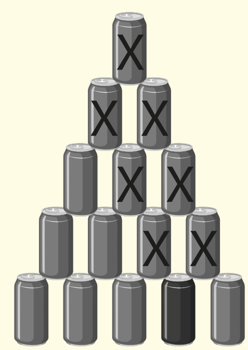
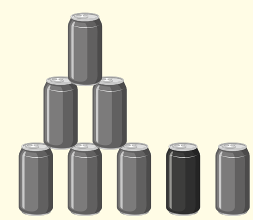
18ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP-IMPA
Somando novos talentos para o Brasil

Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA C

Solução: Para Joana retirar uma lata da pilha, ela deve, antes, retirar todas as outras latas que se apoiam na primeira, sempre que houver latas apoiadas. Há duas latas apoiadas na lata azul, as quais, por sua vez, são apoio de outras duas latas, e assim por diante até se chegar à lata do topo da pilha. Note que, apesar de a lata azul estar na camada mais inferior da pilha, nem todas as latas das camadas superiores precisam ser retiradas, pois não se apoiam na lata azul, nem em uma lata que se apoia na azul. Por isso, as latas marcadas com um **X** devem ser removidas antes de se remover a lata azul.





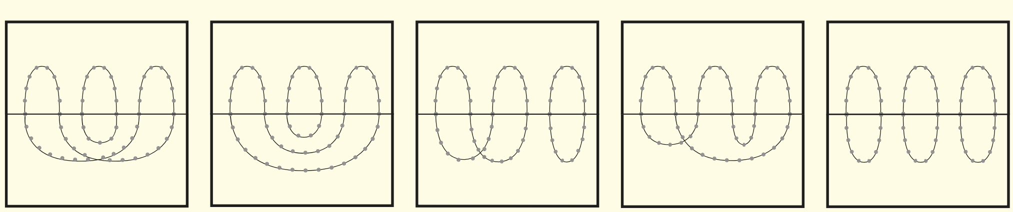
Removidas as latas marcadas com um **X**, a pilha fica como na segunda figura acima.

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA A

Solução: A compra de José custou 80,00 + 65,00 = 145,00 reais e a compra de Luiz custou 90,00 + 60,00 = 150,00 reais. Então, Luís gastou 5,00 reais a mais do que José.

QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA D

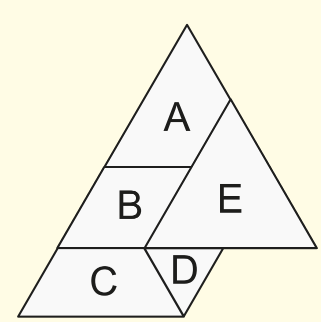
Solução: Diana colocou somente um colar sobre a mesa, por isso a parte que falta para a sua foto, ao ser juntada com a parte apresentada inicialmente, deve formar apenas 1 linha fechada - não importa se há sobreposições na linha do colar. Consequentemente, todas as vezes em que as partes, juntas, formam mais de uma linha fechada, não se tem a foto de Diana.



QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA B

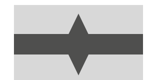
Solução: Vamos fazer o problema de trás para frente, identificando qual foi o quinto e último cartão colado, depois o quarto cartão colado e, então, descobrir qual foi o terceiro cartão colado.

O cartão E está sobre todos os outros cartões; portanto, ele foi o quinto e último cartão colado. Depois vemos que o cartão A está colado em cima do cartão B. Perceba que o cartão B está colado sobre os cartões C e D; logo, C e D foram os cartões iniciais na colagem. Note que o cartão D foi colado de cabeça para baixo.



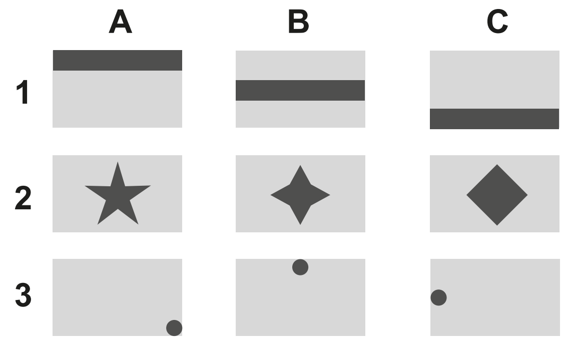
QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA C

Solução: Na figura do enunciado, a faixa no meio indica que foi utilizado o carimbo 1B.



As pontas para cima e para baixo, indicam o uso do carimbo 2B, com parte do desenho ficando sobreposto pela faixa. Os demais carimbos da linha 2 produziriam formas diferentes aparecendo fora da faixa.

A bolinha do carimbo 3C é a única da linha 3 que fica sobreposta à faixa, as demais apareceriam no desenho. Logo, os carimbos utilizados foram 1B, 2B e 3C.



QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA E

Solução: Para determinar a ordem dos cinco números escritos nas alternativas da questão, é preciso representar todos eles em uma mesma forma, ou na forma de fração, ou na forma decimal com vírgula.

Em representação decimal com vírgula, temos

(A) $\frac{1}{6} = 0{,}166666\ldots$ (B) $\frac{6}{10} = 0{,}6$ (C) $\frac{16}{100} = 0{,}16$ (D) $0{,}06$ (E) $0{,}166$

e a ordem crescente deles é $0{,}06 < 0{,}16 < \mathbf{0{,}166} < 0{,}166666\ldots < 0{,}6$.

Em representação na forma de fração, temos

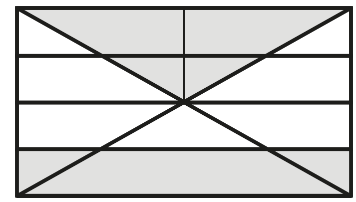
(A) $\frac{1}{6} = \frac{1\times 1000}{6\times 1000} = \frac{1000}{6000}$ (B) $\frac{6}{10} = \frac{6\times 600}{10\times 600} = \frac{3600}{6000}$ (C) $\frac{16}{100} = \frac{16\ \ 60}{100\times 60} = \frac{960}{6000}$

(D) $0{,}06 = \frac{6}{100} = \frac{6\times 60}{100\times 60} = \frac{360}{6000}$ (E) $0{,}166 = \frac{166}{1000} = \frac{166\times 6}{1000\times 6} = \frac{996}{6000}$

e a ordem crescente deles é $\frac{360}{6000} < \frac{960}{6000} < \mathbf{\frac{996}{6000}} < \frac{1000}{6000} < \frac{3600}{6000}$.

O terceiro deles é $0{,}166 = \frac{996}{6000}$.

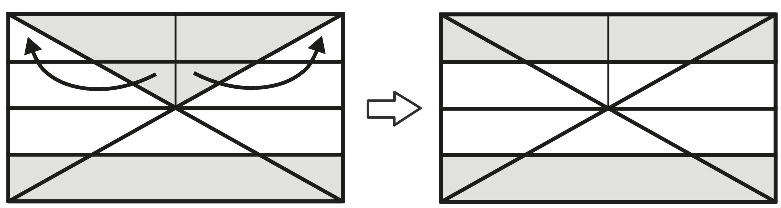
QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA C



Solução: Podemos, a partir do centro do retângulo, dividir verticalmente as duas faixas superiores em dois retângulos iguais. A área em amarelo na parte superior é igual à área de cada um dos retângulos resultantes dessa divisão feita nas duas faixas superiores e, portanto, igual a 1/4 da área do retângulo maior.

Por outro lado, a área da faixa inferior em amarelo também é igual a 1/4 da área do retângulo maior. Consequentemente, a área da região em amarelo é igual a $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ da área do retângulo maior.

Poderíamos, também, transferir dois pequenos triângulos, como na figura abaixo, para confirmar que a área total amarela é metade da área do retângulo maior:



QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA A

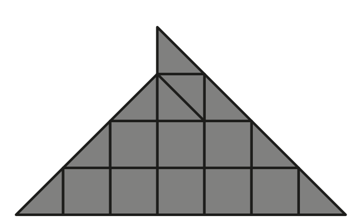
Solução: Pedro gastou 4 x R$ 5,50 mais 5 x R$ 2,20 e Paulo gastou 1,4 x R$ 5,00. Para que ambos tenham contribuído com o mesmo valor, Paulo deve dar a Pedro metade da diferença do gasto total feito por ambos, isto é, Paulo deve dar a Pedro

(4 x 5,50 + 5 x 2,20 – 1,4 x 5,00) ÷ 2 reais, ou seja, (4 x 5,5 + 5 x 2,2 – 1,4 x 5) ÷ 2

Note que Pedro gastou R$ 33,00 e Paulo gastou R$ 7,00. Paulo deve dar a Pedro (33,00 – 7,00) ÷ 2 = 13,00 reais.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA B

Solução: Se utilizarmos um quadrado como unidade de medida de área, vemos que 8 quadrados e 9 triângulos têm área total igual a 8 + 9 x (1/2) = 12,5. Assim, descartamos a alternativa (E). Nas alternativas (A), (C) e (D) aparecem apenas 7 quadrados, mas deveríamos utilizar todos os 8 quadrados; logo, essas alternativas também devem ser descartadas. Resta o tabuleiro da alternativa (B), o qual pode ser coberto por todas as 17 peças, como no exemplo ao lado.



QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA C

Solução: Primeiramente, (3/4) < (4/5) < 1. Se a, b e c denotam as quantidades de figurinhas que Antônio, Benedito e Carlos possuem, então (3/4)b < (4/5)b < b. Logo, quem possui mais figurinhas é Benedito e quem possui menos é Carlos.

Outra solução: De acordo com o enunciado, o número de figurinhas de Antônio é igual a $\frac{4}{5}$ do número de figurinhas de Benedito. Assim, para cada conjunto de 5 figurinhas que Benedito possui, Antônio possui um conjunto de 4 figurinhas.

Já o número de figurinhas de Carlos é igual a $\frac{3}{4}$ do número de figurinhas de Benedito. Assim, para cada conjunto de 4 figurinhas que Benedito possui, Carlos possui um conjunto de 3 figurinhas.

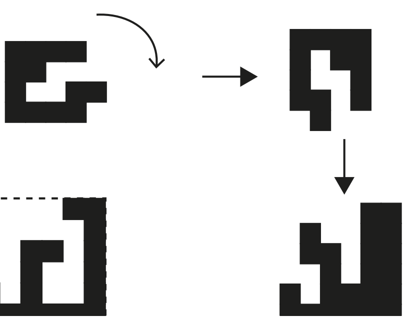
Logo, considerando conjuntos com 20 figurinhas (menor múltiplo comum entre 4 e 5), para cada conjunto de $20 = 5 \times 4$ figurinhas que Benedito possui, Antônio possui um conjunto de $16 = 4 \times 4$ figurinhas e, para cada conjunto de $20 = 5 \times 4$ figurinhas que Benedito possui, Carlos possui um conjunto de $15 = 5 \times 3$ figurinhas.

Portanto, para cada conjunto de 20 figurinhas de Benedito, Antônio possui um conjunto de 16 figurinhas e Carlos possui um conjunto de 15.

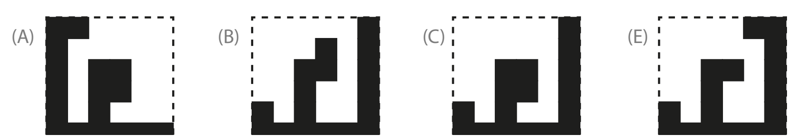
Logo, Benedito é o que tem mais figurinhas e Carlos é o que tem menos figurinhas.

QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA D

Solução: Rotacionando a figura do enunciado metade de meia volta para a direita, observa-se que ela encaixa na figura apresentada na letra D.



As demais alternativas não gozam dessa propriedade.



As alternativas (A), (C) e (E) não têm uma parte como esta: . A figura da alternativa (B) possui uma reentrância do tipo

que não está presente na peça descrita no enunciado.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA A

Solução: Como há 3 domingos pares, entre eles deve haver 2 domingos ímpares e o mês em questão deve ter 5 domingos. Para que isso aconteça, ou o dia 1 é domingo, ou o dia 2, ou o dia 3. Mas, se 1 e 3 forem domingos, não há a possibilidade de 3 domingos caírem em dias pares. Logo, o primeiro domingo cai no dia 2 e os outros domingos pares ocorrem nos dias 16 e 30.

ABRIL

D	S	T	Q	Q	S	S
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Outra solução: O primeiro dia de um mês pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7. Com a informação adicional de que, em um certo mês, três domingos caem em dias pares, com certeza dia 2 desse mês só pode ser domingo (nesse caso, os dias 2, 16 e 30 seriam domingos). Não há outra possibilidade; de fato,

Se o primeiro domingo fosse dia 1, somente 8 = 1 + 7 e 22 = 1 + 21 seriam domingos pares.

Se o primeiro domingo fosse dia 3, somente 10 = 3 + 7 e 24 = 3 + 21 seriam domingos pares.

Se o primeiro domingo fosse dia 4, somente 4 e 18 = 4 + 14 seriam domingos pares.

Se o primeiro domingo fosse dia 5, somente 12 = 5 + 7 e 26 = 5 + 21 seriam domingos pares.

Se o primeiro domingo fosse dia 6, somente 6 e 20 = 6 + 14 seriam domingos pares.

Se o primeiro domingo fosse dia 7, somente 14 = 7 + 7 e 28 = 7 + 21 seriam domingos pares.

QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA A

Solução: Basta contar o número de fatias e observar se o resultado é um múltiplo de 9.

Se todas as cinco pizzas tivessem sido cortadas em 6 fatias, teríamos um total de 6 x 5 = 30 fatias, o que não permitiria a divisão exata entre os 9 amigos.

Se quatro pizzas tivessem sido cortadas em 6 e uma em 8, teríamos 6 x 4 + 8 x 1 = 32 pedaços, divisão novamente incorreta.

Se três pizzas tivessem sido cortadas em 6 e duas em 8, teríamos 6 x 3 + 2 x 8 = 34 pedaços, divisão novamente incorreta.

Se duas pizzas tivessem sido cortadas em 6 e três em 8, teríamos 6 x 2 + 3 x 8 = 36 pedaços. Nesse caso, cada amigo teria comido 4 pedaços, pois 9 x 4 = 36.

Se uma pizza tivesse sido cortada em 6 e quatro em 8, teríamos 6 x 1 + 4 x 8 = 38 pedaços, divisão novamente incorreta.

Finalmente, a possibilidade de termos as cinco pizzas com 8 fatias resultariam em 40 pedaços, impossível de dividir exatamente por 9.

Logo, os 9 amigos comeram 4 fatias cada. Note que eles não comeram a mesma quantidade de pizza, mas sim a mesma quantidade de fatias.

Outra solução:

Sejam x o número de pizzas cortadas em 6 fatias e y o número de pizzas cortadas em 8 fatias. O enunciado diz que $x + y = 5$, o que nos dá as possbilidades $(x,y) = (5,0),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(0,5)$. Além disso, o número total de fatias em que as pizzas foram cortadas é $6x + 8y$; como essas foram igualmente divididas entre os 9 amigos, segue que $6x + 8y$ deve ser um múltiplo de 9. Substituindo os possíveis valores de (x,y) nessa expressão, vemos que o único múltiplo de 9 que aparece é $2 \times 6 + 3 \times 8 = 36$, ou seja, duas pizzas cortadas em 6 fatias e três pizzas em 8 fatias. Segue que cada um dos amigos comeu $(36/9) = 4$ fatias.

Uma maneira de tornar essa solução mais rápida é escrever o número de fatias como $9z$ e reescrever $6x + 8y = 9z$ como

$8y = 9z - 6x = 3(3x - 2z)$.

Isso mostra que 8y deve ser um múltiplo de 3, que só acontece para $y = 3$ e chegamos à solução (2,3), como acima.

QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA B

Solução: Sabemos inicialmente que em cinco dos meses do ano o total de aniversariantes da turma da professora Cláudia é 18, pois em dois desses meses o número de aniversariantes é 6 e em três outros meses esse número é 2; calculando, 2 x 6 + 3 x 2 = 18.

Nos restantes sete meses, a cada mês o número de aniversariantes do mês fica entre 3 e 5; logo, o total *N* de aniversariantes nesse período ficará entre 21 e 35, ou seja, $21 \leq N \leq 35$.

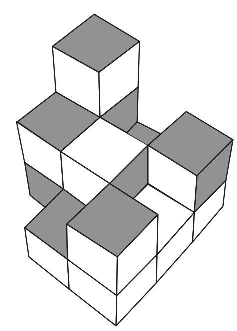
Juntando o resultado das duas afirmações, ou seja, somando 18 a cada um dos termos da desigualdade,

$$21 + 18 \leq N + 18 \leq 35 + 18$$

teremos que o número de aniversariantes da turma da professora Cláudia ficará entre 39 e 53 e, dentre as alternativas, a única possível é $N = 45$.

QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA E

Solução: Na camada inferior, há 4 cubos que podem ter todas as suas faces azuis. Dois deles possuem uma de suas faces visíveis e dois deles estão completamente escondidos. Na camada intermediária há somente um cubo que pode ter suas faces todas azuis. O cubo do topo não pode ter todas as suas faces azuis. Logo, há 5 cubos que podem ter todas as suas faces azuis.

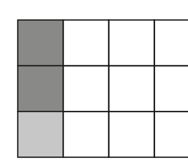


Podemos também descontar dos 14 cubos os 9 que mostram ao menos uma face branca (14 – 9 = 5).

QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA B

Solução: Das pessoas que têm bicicleta (ou seja, 1/4 da população) temos que 2/3 tem apenas uma. Logo, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ é a fração da população que tem apenas uma bicicleta.

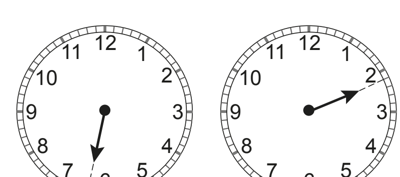
Outra solução:



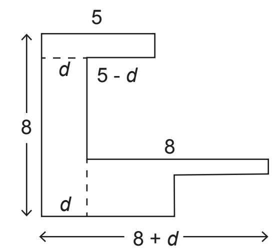
Observe a figura ao lado formada por 12 quadradinhos que representam a população da cidade. Como (1/4) = (3/12) pintamos 3 quadradinhos de 12. Em seguida, queremos 2/3 desses quadradinhos pintados e temos 2 quadradinhos em 12. Logo, (2/12) = (1/6) é a fração da população que tem apenas uma bicicleta.

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA D

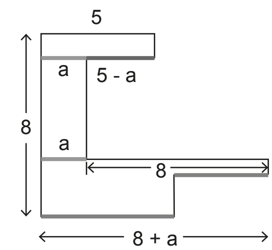
Solução: O ponteiro das horas funciona normalmente. Portanto, na ilustração vemos que são 6 horas e alguma coisa. Entre duas horas consecutivas existem 4 traços e 5 espaços consecutivos, logo o avanço do ponteiro das horas de um tracinho para o seguinte representa 1/5 de uma hora, ou seja, 12 minutos. Como Paulinho saiu de casa no 32º minuto, ele saiu às 6 horas e 2 x 12 = 24 minutos. Ele voltou quando o ponteiro das horas estava sobre o 11º minuto, ou seja, ele voltou às 2 horas e 12 minutos da tarde ou, mais comumente, 14 horas e 12 minutos. Para achar a diferença entre esses dois horários, podemos considerar 14 horas e 12 minutos como 13 horas e 60 + 12 = 72 minutos. Temos 13 h 72 min – 6 h 24 min = 7 h 48 min, tempo em que Paulinho esteve fora de casa.



QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA E



Solução: Chame de d a distância indicada na figura. Observe que verticalmente a formiga andou 8 + 8 = 16 cm e horizontalmente 5 + (5 – d) + 8 + 8 + d = 10 + 16 = 26 cm. No total, ela andou 16 + 26 = 42 cm.



Outra solução: As duas linhas verdes juntas têm comprimento igual a 8 + a, sendo a o comprimento da linha marrom. A linha azul tem comprimento igual a 5 cm menos o comprimento da linha mesma linha marrom, ou seja, 5 – a. Assim, a soma dos comprimentos de todas as linhas horizontais da figura é 5 + (5 – a) + 8 + 8 + a = 26 cm. A soma dos comprimentos das três linhas verticais à direita é igual ao comprimento da linha vertical à esquerda, portanto a soma dos comprimentos de todas as linhas verticais é 8 + 8 = 16 cm. A formiguinha deu a volta completa na figura; logo, ela percorreu 26 + 16 = 42 cm.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA B

Solução: Como a única criança que mentiu é a que tem 8 anos, a criança que diz que não tem 8 anos está mentindo, pois qualquer uma das outras duas que disser que não tem 8 anos está dizendo a verdade. Como as outras duas estão falando a verdade, a que diz que não tem 9 anos tem 7 anos e a que diz que não tem 7 anos tem 9 anos. Assim, a mais velha é a que diz que não tem 7 anos e a mais nova é a que diz que não tem 9 anos.

Outra solução: Analisemos a criança que diz “Não é 8”. Há só duas possibilidades: ou ela mente ou fala a verdade.

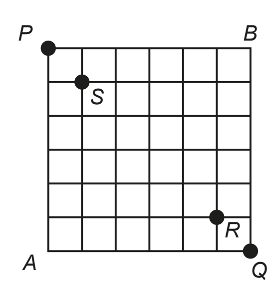
1) Se ela diz a verdade, sua idade só pode ser 7 ou 9 anos.

Se for 7, alguém deve ter 8 anos. Suponha que seja a criança de cabelo preto. Nesse caso a de cabelo preto estaria dizendo a verdade, mas sua idade é 8 anos, uma contradição, pois quem tem 8 anos mente. Analogamente, se a criança de 8 anos for a de cabelo loiro, ela estaria dizendo a verdade, novamente uma contradição.

Do mesmo modo, se a idade de quem diz “Não é 8” for 9 anos, uma das outras duas crianças teria 8 anos e estaria falando a verdade, contradição.

2) Se ela mente, então tem 8 anos. Como só há uma pessoa mentirosa, as outras duas falam a verdade; a de cabelo preto tem 9 anos e a de cabelo loiro tem 7.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA E



Solução: Vamos nomear os quatro pontos indicados no enunciado de *P*, *Q*, *R* e *S*, conforme a figura.

Observe que só há um único caminho que vai de *A* até *B* passando por *P*. O mesmo ocorre com o ponto *Q*. Assim, até agora contamos dois caminhos.

Para ir de *A* até *R* há 6 caminhos: cada um desses seis caminhos é determinado pela escolha da coluna na qual a formiga realiza um movimento para cima. De *R* para *B* há seis caminhos. Portanto, há 6 x 6 = 36 caminhos que saem de *A* até *B* passando por *R*.

O mesmo ocorre para o ponto *S*; ou seja, há 36 caminhos saindo de *A* até *B* passando por *S*.

Portanto, o total de caminhos é igual a 36 + 36 + 1 + 1 = 74.