

QUESTÃO 1

ALTERNATIVA B

O tabuleiro 7×7 pode ser facilmente preenchido e constata-se que na casa central deve aparecer o número 25, mas existe uma maneira melhor de fazer isto: no tabuleiro quadrado de 49 casas, a quantidade de números antes da casa central é igual à quantidade de números distribuídos depois da casa central. Logo, chamando de x o número que ocupa a casa central temos $x-1$ números antes dele e $49-x$ depois dele. Portanto, $x-1=49-x$, donde $2x=50$. Portanto, $x=25$. De modo geral, para qualquer tabuleiro quadrado de $2n+1$ casas (um número ímpar), o número x que aparece na casa central satisfaz a igualdade $x-1=(2n+1)-x$. Logo, $2x=2n+2$ e, portanto, $x=n+1$.

QUESTÃO 2

ALTERNATIVA D

Observe que $2014 = 19 \times 106 = 2 \times 19 \times 53$. Assim, a menos da ordem dos fatores, existem somente quatro formas possíveis de se fazer aparecer 2014 na calculadora como uma multiplicação de dois números naturais:

- Apertando sete teclas: $1 \times 2014 =$
- Apertando sete teclas: $2 \times 1007 =$
- Apertando sete teclas: $19 \times 106 =$
- Apertando seis teclas: $38 \times 53 =$

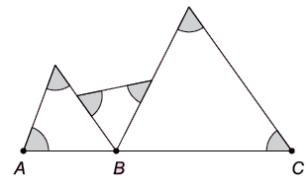
(Este fato se deve à decomposição única de um número inteiro positivo em fatores primos, a menos da ordem dos fatores. Os fatores primos de 2014 são 2, 19 e 53).

Dentre as quatro possibilidades, em só uma delas seis teclas são pressionadas; concluímos então que as seis teclas que Ana Maria apertou foram 3, 8, \times , 5, 3 e $=$. Portanto, o maior algarismo cuja tecla ela apertou foi 8.

QUESTÃO 3

ALTERNATIVA D

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Observe que os três ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em B) somam 180° , já que A , B e C estão alinhados. Assim, a soma dos ângulos marcados é $(180^\circ \times 3) - 180^\circ = 360^\circ$.



QUESTÃO 4

ALTERNATIVA B

Podemos organizar as somas dos termos da sequência aos pares:

$$(-6 + 12) + (-18 + 24) + (-30 + 36) + (-42 + 48) + \dots$$

Observamos que, para cada par de termos consecutivos, arranjados como acima, a soma é 6. Assim, para obter 180 devemos somar os $180 \div 6 = 30$ primeiros pares, ou seja, os $30 \times 2 = 60$ primeiros termos da sequência.

QUESTÃO 5

ALTERNATIVA A

Somando as metragens dos muros de Luiz e de Lúcio, obtemos $240 + 260 = 500$ m. Neste total estão computados o comprimento do muro original (de 340 m) mais duas vezes o comprimento do muro interno. Logo, o comprimento do muro interno é igual a $[500 - 340] / 2 = 80$ metros.

Podemos também resolver algebraicamente: como o muro interno pertence ao cercado dos terrenos de Luiz e de Lúcio, se x é a medida do muro interno, temos:

$$\begin{aligned} 340 + 2x &= 240 + 260 \\ \text{Portanto } x &= 80 \text{ m.} \end{aligned}$$

QUESTÃO 6

ALTERNATIVA D

Podemos organizar as informações numa tabela:

	mês	dia do mês	dia da semana
Andrea	agosto	16	segunda
Daniela	agosto	16	terça
Fernanda	setembro	17	terça
Patrícia	agosto	17	segunda
Tatiane	setembro	17	segunda

Se Andrea estivesse certa, então Fernanda não acertaria nenhuma das informações. Logo, não é ela que está certa, nem Fernanda (pelo mesmo motivo). Se Daniela estivesse certa, então Tatiane também nada acertaria. Logo Daniela e Tatiane não estão certas. Se Patrícia acertar tudo, as demais também acertarão alguma informação e, portanto, Patrícia é a única que está certa.

QUESTÃO 7

ALTERNATIVA A

Se P é o preço de um caderno, Rodrigo pagou pela sua compra

$$P + \frac{80}{100}P + \frac{60}{100}P = P + 0,8P + 0,6P = 2,4P,$$

enquanto que Gustavo, no dia seguinte, pagou $3P$. Portanto, Rodrigo pagou

$$3 \cdot P - 2,4P = 0,6P$$

a menos que Gustavo. Assim, para saber percentualmente quanto Rodrigo pagou a menos do que Gustavo, fazemos

$$\begin{array}{ccc} 3P & \hline & 100\% \\ 0,6P & \hline & x \end{array}$$

Logo, $x = \frac{0,6P}{3P} = 0,2 = \frac{20}{100}$, ou seja, Rodrigo pagou 20% a menos que Gustavo.

QUESTÃO 8

ALTERNATIVA A

De acordo com o gráfico, os alunos obtiveram as seguintes notas e médias:

	Prova 1	Prova 2	Média Aritmética
A	9	8	8,5
B	3	5	4
C	8	3	5,5
D	8	10	9
E	7	6	6,5
F	3	9	6
G	8	7	7,5
H	10	5	7,5
I	10	1	5,5
J	6	3	4,5

Assim, somente os alunos A, D, E, F, G e H ficaram com média aritmética maior do que ou igual a 6 e, dos dez alunos, somente seis foram aprovados.

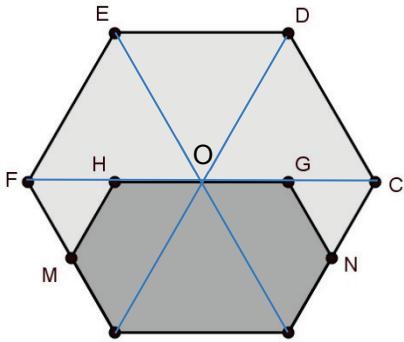
QUESTÃO 9

ALTERNATIVA E

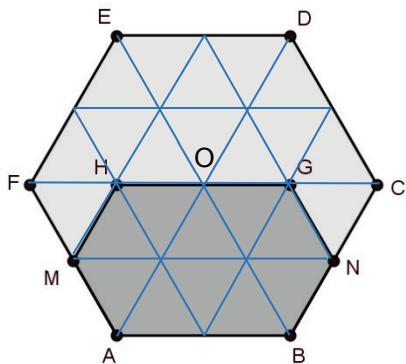
As diagonais que ligam vértices opostos dividem o hexágono regular em seis triângulos equiláteros congruentes, com lado igual ao do hexágono. Por outro lado, os segmentos MH e GN determinam triângulos equiláteros FHM e CGN com lado igual à metade do lado do hexágono.

Logo, a área de cada um destes dois triângulos é igual a $\frac{S}{4}$, sendo S a área dos triângulos equiláteros maiores. Assim, a razão entre as áreas dos hexágonos $ABNGHM$ e $ABCDEF$ é

$$\frac{3S - 2\frac{S}{4}}{6S} = \frac{5}{12}$$



Uma outra solução consiste em decompor o hexágono regular em 24 pequenos triângulos equiláteros congruentes e verificar que o hexágono cinza é formado por 10 de tais triângulos pequenos. Assim, a razão entre as áreas é $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.



QUESTÃO 10

ALTERNATIVA B

Yurika andou $36144 - 35723 = 421$ km. Ela gastou 43 litros para andar esta quilometragem; portanto, o rendimento de seu carro foi de $421 \div 43$ km/l, ou seja, aproximadamente 9,8 km/l. O dado 32,5 é irrelevante para resolver o problema, já que ela sempre enche o tanque quando abastece.

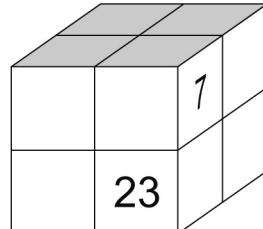
QUESTÃO 11

ALTERNATIVA C

Como em cada face aparecem quatro números consecutivos, então na face onde estiver o número 1, obrigatoriamente estarão os números 1, 2, 3 e 4. Logo, na face onde estiver o número 5 estarão os números 5, 6, 7 e 8, e assim, sucessivamente, até chegarmos à face com os números 21, 22, 23 e 24.

Sendo assim, no cubo apresentado a face com o número 23 também apresenta os números 21, 22 e 24. Como o enunciado diz que a soma do maior número de uma face com o menor da face oposta é igual a 25, podemos concluir que na face oposta à que contém o 23 estão os números 1, 2, 3 e 4. Na face em que aparece o número 7 aparecem os números 5, 6 e 8, e na face oposta a esta estão os números 17, 18, 19 e 20. Logo, na face destacada (em cinza) pode estar qualquer número de 9 até 16.

Como a pergunta é qual é o menor número que pode aparecer na face cinza, a resposta é 9.



QUESTÃO 12

ALTERNATIVA D

Cada figura é formada por 3 cópias da figura anterior, posicionadas de modo a colocar em contato apenas dois pares de quadradinhos das cópias das figuras. Em consequência, o comprimento do contorno da nova figura é igual a 3 vezes o comprimento do contorno da anterior, menos 4 cm (correspondentes aos lados em contato).

A tabela abaixo dá o comprimento do contorno das sucessivas figuras.

Figura	Contorno (cm)
1	4
2	$3 \times 4 - 4 = 8$
3	$3 \times 8 - 4 = 20$
4	$3 \times 20 - 4 = 56$
5	$3 \times 56 - 4 = 164$
6	$3 \times 164 - 4 = 488$

Portanto, o contorno da Figura 6 mede 488 cm.

QUESTÃO 13

ALTERNATIVA E

Observe a soma das unidades. Como $0 < X + Y \leq 18$, temos que $X + Y = 10$, pois $X + Y + Z$ e Z devem ter o mesmo algarismo na casa das unidades. Segue também que somando-se os números na casa das unidades, “vai um” para a casa das dezenas. A partir da soma das dezenas temos que $1 + X + Y + Z = 11 + Z$ e X devem ter o mesmo algarismo na casa das unidades, isto só é possível se $X = Z + 1$. Observando a casa do milhar, vemos que a soma $1 + X + Y + Z = 11 + Z$ deve ser igual ao número com dezena Y e unidade X . Logo, $Y = 1$ e como $X + Y = 10$, $X = 9$. Mas $X = Z + 1$, o que fornece $Z = 8$. Assim, a conta apresentada é, de fato,

$$\begin{array}{r}
 9\ 9\ 9\ 9 \\
 1\ 1\ 1\ 1 \\
 +\ 8\ 8\ 8\ 8 \\
 \hline
 1\ 9\ 9\ 9\ 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 X\ X\ X\ X \\
 Y\ Y\ Y\ Y \\
 +\ Z\ Z\ Z\ Z \\
 \hline
 Y\ X\ X\ X\ Z
 \end{array}$$

Uma outra solução é a seguinte:

Olhando a casa das unidades, concluímos, como antes, que $X + Y = 10$, pois $X + Y + Z$ e Z devem ter o mesmo algarismo na casa das unidades. Devido à posição da letra Y no resultado, podemos concluir que $Y = 2$ ou $Y = 1$, pois X , Y e Z sendo algarismos, são, no máximo, iguais a 9. Vejamos o que ocorre em cada caso:

Se $Y = 2$, então $X = 8$ e, olhando a casa dos milhares, vemos que $1 + 8 + 2 + Z = 28$, donde $Z = 17$, o que é impossível, pois Z é um algarismo ($Z < 10$).

Se $Y = 1$, como $X + Y = 10$, então $X = 9$ e, olhando novamente a casa dos milhares, vemos que $1 + 9 + 1 + Z = 19$, donde $Z = 8$.

QUESTÃO 14

ALTERNATIVA C

Supondo que o relógio de parede começou a funcionar normalmente quando marcava 9h, ao mostrar 10h 40min o tempo que passou foi de 1h e 40min. Como Rosane ficou exatamente uma hora fazendo compras, conclui-se que ela levou 40 min para ir e voltar e, como esses tempos são iguais, levou 20 min para voltar. Admitindo-se que o relógio do mercado que marcava 10h 10min estava correto, então ela chegou em casa 1h e 20 min depois das 10h e 10 min, ou seja, ela chegou em casa às 11 horas e 30 minutos.

QUESTÃO 15

ALTERNATIVA C

Chamando de T o peso total das frutas, m o peso (massa) das maçãs, u o peso das uvas e l o peso das laranjas, os dados do problema nos fornecem

$$m = T/2, \quad u + l = T/2 \quad \text{e} \quad u = 2l$$

onde concluímos que $m = T/2$, $u = T/3$ e $l = T/6$. Portanto, de acordo com a tabela de preços, teremos:

$$3 \cdot \frac{T}{2} + 4 \cdot \frac{T}{3} + 2 \cdot \frac{T}{6} = 38 \quad \therefore T = 12$$

Logo, Télio comprou 12 kg de frutas.

QUESTÃO 16

ALTERNATIVA C

A cada grupo de 3 dias Lúcia pode comer $\begin{cases} 7 + 7 + 7 = 21 \text{ docinhos} \\ \text{ou} \\ 10 + 5 + 5 = 20 \text{ docinhos} \end{cases}$

Portanto, para maximizar a quantidade de docinhos ela deverá sempre fazer a primeira escolha a cada grupo de 3 dias. Como $29 = 9 \times 3 + 2$, já podemos concluir que nos 9 períodos de 3 dias ela comerá $9 \times 21 = 189$ docinhos.

Resta analisar de que maneiras ela pode tentar maximizar a quantidade de docinhos nos dois últimos dias.

Opções: $\begin{cases} 7 + 7 = 14 \text{ docinhos} \\ 10 + 5 = 15 \text{ docinhos} \\ 7 + 10 = 17 \text{ docinhos} \end{cases}$

A terceira possibilidade é a maior de todas. Logo, a maior quantidade de docinhos que ela pode comer é 189 17 206

QUESTÃO 17

ALTERNATIVA C

Como Gustavo possui pelo menos uma moeda de cada tipo, ele não pode ter 2 moedas de 50 centavos, senão formaria 1 real. Ele também não pode ter 2 moedas de 25 centavos. Com a moeda de 50 centavos e com uma moeda de 25 centavos ele também não pode formar 1 real. Concluímos assim, que Gustavo possui uma moeda de 50 centavos e uma moeda de 25 centavos. Gustavo não pode ter 5 moedas de 10 centavos, senão junto com a moeda de 50 centavos ele formaria 1 real.

Para maximizar, podemos supor que ele tem, então, quatro moedas de 10 centavos. Com elas e com as moedas de 50 e 25 centavos ele não consegue formar 1 real. Por fim, ele não pode ter cinco moedas de 1 centavo, pois se tivesse, formaria 1 real juntando a elas a moeda de 50 centavos com a de 25 centavos e mais duas de 10 centavos. Assim, Gustavo deve ter, no máximo, quatro moedas de 1 centavo. Logo, o maior valor total possível que Gustavo pode ter é 50 25 4 10 4 1119 + + + = centavos, ou seja, R\$ 1,19.

QUESTÃO 18

ALTERNATIVA E

Vamos fazer essa contagem pensando em colocar os algarismos na unidade, dezena, centena e unidade de milhar do número.

Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo 0 não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para se colocar o algarismo 0.

Colocado o zero sobram então três posições para se colocar o algarismo ímpar, e como há cinco algarismos ímpares, temos um total de 15 possibilidades para se colocar o algarismo ímpar no número.

Colocado o algarismo 0 e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há apenas 4 possibilidades de escolha: 2, 4, 6 e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos assim 12 possibilidades de se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número.

Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é 3 15 12 540

QUESTÃO 19

ALTERNATIVA B

Os cubinhos que não têm nenhuma face pintada são os que ficam internos ao cubo maior. Eles fazem parte de um cubo de dimensões $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$, o que dá um total de $(n-2)^3$ tais cubinhos. Os que têm exatamente uma face pintada são os cubinhos das faces do cubo maior que não tocam suas arestas. Em cada face há $(n-2)^2$ desses cubinhos, o que dá um total de $6(n-2)^2$ cubinhos com exatamente uma face pintada. Logo, deve-se ter

$$(n-2)^3 = 6 \cdot (n-2)^2$$

Como $n > 2$, esta equação é equivalente a $n-2=6$, cuja solução é $n=8$.

QUESTÃO 20

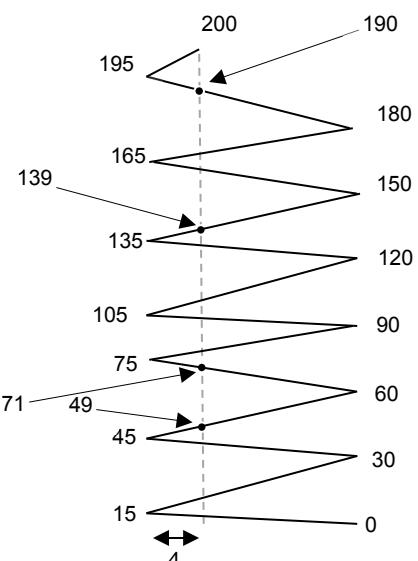
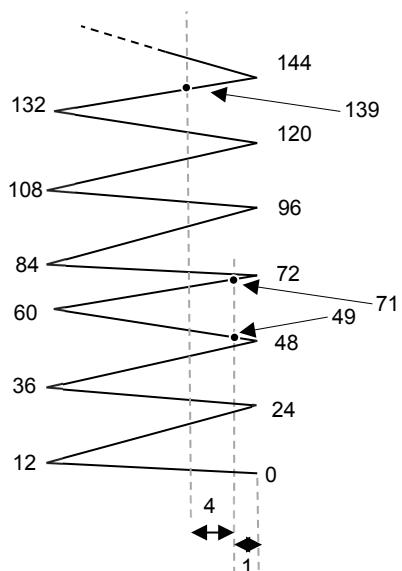
ALTERNATIVA D

Como as marcas 49 e 71 ficaram sobrepostas em pedaços que são vizinhos, houve uma dobra exatamente no ponto médio, isto é, em $(49+71)/2=60$. Como o processo iniciou-se com a marca 0, o tamanho de cada pedaço, isto é, a distância entre duas dobras sucessivas, deve ser um divisor de 60. Os divisores de 60 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e o próprio 60. Mas, estando 49 e 71 em pedaços vizinhos, descartamos os divisores 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 10 pois a distância de 49 (ou 71) até a dobra 60 é 11, maior do que todos eles. Resta decidir qual é o tamanho de cada pedaço dentre as possibilidades 12, 15, 20, 30 ou 60 e, para isto, usaremos a informação de que a marca 139 ficou alinhada com 49 e 71.

As distâncias da marca de 139 aos dois pontos anteriores são, respectivamente, 90 e 68. Como a marcação de 139 coincide com as anteriores, uma dessas distâncias deve ser um múltiplo do dobro do tamanho da dobra, ou seja, deve ser um múltiplo de 24, 30, 40, 60 ou 120. Mas 68 não é um múltiplo de nenhum desses números, enquanto 90 é múltiplo apenas de 30. Portanto, o tamanho de cada pedaço é 15, o que faz com que a última dobra ocorra na marca de 195 cm e, daí, ao dobrar-se o último pedaço, a marca de 200 cm fica sobre $195 - (200 - 195) = 190$ cm.

As figuras a seguir ilustram o que acontece para os cinco possíveis valores das medidas dos pedaços.

Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 12, teríamos a situação descrita pela figura ao lado e a marca 139 não estaria alinhada com 71 e 49. Logo, este caso não ocorre.

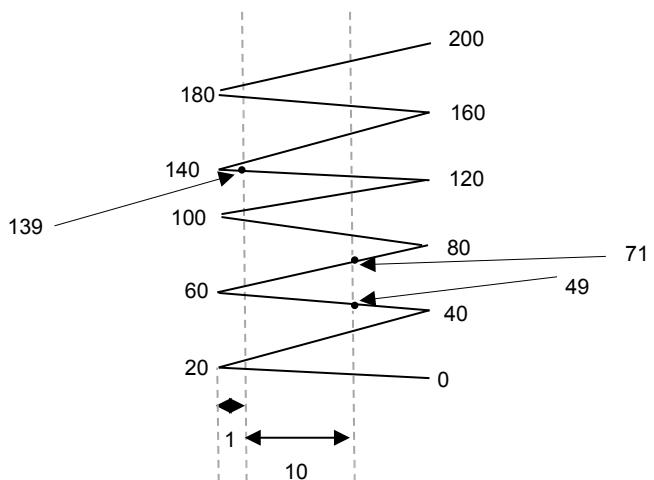


Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 15, teríamos a seguinte situação:

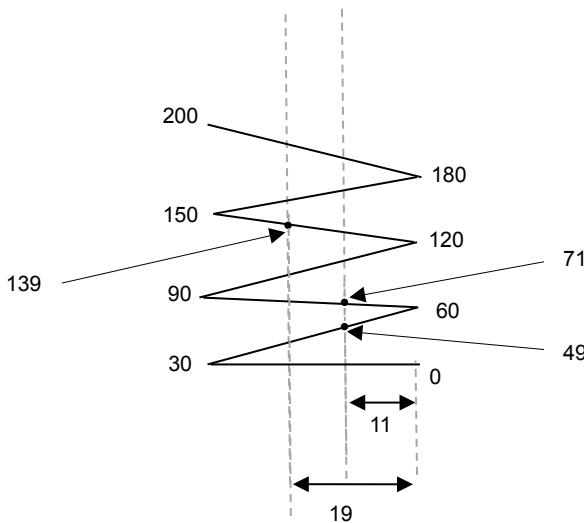
Este é o único caso correto. De fato, veremos a seguir que os demais casos não podem ocorrer:

Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 20, teríamos a seguinte situação:

Este caso também não pode ocorrer pois 139 não se alinha com 49 e 71.



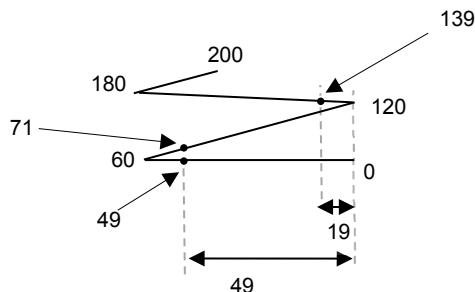
Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 30, teríamos a seguinte situação:



E vemos que também este caso também não ocorre.

Finalmente, se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 60, teríamos a seguinte situação:

Este último caso também não ocorre.



Logo o comprimento de cada pedaço é 15 cm e a última dobra é feita na marca 195; assim a marca 200 alinha-se com a marca 190, a qual está no penúltimo pedaço.