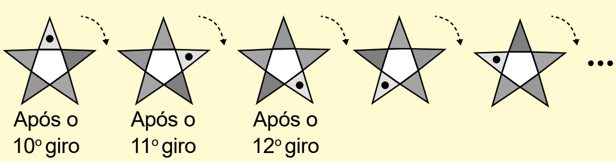
Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA A

Solução: A diferença entre as alturas do cachorro e do gato é 32 – 20 = 12 cm; logo, o cachorro mede 12 cm a mais do que o gato.

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA C

Solução: A cada 5 giros a estrelinha volta à sua posição original, com a ponta amarela para cima; assim, depois do décimo segundo giro ela estará como na posição que estava após o segundo giro, com a ponta azul para cima.



QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA A

Solução: Os números que aparecem nas alternativas são, em ordem crescente, 98, 100, 102, 104 e 106. Um desses cinco números deve ser a média aritmética dos outros quatro, pois é ¼ da soma dos demais e, portanto, deve ocupar a posição central dessa lista de números. De fato,

$$(98 + 100 + 104 + 106) \div 4 = 408 \div 4 = 102$$

Poderíamos também testar todas as possibilidades:

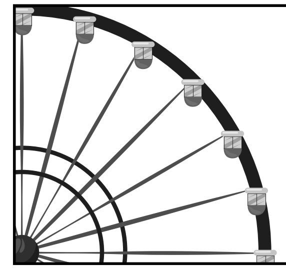
$$\frac{98+100+102+104}{4} = 101, \quad \frac{98+100+102+106}{4} = 101{,}5\,, \quad \frac{98+100+104+106}{4} = 102,$$
$$\frac{98+102+104+106}{4} = 102{,}5 \text{ e } \frac{100+102+104+106}{4} = 103.$$

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA C

Solução: Paulo comprou 28 comprimidos, em caixas com quantidades de 8 ou de 12 comprimidos cada. A única forma de Paulo fazer essa compra é com uma caixa de 12 comprimidos e duas caixas com 8 comprimidos. Logo, ele gastou 1 × 40 = 40 reais na caixa com 12 comprimidos mais 2 × 25 = 50 reais nas duas caixas com 8 comprimidos, totalizando 40 + 50 = 90 reais gastos nessa compra.

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA C

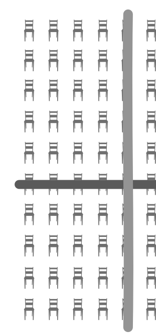
Solução: A figura representa um quadrante (um quarto) da circunferência na qual estão localizadas as cabines igualmente espaçadas. No interior do quadrante contamos 5 cabines e nos dois limites do quadrante vemos que também há cabines, vistas parcialmente. Portanto, o número total de cabines da roda gigante é igual a 4 x 5 = 20 no interior dos quadrantes e mais 4 cabines que ficam sobre os lados dos quadrantes, totalizando 20 + 4 = 24 cabines.



QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA A

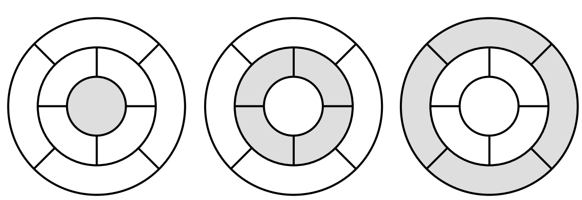
Solução: Depois de retirada uma fileira inteira, foi retirada de cada fileira restante uma cadeira na quinta posição. Como foram retiradas 9 cadeiras nessa posição, concluímos que depois da retirada de uma fileira inteira sobraram 9 fileiras e cada fileira, depois de retirada a cadeira na quinta posição, ficou com 6 – 1 = 5 cadeiras. Logo, sobraram 9 x 5 = 45 cadeiras.

Na figura, a representação de um possível arranjo das cadeiras. Na horizontal, uma possível linha suprimida e, em seguida, a coluna formada pelas quintas cadeiras das fileiras, também suprimida.



QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA A

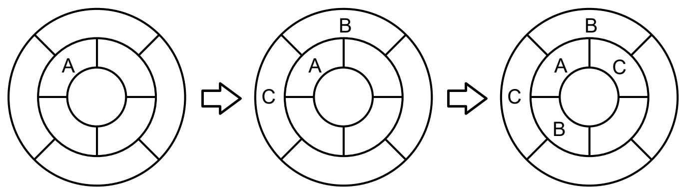
Solução: Podemos decompor a figura em três partes: uma parte central formada por uma única região, uma parte intermediária formada por quatro regiões, e uma parte externa também formada por quatro regiões.



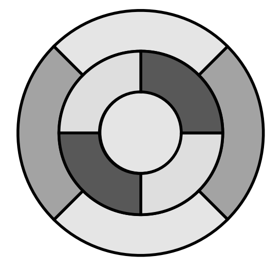
Para pintar a parte interna precisamos de uma cor. Depois, para pintar a parte intermediária precisamos de pelo menos mais duas cores diferentes da cor usada na parte interna, pintando as regiões opostas e não vizinhas nessa parte intermediária com a mesma cor. Por último, para pintar a parte externa precisamos também de pelo menos duas cores diferentes das cores usadas na parte intermediária, também pintando as regiões opostas e não vizinhas nessa parte externa com a mesma cor. Porém, uma dessas duas cores da parte externa pode ser igual à cor usada na parte central. Logo Felipe vai precisar de pelo menos 1 + 2 + 1 = 4 cores diferentes para pintar a figura; assim, é possível pintar a figura de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes somente com 4 cores, como descrito.

Outra solução:

Vamos supor que seja possível colorir utilizando apenas três cores, que vamos chamar de A, B e C. Existem regiões da figura que possuem 5 vizinhos. Suponha que uma dessas regiões tenha a cor A, como indicado abaixo. Como regiões vizinhas devem ter cores distintas, então ao colorir as outras regiões temos a seguinte configuração:



Nesse caso, a região central necessariamente deve ter uma cor distinta de A, B e C. Por esse motivo, é impossível colorir com apenas 3 cores. Com 4 cores é possível e a configuração ao lado mostra uma maneira.



QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA E

Solução: Como havia 4 pizzas e cada um comeu $\frac{2}{3}$ de uma pizza (sobrou 0), devemos somar várias parcelas de $\frac{2}{3}$ ao número 0 até obter 4. A quantidade de parcelas será a quantidade de amigos que comeram pizza.

$$\mathbf{0+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0+6\times\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4}$$

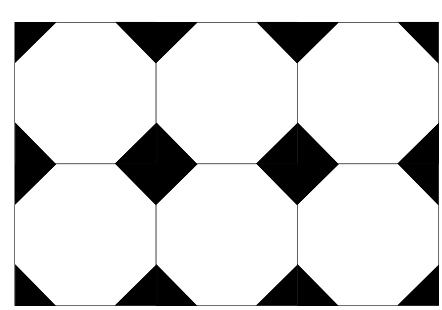
Logo, 6 amigos comeram a pizza.

Outra solução: Vamos considerar que cada pizza tem três grandes pedaços, desse modo, 4 pizzas produzem 4 x 3 = 12 grandes pedaços. Cada amigo comeu dois pedaços; portanto, eram 12 ÷ 2 = 6 amigos.

Outra solução: Basta dividir 4 por 2/3, que é o mesmo que multiplicar 4 por 3/2, resultando em 6.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA A

Solução: Como o ladrilho é quadrado de lado 1 m, precisamos de 20 x 30 = 600 ladrilhos para cobrir o piso.



Observe inicialmente a situação mais simples com apenas 6 ladrilhos:

Temos 2 quadrados pretos, ou seja, só os encontros de quatro vértices formam os quadrados pretos que são (2 – 1) x (3 – 1) = 2. Situação análoga vale para qualquer número de linhas e colunas.

Para o nosso problema com 20 x 30 ladrilhos, temos
(20 – 1) x (30 – 1) = 551 quadrados pretos.

Outra solução: Podemos pensar que 20 x 30 ladrilhos determinam um quadriculado com 21 x 31 = 651 pontos. Devemos descontar todos os pontos do bordo desse quadriculado, pois eles não são vértices de 4 ladrilhos necessários para formar quadrados pretos. Os pontos do bordo totalizam 2 x 21 + 2 x 29 = 100 pontos. Logo, são formados 651 – 100 = 551 quadrados pretos.

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA E

Solução: Em uma conta de divisão temos o dividendo (numerador), o divisor (denominador) e o quociente (resultado). Como o divisor é formado por dois algarismos, sua dezena deve ser “1” ou “2”, pois com os algarismos de 1 a 5 não é possível outra dezena para uma divisão de resto 0. Lembre-se que o dividendo é o produto do divisor pelo quociente.

Agora observe que se o divisor for 12, teremos os múltiplos 24, 36, 48, 60... não é possível com os algarismos de 1 a 5.

Se o divisor for 13 teremos 26, 39, 52, 65, ... e encontramos uma solução, pois 52 dividido por 13 é 4.

Agora, pela tabela a seguir, podemos notar que esta é a única possibilidade.

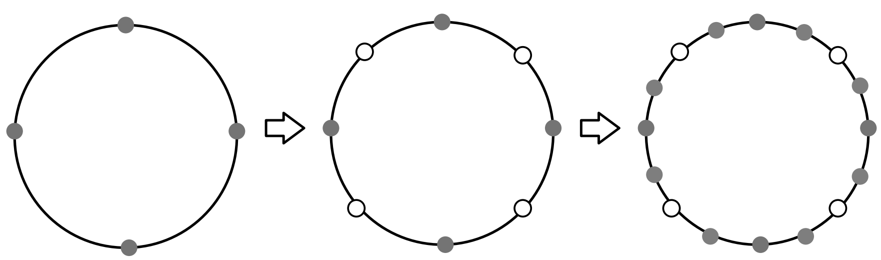
Divisor	Dividendo de resto zero			
14	28	42	56	...
15	30	45	60	...
21	42	63	...	
23	45	69	...	
24	48	72	...	
25	50	75	...	

Outra solução: coloque 1 no quociente, veja que é impossível continuar, pois divisor e dividendo ficarão iguais. A seguir, coloque 2 e também veja que é impossível atender ao enunciado, o mesmo ocorre com 3 e com 5. Entretanto, colocando 4 no quociente, chegamos facilmente à única solução 52 ÷ 13 = 4.

QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA B

Solução: De acordo com o enunciado, os pontos azuis e brancos estão sempre alternados e aparecem em igual número. Se Alexandra pretende pintar agora um ponto verde a cada dois pontos consecutivos de cores diferentes, então ela vai pintar o dobro do número de pontos azuis (ou brancos).

O exemplo a seguir é feito com apenas quatro pontos azuis, mas ilustra bem esse procedimento.

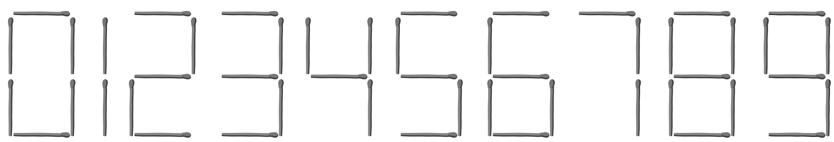


Se partirmos de 506 pontos azuis, chegaremos a 1012 pontos verdes.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA C

Solução: Vamos contar primeiramente quantos palitos cada um dos algarismos utiliza

Algarismo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Palitos utilizados	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6



O algarismo que utiliza o menor número de palitos é o 1, que utiliza só 2 palitos, desse modo, o número de quatro algarismos que utiliza o menor número de palitos é o número 1111, que utiliza 2 x 4 = 8 palitos.

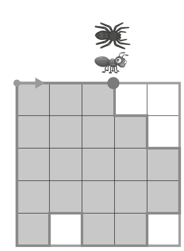
O próximo algarismo que utiliza o menor número de palitos é o 7, que utiliza 3 palitos. Ao trocar um algarismo 1 por um algarismo 7 em 1111 obtemos números de quatro algarismos que utilizam 9 palitos, que são os seguintes: 1117, 1171, 1711 e 7111.

Para conseguir um número de quatro algarismos utilizando exatamente 10 palitos temos duas opções. Uma delas é utilizar dois algarismos 1 (isso utiliza 2 x 2 = 4 palitos) e dois algarismos 7 (isso usa 2 x 3 = 6 palitos) a outra é utilizar três algarismos 1 (isso utiliza 2 x 3 = 6 palitos) e um algarismo 4 (isso usa 1 x 4 = 4 palitos). Podemos formar então os números 1177, 1717, 1771, 7117, 7171 e 7711 e também os números 1114, 1141, 1411 e 4111.

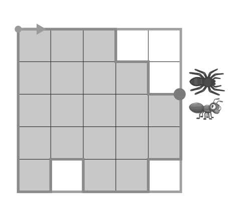
Resumindo, com 8 palitos, só o 1111; com 9 palitos: 1117, 1171, 1711 e 7111; com 10 palitos 1177, 1717, 1771, 7117, 7171, 7711, 1114, 1141, 1411 e 4111. No total, são 15 números.

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA D

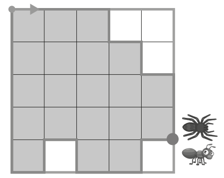
Solução: A formiga e a aranha começam a caminhar juntas e permanecem desta forma até chegarem ao quarto quadradinho da malha, destacado na imagem a seguir.



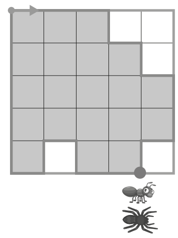
A partir desse ponto, elas andam separadas quatro lados de quadradinho da malha cada uma e se reencontram no ponto destacado a seguir.



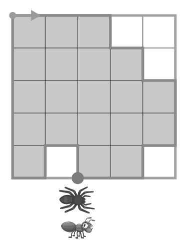
Em seguida, elas caminham juntas mais dois lados de quadradinho da malha e se separam no ponto destacado a seguir.



A partir desse ponto, elas andam separadas mais dois lados de quadradinho da malha cada uma e se reencontram no ponto destacado a seguir.



Depois, elas percorrem juntas mais dois quadradinhos da malha, chegando no ponto destacado a seguir.

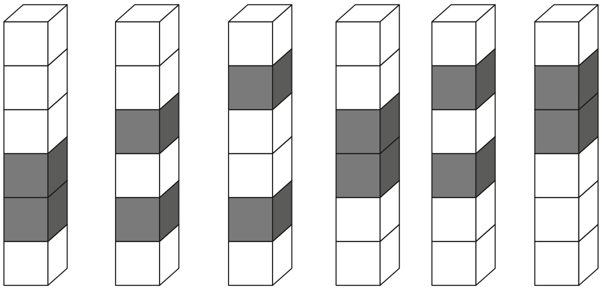


A partir desse ponto, elas não andam mais juntas: enquanto a formiga vai direto para o próximo ponto na borda do quadriculado, a aranha percorre três lados de quadradinho antes de chegar a esse ponto.

Portanto, são 7 lados de quadradinho que elas percorrem juntas, num total de 7 minutos.

QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA A

Solução: Considere as posições dos cubos na pilha, de baixo para cima, como da 1ª até a 6ª. Há 6 possibilidades de posições para os cubos vermelhos: 2ª e 3ª; 2ª e 4ª; 2ª e 5ª; 3ª e 4ª; 3ª e 5ª; 4ª e 5ª, como ilustrado a seguir.



Depois de decidir onde colocar os cubos vermelhos, em alguma das opções de posições listadas acima, sobram quatro posições para os cubos verdes e amarelos. Essas posições podem ser analisadas em conjunto. Veja que há, também, 6 maneiras diferentes de organizar os cubos verdes e amarelos nas quatro posições restantes.

Verde	Verde	Verde	Amarelo	Amarelo	Amarelo
Verde	Amarelo	Amarelo	Verde	Verde	Amarelo
Amarelo	Verde	Amarelo	Verde	Amarelo	Verde
Amarelo	Amarelo	Verde	Amarelo	Verde	Verde

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, Laura pode fazer 6 x 6 = 36 pilhas diferentes com os cubos.

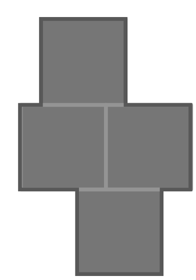
QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA B

Solução: Observe que a soma dos quatros números resultantes é 1 + 2 + 6 + 9 = 18. Isso significa que João retirou um total 42 – 18 = 24 da soma dos números. Como o mesmo número foi retirado quatro vezes, esse número é 24 ÷ 4 = 6.

Outra solução, usando rudimentos de álgebra: sejam a, b, c e d os números escolhidos por João e x o número subtraído de cada parcela.

$a + b + c + d = 42$, $a - x = 1$, $b - x = 2$, $c - x = 6$, $d - x = 9$. Somando ambos os membros das quatro últimas equações, obtemos $a + b + c + d - 4x = 18$, ou seja, $42 - 4x = 18$ e, portanto, $x = (24 \div 4) = 6$.

QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA A



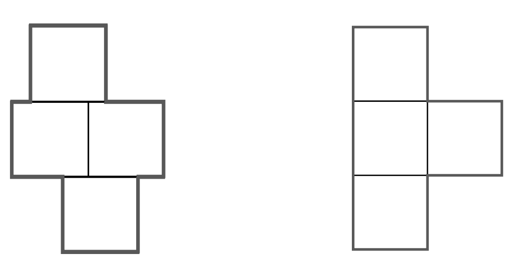
Solução: Note que o perímetro de cada quadrado é 3 × 4 = 12. Portanto a soma dos perímetros é 12 × 4 = 48. Por outro lado, o perímetro da figura não é 48, pois há três segmentos que são lados compartilhados de dois quadrados e são internos à figura. Veja os segmentos destacados em verde na figura.

Na vertical, lados de dois quadrados são compartilhados. Na horizontal, além dos lados de dois quadrados, a soma dos outros pedaços compartilhados corresponde aos lados de outros dois quadrados. No total, ficaram compartilhados, como indicado pela linha verde, um tamanho igual a 18 cm, correspondentes a seis lados de um quadrado.

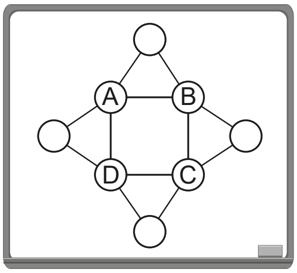
Assim, o perímetro da figura é 48 – 3 × 3 × 2 = 30 cm.

Outra solução: As duas figuras abaixo têm o mesmo perímetro.

A figura da direita tem perímetro igual a 10 vezes o lado do quadrado, ou seja 10 x 3 = 30 cm.



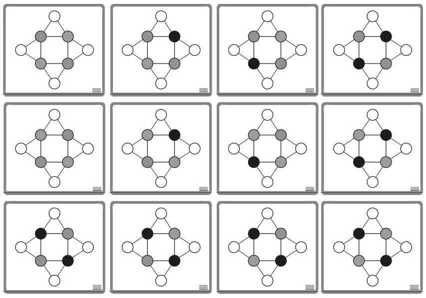
QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA D



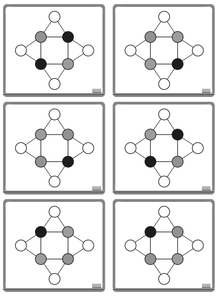
Solução: Perceba que ao escolhermos as cores dos círculos dos vértices do quadrado, as cores dos outros círculos ficam completamente determinadas, pois só podem assumir a terceira cor que não aparece nos círculos ligados a elas. Temos 3 escolhas possíveis para a cor do círculo A e sobram 2 para a escolha da cor do círculo B.

Temos agora dois casos a considerar:

1) A e C possuem a mesma cor e assim podemos escolher a cor de D com como qualquer cor diferente de A. O total de pinturas com essa configuração é 3 × 2 × 2 = 12.

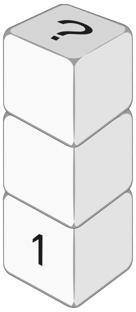


2) A e C possuem cores diferentes. Como C não pode ter a cor de A, então só resta uma escolha para C. Uma vez que A e C possuem cores diferentes, resta apenas uma cor para D. Nesse caso, temos 3 × 2 × 1 = 6 escolhas.



Portanto, há 12 + 6 = 18 colorações possíveis.

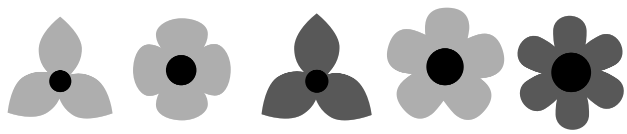
QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA A



Solução: A soma de faces opostas é sempre 7. Assim, se somarmos a face inferior da pilha (em contato com o chão) com sua oposta, as duas faces opostas (inferior e superior) do dado intermediário e a face superior da pilha ecom sua face oposta temos 7 + 7 + 7 = 21. Mas a soma de cada par de faces em contato é 5, assim, a soma dessas quatro faces em contato entre si é 5 + 5 = 10, fazendo com que a soma da face inferior da pilha com a face superior da pilha seja 11. As únicas possibilidades são: face inferior 5 e face superior 6 ou face inferior 6 e face superior 5. Mas como estamos vendo o 1 no dado mais baixo, do lado oposto está o 6 e concluímos que na face inferior só pode estar o 5. Finalmente, a face superior é o número 6.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA A

Solução: Temos cinco flores, que podem ter três, quatro, cinco ou seis pétalas, que podem ser da cor laranja (as quais chamaremos de flores laranjas) ou roxo (as quais chamaremos de flores roxas).



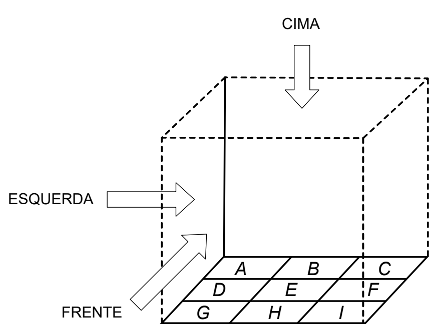
Bia diz que ela e Carla sabem as cores das flores que ganharão, mas não sabem quantas pétalas elas têm. Em princípio as duas flores podem ser: duas flores laranjas, duas flores roxas, uma flor laranja e uma flor roxa.

Ana responde que sabe quantas pétalas tem sua flor, mas não sabe a cor. Isso indica que a flor de Ana tem três pétalas, pois se tivesse quatro, cinco ou seis pétalas ela saberia exatamente que flor iria ganhar.

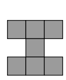
A partir dessa conversa Carla descobre que flor vai ganhar. Note que se as cores das flores de Bia e Carla fossem laranjas seria impossível determinar qual flor Ana iria ganhar. Por exemplo, elas poderiam ter recebido as flores de quatro e cinco pétalas. O mesmo acontece se as flores fossem uma laranja e uma roxa. Por exemplo, elas poderiam ter recebido uma flor de cinco pétalas (laranja) e uma de seis pétalas (roxa). Como Carla foi capaz de deduzir a cor da flor que Ana irá ganhar, concluímos que Bia e Carla irão ganhar duas flores roxas, o que inclui uma flor de três pétalas, necessariamente. A conclusão é que Ana ganhará uma flor laranja de três pétalas.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA C

Solução: Iremos reconstruir o sólido a partir das vistas. Para isso, vamos imaginar que o sólido está montado sobre um tabuleiro e registraremos quantos cubinhos estamos empilhando em cada quadrado dele, como indicam as figuras abaixo.

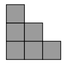


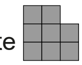
A	*B*	*C*
D	*E*	*F*
G	*H*	*I*

Pela vista de cima , podemos inferir que ele tem a distribuição:

A	*B*	*C*
0	*E*	0
G	*H*	*I*

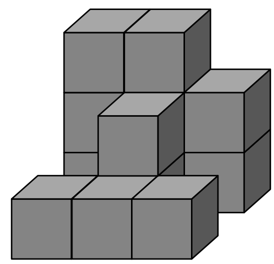
pois não há cubos nas posições *D* e *F*.

Pela vista da esquerda  , apenas a primeira linha pode ter 3 cubinhos empilhados, mas não sabemos ainda se estão em *A*, em *B* ou em *C*.

Isso é decidido olhando a vista da frente  . Concluímos que temos *A* = *B* = 3.

Pela vista de cima, para todos os quadradinhos da última linha, temos que ter pelo menos 1 cubinho em cada posição e, pela vista da esquerda, não podemos ter mais que 1. Portanto, *G* = *H* = *I* = 1. Analisando a vista da esquerda, no meio dela vemos apenas 2 cubinhos, e isso só pode ocorrer se *E* = 2. Finalmente, pela vista de frente, como *I* = 1, devemos ter *C* = 2. Logo,a distribuição completa é

3	3	2
0	2	0
1	1	1



Assim, o total de cubinhos é 3 + 3 + 2 + 0 + 2 + 0 + 1 + 1 + 1 = 13.