# Solução da prova da 1ª Fase

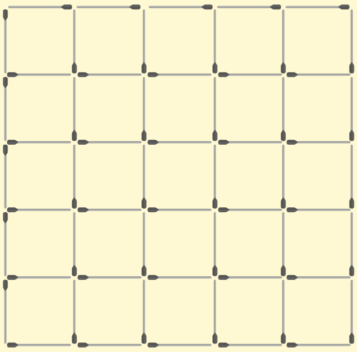
## QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA D

**Solução:** 100 × 101 = 101 × 100 = 10100, ou seja, 100 × 101 é igual dez mil e cem.

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times\ 101 \\ \hline 100 \\ 000\phantom{0} \\ 100\phantom{00} \\ \hline 10100 \end{array}$$

## QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA C

**Solução:** Em um quadriculado $n \times n$ há $n + 1$ fileiras de palitos horizontais e $n + 1$ fileiras de palitos verticais, e cada uma dessas fileiras tem $n$ palitos. Portanto, o número total de palitos em um quadriculado $n \times n$ é $2 \times n \times (n + 1)$. Logo, um quadriculado 5 × 5 tem 2 × 5 × 6 = 60 palitos. Isto também pode ser visto na ilustração ao lado.

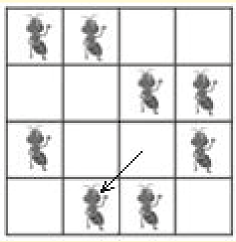


## QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA E

**Solução:** A alternativa A é falsa, pois o caminhão tem largura maior do que a permitida, já que 3,3 > 3,25.
A alternativa B é falsa, pois o caminhão tem peso maior do que o permitido, já que 4305 > 4300.
A alternativa C é falsa, pois o caminhão tem largura maior do que a permitida, já que 3,3 > 3,25.
A alternativa D é falsa, pois o caminhão tem peso maior do que o permitido, já que 4400 > 4300.
A alternativa E é verdadeira, pois 4290 < 4300 e 3,2 < 3,25.

## QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA B

**Solução:** Alguma formiguinha deve mudar de posição, pois a terceira linha e a terceira coluna do tabuleiro têm mais de duas formigas. Para que fiquem em cada linha e em cada coluna exatamente duas formigas, basta movimentar a formiga como ilustrado ao lado.



## QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA D

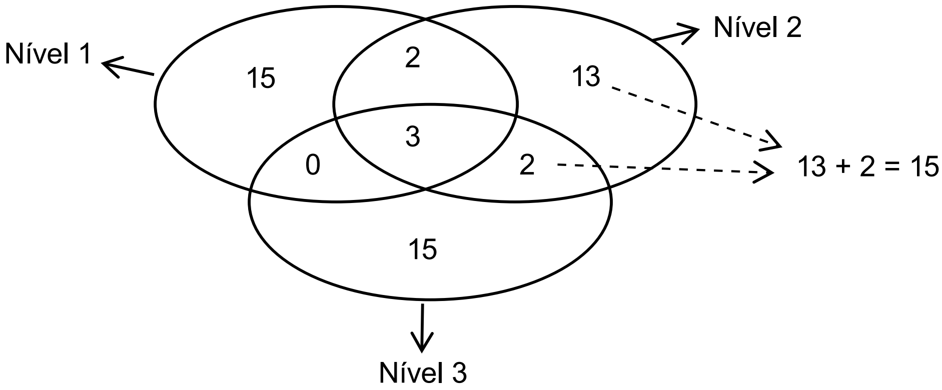
**Solução:** O quadrado maior tem lado medindo 6 cm e o quadrado menor tem lado medindo 2 cm, já que a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado. Portanto, de acordo com a distribuição geométrica dos quadrados na figura, o terceiro quadrado tem lado medindo 6 − 2 = 4 cm; logo, sua área é 16 $cm^2$.

## QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA A

**Solução:** A prova do nível 1 tem 20 questões; a prova do nível 2 tem 15 questões diferentes das questões do nível 1, pois há 3 questões comuns aos três níveis e 2 questões que são partilhadas entre os níveis 2 e 3 (assim há somente 13 questões que só aparecem no nível 2). Do mesmo modo, a prova do nível 3 tem 15 questões que só aparecem nesse nível, pois 3 questões são comuns aos três níveis e duas questões são partilhadas apenas nas provas dos níveis 2 e 3.

Não há questões comuns apenas entre os níveis 1 e 3.

Logo, no total, o número de questões diferentes que aparecem nas provas da primeira fase é 20 + 15 + 15 = 50. Isso também pode ser visualizado no diagrama abaixo:



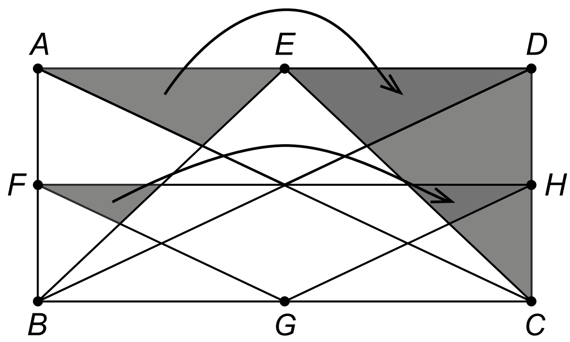

## QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA B

**Solução:** Com apenas uma troca de dois cartões, Maria não poderia ter feito a permutação de cartões descrita no enunciado. Podemos compreender isso analisando, por exemplo, o movimento do cartão 3: inicialmente ele ocupava a segunda posição e, ao final, passou a ocupar a terceira posição, que estava inicialmente ocupada pelo cartão 5. Logo, supondo que seja permitida uma única troca, deveria ter havido uma troca simples entre os cartões com os números 3 e 5, mas isto não ocorreu porque o cartão 5 não foi parar na segunda posição, que estava originalmente ocupada pelo cartão 3.


Com duas trocas de cartões, podemos realizar a tarefa feita por Maria, veja:

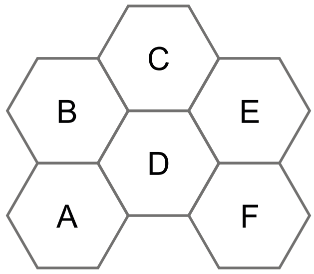
## QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA C

**Solução:** Em virtude da simetria da figura, as medidas das áreas dos dois triângulos coloridos de azul que estão na esquerda são iguais às medidas das áreas dos triângulos coloridos de vermelho na direita. Portanto, a área procurada é igual à área do triângulo *CDE*. Como *E* é o ponto médio do lado *AD*, a área do triângulo *CDE* é metade da área do triângulo *ACD* e este, por sua vez, é metade da área do retângulo *ABCD*. Assim, a soma das áreas coloridas de azul é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$ cm$^2$ .



## QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA C

**Solução:** Para facilitar, vamos rotular cada hexágono com uma letra, de A a F, ao lado.




Como no hexágono F está marcado 2, os hexágonos D e E têm versos azuis, pois são os únicos vizinhos de F. Como no hexágono B está marcado 3, seus vizinhos, os hexágonos A, C e D, têm versos azuis. Como no hexágono E está marcado 2 e ele é vizinho de C e D, que têm versos azuis, o hexágono F **não** tem verso azul. Finalmente, como no hexágono A está marcado 1 e ele é vizinho de D, que tem verso azul, o hexágono B **não** tem verso azul. Portanto, os hexágonos que têm verso azul são: A, C, D e E, um total de 4.

---

## QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA A

**Solução:** A cada 2 colunas avançamos 8 números, com a seta apontando no mesmo sentido. Por exemplo, começamos com o 2 e oito números depois, ou seja, no 10, voltamos para a mesma linha, na mesma condição de seta para baixo.

Isso acarreta que todos os múltiplos de 8 ficam sempre na mesma linha – que é a segunda (com a seta para cima), como mostramos na figura abaixo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Linha 1 | | 9 | | 17 | | 25 | ••• |
| Linha 2 | 2 | 8 | 10 | 16 | 18 | 24 | ••• |
| Linha 3 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | ••• |
| Linha 4 | 4 | 6 | 12 | 14 | 20 | 22 | ••• |
| Linha 5 | 5 | | 13 | | 21 | | ••• |

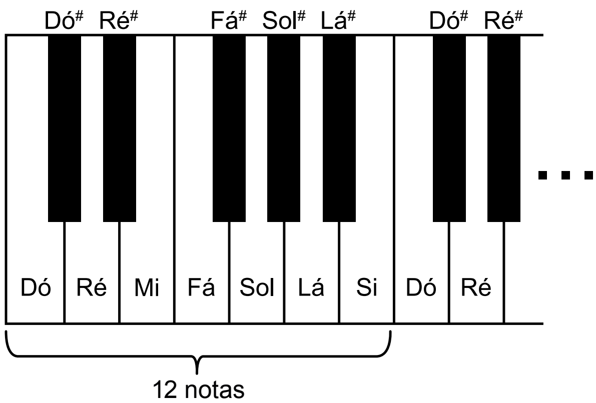
Como o número 1000 é múltiplo de 8, ele aparecerá na segunda linha com seta para cima e, portanto, o número 1001 estará na **linha 1**.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *** | | | 1001 | ••• |
| *** | 992 | | 1000 | ••• |
| *** | | | | ••• |
| *** | | | | ••• |
| *** | | | | ••• |

---

## QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA A

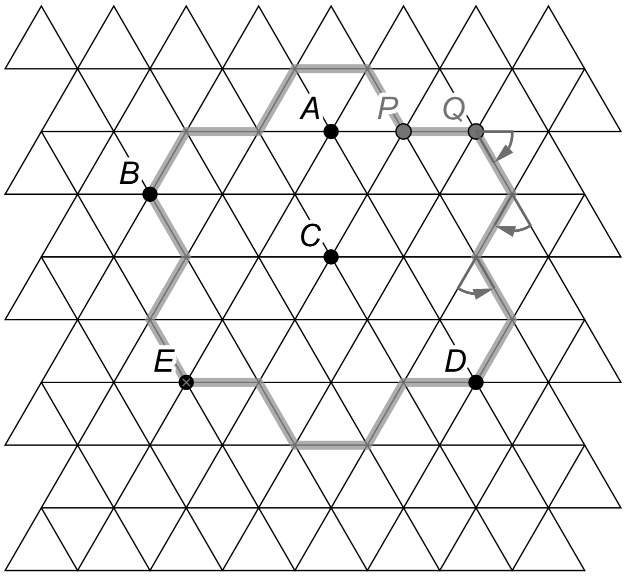
**Solução:** Como mostra a figura, os nomes das notas se repetem de 12 em 12.




Portanto, a nota que está 17 semitons acima da nota Lá tem o mesmo nome da nota que está 17 − 12 = 5 semitons acima da nota Lá, que é a nota Ré (Lá# – Si – Dó – Dó# – Ré).

## QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA E

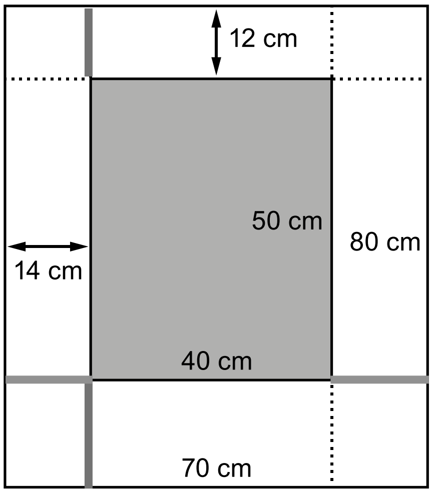
**Solução:** O percurso da formiguinha é fechado, conforme ilustrado na figura. O comprimento desse ciclo é 18, o que significa que, ao caminhar de acordo com a regra enunciada, ela vai retornar ao ponto *P* depois de percorrer 18 segmentos. Então, ao percorrer 1000 segmentos, ela vai andar 55 ciclos e mais 10 segmentos, pois 1000 = 18 × 55 + 10. Ao andar mais 10 segmentos, depois de completar o último ciclo, ela vai estar no ponto *E*.



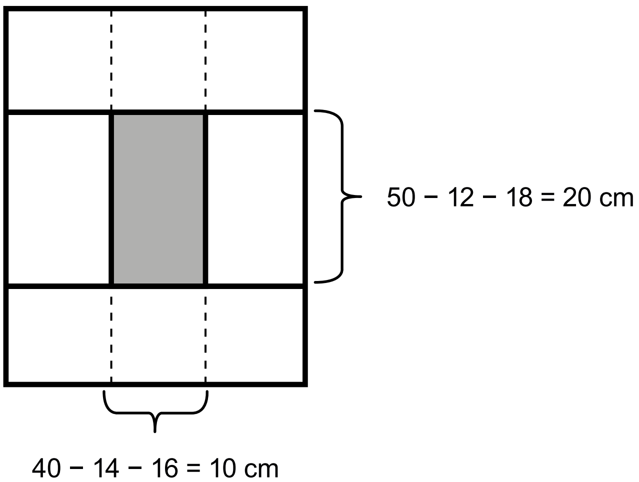

---

## QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA B

**Solução:** Observemos a figura ao lado.



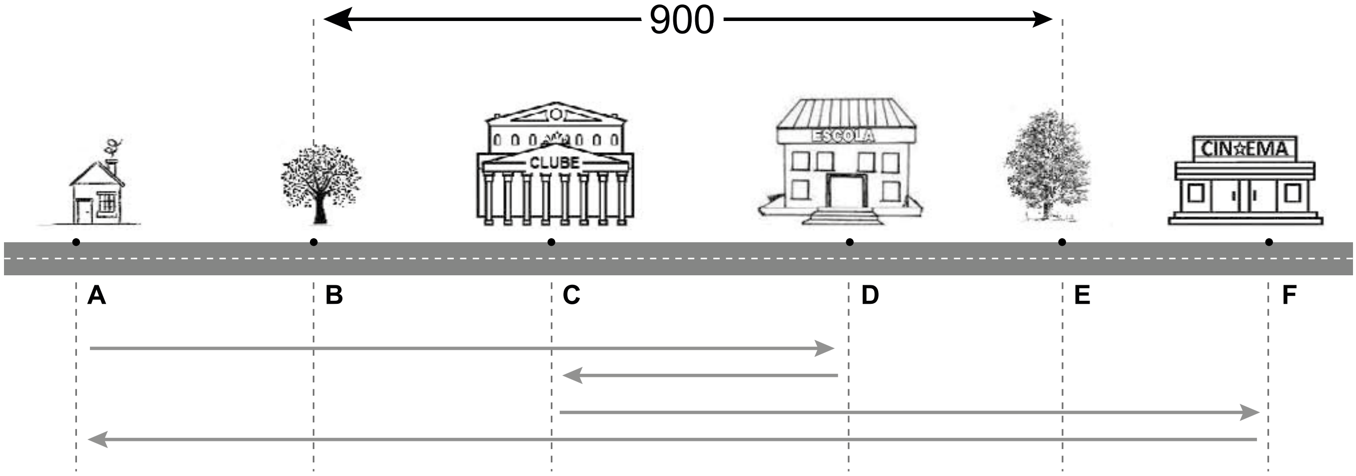

Como os lados da folha menor são paralelos aos lados da folha maior, a soma dos comprimentos dos segmentos azuis é igual à diferença entre os comprimentos dos lados horizontais da folha branca e da folha cinza, ou seja, é igual a 70 − 40 = 30 cm; analogamente, a soma dos comprimentos dos segmentos vermelhos é igual a 80 − 50 = 30 cm. Desse modo, ao dobrarmos a folha branca pelas linhas pontilhadas, obteremos a figura abaixo, em que o retângulo cinza tem dimensões horizontal 40 − 30 = 10 cm e vertical 50 − 30 = 20 cm; sua área é, então, 200 cm².




Observe que a posição da folha cinza sobre a branca não é importante, desde que as margens vertical e horizontal das folhas mantenham-se respectivamente paralelas, ou seja, as distâncias 12 cm e 14 cm não são relevantes; de fato, mudando-as, a área da região cinza não coberta, após a dobra, continua a mesma.

## QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA D

**Solução:** O caminho percorrido por Miguel está indicado em azul na figura abaixo (AD + DC + CF + FA). Como AB = BC, pois B é ponto médio de AC, e DE = EF, pois E é ponto médio de DF, então, o caminho percorrido por Miguel mede AD + DC + CF + FA = (AB + BC + CD) + DC + (CD + DE + EF) + (FE + ED + DC + CB + BA) =
= (BC + BC + CD) + DC + (CD + DE + ED) + (DE + ED + DC + CB + BC) =
= 4 × BC + 4 × CD + 4 × DE = 4 × (BC + CD + DE) = 4 × BE = 4 × 900 = 3600 m.




---

## QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA C

**Solução:** Temos três meninas: Ana, Cláudia e Fabiana, e dois meninos: Joaquim e Pedro e as condições:

- I) havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
- II) Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
- III) uma menina se escondeu sozinha;
- IV) Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
- V) o menino pernambucano estava na casa da árvore.

De acordo com a afirmação II), Pedro nasceu em São Paulo e, de acordo com a afirmação V), o menino pernambucano estava na casa da árvore. Portanto, Joaquim estava na casa da árvore.

Como Pedro e Fabiana se esconderam juntos, e como Joaquim estava na casa da árvore, Pedro e Fabiana não podiam estar na casa da árvore, pois, nesse caso, teríamos três crianças na casa da árvore, o que contradiria a afirmação I). A outra criança na casa da árvore deve ser ou Ana ou Cláudia.

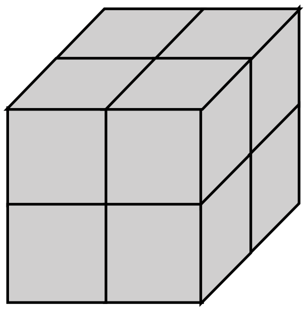
Como uma menina se escondeu sozinha (afirmação III)) e Ana não estava sozinha (afirmação IV)), Ana estava na casa da árvore e Cláudia, sozinha.

Concluímos que Ana e Joaquim estavam escondidos na casa da árvore.

## QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA C

**Solução:** Observando a planificação, vemos que a menor soma possível para três faces vizinhas de um pequeno dado é 1 + 2 + 4 = 7 e, juntando adequadamente 8 dados na posição em que essas faces com soma mínima formem as faces do cubo grande, concluímos que a menor soma possível dos 24 números que aparecem nas faces do cubo grande é 8 × 7 = 56.

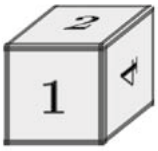
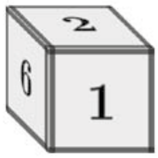
Mais detalhadamente, ao juntar os oito dados idênticos, formamos um cubo maior, como na figura ao lado, e em cada face desse cubo maior aparecem quatro números. Portanto, nas seis faces desse cubo maior aparecem 6 × 4 = 24 números. Por outro lado, cada vértice do cubo maior corresponde a um dos oito vértices do dado e cada vértice do dado tem três de suas faces concorrendo nesse vértice. Assim, os 24 números que aparecem nas seis faces do cubo maior são provenientes de faces comuns dos dados, faces essas que ficaram visíveis após a montagem, incluindo a que fica apoiada sobre a mesa. Logo, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado é igual a oito vezes a menor soma possível para as três faces comuns de um vértice de um dado.



Ao montar o dado a partir de sua planificação observamos que as faces opostas serão

2 e 5,   1 e 3,   6 e 4

Observamos também que as faces comuns aos vértices do dado serão:

- 1, 2 e 4 (soma 7)  ou 1, 2 e 6 (soma 9) 
- 2, 3 e 4 (soma 9)  ou 2, 3 e 6 (soma 11) 
- 3, 4 e 5 (soma 12)  ou 3, 5 e 6 (soma 14) 
- 1, 4 e 5 (soma 10)  ou 1, 5 e 6 (soma 12) 

Assim, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado será

8 × 7 = 56.

## QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA C

**Solução:** Cada menina tem um menino ou uma menina à sua direita. Portanto, das duas primeiras informações dadas podemos concluir que há um total de 7 + 9 = 16 meninas. Da terceira informação podemos concluir que 1 − (2/5) = 3/5 dos meninos têm uma menina à sua esquerda, ou seja, 3/5 dos meninos representa o total de meninos com um menino à sua direita (9). Portanto, há um total de (5/3) × 9 = 15 meninos. Finalmente, podemos concluir que o grupo inteiro tem 16 + 15 = 31 integrantes. Um esboço de como a roda pode ter sido formada é o seguinte:

---

## QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA C

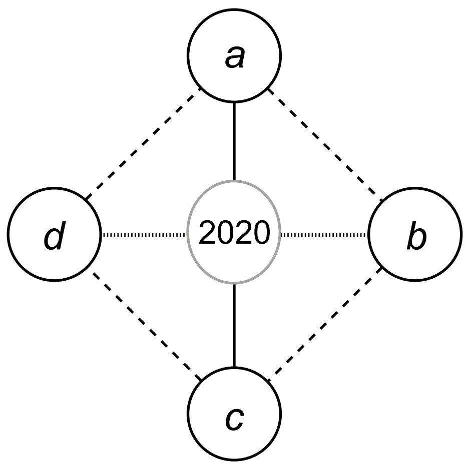
**Solução:** Como a soma dos números dos 4 círculos brancos será igual à soma dos números dos círculos ligados pela linha horizontal, segue que a soma dos números dos círculos brancos ligados pela linha vertical será 2020. De modo semelhante, a soma dos números dos círculos brancos ligados pela linha horizontal será 2020. Assim, a soma total dos números escritos por Priscila nos 4 círculos é 2020 + 2020 = 4040.

Outra solução, utilizando-se rudimentos de álgebra:

$a + b + c + d = a + 2020 + c$, logo, $b + d = 2020$

$a + b + c + d = b + 2020 + d$, logo, $a + b = 2020$

Assim, $a + b + c + d = 2020 + 2020 = 4040$.



## QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA B

**Solução:** Como Fábio pegou o quádruplo do número de maçãs de sua irmã e, mesmo assim, pegou menos maçãs do que Edson, que pegou o dobro do número de maçãs de sua irmã, concluímos que a irmã de Edson pegou mais do que o dobro do número de maçãs do que a irmã de Fábio. Logo, a irmã de Edson só pode ser Carla, que pegou três maçãs, enquanto a de Fábio é Ana, que pegou uma maçã. Portanto, a irmã de Diogo é Bete; logo, Diogo pegou 2 maçãs (o mesmo que Bete), Edson pegou 6 (o dobro de Carla) e Fábio pegou 4 (o quádruplo de Ana). Portanto, os três pegaram ao todo 2 + 6 + 4 = 12 maçãs.

| Ana 1 maçã | Bete 2 maçãs | Carla 3 maçãs | Total de maçãs que os irmãos homens pegaram |
|---|---|---|---|
| Diogo é irmão, 1 maçã | Edson é irmão, 4 maçãs | Fábio é irmão, 12 maçãs | 17 |
| Diogo é irmão, 1 maçã | Fábio é irmão, 8 maçãs | Edson é irmão, 6 maçãs | 15 |
| Edson é irmão, 2 maçãs | Diogo é irmão, 2 maçãs | Fábio é irmão, 12 maçãs | 16 |
| Edson é irmão, 2 maçãs | Fábio é irmão, 8 maçãs | Diogo é irmão, 3 maçãs | 13 |
| Fábio é irmão, 4 maçãs | Diogo é irmão, 2 maçãs | Edson é irmão, 6 maçãs | 12 |
| Fábio é irmão, 4 maçãs | Edson é irmão, 4 maçãs | Diogo é irmão, 3 maçãs | 11 |

Dentre essas 6 possibilidades, somente a penúltima satisfaz o enunciado (Fábio pegou menos maçãs do que Edson).

## QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA B

**Solução:** Para que o resultado final seja 78, o número antes de apertar a última tecla (A), deve ser 78X, em que X denota o algarismo das unidades. O número 78X também deve ser múltiplo de 3 pois anteriormente foi apertada a tecla T, que multiplicou o número por 3. Portanto, X só pode ser 0, 3, 6 ou 9. Observe.

| T | A | T | A | Resultado final |
|---|---|---|---|---|
| | | 260 | 780 | = 78 |
| | | 261 | 783 | |
| | | 262 | 786 | |
| | | 263 | 789 | |

Analogamente, devemos novamente acrescentar algarismos das unidades que tornem os números múltiplos de 3.

Assim,

| T | A | T | A | Resultado final |
|---|---|---|---|---|
| •<br>•<br>• | 260**1**<br>260**4**<br>260**7** | 260 | 780 | = 78 |
| •<br>•<br>• | 261**0**<br>261**3**<br>261**6**<br>261**9** | 261 | 783 | |
| •<br>•<br>• | 262**2**<br>262**5**<br>262**8** | 262 | 786 | |
| •<br>•<br>• | 263**1**<br>263**4**<br>263**7** | 263 | 789 | |

Logo, são 13 possíveis números que Joaquim poderá iniciar na calculadora.