

## Solução da prova da 1.ª Fase

### QUESTÃO 1

#### ALTERNATIVA E

A primeira mamadeira (na ilustração) marca 250 mL, enquanto a segunda marca 75 mL. Para saber quanto Zezé mamou, basta fazer a subtração  $250 - 75 = 175$ . Assim, Zezé mamou 175 mililitros.

### QUESTÃO 2

#### ALTERNATIVA A

Para determinar os giros a serem feitos, é preciso se colocar no papel do motorista. Os giros, como indicados na figura, são: inicialmente para a direita, depois para a esquerda e, finalmente, para a esquerda.

### QUESTÃO 3

#### ALTERNATIVA C

Devemos em primeiro lugar resolver as expressões entre parêntesis, seguindo a ordem de prioridade das operações. Essa ordem é a seguinte: fazer primeiramente as multiplicações e divisões para, a seguir, realizar as adições e subtrações. Assim,

a alternativa A) está correta pois,  $4 + (4 - 4) \times 4 = 4 + 0 \times 4 = 4 + 0 = 4$ .

a alternativa B) está correta pois,  $(4 \times 4 + 4) \div 4 = (16 + 4) \div 4 = 20 \div 4 = 5$ .

a alternativa C) está errada pois,  $4 + 4 \div 4 + 4 = 4 + 1 + 4 = 9 \neq 6$ .

a alternativa D) está correta pois,  $44 \div 4 - 4 = 11 - 4 = 7$ .

a alternativa E) está correta pois,  $4 + 4 + 4 - 4 = 8 + 4 - 4 = 12 - 4 = 8$ .

Uma interessante brincadeira é tentar escrever todos os números de 1 a 100 usando quatro números 4. Por exemplo, o número 6 pode ser escrito como  $(4 + 4) \div 4 + 4$ ; se ficar muito difícil, podemos permitir o uso de raízes quadradas, como em  $20 = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times 4 + 4$ , ou outros símbolos matemáticos, mas sempre utilizando quatro números 4.

### QUESTÃO 4

#### ALTERNATIVA C

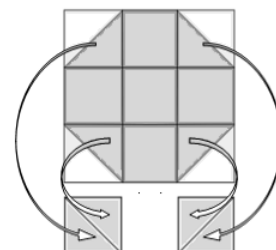
Por observação direta da ilustração, vemos que o edifício A tem 12 janelas na frente. Logo, tem 11 ou menos janelas atrás. O edifício B tem 10 janelas na frente. Logo, tem 11 ou mais janelas atrás. Como os dois prédios têm o mesmo número de janelas na parte de trás, concluímos que esse número só pode ser 11. Como nas laterais não há janelas, os dois edifícios juntos têm  $12 + 11 + 10 + 11 = 44$  janelas.

### QUESTÃO 5

#### ALTERNATIVA B

Como os vértices da figura destacada (um octógono) dividem os lados do quadrado em três partes iguais, podemos ligá-los de forma a obter um quadriculado que divide o quadrado em nove quadradinhos iguais. A figura cuja área conhecemos é formada por cinco desses quadradinhos e quatro triângulos, os quais são, cada um deles, metade de um quadradinho.

Reunindo esses quatro triângulos dois a dois, como na figura, teremos mais dois quadradinhos; portanto, o octógono, cuja área é  $28 \text{ cm}^2$ , é equivalente a  $5 + 2 = 7$  quadradinhos. A área de cada um dos quadradinhos é, portanto, igual a  $28 \div 7 = 4 \text{ cm}^2$ . Como o quadrado equivale a nove quadradinhos, sua área é  $9 \times 4 = 36 \text{ cm}^2$ .



### QUESTÃO 6

#### ALTERNATIVA E

Silvia terminou sua tarefa em 12 minutos (pois  $60 \div 5 = 12$ ), momento em que Renato fez 36 biscoitos (pois  $3 \times 12 = 36$ ); portanto, ele deverá fazer mais 24 biscoitos para completar sua tarefa.

### QUESTÃO 7

#### ALTERNATIVA E

Observemos que os três triângulos da Figura 2 são congruentes (portanto, têm mesma área). De fato, são três triângulos retângulos isósceles com os correspondentes lados de mesma medida (pode ser verificado facilmente no quadriculado). Consequentemente, a área pintada, que é exatamente a de um triângulo, corresponde à fração  $\frac{1}{3}$ .

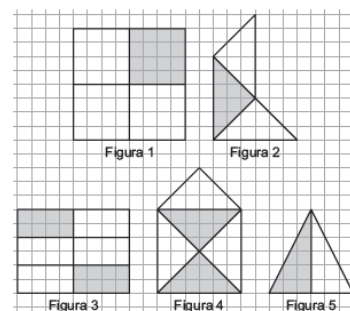
Os seis retângulos que constituem a Figura 3 são congruentes. Como a área pintada é formada por dois desses retângulos, segue que a área pintada na Figura 3 corresponde a  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  da área total da Figura 3.

Por outro lado, na Figura 4, observamos cinco triângulos congruentes, sendo que apenas dois estão pintados, os quais correspondem à fração  $\frac{2}{5}$ .

Finalmente, na Figura 5, temos um triângulo isósceles formado por dois triângulos retângulos congruentes, sendo que apenas um deles está pintado. Logo, a área pintada corresponde à fração  $\frac{1}{2}$ .

Como  $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} = \frac{2}{6} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ , a maior fração corresponde à área pintada na Figura 5, a saber,  $\frac{1}{2}$ .

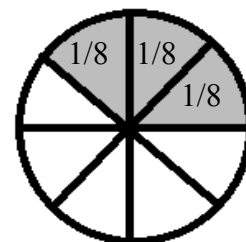
Esta questão serve para exemplificar que devemos ter muito cuidado ao comparar frações, pois, entre diferentes figuras, a fração numericamente maior pode não corresponder visualmente à maior área pintada.



### QUESTÃO 8

#### ALTERNATIVA D

Luísa comprou três pedaços do bolo que estava dividido em 8 partes iguais, e João comprou os 5 pedaços restantes. Como  $\frac{3}{8}$  do bolo custou R\$ 4,50, cada fatia (ou seja,  $\frac{1}{8}$  do bolo) custou R\$ 1,50. Portanto, João pagou  $5 \times \text{R\$ } 1,50 = \text{R\$ } 7,50$ .



### QUESTÃO 9

#### ALTERNATIVA A

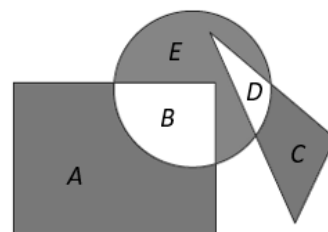
A nota média dos quatro alunos é dada pela soma das quatro notas dividida por 4. Logo, como a média é 7,0, a soma das quatro notas é  $4 \times 7 = 28$ .

Assim, a soma das cinco notas é  $28 + 8 = 36$ , o que nos fornece média  $36 \div 5 = 7,2$ .

**QUESTÃO 10**  
**ALTERNATIVA A**

Rotulamos as áreas como na figura ao lado. A soma das áreas das regiões azuis é  $A + C$ , e a área da região vermelha é  $E$ . Queremos calcular  $A + C - E$ . Como  $A + B$  é a área do retângulo,  $C + D$  é a área do triângulo e  $B + D + E$  é a área do círculo, temos:

$$A + C - E = (A + B) + (C + D) - (B + D + E) = 120 + 29 - 81 = 68 \text{ cm}^2.$$



Outra solução: A diferença pedida pode ser calculada por uma “balança que pesa áreas”, como na Figura 1; nela o prato esquerdo “pesa”  $81 \text{ cm}^2$  (círculo completo) e o prato direito pesa  $120 + 29 = 149 \text{ cm}^2$  (retângulo e triângulo completos); a diferença entre os pesos é  $149 - 81 = 68 \text{ cm}^2$ . O resultado dessa “pesagem” não muda quando retiramos áreas iguais (partes brancas  $B$  e  $D$ ) dos dois pratos, como na Figura 2. Logo, a diferença entre a soma das áreas azuis e a área vermelha é  $68 \text{ cm}^2$ .



Figura 1

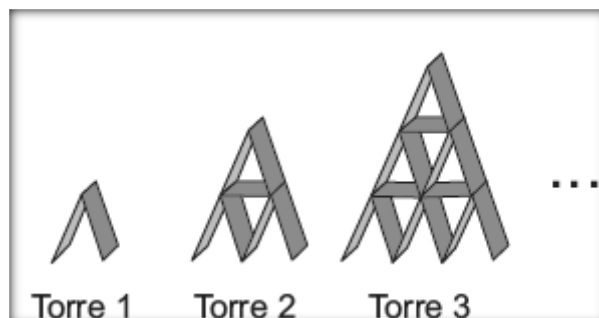


Figura 2

**QUESTÃO 11**  
**ALTERNATIVA C**

Basta observar que da Torre 1 para a Torre 2 foram acrescentados  $5 = 2 + 1 \times 3$  cartões. De fato, para construir a Torre 2 a partir da Torre 1, foram acrescentados dois novos cartões (em contato com a mesa) e, a seguir, no topo foram acrescentados mais 3 cartões. De modo análogo, para construir a Torre 3 a partir da Torre 2, foram acrescentados à Torre 2 mais  $8 = 2 + 2 \times 3$  cartões, ou seja, dois novos cartões em contato com a mesa e 2 grupos de três cartões acima deles. Continuando, da Torre 3 para a 4 devem ser acrescentados  $2 + 3 \times 3 = 11$  cartões e assim sucessivamente, sempre colocando 2 cartões novos em contato com a mesa e mais grupos de 3 cartões até completar a torre seguinte. Concluimos, desse modo, que da torre 10 para a torre 11 devem ser acrescentados  $2 + 10 \times 3 = 32$  cartões.

Observe que a Torre N+1 é obtida da Torre N acrescentando-se  $3N + 2$  cartões.



**QUESTÃO 12**  
**ALTERNATIVA D**

A fila de algarismos é construída colocando os números de 1 a 2018 lado a lado e, portanto, os números 1110, 1111 e 1112 são colocados nessa fila lado a lado, formando um bloco com o algarismo 1 de tamanho 7, como mostrado a seguir:

... 1110 1111111 2 ...  
                    *sete*

Esse é o maior bloco possível dessa fila com o algarismo 1, pois se existisse um outro bloco com o algarismo 1 de tamanho maior do que sete, esse bloco seria construído com o número 1111, já que a fila termina em 2018, mas o único bloco com o algarismo 1 que contém o número 1111 é o bloco de tamanho sete acima. De fato, para se obter repetições do algarismo 1 de tamanhos oito ou mais, teríamos que usar números com mais de cinco algarismos 1, que não são colocados na fila, pois são maiores do que 2018. Lembre-se de que na fila cada número aparece seguido de seu sucessor. Assim, o tamanho do maior bloco com algarismo 1 que ocorre nessa fila é sete.

### QUESTÃO 13

#### ALTERNATIVA B

Primeiramente, vamos observar que o quadrado do canto superior esquerdo deve ser preenchido com um número inferior a todos os demais, portanto, deve ser preenchido com o número 1. Por raciocínio idêntico, o quadrado do canto inferior direito deve ser preenchido com o número 6.

O número 2 obrigatoriamente precisa entrar em um dos dois quadrados nomeados com as letras **a** e **b** na figura acima. Abriremos o problema nestas duas hipóteses:

1	a	c
b	d	6

- a) O número 2 é colocado no quadrado **a**:

Neste caso, podemos preencher o quadrado **c** com qualquer um dos três números restantes (3, 4 ou 5) e os quadrados **b** e **d** ficarão determinados pelos dois outros números ainda não utilizados, escritos em ordem crescente. Desse modo, nesta primeira hipótese, há 3 maneiras de se preencherem os quadrados dentro das regras do enunciado.

1	2	c
b	d	6

- b) O número 2 é colocado no quadrado **b**:

Neste caso, o quadrado **a** precisa ser preenchido com o menor número que ainda não foi usado, o número 3. Então, só falta colocar o 4 no quadrado **c** ou no **d**. Desse modo, nessa segunda hipótese, há 2 maneiras de se preencherem os quadrados, dentro das regras do enunciado.

1	a	c
2	d	6

Juntando as duas hipóteses, há um total de  $3 + 2 = 5$  maneiras de se preencherem os seis quadrados. São as seguintes:

1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	3	4	1	3	5
4	5	6	3	5	6	3	4	6	2	5	6	2	4	6

### QUESTÃO 14

#### ALTERNATIVA B

Como o resultado da conta é 20000, e como cada letra representa um algarismo diferente, então,

- somando os algarismos das unidades teremos  $P + M = 10$ , ou seja,  $P$  e  $M$  são tais que na casa das unidades do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das dezenas teremos  $1 + E + B = 10$ , ou seja,  $E$  e  $B$  são tais que na casa das dezenas do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das centenas teremos  $1 + M + O = 10$ , ou seja,  $M$  e  $O$  são tais que na casa das centenas do resultado fica zero e vai um;
- somando os algarismos das unidades de milhar teremos  $1 + B = 10$ , ou seja,  $B$  é tal que na casa das unidades de milhar do resultado fica zero e vai um;
- e, finalmente, somando os algarismos das dezenas de milhar teremos  $1 + O = 2$ .

Logo,  $O = 2 - 1 = 1$ ,  $B = 10 - 1 = 9$ ,  $M = 10 - 1 - O = 8$ ,  $E = 10 - 1 - B = 0$  e  $P = 10 - M = 2$ . Assim, OBMEP representa o número 19802, OBM representa o número 198. A letra  $P$  representa o algarismo 2.

### QUESTÃO 15 ALTERNATIVA C

Quem comprar 72 rolos de papel na promoção 1 vai levar 12 rolos de graça; 6 saem de graça na promoção 2, 16 na promoção 3, 9 na promoção 4 e 10 na promoção 5. Logo, a promoção mais vantajosa é a promoção 3. Observe que a comparação ficou fácil, pois o mínimo múltiplo comum de 6, 12, 18, 24 e 36 é 72.

Outra solução: Admita que, sem qualquer promoção, um rolo avulso de papel higiênico custasse 1 real (isto não importa, basta que cada rolo unitário custasse o mesmo que os demais). Quanto gastaríamos para levar 72 rolos de papel higiênico aproveitando cada uma das promoções?

- Na Promoção 1, com R\$ 60,00 levaríamos 72 rolos. Isto pode ser visto da seguinte maneira: imagine que tivéssemos comprado 12 pacotes com 6 rolos em cada um; pagaríamos o preço de 5 rolos por um pacote, mas levaríamos, na compra de um pacote, 6 rolos. O custo nesta promoção seria, portanto,  $5,00 \times 12 = \text{R\$ } 60,00$  e, no total, levaríamos  $6 \times 12 = 72$  rolos. De modo análogo,
- na Promoção 2, com R\$ 66,00 levaríamos 72 rolos.
- na Promoção 3, com R\$ 56,00 levaríamos 72 rolos.
- na Promoção 4, com R\$ 63,00 levaríamos 72 rolos.
- na Promoção 5, com R\$ 62,00 levaríamos 72 rolos.

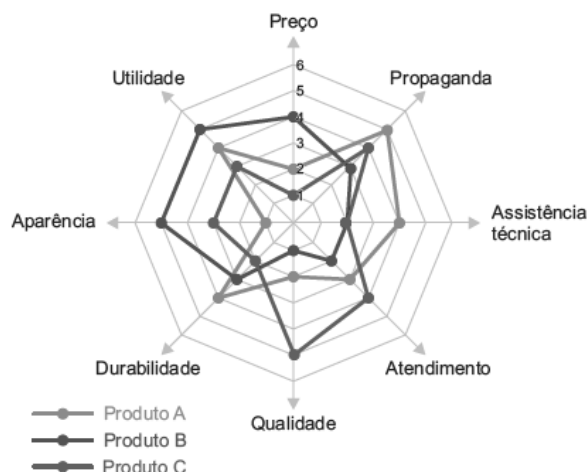
Desse modo, a promoção mais vantajosa é a 3.

Outra solução: Podemos também observar que, na promoção 1, cada rolo pago contribui com  $\frac{1}{5}$  para o rolo grátis (isto é, podemos pensar na razão  $\frac{\text{grátis}}{\text{pago}}$ ); as frações correspondentes nas promoções 2, 3, 4 e 5 são  $\frac{1}{11}$ ,  $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ ,  $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$  e  $\frac{5}{31}$ . A maior dessas frações é  $\frac{2}{7}$ , ou seja, a promoção 3 é a mais vantajosa.

### QUESTÃO 16 ALTERNATIVA E

Vamos analisar cada opção:

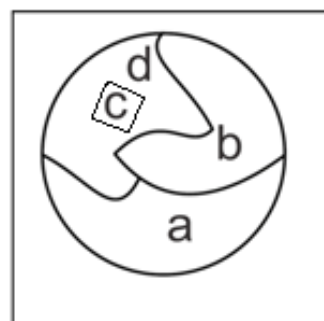
- A) **Falsa**, pois no item propaganda o produto A foi o melhor avaliado (recebeu nota 5 contra uma nota 3 do produto B).
- B) **Falsa**, pois o produto de maior utilidade foi o produto B (nota 5), mas o produto menos durável foi o produto C (nota 2).
- C) **Falsa**, pois o produto C obteve a maior pontuação apenas em 2 itens (qualidade e atendimento).
- D) **Falsa**, pois o produto C teve a melhor avaliação em qualidade (nota 5), mas foi o produto A que obteve a melhor avaliação em assistência técnica (nota 4).
- E) **Verdadeira**; de fato, o produto A obteve a maior nota em propaganda (nota 5), mas obteve a nota mais baixa em aparência (nota 1).



### QUESTÃO 17 ALTERNATIVA D

O círculo é composto de quatro regiões. Rotulamos as regiões como na figura. Se começarmos a pintar as regiões a partir da menor (c), teremos quatro cores para fazê-lo. A região em volta, (d), terá apenas três cores disponíveis. As duas outras regiões são vizinhas à região (d) e vizinhas entre si; portanto, a próxima região a ser pintada tem três cores disponíveis e a última, apenas duas, já que é vizinha de duas regiões. Pelo Princípio Multiplicativo, o número total de maneiras possíveis de pintar as regiões do círculo é, portanto,  $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ .

Observação: A ordem em que começamos a pintar pode ser outra, mas isso pode exigir mais cuidado. Por exemplo, podemos pintar a figura na seguinte ordem: a, c, b e d. Para (a), temos 4 possibilidades e precisamos dividir em casos. Para a região (c), depende de a cor ser igual ou não à de (a). Se for igual, o número total de possibilidades é  $4 \times 1 \times 3 \times 2 = 24$ , e se a cor de (a) for diferente da de (c), o número de possibilidades é  $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ . Assim, seguindo este procedimento, o número total de possibilidades é  $48 + 24 = 72$ .



### QUESTÃO 18 ALTERNATIVA B

A quantidade de produtos comprada multiplicada por 99 deve ser um número terminado em 71, pois Juca gastou R\$ 41,71 na loja. Logo, a quantidade de produtos comprada só pode ser 29, 129, 229, e assim por diante. A única maneira de ter um gasto de R\$ 41,71 ocorre com a compra de 29 produtos, pois as demais possibilidades superam esse valor.

Essa ideia, com explicação ligeiramente diferente, é apresentada abaixo:

O preço de qualquer produto da loja é um número inteiro de reais menos um centavo. Por exemplo, R\$ 3,99 = R\$ 4,00 – R\$ 0,01. Logo, para comprar uma certa quantidade de produtos, Juca pagou um número inteiro de reais (isto é, sem incluir centavos) menos a quantidade de produtos comprada multiplicada R\$ 0,01. Em outras palavras, se  $Q$  é a quantidade de produtos que Juca comprou,

$$41,71 + Q \times 0,01$$

deve ser um número inteiro. Logo,  $41,00 + 0,71 + Q \times 0,01$  deve ser um número inteiro e, forçosamente,  $0,71 + Q \times 0,01$  deve ser um número inteiro. Logo,  $Q$  só pode ser 29, 129, 229 e assim por diante. Se Juca tivesse comprado 129 ou mais produtos, ele teria gasto, pelo menos,  $129 \times R\$ 0,99 = R\$ 127,71$ . Portanto, Juca comprou exatamente 29 produtos.

Observe que há várias maneiras de Juca ter comprado os 29 produtos; por exemplo, ele poderia ter comprado 28 produtos por R\$ 0,99 cada mais um produto por R\$ 13,99, mas também ele poderia ter comprado 27 produtos por R\$ 0,99, mais dois produtos: um custando R\$ 1,99 e outro custando R\$ 12,99. Em qualquer situação, no total, ele deve ter comprado exatamente 29 produtos.

### QUESTÃO 19 ALTERNATIVA D

Consideramos dois casos:

- O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcadas com os números 1 ou 10. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 8 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de  $2 \times 8 = 16$  maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Multiplicativo da Contagem).
- O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcada com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 7 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de  $8 \times 7 = 56$  maneiras diferentes para o estacionamento dos carros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

De acordo com as situações anteriores, há um total de  $16 + 56 = 72$  maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Aditivo da Contagem).

### QUESTÃO 20 ALTERNATIVA C

Se quem desenhou na parede foi Emília, ela mentiu e também Vitória mentiu. Então isso não ocorreu, pois somente uma menina mentiu.

Se quem desenhou na parede foi Luísa, ela mentiu e também Rafaela mentiu. Esse caso também não pode ter ocorrido.

Se quem desenhou na parede foi Marília, somente Vitória mentiu. Isso está compatível com as exigências do enunciado.

Se quem desenhou na parede foi Rafaela, Marília e Vitória mentiram. Esse caso também não pode ter ocorrido.

Se quem desenhou foi Vitória, Luísa e Marília mentiram; isso também não deve ter acontecido.

Logo, quem desenhou na parede da sala da Vovó Vera foi Marília.

Outra solução: Analisando as respostas de Emília e Rafaela, se qualquer uma das duas mentiu, então Luísa também falou uma mentira. Como não podemos ter duas netinhas mentindo, então Emília e Rafaela falaram a verdade. Portanto, a autora do desenho na parede só pode ser uma das três meninas: Marília, Rafaela ou Vitória. Se Vitória fala a verdade, então Luísa mente; consequentemente quem desenhou não foi nem a Marília, nem a Rafaela e a autora seria Vitória, mas isso acarreta que Marília também estaria mentido. Assim, Vitória mentiu, e todas as outras falam a verdade. Quem fez o desenho não pode ser Rafaela, só pode ser Marília.