуг сети G обозначим через $\overline{A}$. Дугам сети G приписаны пропусные способности, т.е. задана функция c, сопоставляющая каждой дуге a сети ее пропускную способность $c(a)$. Задача о максимальном потоке состоит в нахождении в сети G допустимого потока максимальной мощности. Требуется реализовать следующий алгоритм решения этой задачи.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

Вход. Сеть $G = (V, \overline{A})$ с пропускными способностями c на дугах.

Выход. Максимальный поток f в сети G.

Шаг 1. Инициализируем в сети нулевой поток, т.е. строим функцию $f : \overline{A} \mapsto \{z \in \mathbb{Z} : z \geqslant 0\}$, которая каждой дуге сопоставляет нулевую величину потока

$$\forall\, a \in \overline{A} \;\; f(a) = 0.$$

Шаг 2. Строим вспомогательную сеть G_f. Вершины и дуги этой сети точно такие же как и в сети G. Каждой дуге a вспомогательной сети поставим в соответствие пропускную способность $c_f(a)$, равную $c(a) - f(a) + f(\overline{a})$, где $\overline{a}$ — дуга, обратная дуге a.

Шаг 3. Если в сети G_f без учета дуг с нулевыми пропускными способностями нет (s,t)-пути, то текущий поток f — максимальный поток в сети G. СТОП. Алгоритм завершает свою работу.

Шаг 4. Находим (s,t)-путь P в сети G_f без учета дуг с нулевыми пропускными способностями.

Шаг 5. Находим минимальную пропускную способность на дугах пути P

$$\theta = \min c_f(a),$$

где минимум берется по всем дугам a пути P.

Шаг 6. Строим элементарный поток $f_P : \overline{A} \mapsto \{x \in \mathbb{Z} : z \geqslant 0\}$ вдоль пути P

$$\forall\, a \in \overline{A} \;\; f_P(a) = \begin{cases} \theta, & \text{если дуга } a \text{ принадлежит пути } P, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Шаг 7. Прибавим к текущему потоку f поток f_P

$$f' = f \oplus f_P,$$

а именно, для каждой дуги $a \in \overline{A}$ положим

$$f'(a) = \max(0, f(a) - f(\overline{a}) + f_P(a) - f_P(\overline{a})).$$

Новый поток объявляем текущим

$$f = f'.$$

Шаг 8. Обновим пропускные способности дуг во вспомогательной сети G_f следующим образом: пропускные способности дуг пути P уменьшим на θ, а пропускные способности обратных к ним дуг увеличим на θ. Переходим на шаг 3.

Как определить есть ли во вспомогательной сети G_f без дуг с нулевыми пропускными способностями (s,t)-путь и если есть, то как его найти? Форд и Фалкерсон для решения этих вопросов предложили метод пометок.

Пусть f — текущий поток в сети G, построенный в ходе работы нескольких первых итераций алгоритма Форда-Фалкерсона. Во вспомогательной сети G_f не учитываются дуги с нулевыми пропускными способностями. В каждый момент времени вершины этой сети находятся в одном из двух состояний: помечена или не помечена.

Переходим к описанию метода пометок.

Метод пометок

Вход. Вспомогательная сеть G_f с пропускными способностями c_f на дугах и без дуг с нулевыми пропускными способностями.

Выход. Множество вершин X достижимых из истока s.

Шаг 1. Инициализируем структуры данных: Q — очередь для хранения помеченных и не просмотренных вершин, X — множество, в котором хранятся помеченные и не просмотренные вершины. Изначально $Q = \emptyset$ и $X = \emptyset$.

Шаг 2. Переводим исток s в состояние помеченной вершины и помещаем ее в очередь Q и множество X. Припишем истоку s пустую метку $\ell(s) = null$.

Шаг 3. Если очередь Q пуста, то множество X помеченных вершин — это множество вершин, достижимых из истока s. СТОП. Метод завершает работу.

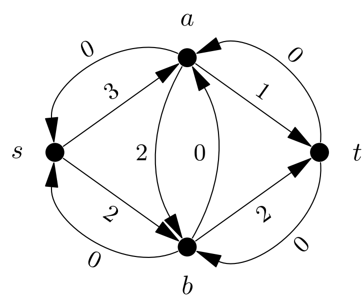
Шаг 4. Извлекаем из очереди Q вершину, которую обозначим через v.

Шаг 5. Для каждой дуги (v,u) сети такой, что вершина u не помечена (для этой вершины нет метки): создаем метку вершины u — метку $\ell(u) = \{(v,u)\}$, в которой сохраняем дугу (v,u), переводим вершину u в статус помеченной и добавляем ее в очередь Q и множество X. Переходим на шаг 3.

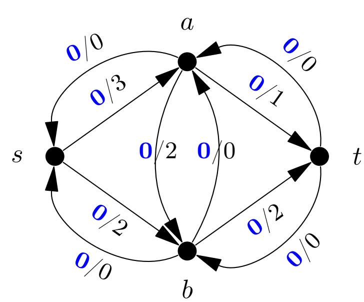
Отметим, что метка вершины $u \in X$ хранит последнюю дугу в некотором (s,u)-пути.

Метод пометок позволяет в сети G_f без нулевых дуг выделить множество вершин X, достижимых из истока s. Если сток t принадлежит множеству X, то существует (s,t)-путь. Если сток t не принадлежит множеству X (т.е для вершины t нет метки), то нет (s,t)-пути.

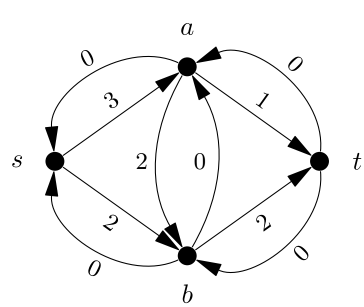
Пример. Рассмотрим сеть G с пропускными способностями на дугах



Наша цель — найти максимальный поток в сети. Мы начинаем с некоторого допустимого потока (который может и не быть максимальным) и последовательно его увеличиваем. В качестве начального допустимого потока выберем нулевой. Значения потока на дугах будем указывать левее пропускных способностей



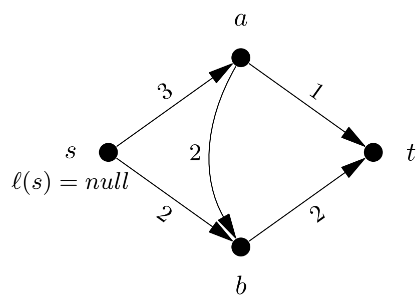
Строим вспомогательную сеть G_f с пропускными способностями c_f



Далее с помощью метода пометок выясним существует ли (s,t)-путь в сети G_f без учета дуг с нулевой пропускной способностью.

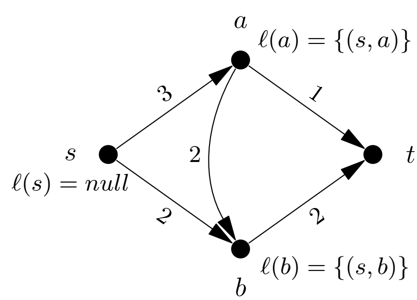
Заведем очередь Q, в которой будем хранить просмотренные и не помеченные вершины. Изначально, $Q = \emptyset$.

Итерация 1. Изначально все вершины G_f не имеют меток. Пометим исток s и добавим его в очередь Q



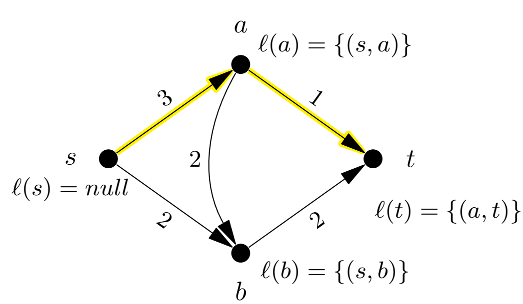
$$Q = \boxed{s}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Извлекаем из очереди Q вершину s. Изучаем дуги, выходящие из s с концами в непомеченных вершинах. Помечаем концы таких дуг и добавляем их в очередь.



$$Q = \boxed{a}\boxed{b}\boxed{}\boxed{}$$

Извлекаем из очереди Q вершину a. Рассматриваем дуги, выходящие из вершины a и ведущие в непомеченные вершины. Эти самые непомеченные вершины помечаем и добавляем в очередь.

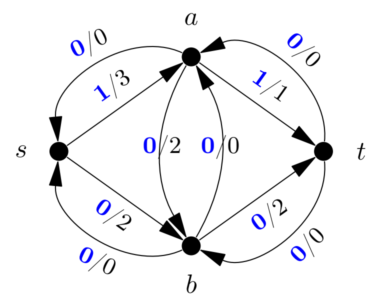


$$Q = \boxed{b}\boxed{t}\boxed{}\boxed{}$$

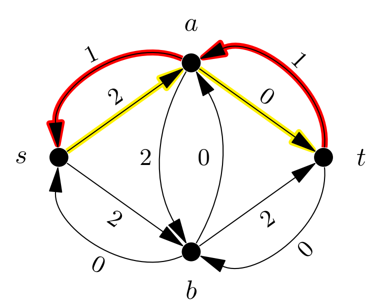
Сток t оказался помеченным. Это значит, что в сети G_f есть интересующий нас (s, t)-путь. Здесь работа метода пометок можно завершить. Восстановим (s, t)-путь по меткам (выделен желтым цветом) и найдем минимальную пропускную способность дуг на этом пути

$$\theta = \min(3, 1) = 1.$$

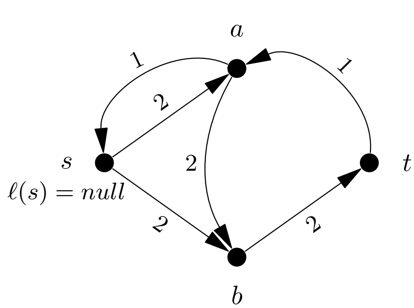
Увеличиваем в сети G поток f. В этом случае просто увеличиваем значение потока на каждой дуге найденного пути на θ, т.е. на 1.



Возвращаем в сеть G_f дуги с нулевыми пропускными способностями, а также изменяем пропускные способности дуг вдоль найденного путь. На прямых дугах пропускные способности уменьшаем на θ, а на обратных увеличиваем на θ.

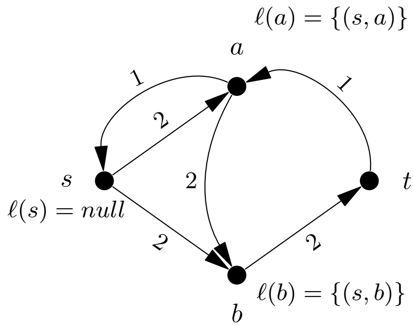


Итерация 2. Изначально все вершины G_f не имеют меток. Пометим исток s и добавим его в очередь Q.



$Q =$ | s | | | |

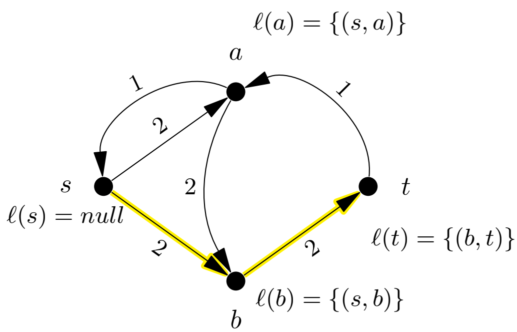
Извлекаем вершину s из очереди Q. Смотрим на дуги, выходящие из нее. Нас интересуют только те из них, концы которых не помечены. Такие концевые вершины помечаем и добавляем в очередь.



$$Q = \boxed{a}\boxed{b}\boxed{}\boxed{}$$

Извлекаем из очереди Q вершину a. Концы дуг, выходящих из вершины a, уже помечены. Ничего не надо делать.

Извлекаем из очереди вершину b. Рассмотрим дуги, выходящие из нее, концы у которых не помечены. Концы помечаем и их помещаем в очередь

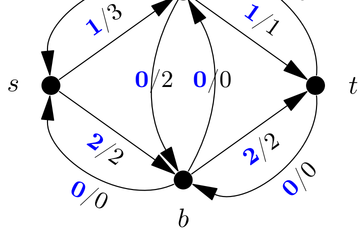


$$Q = \boxed{t}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

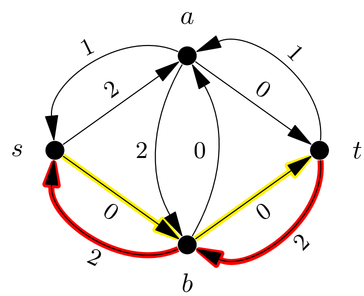
Сток t оказался помеченным. Завершаем работу метода пометок. Восстанавливаем (s, t)-путь по меткам. Находим минимальную пропускную способность на дугах пути

$$\theta = \min(2, 2) = 2.$$

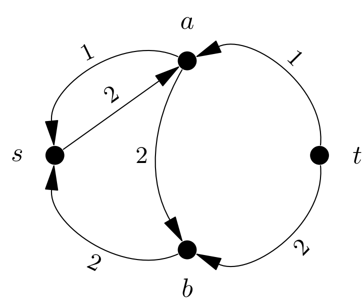
Изменяем поток в исходной сети G. В нашем случае просто увеличиваем значения потока на дугах найденного пути на θ.



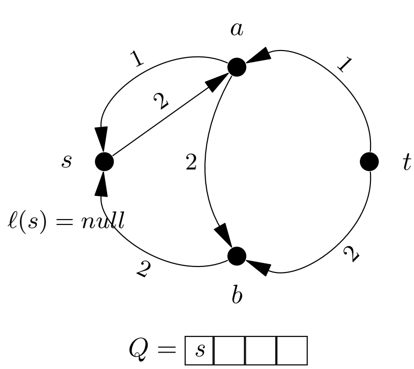
Возвращаем в сеть G_f все дуги с нулевой пропускной способностью. На прямых дугах найденного пути пропускные способности уменьшаем на θ, а на обратных к ним дугах увеличиваем на θ.



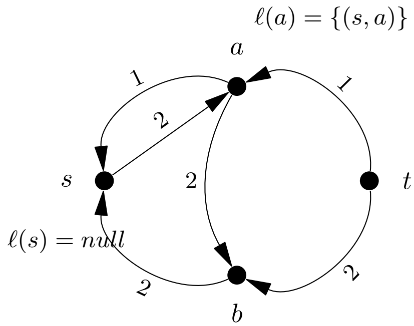
Итерация 3. Нас интересует (s, t) путь в сети G_f без учета дуг с нулевой пропускной способностью



Помечаем исток s и добавляем его в очередь Q

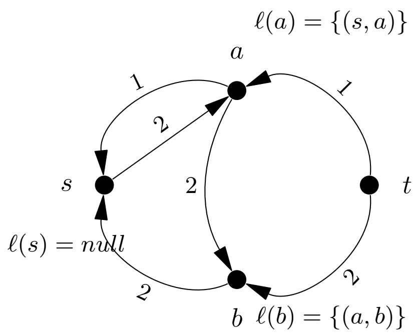


Извлекаем из очереди Q вершину s. Рассматриваем дуги, выходящие из истока s, концы которых не помечены. Помечаем концы и добавляем их в очередь



$Q = \boxed{a}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

Извлекаем из очереди Q вершину a. Рассматриваем дуги, выходящие из вершины a и с непомеченными концами. Помечаем такие концы и добавляем их в очередь.



$Q = \boxed{b}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

Извлекаем из очереди Q вершину b. Дуг, выходящих из вершины b и непомеченными концами, нет. Ничего не надо делать.

Мы должны извлечь из очереди Q вершину. Но очередь пустая. Метод пометок завершил свою работу.

Множество X помеченных вершин состоит из $\{s, a, b\}$. Эти и только эти вершины достижимы из истока s. Сток t не помечен. Он не достижим из истока s. Стало быть, текущий поток в сети G является максимальным, а разрез $(\{s, a, b\}, \{t\})$ сети G является минимальным.