**Применение тензорного модального разложения для редукции порядка моделей и оптимального размещения сенсоров**

Ключевые слова: Тензорное разложение, модальное разложение, QR-факторизация, модели пониженного порядка, датасеты, динамические системы.

**Реферат**

Современные методы моделирования сложных динамических систем имеют большое значение в различных научных и технических областях. Для сокращения вычислительной сложности и повышения эффективности моделирования активно применяются методы модального разложения, такие как разложение по собственным функциям (POD) и динамическое разложение по модам (DMD). Однако эти методы имеют ограничения при работе с высокоразмерными тензорными данными. В данной работе предложен новый метод тензорного модального разложения (TBMD), который позволяет эффективно извлекать низкоразмерные моды из высокоразмерных систем при минимальной потере энергии. Также разработан метод тензорной QR-факторизации для оптимального размещения датчиков, что сохраняет пространственную структуру данных и обеспечивает высокую точность реконструкции системы даже при ограниченном количестве измерений. Полученные результаты демонстрируют превосходство метода TBMD по сравнению с традиционными подходами в задачах моделирования динамических систем, что особенно важно для приложений, связанных с реальным временем.

**Введение**

**Общий обзор алгоритма**

Цель алгоритма — восстановить полное поле данных (например, изображение или физическое поле) из разреженных измерений, полученных с помощью оптимально размещённых сенсоров. Для этого используется:

1. Тензорное модальное разложение (TBMD): Выделение важных мод (компонент) из исходных данных, представленных в виде тензора.
2. Тензорное QR-разложение: Определение оптимальных позиций для размещения сенсоров.
3. Тензорный компрессивный сенсинг: Восстановление полного поля из разреженных измерений с использованием мод, полученных на первом шаге.
4. **Сбор данных и их предварительная обработка**
   1. **Входные данные**

Наборы снимков поля: Вы имеете D наборов данных, каждый из которых представляет собой последовательность временных снимков поля при различных параметрах системы. Каждый набор может быть, например, результатом моделирования или измерений при определённых условиях.

* 1. **Формирование тензоров данных**

Для каждого набора данных :

* Тензор :
  + — число пространственных точек по первому измерению (например, ось ).
  + — число пространственных точек по второму измерению (например, ось y).
  + K — число временных снимков в данном наборе.

Пример:

* Если у вас есть данные в виде набора изображений размером 100×100 пикселей, снятых в течение 50 временных шагов, то , J, .

1. **Тензорное модальное разложение (TBMD) с помощью HOSVD (Алгоритм 1)**
   1. **Цель**

Для каждого тензора ​ выполнить разложение Такера с помощью HOSVD, чтобы получить модальные тензоры ​, которые содержат основные пространственные и временные особенности данных.

* 1. **Алгоритм HOSVD**

1. **Построение тензора-словаря** 
   1. **Объединение модальных тензоров**
2. **Тензорное QR-разложение для оптимального размещения сенсоров (Алгоритм 2)**
   1. **Цель**

Определить оптимальные позиции для размещения сенсоров, используя тензорное QR-разложение с выбором трубок (tube-pivot QR factorization).

* 1. **Алгоритм**

1. **Сбор измерений Y**
   1. **Цель**

Используя матрицу выбора сенсоров P, извлечь измерения из исходного поля в позициях, где размещены сенсоры.

* 1. **Алгоритм**
* **Извлечение измерений:**
  + Для каждого выбранного сенсора, где :
    - Извлекаем значение
* **Размерности:**
  + .
  + Однако, поскольку сенсоры установлены только в позициях, Y будет разреженной матрицей.

**Примечание:**

* На практике можно представить Y как вектор , содержащий только измеренные значения.

1. **Тензорный компрессивный сенсинг для восстановления вектора весов (Алгоритм 3)**
   1. **Цель**

Восстановить вектор весов из измерений Y с использованием тензора-словаря и матрицы выбора сенсоров P.

* 1. **Алгоритм**

1. **Восстановление полного поля** 
   1. **Цель**

Используя найденный вектор весов и тензор-словарь , восстановить полное поле .

* 1. **Алгоритм**
* **Вычисление восстановления:**
* **Размерности:**
  + .
  + .
  + .
  1. **Детали реализации**
* **Операция (произведение по третьему измерению):**
  + Для каждого элемента вычисляем:
* **Примечание:**
  + Это аналогично линейной комбинации мод, взвешенных элементами .