Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Методы численного анализа

**ОТЧЁТ**

к лабораторной работе

на тему

Метод Адамса

Выполнил: студент группы 153503

Кончик Денис Сергеевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

**Содержание**

[1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ 3](#_Toc120059950)

[2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ 3](#_Toc120059951)

[3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ 4](#_Toc120059952)

[4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ 6](#_Toc120059953)

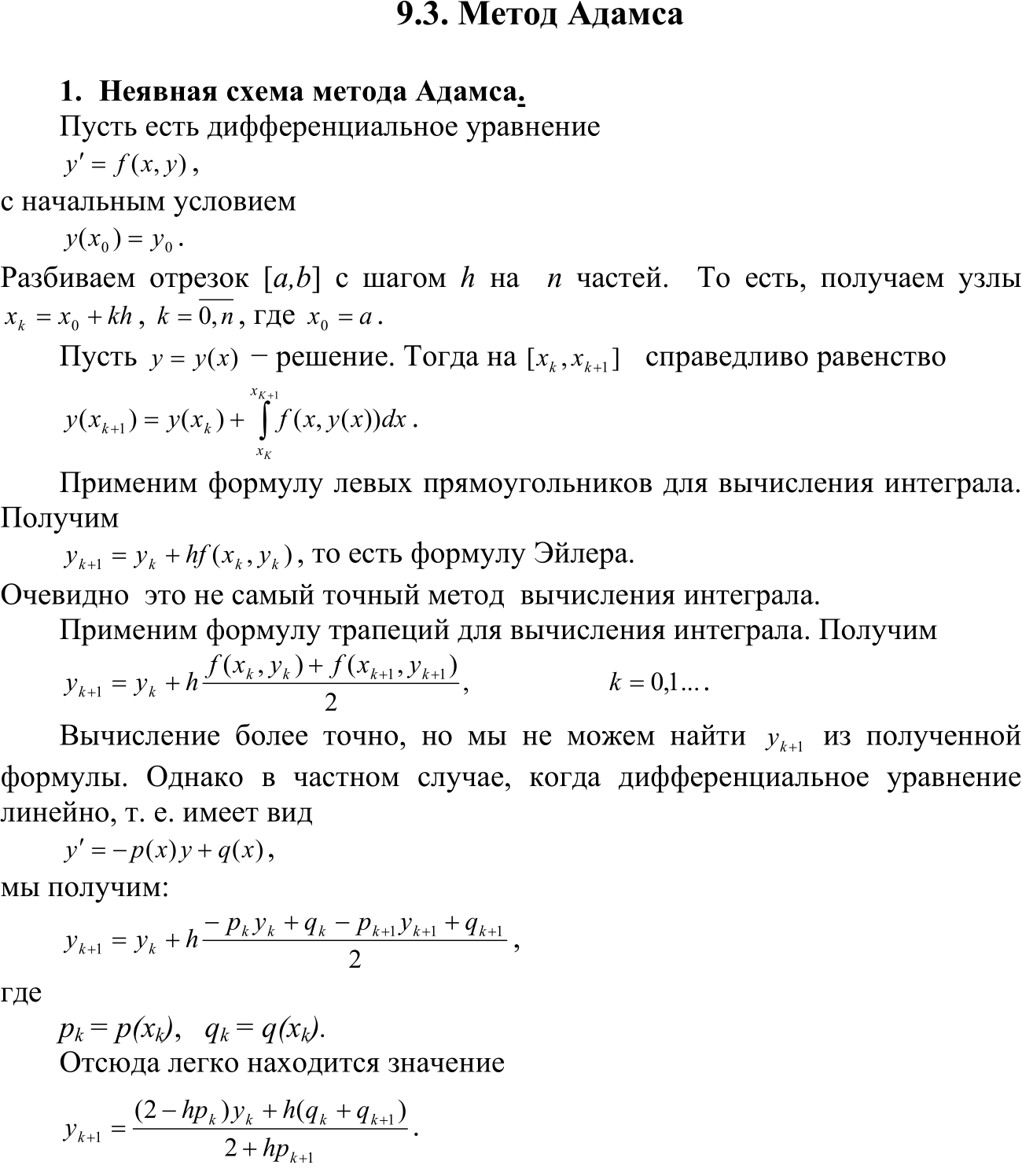
[5. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ 9](#_Toc120059954)

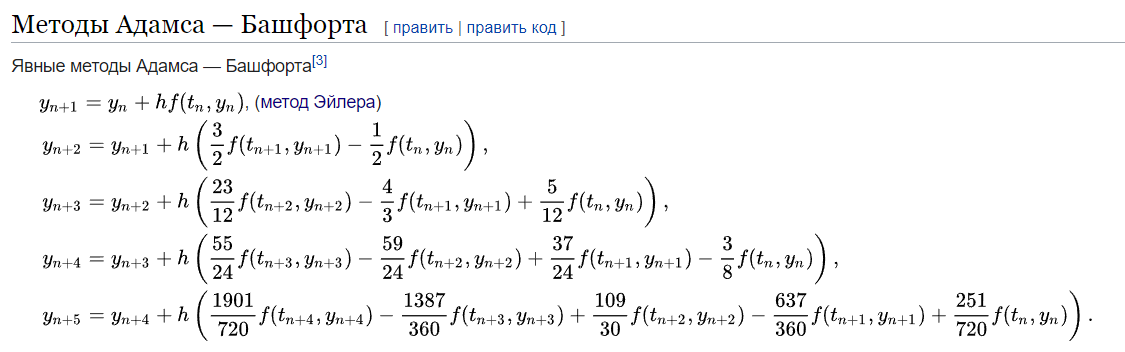
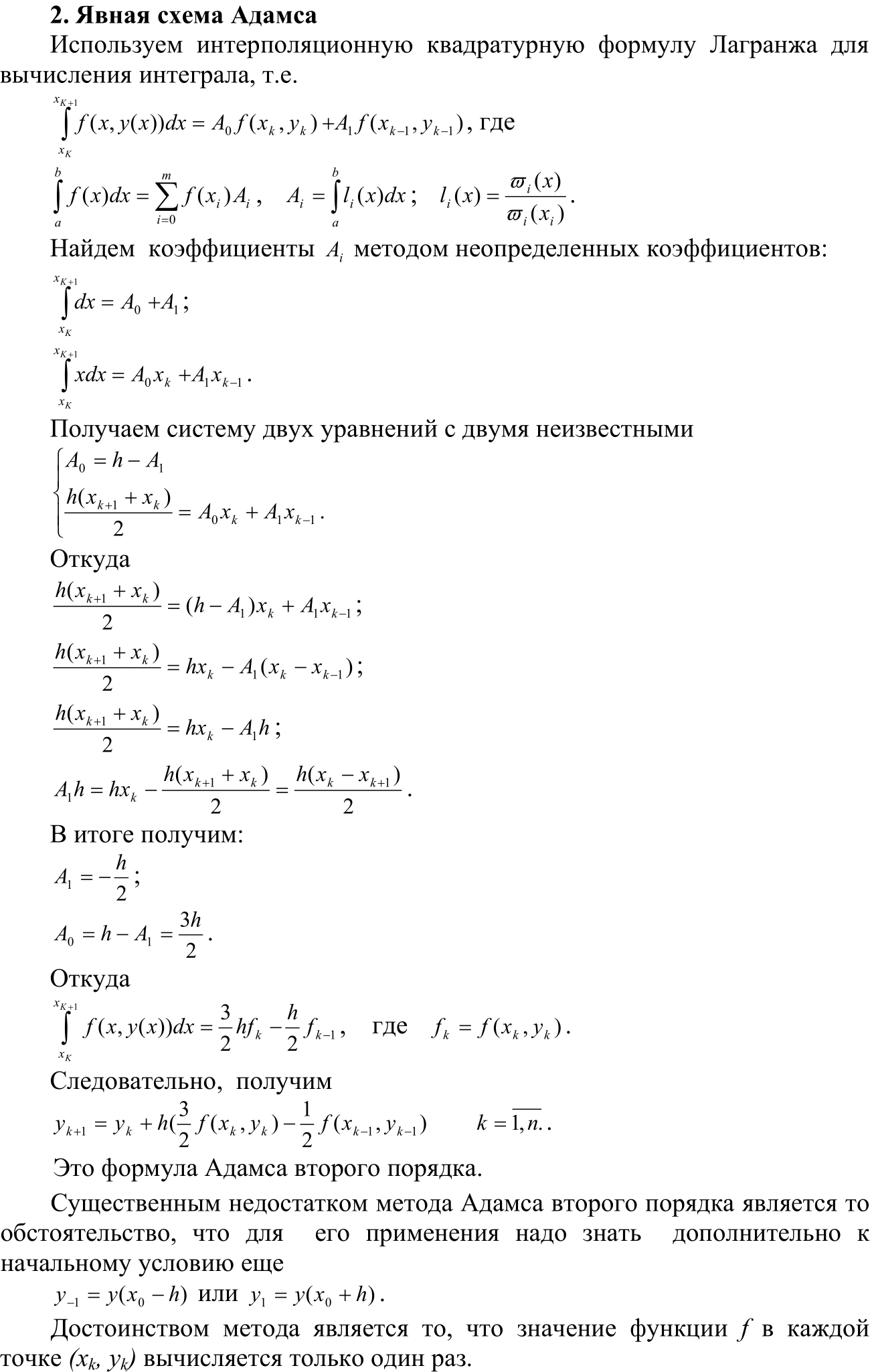
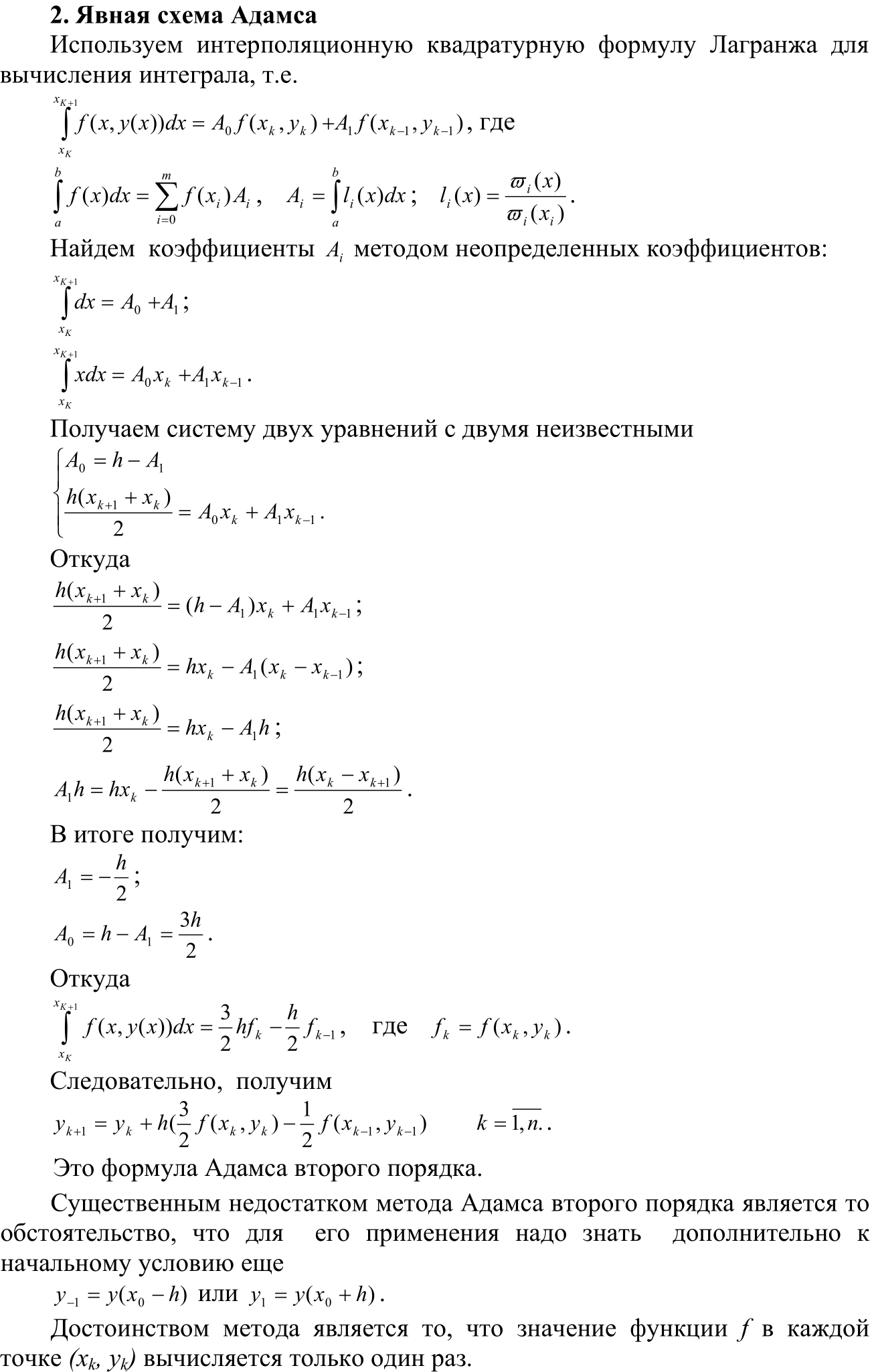
[6. ЗАДАНИЕ 11](#_Toc120059955)

[7. ВЫВОД 16](#_Toc120059956)

1. **ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.

1. **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

****

# **АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ**



# **ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ**

# -\*- coding: cp1251 -\*-

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

import sympy

import math

from calculate import CalculateListY

from calculate import CalculateY

plot\_dots = 10\*\*3

eps = 10\*\*-3

# Тестовый пример 1

# y'= y + e^x

# y = x \* e^x

x0, y0 = 1, math.e

L, R = 1, 2

def f(x, y):

return y + math.e \*\* x

def p(x):

return -1

def q(x):

return math.e \*\* x

def ans(x):

return round(x \* math.e \*\* x, 6)

# Метод Рунге-Кутта 4 порядка

def RungeKuttaMethod4(x, n):

y\_list = [y0]

h = (x - x0) / n

for k in range(n):

x\_k = x0 + k \* h

y\_k = y\_list[-1]

K1 = h \* f(x\_k, y\_k)

K2 = h \* f(x\_k + h / 2, y\_k + K1 / 2)

K3 = h \* f(x\_k + h / 2, y\_k + K2 / 2)

K4 = h \* f(x\_k + h, y\_k + K3)

y\_list.append(y\_k + 1/6 \* (K1 + 2 \* K2 + 2 \* K3 + K4))

return y\_list

# Неявный метод Адамса 2 порядка

def AdamsImplicit2(x, n):

y\_list = [y0]

h = (x - x0) / n

for k in range(n):

y\_k = y\_list[-1]

p\_k = p(x0 + k \* h)

p\_k\_plus1 = p(x0 + (k + 1) \* h)

q\_k = q(x0 + k \* h)

q\_k\_plus1 = q(x0 + (k + 1) \* h)

y\_list.append(((2 - h \* p\_k) \* y\_k + h \* (q\_k + q\_k\_plus1)) / (2 + h \* p\_k\_plus1))

return y\_list

# Явный метод Адамса 2 порядка

def AdamsExplicit2(x, n):

h = (x - x0) / n

y\_list = [y0, CalculateY(RungeKuttaMethod4, x0 + h, eps)[0]]

for k in range (1, n):

x\_k\_minus1 = x0 + (k - 1) \* h

x\_k = x0 + k \* h

y\_k\_minus1 = y\_list[-2]

y\_k = y\_list[-1]

y\_list.append(y\_k + h \* ((3/2) \* f(x\_k,y\_k) - (1/2) \* f(x\_k\_minus1, y\_k\_minus1)))

return y\_list

# Явный метод Адамса 3 порядка

def AdamsExplicit3(x, n):

h = (x - x0) / n

y\_list = [y0, CalculateY(RungeKuttaMethod4, x0 + h, eps)[0], CalculateY(RungeKuttaMethod4, x0 + 2 \* h, eps)[0]]

for k in range (2, n):

x\_k\_minus2 = x0 + (k - 2) \* h

x\_k\_minus1 = x0 + (k - 1) \* h

x\_k = x0 + k \* h

y\_k\_minus2 = y\_list[-3]

y\_k\_minus1 = y\_list[-2]

y\_k = y\_list[-1]

y\_list.append(y\_k + h\*((23/12)\*f(x\_k,y\_k)-(4/3)\*f(x\_k\_minus1,y\_k\_minus1)+(5/12)\*f(x\_k\_minus2,y\_k\_minus2)))

return y\_list

x\_list = []

for i in range(plot\_dots + 1):

x\_list.append(L + (R - L) / plot\_dots \* i)

xToCalculate = 1.5

print(f"Количество точек для построения графика: {plot\_dots}")

print(f"Точность: {eps:.0e}")

print("\nN\_max – максимальное количество узлов для одной из точек, \nнеобходимое для достижения заданной точности")

print("N\_middle – среднее количество узлов по всем точкам при \nдостижении заданной точности")

print(f"\nТочка: {xToCalculate}")

print(f"Калькулятор: {ans(xToCalculate)}")

y\_list, N\_max, N\_middle = CalculateListY(AdamsImplicit2, x\_list, eps)

print("\nНеявный метод Адамса 2 порядка O(h^2):")

print(f"N\_max: {N\_max}")

print(f"N\_middle: {int(N\_middle)}")

print("На графике: красный")

print(f"В точке: {CalculateY(AdamsImplicit2, xToCalculate, eps)[0]} [{CalculateY(AdamsImplicit2, xToCalculate, eps)[1]}]")

print(f"Delta = {abs(CalculateY(AdamsImplicit2, xToCalculate, eps)[0] - ans(xToCalculate)):.2e}")

plt.plot(x\_list, y\_list, 'red', linewidth = 2)

y\_list, N\_max, N\_middle = CalculateListY(AdamsExplicit2, x\_list, eps)

print("\nЯвный метод Адамса 2 порядка O(h^2):")

print(f"N\_max: {N\_max}")

print(f"N\_middle: {int(N\_middle)}")

print("На графике: синий")

print(f"В точке: {CalculateY(AdamsExplicit2, xToCalculate, eps)[0]} [{CalculateY(AdamsExplicit2, xToCalculate, eps)[1]}]")

print(f"Delta = {abs(CalculateY(AdamsExplicit2, xToCalculate, eps)[0] - ans(xToCalculate)):.2e}")

plt.plot(x\_list, y\_list, '--b', linewidth = 2)

y\_list, N\_max, N\_middle = CalculateListY(AdamsExplicit3, x\_list, eps)

print("\nЯвный метод Адамса 3 порядка O(h^3):")

print(f"N\_max: {N\_max}")

print(f"N\_middle: {int(N\_middle)}")

print("На графике: желтый")

print(f"В точке: {CalculateY(AdamsExplicit3, xToCalculate, eps)[0]} [{CalculateY(AdamsExplicit3, xToCalculate, eps)[1]}]")

print(f"Delta = {abs(CalculateY(AdamsExplicit3, xToCalculate, eps)[0] - ans(xToCalculate)):.2e}")

plt.plot(x\_list, y\_list, ':y', linewidth = 2)

plt.show()

# Вычислить Y по методу и X

def CalculateY(method, x, eps):

n = 1 # Количество узлов от x0 до x для точности eps

while True:

y\_list = method(x, n)

y\_list\_correctly = method(x, n \* 2)

max\_delta = max(abs(y\_list\_correctly[2 \* i] - y\_list[i]) for i in range(n + 1))

if (max\_delta < eps):

return round(y\_list\_correctly[-1], 6), n \* 2

else:

n \*= 2

# Создать список Y по методу и списку X

def CalculateListY(method, x\_list, eps):

y\_list = [] # Список игреков

n\_list = [] # Список n (числа узлов) для каждой точки

for x in x\_list:

y, n = CalculateY(method, x, eps)

y\_list.append(y)

n\_list.append(n)

return y\_list, max(n\_list), sum(n\_list) / len(x\_list)

**5. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ**

Явные методы Адамса k-го порядка требуют предварительного вычисления решения в k начальных точках. Для вычисления начальных значений программа использует метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

Для неявного метода Адамса 2-го порядка программа считает, что исходное дифференциальное уравнение является линейным.

**Тестовый пример 1.1.**

С помощью неявного метода Адамса 2 порядка1, явных методов Адамса 2, 3, 4 порядков2,3,4 найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ДУ | Начальное условие | | Отрезок | Решение | | Точность | |
|  |  | |  |  | |  | |
| Точек для построения графиков: | | | | | | | |
|  | | | | | | | |
| 1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный | | | | | | | |
| Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе | | | | | | | |
|  | Адамс [2] (неявный) | Адамс [2] (явный) | | | Адамс [3] (явный) | | Адамс [4] (явный) |
| Макс. | 2048 | 4096 | | | 512 | | 256 |
| Ср. | 556 | 1228 | | | 190 | | 71 |

**Тестовый пример 1.2.**

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

*n* – число точек разбиения отрезка [1; x] для достижения заданной точности в точке x.

– шаг разбиения, соответствующий количеству точек разбиения *n*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Неявный метод Адамса 2-го порядка | | | |
| *x* | 2.0 | 2.7 | 3.4 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 128 | 512 | 1024 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 2-го порядка | | | |
| *x* | 2.0 | 2.7 | 3.4 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 256 | 1024 | 2048 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 3-гопорядка | | | |
| *x* | 2.0 | 2.7 | 3.4 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 64 | 128 | 256 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 4-го порядка | | | |
| *x* | 2.0 | 2.7 | 3.4 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 32 | 64 | 128 |
|  |  |  |  |

**Тестовый пример 2.1.**

С помощью неявного метода Адамса 2 порядка1, явных методов Адамса 2, 3, 4 порядков2,3,4 найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ДУ | Начальное условие | | Отрезок | Решение | | | Точность |
|  |  | |  |  | | |  |
| Точек для построения графиков: | | | | | | | |
|  | | | | | | | |
| 1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный | | | | | | | |
| Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе | | | | | | | |
|  | Адамс [2] (неявный) | Адамс [2] (явный) | | | Адамс [3] (явный) | Адамс [4] (явный) | |
| Макс. | 1024 | 2048 | | | 256 | 128 | |
| Ср. | 197 | 456 | | | 92 | 39 | |

**Тестовый пример 2.2.**

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

*n* – число точек разбиения отрезка [0; x] для достижения заданной точности в точке x.

– шаг разбиения, соответствующий количеству точек разбиения *n*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Неявный метод Адамса 2-го порядка | | | |
| *x* | 1.5 | 2.3 | 2.9 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 128 | 256 | 512 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 2-го порядка | | | |
| *x* | 1.5 | 2.3 | 2.9 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 256 | 1024 | 2048 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 3-гопорядка | | | |
| *x* | 1.5 | 2.3 | 2.9 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 64 | 128 | 256 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 4-го порядка | | | |
| *x* | 1.5 | 2.3 | 2.9 |
|  |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 32 | 64 | 128 |
|  |  |  |  |

**Тестовый пример 3.1.**

С помощью неявного метода Адамса 2 порядка1, явных методов Адамса 2, 3, 4 порядков2,3,4 найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ДУ | Начальное условие | | Отрезок | Решение | | | Точность |
|  |  | |  |  | | |  |
| Точек для построения графиков: | | | | | | | |
|  | | | | | | | |
| 1 – красный, 2 – синий, 3 – желтый, 4 – черный | | | | | | | |
| Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе | | | | | | | |
|  | Адамс [2] (неявный) | Адамс [2] (явный) | | | Адамс [3] (явный) | Адамс [4] (явный) | |
| Макс. | 1024 | 2048 | | | 512 | 256 | |
| Ср. | 257 | 590 | | | 193 | 106 | |

**Тестовый пример 3.2.**

Для условия предыдущего задания найти значения решения задачи Коши в заданных точках.

*n* – число точек разбиения отрезка [1; x] для достижения заданной точности в точке x.

– шаг разбиения, соответствующий количеству точек разбиения *n*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Неявный метод Адамса 2-го порядка | | | |
| *x* | 2.0 | 3.5 | 5.0 |
| *y = -1/x* |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 64 | 256 | 512 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 2-го порядка | | | |
| *x* | 2.0 | 3.5 | 5.0 |
| *y = -1/x* |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 128 | 512 | 1024 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 3-гопорядка | | | |
| *x* | 2.0 | 3.5 | 5.0 |
| *y = -1/x* |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 32 | 128 | 256 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Явный метод Адамса 4-го порядка | | | |
| *x* | 2.0 | 3.5 | 5.0 |
| *y = -1/x* |  |  |  |
| *Метод(х)* |  |  |  |
|  |  |  |  |
| *n* | 32 | 64 | 128 |
|  |  |  |  |

6. ЗАДАНИЕ

Вариант 11

Найти с точностью до 0.001 решение уравнения на отрезке [0; 1].

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ДУ | Начальное условие | | Отрезок | | Точность |
|  |  | |  | |  |
| Точек для построения графиков: | | | | | |
|  | | | | | |
| Цвета графиков, построенных явными методами:  Адамс [2] – синий, Адамс [3] – желтый, Адамс [4] – черный | | | | | |
| Количество необходимых для достижения заданной точности точек разбиения отрезка для одной из точек в методе | | | | | |
|  | Адамс [2] (явный) | Адамс [3] (явный) | | Адамс [4] (явный) | |
| Макс. | 32 | 32 | | 16 | |
| Ср. | 16 | 9 | | 6 | |

# **7. ВЫВОД**

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы был изучены методы Адамса для решения задачи Коши ОДУ 1 порядка. Составлен алгоритм и программа, проверена правильность её работы на тестовых примерах, с заданной точностью построены графики решения задачи Коши.

Исходя из тестовых примеров и задания и учитывая количество необходимых точек разбиения отрезка для достижения заданной точности, можно сделать вывод о трудоемкости методов: методы Адамса (явный и неявный) 2-го порядка более трудоемкие по сравнению с методами 3-го и 4-го порядка (явные). Самым эффективным оказался явный метод Адамса 4-го порядка.