**Применение тензорного модального разложения для редукции порядка моделей и оптимального размещения сенсоров**

Ключевые слова: Тензорное разложение, модальное разложение, QR-факторизация, модели пониженного порядка, датасеты, динамические системы.

**Реферат**

Современные методы моделирования сложных динамических систем имеют большое значение в различных научных и технических областях. Для сокращения вычислительной сложности и повышения эффективности моделирования активно применяются методы модального разложения, такие как разложение по собственным функциям (POD) и динамическое разложение по модам (DMD). Однако эти методы имеют ограничения при работе с высокоразмерными тензорными данными. В данной работе предложен новый метод тензорного модального разложения (TBMD), который позволяет эффективно извлекать низкоразмерные моды из высокоразмерных систем при минимальной потере энергии. Также разработан метод тензорной QR-факторизации для оптимального размещения датчиков, что сохраняет пространственную структуру данных и обеспечивает высокую точность реконструкции системы даже при ограниченном количестве измерений. Полученные результаты демонстрируют превосходство метода TBMD по сравнению с традиционными подходами в задачах моделирования динамических систем, что особенно важно для приложений, связанных с реальным временем.

**Введение**

Компрессивное измерение (КИ) стало важной областью исследований в области обработки сигналов и данных из-за своей способности восстанавливать разреженные сигналы из небольшого числа измерений. Традиционные методы часто неэффективны при работе с высокоразмерными данными, такими как тензоры, которые естественным образом возникают в приложениях, связанных с изображениями, видео и многомерными сигналами.

Тензорные методы компрессивного измерения предлагают мощные инструменты для обработки таких данных, используя их многомерную структуру для улучшения эффективности и точности восстановления. В данном отчёте рассматривается реализация алгоритма тензорного компрессивного измерения, основанного на работе [1], с применением к датасету Extended Yale B [2].

**Общий обзор алгоритма**

Цель алгоритма – восстановить полное поле данных (например, изображение или физическое поле) из разреженных измерений, полученных с помощью оптимально размещённых сенсоров. Для этого используется:

1. Тензорное модальное разложение (TBMD): Выделение важных мод (компонент) из исходных данных, представленных в виде тензора.
2. Тензорное QR-разложение: Определение оптимальных позиций для размещения сенсоров.
3. Тензорный компрессивный сенсинг: Восстановление полного поля из разреженных измерений с использованием мод, полученных на первом шаге.

Реализация метода тензорного оптимального размещения сенсоров может быть обобщена следующим образом:

**Шаг 1.** Преобразовать собранные наборов снимков поля с различными параметрами системы, уложенные вдоль временного измерения, в тензорную форму .

**Шаг 2.** Применить метод тензорного модального разложения (TBMD) к каждому тензору , что приведёт к получению модальных тензоров .

**Шаг 3.** Постройте объединённый модальный тензор , объединив тензоры вдоль третьего измерения, добавив их к пространственному измерению.

**Шаг 4.** Применить метод тензорной QR-факторизации к с учётом ограничения, что количество сенсоров равно , что приведёт к получению матрицы перестановки .

**Шаг 5.** Установить гиперпараметры метода тензорного компрессивного измерения и, используя модальный тензор и матрицу измерений под оптимизированной матрицей размещения сенсоров , найдите оптимизированный вектор весов .

**Шаг 6.** Восстановить матрицу поля с помощью и согласно уравнению:

1. **Сбор данных и их предварительная обработка**

В рамках экспериментов использовался набор данных Extended Yale Face Database B, содержащий 2410 изображений лиц, разделённых на 38 субъектов. Для каждого субъекта представлено около 52 фронтальных снимков лиц размером 192×168, сделанных при различных условиях освещения и с разнообразными выражениями лица. Этот набор данных является общедоступным и может быть загружен с официального сайта: <http://vision.ucsd.edu/~leekc/ExtYaleDatabase/ExtYaleB.html>.

Для уменьшения вычислительных затрат все изображения были приведены к размеру 48×42. Такое преобразование позволило снизить требования к памяти и ускорить эксперименты, сохранив при этом ключевые особенности лиц для анализа.

Изображения каждого субъекта были случайным образом разделены на тренировочные и тестовые наборы в соотношении **80%/20%**. Для обеспечения статистической значимости эксперименты были повторены 20 раз с различными случайными инициализациями разбиения. В каждом повторе тренировочный набор составлялся из 80% изображений каждого субъекта, а оставшиеся 20% образовывали тестовый набор. Это гарантировало, что тестовые данные полностью независимы от тренировочных, что важно для корректной оценки модели.

Для каждого субъекта был выполнен анализ тренировочного набора с помощью алгоритмов модального разложения, таких как POD (Proper Orthogonal Decomposition) или TBMD (Tensor-Based Modal Decomposition). В результате для каждого субъекта формировался модальный тензор, содержащий пространственно-временные моды. Затем модальные тензоры всех субъектов объединялись в общий тензор, где измерения вдоль третьей размерности представляли различные моды.

Модальный тензор, сформированный из тренировочных данных, использовался для дальнейшего размещения сенсоров и восстановления данных. Для реализации алгоритма оптимального размещения сенсоров (OSP) использовалась разреженная матрица PP, где единицы указывали на положение сенсоров. С её помощью измерения YY формировались из исходных данных XX согласно уравнению:

Y=P⋅X,Y = P \cdot X,

где YY представляет матрицу измерений, используемую для восстановления полей.

Таким образом, этап сбора и предварительной обработки данных включал в себя подготовку исходных изображений, их нормализацию, разбиение на тренировочные и тестовые наборы, а также построение модальных тензоров. Это позволило сформировать корректные входные данные для дальнейших экспериментов, таких как размещение сенсоров и восстановление исходных данных.

1. **Тензорное модальное разложение (TBMD) с помощью HOSVD (Алгоритм 1)**
   1. **Цель**

Для каждого тензора ​ выполнить разложение Такера с помощью HOSVD, чтобы получить модальные тензоры ​, которые содержат основные пространственные и временные особенности данных.

* 1. **Алгоритм HOSVD**

1. **Построение тензора-словаря** 
   1. **Объединение модальных тензоров**
2. **Тензорное QR-разложение для оптимального размещения сенсоров (Алгоритм 2)**
   1. **Цель**

Определить оптимальные позиции для размещения сенсоров, используя тензорное QR-разложение с выбором трубок (tube-pivot QR factorization).

* 1. **Алгоритм**

1. **Сбор измерений Y**
   1. **Цель**

Используя матрицу выбора сенсоров P, извлечь измерения из исходного поля в позициях, где размещены сенсоры.

* 1. **Алгоритм**
* **Извлечение измерений:**
  + Для каждого выбранного сенсора, где :
    - Извлекаем значение
* **Размерности:**
  + .
  + Однако, поскольку сенсоры установлены только в позициях, Y будет разреженной матрицей.

**Примечание:**

* На практике можно представить Y как вектор , содержащий только измеренные значения.

1. **Тензорный компрессивный сенсинг для восстановления вектора весов (Алгоритм 3)**
   1. **Цель**

Восстановить вектор весов из измерений Y с использованием тензора-словаря и матрицы выбора сенсоров P.

* 1. **Алгоритм**

1. **Восстановление полного поля** 
   1. **Цель**

Используя найденный вектор весов и тензор-словарь , восстановить полное поле .

* 1. **Алгоритм**
* **Вычисление восстановления:**
* **Размерности:**
  + .
  + .
  + .
  1. **Детали реализации**
* **Операция (произведение по третьему измерению):**
  + Для каждого элемента вычисляем:
* **Примечание:**
  + Это аналогично линейной комбинации мод, взвешенных элементами .

**Список литературы**

1. Z. Zhong, X. Hua, Z. Zhai et al., A novel tensor-based modal decomposition method for reduced order modeling and optimal sparse sensor placement, Aerospace Science and Technology, 109530, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2024.109530>;
2. K.-C. Lee, J. Ho, D. J. Kriegman, Acquiring linear subspaces for face recognition under variable lighting, IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence 27(5) (2005)684–698.