Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA C

Solução: A quantidade de números pares entre 1 e 99 é (99 − 1)/ 2 = 49 e a de números ímpares é 99 − 49 = 50.

As vagas ocupadas são as que têm os números: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97 e 99.

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA D

Solução: Como cada jogador tem 100 pontos, a soma inicial é de 100 + 100 = 200 pontos. Em cada partida o vencedor soma 5 pontos, e o perdedor subtrai 2 pontos; ou seja, em cada partida são somados 5 − 2 = 3 pontos à soma total. Dessa forma, o jogo terminará quando forem acrescentados mais do que 300 − 200 = 100 pontos. Como 102 é o primeiro múltiplo de 3 que é maior do que 100, serão necessárias 102 ÷ 3 = 34 partidas para o jogo terminar.

QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA B

Solução: Na alternativa A, a duração total das notas é (1/2) + (1/2) = 1 semibreve.
Na alternativa B, a duração total é (1/4) + (1/2) + (1/8) = 7/8 de semibreve.
Na alternativa C, a duração total é 1 semibreve.
Na alternativa D, a duração total é (1/8) + (1/4) + (1/4) + (1/8) + (1/4) = 1 semibreve
Na alternativa E, a duração total é (1/4) + (1/8) + (1/2) + (1/8) = 1 semibreve.

Portanto, a alternativa em que a duração total é diferente das demais é a alternativa B.

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA A

Solução: Seja n o número pensado por Fernanda. De acordo com a fala do mágico,

- “multiplique por três” irá resultar em $3 \times n$;
- “adicione uma unidade” irá resultar em $(3 \times n) + 1 = 3 \times n + 1$;
- “multiplique por oito” irá resultar em $8 \times (3 \times n + 1) = 24 \times n + 8$;
- “subtraia duas unidades” irá resultar em $(24 \times n + 8) - 2 = 24 \times n + 6$;
- “e divida por 6” irá resultar em $(24 \times n + 6) \div 6 = 4 \times n + 1$

Logo, para o mágico encontrar o número n pensado por Fernanda, ele pode subtrair 1 do número final obtido e, em seguida, dividir por 4.

QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA B

Solução: Os cinco menores números inteiros, positivos e distintos que Morgana pode escolher são 1, 2, 3, 4 e 5. Esses cinco números somam 15 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15). Assim, o maior número que Morgana pode escolher é o 2020 − 15 = 2005.

QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA B

Solução: Considere as letras A, B, C, D, E, F e X representando os valores desconhecidos da tabela.

7	A	B
C	5	D
E	F	X

- No tabuleiro 2 × 2 superior esquerdo, temos que 7 + A + C + 5 = 20. Logo, A + C = 8. Assim, as possibilidades são (A = 1, C = 7), (A = 2, C = 6), (A = 3, C = 5), (A = 4, C = 4) e os casos simétricos. Porém, os casos (A = 1, C = 7), (A = 3, C = 5) e (A = 4, C = 4) são descartados, pois não é permitido repetir números na tabela. Assim, A e C são 2 e 6 em alguma ordem. Em qualquer caso A + C = 8.
- Somando-se todos os elementos dos subtabuleiros superiores com os elementos do subtabuleiro inferior esquerdo, temos:
(7 + A + 5 + C) + (A + B + 5 + D) + (C + 5 + E + F) = 20 + 20 + 20 = 60.

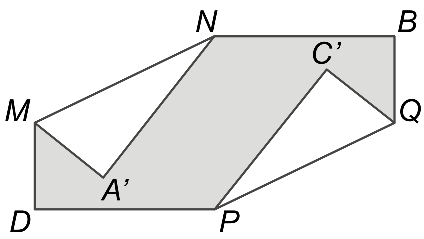
  Logo, 22 + 2(A + C) + B + D + E + F = 60, ou seja, B + D + E + F = 22.
- Veja que a soma de todos os elementos do tabuleiro é igual a 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45. Por outro lado, a soma de todos elementos, exceto X é: (7 + 5) + (A + C) + (B + D + E + F) = 12 + 8 + 22 = 42.

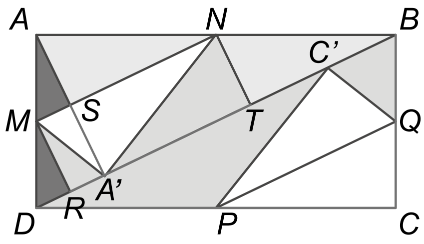
  Logo, o número que ocupa o quadrado cinza é 45 – 42 = 3.
- Observe o preenchimento:

7	2	9
6	5	4
1	8	3

QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA D

Solução sem usar semelhança de triângulos:
Ao dobrar a folha, o vértice *A* do quadrado coincide com o ponto *A*' da diagonal. Como a reta *MN* é a mediatriz do segmento *AA'*, temos *AS* = *SA'* e *AA'* perpendicular a *MN*. Como *MN* é paralela à diagonal *BD*, o segmento *MR* paralelo a *AA'* é também perpendicular a *BD*. Temos, dessa forma, dois triângulos retângulos congruentes *ASM* e *MRD*, pelo caso *ALA* de congruência de triângulos. Logo, *AM* = *MD* = 5. De forma análoga, concluímos que os triângulos retângulos *ANS* e *NBT* são congruentes, logo *AN* = *NB* = 10.





A área dos triângulos congruentes *AMN* e *A'MN* é igual a $\frac{10 \times 5}{2} = 25$.

Dada a simetria de 180° da figura, concluímos que a área dos triângulos *CPQ* e *C'PQ* também é 25. Consequentemente, a área da região colorida visível é igual à área da folha menos quatro vezes a área do triângulo *AMN*, ou seja, igual a 10 × 20 – 4 × 25 = 200 – 100 = 100 cm^2.

Solução usando semelhança de triângulos:
Como *MN* é paralela a *BD*, concluímos que os triângulos *AMN* e *ADB* são semelhantes, de alturas homólogas *AS* e *AA'*. Pela dobra temos *AA'* = 2*AS*, logo a área do triângulo *ABD* é 4 vezes a área do triângulo *AMN*. Como a área do triângulo *ADB* é metade da área da folha, isto é, 100 cm^2, a área do triângulo *AMN* é 25 cm^2. Novamente, a área da região colorida visível é igual à área da folha menos quatro vezes a área do triângulo *AMN*, ou seja, igual a 10 × 20 – 4 × 25 = 200 – 100 = 100 cm^2.

QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA D

Solução: Sejam
c: número de questões certas;
b: número de questões em branco;
e: número de questões erradas.

Temos que encontrar o valor máximo de c tal que $\begin{cases} c - 0{,}25e = 28 \\ c + b + e = 45 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 4, teremos $4c - e = 112 \rightarrow 4c = 112 + e$.
Como 112 é múltiplo de 4, então e também deve ser múltiplo de 4.

Teremos então as seguintes possibilidades

e	***c***	***b***	***c + b + e***
0	28	17	= 45
4	29	12	
8	30	7	
12	31	2	
16	32	0	= 48 > 45 (não serve)

Logo, o número máximo de questões certas é 31.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA E

Solução: Vamos chamar de P o preço da caixa. Esse preço não se alterou com a diminuição da quantidade de chocolate. O preço do grama de chocolate antes da diminuição era $\frac{P}{250}$ e passou a ser $\frac{P}{200}$. Assim,

$\dfrac{\frac{P}{200}}{\frac{P}{250}} = \dfrac{250}{200} = 1{,}25 = 1 + 0{,}25$, ou seja, houve um aumento de 25%.

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA A

Solução: Seja X a quantidade de pessoas entre Joana e Pascoal. Logo, há 4X pessoas na fila. Nesse problema temos que analisar duas situações possíveis:

1ª Situação: Pascoal está na frente de Joana.
Nesse caso, o total de pessoas na fila é

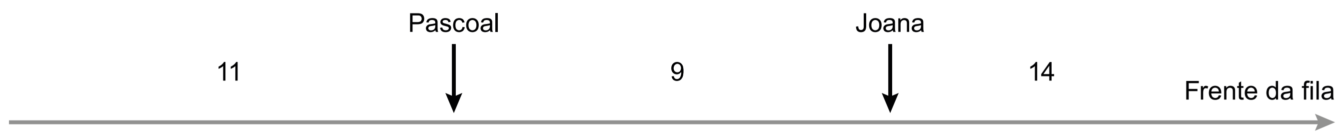
$$24 + 1 + X + 1 + 21 = 47 + X$$

Portanto, 4X = 47 + X. Logo, 3X = 47. Como 47 não é múltiplo de 3, essa situação não pode ocorrer.

2ª Situação: Joana está na frente de Pascoal.
Nesse caso, há 24 – 1 – X = 23 – X pessoas na frente de Joana e 21 – 1 – X = 20 – X pessoas atrás de Pascoal. Assim, o total de pessoas na fila é

$$23 - X + 1 + X + 1 + 20 - X = 45 - X$$

Portanto, 4X = 45 – X . Logo, X = 9. Assim, há 45 – 9 = 36 pessoas na fila. Eis a situação:



QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA C

Solução: Temos três meninas: Ana, Cláudia e Fabiana, e dois meninos: Joaquim e Pedro e as condições:

I) havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
II) Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
III) uma menina se escondeu sozinha;
IV) Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
V) o menino pernambucano estava na casa da árvore.

De acordo com a afirmação II), Pedro nasceu em São Paulo e, de acordo com a afirmação V), o menino pernambucano estava na casa da árvore. Portanto, Joaquim estava na casa da árvore.

Como Pedro e Fabiana se esconderam juntos, e como Joaquim estava na casa da árvore, Pedro e Fabiana não podiam estar na casa da árvore, pois, nesse caso, teríamos três crianças na casa da árvore, o que contradiria a afirmação I). A outra criança na casa da árvore deve ser ou Ana ou Cláudia.

Como uma menina se escondeu sozinha (afirmação III)) e Ana não estava sozinha (afirmação IV)), Ana estava na casa da árvore e Cláudia, sozinha.

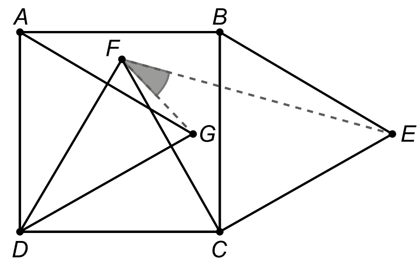
Concluímos que Ana e Joaquim estavam escondidos na casa da árvore.

QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA C

Solução: Observemos primeiro os ângulos com vértice *D*. Como o triângulo *DFC* é equilátero, temos $\widehat{CDF} = 60°$ e, como $\widehat{CDA} = 90°$, segue que $\widehat{FDA} = 30°$. Analogamente temos $\widehat{CDG} = 30°$ e então $\widehat{GDF} = 30°$. Passemos ao triângulo *GDF*. Ele é isósceles, pois $DG = DF$, e segue que $\widehat{DFG} = \widehat{DGF} = 75°$. Logo $\widehat{CFG} = \widehat{DFG} - \widehat{DFC} = 75° - 60° = 15°$.

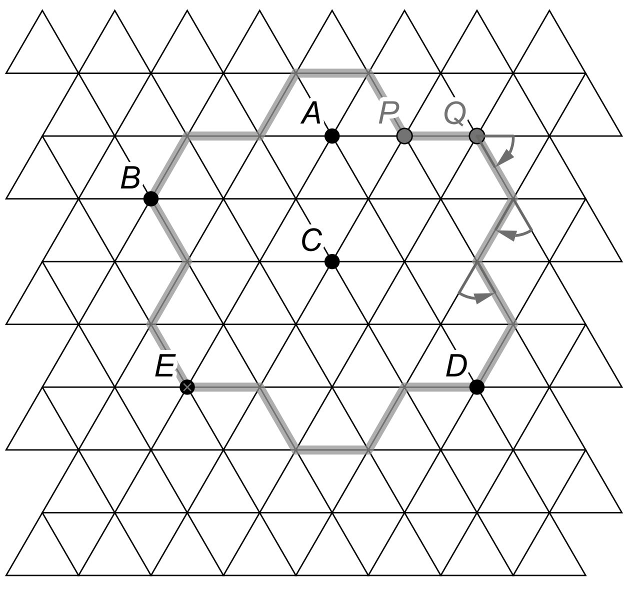
Agora consideremos o triângulo *CFE*. Como acima, temos $\widehat{BCF} = 30°$ e segue que $\widehat{ECF} = 90°$. Por outro lado, como $CF = CE$, esse triângulo também é isósceles, e temos, então, $\widehat{CFE} = 45°$.

Finalmente, temos $\widehat{GFE} = \widehat{CFE} - \widehat{CFG} = 45° - 15° = 30°$.



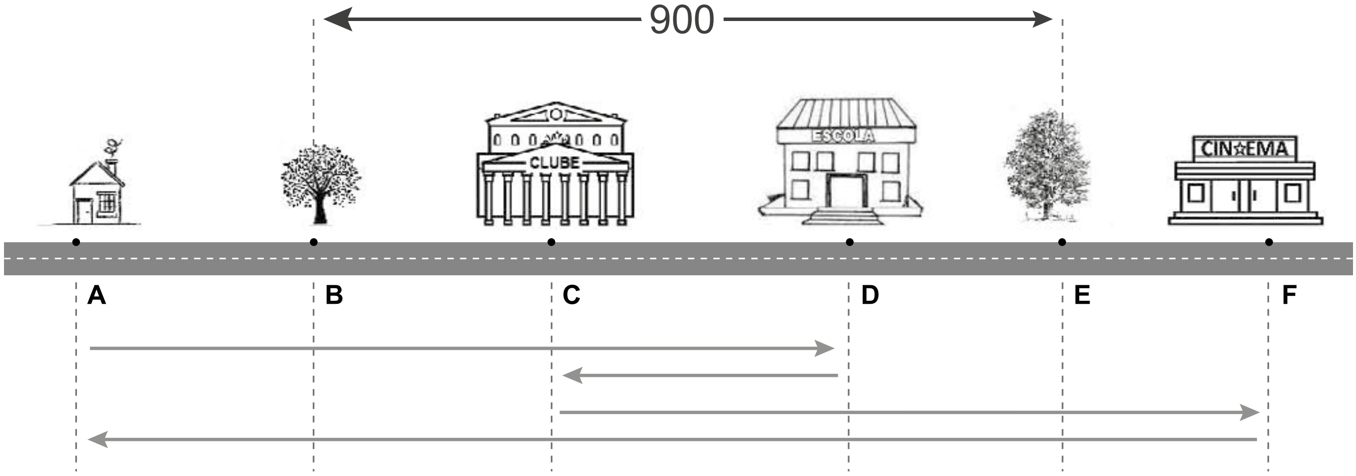
QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA E

Solução: O percurso da formiguinha é fechado, conforme ilustrado na figura. O comprimento desse ciclo é 18, o que significa que, ao caminhar de acordo com a regra enunciada, ela vai retornar ao ponto *P* depois de percorrer 18 segmentos. Então, ao percorrer 1000 segmentos, ela vai andar 55 ciclos e mais 10 segmentos, pois $1000 = 18 \times 55 + 10$. Ao andar mais 10 segmentos, depois de completar o último ciclo, ela vai estar no ponto *E*.



QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA D

Solução: O caminho percorrido por Miguel está indicado em azul na figura abaixo (AD + DC + CF + FA). Como AB = BC, pois B é ponto médio de AC, e DE = EF, pois E é ponto médio de DF, então, o caminho percorrido por Miguel mede AD + DC + CF + FA = (AB + BC + CD) + DC + (CD + DE + EF) + (FE + ED + DC + CB + BA) =
= (BC + BC + CD) + DC + (CD + DE + ED) + (DE + ED + DC + CB + BC) =
= 4 × BC + 4 × CD + 4 × DE = 4 × (BC + CD + DE) = 4 × BE = 4 × 900 = 3600 m.



QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA C

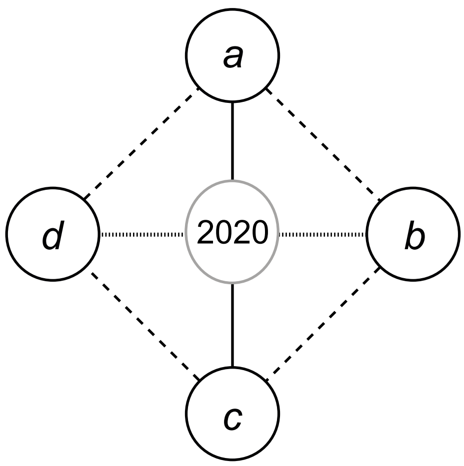
Solução: Como a soma dos números dos 4 círculos brancos será igual à soma dos números dos círculos ligados pela linha horizontal, segue que a soma dos números dos círculos brancos ligados pela linha vertical será 2020. De modo semelhante, a soma dos números dos círculos brancos ligados pela linha horizontal será 2020. Assim, a soma total dos números escritos por Priscila nos 4 círculos é 2020 + 2020 = 4040.

Outra solução, utilizando-se rudimentos de álgebra:

$a + b + c + d = a + 2020 + c$, logo, $b + d = 2020$

$a + b + c + d = b + 2020 + d$, logo, $a + b = 2020$

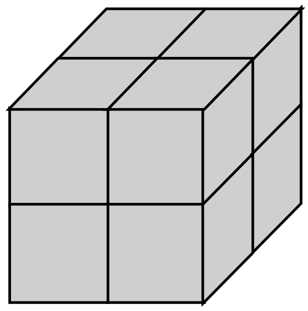
Assim, $a + b + c + d = 2020 + 2020 = 4040$.



QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA C

Solução: Observando a planificação, vemos que a menor soma possível para três faces vizinhas de um pequeno dado é 1 + 2 + 4 = 7 e, juntando adequadamente 8 dados na posição em que essas faces com soma mínima formem as faces do cubo grande, concluímos que a menor soma possível dos 24 números que aparecem nas faces do cubo grande é 8 × 7 = 56.

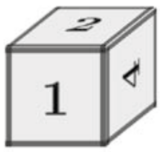
Mais detalhadamente, ao juntar os oito dados idênticos, formamos um cubo maior, como na figura ao lado, e em cada face desse cubo maior aparecem quatro números. Portanto, nas seis faces desse cubo maior aparecem 6 × 4 = 24 números. Por outro lado, cada vértice do cubo maior corresponde a um dos oito vértices do dado e cada vértice do dado tem três de suas faces concorrendo nesse vértice. Assim, os 24 números que aparecem nas seis faces do cubo maior são provenientes de faces comuns dos dados, faces essas que ficaram visíveis após a montagem, incluindo a que fica apoiada sobre a mesa. Logo, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado é igual a oito vezes a menor soma possível para as três faces comuns de um vértice de um dado.



Ao montar o dado a partir de sua planificação observamos que as faces opostas serão

2 e 5,   1 e 3,   6 e 4

Observamos também que as faces comuns aos vértices do dado serão:

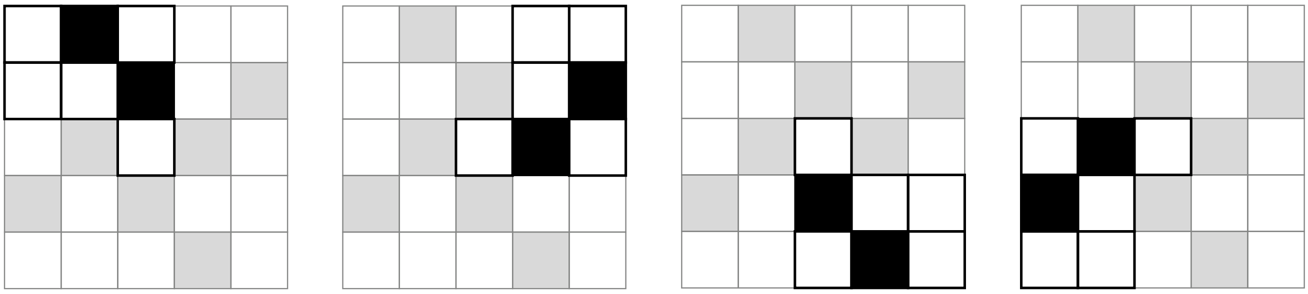
- 1, 2 e 4 (soma 7)  ou 1, 2 e 6 (soma 9) 
- 2, 3 e 4 (soma 9)  ou 2, 3 e 6 (soma 11) 
- 3, 4 e 5 (soma 12)  ou 3, 5 e 6 (soma 14) 
- 1, 4 e 5 (soma 10)  ou 1, 5 e 6 (soma 12) 

Assim, a menor soma possível para os números que aparecem nas faces do cubo formado será

8 × 7 = 56.

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA D

Solução: O mosaico da figura do enunciado pode ser obtido girando-se, em torno do ladrilho central, o bloco 2 × 3 formado pelos primeiros três ladrilhos das duas primeiras linhas, mais o ladrilho central.



Na verdade, qualquer mosaico de ladrilhos pretos e brancos que apresenta simetria rotacional de 90° tem essa propriedade, ou seja, é obtido a partir de sete ladrilhos: seis do bloco 2 × 3 formado pelos três primeiros ladrilhos das duas primeiras linhas e mais o ladrilho central.

Como cada ladrilho pode ser preto ou branco, temos $2^7 = 128$ maneiras distintas de escolher sete ladrilhos para obter um mosaico 5 × 5 que apresenta simetria rotacional de 90°.

Logo, a quantidade de mosaicos 5 × 5 que apresentam simetria rotacional de 90° é igual a $2^7 = 128$. Observe que, dentre essas possibilidades, aparecem o tabuleiro todo branco e o tabuleiro todo preto: eles também têm simetria rotacional de 90°.

QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA C

Solução: Em 2019, depois dos aniversários, podemos escrever que a idade de Ivan é:

$2019 - 19xy = ab$ (*)

e que a idade de Luciana é:

$2019 - 19ab = xy$ (**)

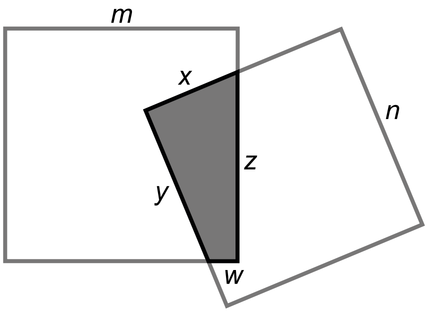
sendo que ab e xy denotam números de dois algarismos tais que $19xy = 1900 + xy$ e $19ab = 1900 + ab$.

Dessa forma, usando (*) ou (**), chegamos a $ab + xy = 119$, o que mostra que a alternativa C é correta.

As demais alternativas podem ser descartadas com um contraexemplo. Digamos que Ivan tenha nascido em 1950 e que Luciana tenha nascido em 1969. Ivan fez 69 anos em 2019 e Luciana fez 50 anos, em concordância com o enunciado. Entretanto, em 2020, Ivan fará 70 anos e Luciana, 51, mostrando que A) é falsa. Essa situação mostra, ainda, que as alternativas B), D) e E) são também falsas.

QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA E

Solução: Na figura abaixo, m e n são os comprimentos dos lados dos quadrados e x, y, z e w os comprimentos dos segmentos determinados pelas interseções entre eles.



Como o perímetro da figura inteira (contorno vermelho) é 56 e o da interseção (contorno preto) é 20, temos $(4m - z - w) + (4n - x - y) = 56$ e $4(m + n) = 56 + (x + y + z + w) = 76$, ou seja, $m + n = 19$.

Dado que a área da interseção é 18, temos $m^2 + n^2 - 18 = 163$, ou seja, $m^2 + n^2 = 181$. Daí, $2mn = (m + n)^2 - (m^2 + n^2) = 19^2 - 181 = 180$. A partir de $90 = mn = m(19 - m)$, podemos concluir que m é uma das raízes da equação do segundo grau $m^2 - 19m + 90 = 0$, que são 10 e 9.

Consequentemente, $n = 19 - m = 9$ ou 10. Finamente, a diferença entre as áreas dos quadrados é $10^2 - 9^2 = 19$.

QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA E

Solução: Para facilitar a exposição, vamos chamar números pares positivos com soma de algarismos igual a 2026 de *números legais*. Observamos primeiro que números legais existem: por exemplo, o número que se escreve como 2026 algarismos 1 seguidos do algarismo 0 nas unidades; logo, existe o menor número legal, que é o que estamos procurando.

Seja n o número de algarismos de um número legal. A maior soma possível dos algarismos de um número de n algarismos é $9n$; logo, $9n \geq 2026$, ou seja, $n \geq \frac{2026}{9} > 225$. Em outras palavras, qualquer número legal tem pelo menos 226 algarismos. Observamos que números legais com exatamente 226 algarismos existem; por exemplo, 2 seguido de 224 algarismos 9 seguido de 8 é legal. Logo, o menor número legal tem 226 algarismos.

Como $2026 = 225 \times 9 + 1$, vemos que o primeiro algarismo à esquerda de um número legal com 226 algarismos não pode ser 1, pois, nesse caso, todos seus outros algarismos seriam 9 e ele seria ímpar. O exemplo já citado

$$2\,\underbrace{9\,9\,9\,9\,...\,9\,9}_{\text{224 algarismos 9}}\,8$$

nos mostra, por outro lado, que existem números legais com 226 algarismos que têm 2 como seu primeiro algarismo à esquerda. Observamos agora que qualquer número dessa forma é escrito com mais 224 algarismos 9 e um algarismo 8; de fato, se esse número tivesse no máximo 223 algarismos 9, a soma de seus algarismos não poderia exceder $223 \times 9 + 2 + 8 + 8 = 2025$. Assim, o menor número par que podemos escrever com essas condições é 2 seguido de 224 algarismos 9 seguido de 8 na casa das unidades, que é, então, o menor número legal, ou seja, é o exemplo anterior.