

# Matematička analiza - projektni zadatak

Denis Beletić

26. lipnja 2025.

# Sadržaj

1	Uvod	2
2	Taylorov i Maclaurinov red	3
3	Zadatak 1.	4
4	Zadatak 2.	6

# 1 Uvod

Taylorov red predstavlja važan alat u matematičkoj analizi jer omogućava približno izražavanje složenih funkcija pomoću polinoma. Ovime se olakšavaju računanja i proučavanje svojstava funkcija u okolini određene točke. Omogućava preciznu analizu pogreške aproksimacije, što čini važan temelj teorije pogrešaka u matematici.

## 2 Taylorov i Maclaurinov red

Taylorov red:

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

Maclaurinov red (poseban slučaj kada je  $c = 0$ ):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

### 3 Zadatak 1.

Odredite Taylorov polinom funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

u točki  $x = 0$ , koji sadrži prva tri člana koji su različiti od nule.

Pokažite sve korake deriviranja i uvrštavanja.

**Napomena:** Može biti jednostavnije naći Taylorov polinom za funkciju  $\frac{1}{1+x}$ , i zatim u tu formulu uvrstiti  $x^2$ .

Pošto tražimo Taylorov polinom u točki  $x = 0$ , možemo koristiti **Maclaurinov red** za pronalazak polinoma.

#### Korak 1: Odaberimo jednostavniju funkciju

Promatramo jednostavniju funkciju:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

#### Korak 2: Derivirajmo funkciju

$$f(x) = (1+x)^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot (1+x)^{-1-1} = -1 \cdot (1+x)^{-2} = -(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-2-1} = 2 \cdot (1+x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-3-1} = -6 \cdot (1+x)^{-4}$$

#### Korak 3: Vrijednosti derivacija u točki $x = 0$

$$f(0) = (1+0)^{-1} = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = 2$$

$$f'''(0) = -6$$

#### Korak 4: Maclaurinov red za $(1+x)^{-1}$

Uvrštavanjem u formulu:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$f(x) = 1 + (-1)x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{-6}{6}x^3 + \dots$$

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

**Korak 5: Zamjena  $x \rightarrow x^2$** 

Sada zamjenjujemo  $x$  s  $x^2$ :

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 - (x^2)^1 + (x^2)^2 - (x^2)^3 + \dots$$

**Rezultat:**

Taylorov polinom s prva tri nenulta člana:

$$P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6$$

## 4 Zadatak 2.

Napišite kod u R-u ili Pythonu koji vizualizira funkciju  $f(x)$  i Taylorove polinome s jednim, dva i tri člana na segmentu  $[-0.8, 0.8]$ .

Uočite da konkretne Taylorove polinome koje koristite trebate izračunati u prvom dijelu zadatka i da u ovom dijelu ne pišete da koristite  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$  i  $T_3(x)$ , već one polinome koji koriste članove razvoja koji su različiti od nule (i tako do trećeg nenultog člana).