

Razvoj funkcije u Taylorov polinom (Taylorov red)

Na predavanjima smo vidjeli da za $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$ točku u I te $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funkciju koja ima neprekidnu derivaciju n -tog reda na I , možemo definirati n -ti **Taylorov polinom** funkcije f u točki c kao

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

nazivamo **Taylorov red**. Za $c = 0$ dobivamo **Maclaurinov red**

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. (10 bodova) Odredite Taylorov polinom funkcije $f(x)$ u točki $x = 0$ koji sadrži prva tri člana koji su različiti od nule. Pokažite sve korake deriviranja i uvrštavanja.

Napomena: može biti jednostavnije naći Taylorov polinom za funkciju $\frac{1}{1+x}$ i onda u tu formulu uvrstiti x^2 .

2. (10 bodova) Napišite kod u R-u ili Pythonu koji vizualizira funkciju $f(x)$ i Taylorove polinome s jednim, dva i tri člana na segmentu $[-0.8, 0.8]$. Uočite da konkretne Taylorove polinome koje koristite trebate izračunati u prvom dijelu zadatka i da u ovom dijelu ne piše da koristite $T_1(x)$, $T_2(x)$ i $T_3(x)$, već one polinome koji koriste članove razvoja koji su različiti od nule (i tako do trećeg ne-nul člana).

3. (10 bodova) Kvantificirajte točnost aproksimacije Taylorovim polinomima tako da za svaki Taylorov polinom $T_n(x)$, gdje je n jednak onim stupnjevima polinoma određenima u točkama 1 i 2, numerički izračunate:

$$\max_{x \in [-0.8, 0.8]} |f(x) - T_n(x)|$$

Napomena: Ovdje nije potrebna analitička procjena greške — dovoljno je numerički usporediti funkcijske vrijednosti u velikom broju točaka (recimo 1.000).

4. (10 bodova) Prikažite dobivene pogreške u tablici i komentirajte što se događa s pogreškom kada se red produljuje. Kada Taylorova aproksimacija dobro funkcionira, a kada gubi točnost?

Zadatke predajte u Wordu ili Power Pointu na Slacku. Preferirano bi bilo predati zadatke u PDF-u koji je generiran iz L^AT_EXkoda i za takve dokumente se mogu dobiti dodatni bodovi.