QUESTÃO 1
ALTERNATIVA E
Usando a comutatividade da multiplicação, podemos escrever

$$1000\times 20{,}12\times 2{,}012\times 100 = 1000\times 2{,}012\times 00\times 20{,}12 = 2012\times 2012 = (2012)^2.$$

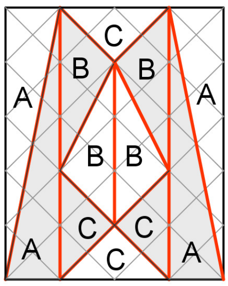
QUESTÃO 2
ALTERNATIVA C
Observe que para obter o primeiro retângulo foi necessário escrever quatro vezes o número 2012. Em seguida, para cada novo retângulo bastou escrever mais uma vez o número 2012; assim, Carlinhos escreveu $4+2011=2015$ vezes o número 2012 Portanto, a soma de todos os algarismos escritos é $2015\times(2+0+1+2)=2015\times 5=10075$.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA A
Basta verificar que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial. Como $2012=8\times 251+4$, após o 2012º giro o quadrado cinza terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à alternativa A.

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA B
O número 0,48 pode ser escrito na forma de uma fração decimal como $\frac{48}{100}$. Simplificando esta fração de modo que o numerador e o denominador sejam os menores possíveis, obtemos $\frac{48}{100}=\frac{12}{25}$. Assim, os dois menores números inteiros positivos que produzem o quociente 0,48 são os números 12 e 25, que representam, respectivamente, o menor número possível de meninas e de meninos da turma; logo o menor número possível de alunos é $12+25=37$.

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA D
Como 55% de 60% é igual a $\frac{55}{100}+\frac{60}{100}=\frac{11}{20}+\frac{3}{5}=\frac{33}{100}$, concluímos que a percentagem de bolas brancas que foram retiradas, em relação ao total de bolas na caixa, é de 33%. Na caixa sobraram $100-60=40\%$ das bolas, que podem ser brancas ou pretas. O percentual de bolas brancas na caixa é o maior possível se todas as bolas que ficaram na caixa são brancas. Logo, esse percentual é igual a $33+40=73\%$.

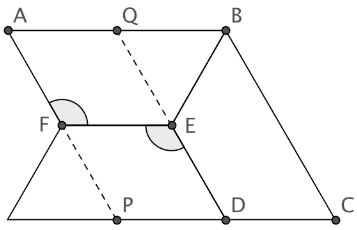
QUESTÃO 6
ALTERNATIVA A
Dividimos a figura em regiões indicadas pelas letras A, B e C, como mostrado ao lado. Regiões com a mesma letra são idênticas, e tanto a parte branca quanto a parte cinzenta consistem de duas regiões A, duas regiões B e duas regiões C; segue que a área da parte cinzenta é igual à área da parte branca. Cada uma dessas áreas é então a metade da área total do retângulo, que é $4\times 5=20$ cm^2. Logo a área da parte cinzenta é 10 cm^2.



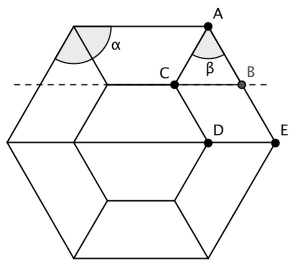
QUESTÃO 7
ALTERNATIVA D

Na soma $29+32+35+39+41=176$, cada um dos cinco números que Ana escreveu aparece quatro vezes; logo a soma desses números é $176 \div 4 = 44$. O menor número que Ana escreveu é então $44-41=3$ e o maior é $44-29=15$ (os outros números são 5, 9 e 12). A soma procurada é então $15+3=18$.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA C



A figura ao lado mostra uma parte do hexágono formada por três trapézios. Prolongamos os segmentos *AF* e *DE* para obter os pontos *P* e *Q*, como indicado. Como os trapézios são idênticos, os ângulos assinalados são iguais; segue que *AP* e *QD* são paralelos. Como *PD* e *EF*, sendo bases de um trapézio, também são paralelos, segue que *PDEF* é um paralelogramo; em particular, temos $PF = DE$. Da igualdade dos trapézios temos $AF = DE = EF$ e concluímos que $AP = 2EF$. Notamos agora que *APCB* também é um paralelogramo; logo $BC = AP = 2EF$ e como $BC = 10$ segue que $EF = 5$.



Outra solução é a seguinte. Como os trapézios são idênticos, o hexágono que eles formam é regular. Como o ângulo interno α desse hexágono mede 120°, o ângulo β mede $\dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. Logo o triângulo *ABC* é equilátero; como $AC = CD$ temos $BC = CD$ e segue que o paralelogramo *BCDE* é um losango. Assim, *B* é o ponto médio de *AE* e então $AC = BE = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{1}{2} \times 10 = 5$ cm.

QUESTÃO 9
ALTERNATIVA D

O primeiro triângulo da sequência é formado por três palitos. Para $n \geq 2$, o triângulo que ocupa a posição *n* na sequência é formado acrescentando *n* triângulos iguais ao primeiro ao triângulo precedente. Logo, o total de palitos utilizados para construir o triângulo que ocupa a posição *n* na sequência é $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + 3n = 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \dfrac{3n(n+1)}{2}$. Para saber em qual triângulo foram usados 135 palitos, devemos resolver a equação $\dfrac{3n(n+1)}{2} = 135$, ou seja, $n(n+1) = 90$. Por inspeção, vemos que a raiz positiva dessa equação é $n = 9$; logo o triângulo que estamos procurando é o nono triângulo da sequência, cujo lado tem 9 palitos.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA B

Em notação decimal, o número de dois algarismos *AB* tem o valor $10A + B$. Temos então $A \times A + A = A^2 + A = 10A + B$ e segue que $A^2 - 9A = B$, ou seja, $A(A-9) = B$. Como *A* é o algarismo das dezenas de um número de dois algarismos, temos $1 \leq A \leq 9$; se $A < 9$ então $A - 9$ será negativo e *B* também será negativo, o que não acontece pois $0 \leq B \leq 9$. Logo $A = 9$; segue que $B = 0$ e $B \times B + B = 0 \times 0 + 0 = 0 = B$.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA C

Vamos chamar de D a distância entre Pirajuba e Quixajuba. Qualquer que seja o combustível utilizado, temos $D = \textit{litros consumidos} \times \textit{quilômetros por litro}$. Isso mostra que as grandezas "litros consumidos" e "quilômetros por litro" são inversamente proporcionais (pois seu produto é constante). Desse modo, podemos escrever

$$\frac{\textit{litros consumidos na ida}}{\textit{litros consumidos na volta}} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Basta então achar uma fração equivalente a $\frac{5}{4}$ na qual a soma do numerador com o denominador seja 18. Essa fração é $\frac{10}{8}$; ou seja, João gastou 10 litros de álcool na ida e 8 litros de gasolina na volta. Logo a distância entre Pirajuba e Quixajuba é $12 \times 10 = 8 \times 15 = 120$ quilômetros.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA E

Vamos listar as posições das cartas fazendo embaralhamentos sucessivos:

- posição inicial: A2345
- após o 1º embaralhamento: 3A524
- após o 2º embaralhamento: 534A2
- após o 3º embaralhamento: 4523A
- após o 4º embaralhamento: 24A53
- após o 5º embaralhamento: A2345, a posição inicial

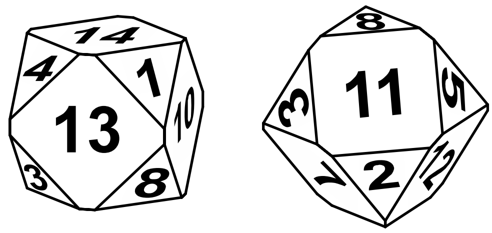
Assim, de 5 em 5 embaralhamentos retornamos à posição inicial. Como $2012 = 5 \times 402 + 2$, a posição das cartas após o 2012º embaralhamento é a mesma que a posição após o 2º embaralhamento, quando a primeira carta é a de número 5.

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA D

Vamos denotar as alturas de Ana, Bernardo, Célia e Danilo por a, b, c e d, respectivamente. O enunciado nos diz que $a - c = d - a$; logo $a = \frac{c+d}{2}$ está no ponto médio entre c e d, e como $c < d$ temos $c < a < d$. Temos também $b + d = a + c$, ou seja, $c - b = d - a$. Como $d - a > 0$, concluímos que $c > b$ e segue que $b < c < a < d$. Vamos agora às alternativas.

A) Falsa, pois $c < a$.
B) Falsa, pois como $b < c < a < d$ temos $d - b > a - c$.
C) Falsa, pois $b < c$.
D) Verdadeira, pois de $b + d = a + c$ segue $d - c = a - b$.
E) Falsa, pois $a < d$.

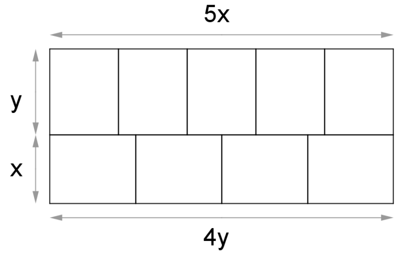
QUESTÃO 14
ALTERNATIVA E



Primeiro observamos que o sólido obtido depois dos cortes possui seis faces octogonais (de oito lados) e oito faces triangulares. Cada face octogonal é adjacente (isto é, tem uma aresta comum com) a três outras faces octogonais e oposta a outra face octogonal; além disso, cada face triangular é adjacente a três faces octogonais que são duas a duas adjacentes.

À esquerda vemos que a face octogonal 13 é adjacente às faces octogonais 14 e 10. À direita vemos que a face triangular 3 é adjacente às faces 7, 11 e 13; assim, as faces 11 e 7 também são adjacentes à face 13. Logo as quatro faces octogonais adjacentes à face 13 são as de números 7, 10, 11 e 14, e segue que a face oposta à face 13 é a de número 12.

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA D



Sejam x e y, respectivamente, as medidas do lado menor e do lado maior de um dos retângulos menores. As medidas dos dois lados do retângulo maior são então $x+y$ e $4x=5y$; em particular, temos $y=\frac{4}{5}x$. Como a área do retângulo maior é 720 cm^2, temos $5x(x+y)=5x\left(x+\frac{5}{4}x\right)=\frac{45}{4}x^2=720$. Logo $x=8$ e $y=10$; o perímetro de um dos retângulos menores é então $2\cdot(8+10)=36\,\text{cm}$.

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA C

Podemos pensar nos números naturais entre 0 e 999 como sequências de três algarismos de 000 até 999. Estamos interessados em contar as sequências em que aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3. Para fazer essa contagem, vamos chamar de *a* o número de sequências em que não aparece o algarismo 3. Essas sequências se dividem em dois tipos: aquelas em que não aparece o algarismo 2 e aquelas em que aparece pelo menos um algarismo 2; denotamos por *b* e *c*, respectivamente, o número dessas últimas sequências. Temos claramente $a=b+c$ e queremos calcular $c=a-b$; basta então calcular *a* e *b*. Mas é imediato que $a=9\times 9\times 9$ (não podemos usar o 3, logo sobram 9 algarismos) e $b=8\times 8\times 8$ (não podemos usar o 2 e o 3, logo sobram apenas 8 algarismos). Logo $c=9\times 9\times 9-8\times 8\times 8=729-512=217$.

$a=b+c:$	*sequências sem 3*	=	*sequências sem 3 e sem 2*	+	*sequências sem 3 e com 2*
$c=a-b:$	*sequências sem 3 e com 2*	=	*sequências sem 3*	−	*sequências sem 3 e sem 2*

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA B

Para simplificar, no parágrafo a seguir “azul” significa “bandeirinha azul” e analogamente para as outras cores.

Para que não haja azuis juntas, é necessário que entre duas azuis haja pelo menos uma bandeirinha de outra cor. Para isso, são necessárias pelo menos 24 bandeirinhas não azuis; como há exatamente $14+10=24$ bandeirinhas brancas e verdes, concluímos que a fila de bandeirinhas começa e termina com uma azul e que entre quaisquer duas azuis há exatamente uma branca ou uma verde. Em particular, as alternativas A) e C) são falsas.

Usando as letras A, B e V para as cores azul, branco e verde, a fila abaixo mostra que a alternativa D) é falsa:

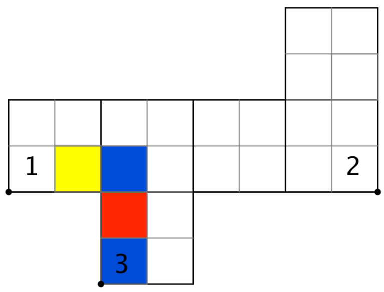
ABABABABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABAVABA

Vamos agora pensar em uma fila qualquer como uma sequência de blocos de duas letras dos tipos AB e AV, com uma letra A na extremidade direita. Pelo menos um bloco AB deve estar ao lado de um bloco AV, criando assim um bloco maior ABAV ou AVAB. Em qualquer dos casos, vemos uma sequência (BAV ou VAB) de três bandeirinhas de cores todas diferentes, o que mostra que a alternativa E) é falsa.

Finalmente, notamos que uma fila da Joana há 14 blocos AB e 10 blocos AV, além do A à direita. Com esses 10 blocos AV é possível separar no máximo 11 blocos AB uns dos outros; assim, há pelo menos dois blocos AB consecutivos, seguidos de uma letra A. Logo em qualquer fila da Joana há um bloco do tipo ABABA, ou seja, há pelo menos cinco bandeirinhas consecutivas nas quais não aparece a cor verde.

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA E

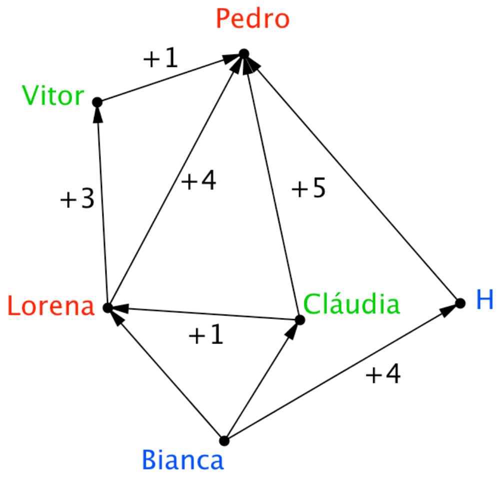
Vamos indicar o quadrado azul inferior da planificação com o número 3. Observamos que, após a construção do cubo, os quadrados indicados pelos números 1, 2 e 3 terão um vértice comum (destacado na figura), logo terão, dois a dois, um lado comum. Como o quadrado 1 já tem um lado comum com o quadrado amarelo e o quadrado 3 é azul, segue que ele é vermelho. O quadrado 2, tendo então lados comuns com os quadrados 1 e 3, é amarelo.



QUESTÃO 19
ALTERNATIVA A

Notamos primeiro que a soma dos números de 1 a 25 pode ser calculada de várias maneiras; por exemplo, observando que $1+25=2+24=\ldots=12+14=26$, vemos que essa soma é $12\times 26+13=325$. Desse modo, a soma dos números em uma linha, coluna ou diagonal é então $\frac{325}{5}=65$. As casas brancas do tabuleiro consistem de uma linha, de uma coluna e das duas diagonais, todas se cruzando na casa central; assim, ao somar os números dessa linha, dessa coluna e dessas diagonais o número da casa central aparecerá quatro vezes. Denotando por x o número da casa central e lembrando que a soma dos números das casas cinzentas é 104, temos então $4\times 65-3x=325-104$ e segue que $x=13$.

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA C



Vamos representar as informações do enunciado no diagrama ao lado. Nele, a letra H indica o único homem cujo nome não aparece no enunciado. A flecha que vai de Cláudia a Pedro, indicada com +5, quer dizer que Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, e analogamente para as outras flechas. As flechas que saem de Bianca para Lorena e Cláudia indicam que ambas compraram mais livros que Bianca. Mais abaixo vamos explicar as flechas que não correspondem a dados do enunciado.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e cada homem comprou 4 livros a mais que sua esposa, segue que Pedro não é o marido de Cláudia. Por outro lado, Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, que comprou mais livros que Bianca; logo Pedro não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Lorena. Indicamos essa conclusão no diagrama colocando os nomes de Pedro e Lorena em vermelho e marcando a flecha que os liga com +4.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e 4 livros a mais que Lorena, segue que Lorena comprou 1 livro a mais que Cláudia, o que nos dá a flecha que liga Cláudia a Lorena. As flechas que ligam Cláudia a Vítor passando por Lorena mostram que Vítor comprou 4 livros a mais que Cláudia; como Cláudia comprou mais livros que Bianca, segue que Vítor comprou pelo menos 5 livros a mais que Bianca. Logo Vítor não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Cláudia; indicamos essa conclusão colocando seus nomes em verde. Logo Bianca é a mulher de H; assim, ligamos esses dois por uma flecha com +4 e colocamos seus nomes em azul.

Notamos ainda que Pedro comprou pelo menos 6 livros a mais que Bianca; como H comprou 4 livros a mais que Bianca, segue que Pedro comprou mais livros que H. Finalmente, observamos que como Pedro comprou 4 livros a mais que Lorena e Vítor comprou 3 livros a mais que Lorena, segue que Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor, conforme indicado. Podemos agora analisar as alternativas:

A) Falsa, pois Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor.
B) Falsa, pois Pedro é o marido de Lorena.
C) Verdadeira, pois Pedro comprou mais livros que Vítor e que H.
D) Falsa, pois Lorena comprou um livro a mais que Cláudia.
E) Falsa, pois Vitor é marido de Cláudia.