13ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2017
Somando novos talentos para o Brasil

Nível 2

8.º e 9.º anos do Ensino Fundamental

1.ª Fase – 6 de junho de 2017

Solução da prova da 1.ª Fase

QUESTÃO 1
ALTERNATIVA D

Para obter o maior resultado possível, devemos fazer com que os termos que contribuem positivamente na conta sejam os maiores possíveis e o termo que contribui negativamente seja o menor possível. Como estamos usando o sistema de numeração posicional decimal, na primeira parcela da conta devemos colocar o maior dos algarismos disponíveis na casa das centenas (o algarismo 8):

$$\boxed{8}\,\boxed{}\,\boxed{} + \boxed{}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

A seguir, colocamos o segundo maior algarismo na casa das dezenas (o 7). Há duas possibilidades:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{} + \boxed{}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{}\,\boxed{} + \boxed{7}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

Agora, em cada uma dessas possibilidades, colocamos o algarismo 6, ainda na casa das dezenas:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{} + \boxed{6}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{} + \boxed{7}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

Continuando, precisamos colocar os algarismos 4 e 5; na primeira das possibilidades acima, há duas maneiras de fazer isto:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{5} + \boxed{6}\,\boxed{4} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{4} + \boxed{6}\,\boxed{5} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

e, no outro caso, também há duas possibilidades:

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{5} + \boxed{7}\,\boxed{4} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{4} + \boxed{7}\,\boxed{5} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

Basta agora completar o termo negativo com os algarismos 1, 2 e 3. Em suma, o maior resultado possível pode ser obtido de quatro maneiras diferentes:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{5} + \boxed{6}\,\boxed{4} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{4} + \boxed{6}\,\boxed{5} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{5} + \boxed{7}\,\boxed{4} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{4} + \boxed{7}\,\boxed{5} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

e o resultado final da conta é sempre o mesmo: 816.

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA E
Para obter 30 litros de tinta marrom, precisaremos de 15 litros de cada uma das cores laranja e verde. A primeira condição nos diz que, para obter essa quantidade de tinta laranja, precisaremos da fração $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$ litros de tinta amarela. Da mesma forma, a segunda condição nos diz que, para obter 15 litros de tinta verde, precisaremos da fração $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$ litros de tinta amarela. Portanto, a quantidade total de tinta amarela necessária é $5 + 6 = 11$ litros.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA B
Como o peso (massa) da sacola 1 é menor que o peso da sacola 2, temos:

$$2a + b < 2c + b \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c.$$

Como o peso da sacola 2 é menor que o peso da sacola 3, temos:

$$2c + b < 2b + a \Rightarrow 2c < b + a.$$

Entretanto, b + a < b + c, pois já concluímos que a < c, logo:

$$2c < b + c \Rightarrow c < b.$$

Podemos concluir, então, que a < c < b.

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA D
De acordo com o enunciado, cada termo, a partir do terceiro, é igual à diferença entre seus dois antecessores imediatos. Assim, percebemos que a sequência é periódica, uma vez que, dando continuidade à sua construção, observamos que seus termos repetem-se a cada 6 posições. Esse fato é evidente, pois o sétimo termo é igual ao primeiro e o oitavo, igual ao segundo. Consequentemente, o nono é igual ao terceiro, pois é o resultado da mesma diferença, como vemos abaixo:

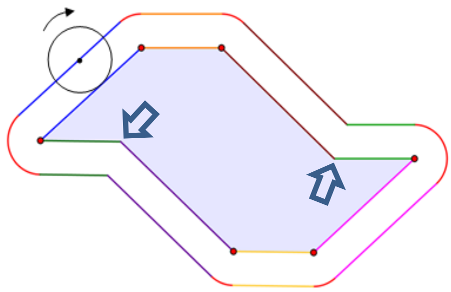
1, 5, 4, -1, -5, -4 = -5 - (-1), 1 = -4 - (-5), 5 = 1 - (-4), ...

Consequentemente, como 1000 = 6 x 166 + 4 = 996 + 4, os primeiros 1000 termos da sequência são obtidos justapondo-se 166 blocos contendo exatamente os 6 primeiros números da sequência, seguidos dos quatro primeiros números (da sequência), como indicado abaixo:

$$\underbrace{1, 5, 4, -1, -5, -4,}_{1^{\text{o}}\text{ bloco}}\ \underbrace{1, 5, 4, -1, -5, -4,}_{2^{\text{o}}\text{ bloco}}\ \dots,\ \underbrace{1, 5, 4, -1, -5, -4,}_{166^{\circ}\text{ bloco}}\ 1, 5, 4, -1$$

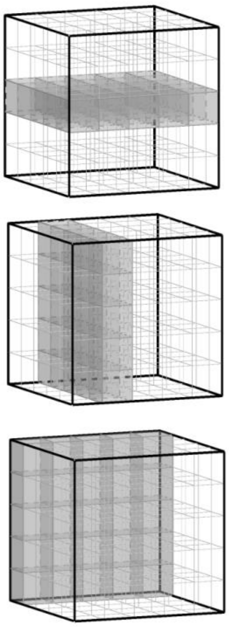
Finalmente, como a soma dos números em cada bloco é igual a zero, concluímos que a soma dos 1000 primeiros números da sequência é igual a soma dos últimos quatro termos, a saber, 1 + 5 + 4 + (-1) = 9.

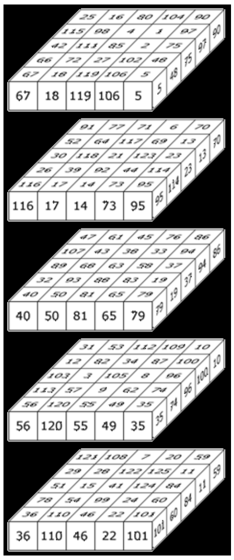
QUESTÃO 5
ALTERNATIVA A
Como a distância de um ponto a uma figura geométrica é a menor distância desse ponto aos pontos da figura, o desenho que Celinha obtém ao traçar os pontos que estão a 1 cm da Figura 3 é a trajetória do centro de um círculo de raio 1 quando este se move pelo contorno da figura tangenciando-o. Nesse caso, as curvas obtidas são segmentos de retas ou arcos de circunferências. Nos vértices em que a figura se lança para fora, aparecem arcos de circunferências, mas isto não ocorre nos dois vértices em que a figura se lança para dentro (marcados com as setas largas).



<u>Outra solução</u>: Uma maneira de obter o traço cujos pontos distam 1 cm da Figura 3 é considerar o contorno da figura formada ao considerar a união dos discos (círculos preenchidos) de raio 1 cm centrados em pontos da Figura 3. O contorno dessa união de discos aparece representado na alternativa A.

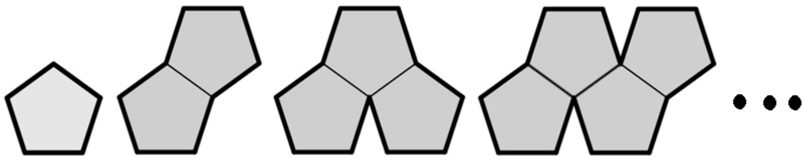
QUESTÃO 6
ALTERNATIVA B
Observe nas figuras abaixo à esquerda que uma fatia qualquer do cubo é formada por 25 cubinhos, sendo 5 blocos de 5 cubinhos alinhados lado a lado. Como a soma dos números em qualquer bloco de 5 cubinhos alinhados lado a lado é a mesma, segue que a soma dos números dos 25 cubinhos de uma fatia qualquer do cubo também é a mesma. Sendo o cubo formado por 5 fatias, essa soma é igual a um quinto de 7875, ou seja, 1575. Finalizando, uma face qualquer do cubo também é uma fatia do cubo e, portanto, a soma dos números numa face qualquer do cubo é 1575.





Observe na figura acima à direita um possível preenchimento do cubo 5 x 5 x 5.

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA E



Cada figura da sequência, a partir da segunda, é formada a partir da anterior com a anexação de um pentágono regular de lado 1 cm, fazendo-se coincidir um lado da figura anterior com um lado do pentágono adicionado. Isto implica que, a cada nova adição, o perímetro aumente 3 cm. Assim, os perímetros das figuras da sequência são 5, 8 = 5 + 1 x 3, 11 = 5 + 2 x 3, 14 = 5 + 3 x 3, etc. Se *n* é o número de polígonos que foram adicionados ao primeiro, então o perímetro da figura é 5 + 3 *n*. No caso da figura com perímetro 1736, temos $1736 = 5 + 3n \Leftrightarrow 3n = 1731 \Leftrightarrow n = 577$. Portanto, esta figura é composta de 577 + 1 = 578 pentágonos.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA D
O resultado da operação é:

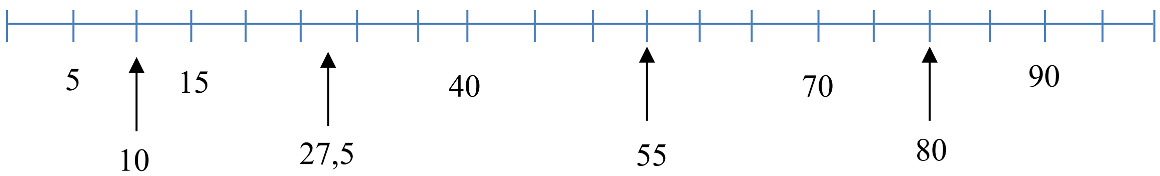
$$10 \times 200 \times 3000 \times 40000 \times 500000 = 120\ \underbrace{00\ldots00}_{\substack{1+2+3+4+5\\=15\ zeros}} = 12\underbrace{00\ldots00}_{16\ zeros}.$$

Logo, no resultado há 16 zeros.

QUESTÃO 9
ALTERNATIVA C
Como a primeira página do Capítulo 1 é a de número 1, e como os três capítulos têm a mesma quantidade de páginas, o número da primeira página do Capítulo 2 é igual à quantidade de páginas de um capítulo mais 1 e o número da primeira página do Capítulo 3 é igual ao dobro da quantidade de páginas de um capítulo mais 1. Logo, a soma do número da primeira página do Capítulo 2 com o número da primeira página do Capítulo 3 é igual ao triplo da quantidade de páginas de um capítulo mais 2, ou seja, a quantidade de páginas de um capítulo é $\frac{1052-2}{3} = 350$. Logo, o número da primeira página do Capítulo 3 é $2 \times 350 + 1 = 701$.
Algebricamente, se x é o número de páginas de um capítulo e se n é o número da primeira página do Capítulo 3, então $1052 = 3x + 2 \Rightarrow x = 350$ e $n = 2x + 1 \Rightarrow n = 701$.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA C
Para melhor entendimento, colocamos inicialmente os dados em um segmento de reta:

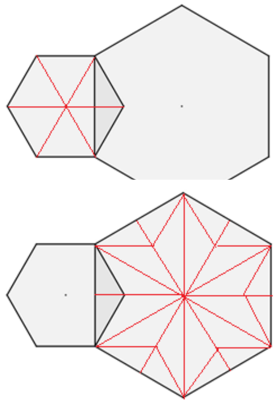
A seguir, marcamos os pontos médios dos números escolhidos pelas meninas:



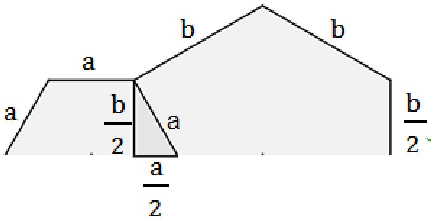
Desta maneira fica fácil de ver que Ana ganhará se o número sorteado estiver entre 1 e 10, incluindo o 1, mas excluindo o 10. Assim, exatamente 10 – 1 = 9 números dão vitória à Ana.
Bruna só ganhará se o número escolhido estiver entre 10 e 27, incluindo os dois extremos; assim, há 27 – 10 + 1 = 18 números que dão vitória à Bruna.
Do mesmo modo, Carla ganhará se o número escolhido estiver ente 28 e 55, incluindo o 28, mas excluindo o 55. Há 55 – 28 = 27 números nesse intervalo.
Por sua vez, Débora ganhará se o número escolhido estiver entre 55 e 80, incluindo o 55, mas excluindo o 80. São 80 – 55 = 25 números favoráveis à Débora.
Finalmente, Eliane será a vencedora se o número escolhido estiver no intervalo de 80 a 100, incluindo os extremos. Há 100 – 80 + 1 = 21 números a favor de Eliane.
Logo, quem tem mais chance de vencer é Carla, pois ela possui 27 números a seu favor, uma quantidade maior de números favoráveis do que a das outras meninas.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA D
Como em cada linha e em cada coluna devem aparecer exatamente três casas pintadas, podemos pensar nas casas que ficarão vazias. Devemos escolher as casas vazias de modo que em cada linha e em cada coluna apareça exatamente uma casa vazia. Na primeira linha podemos escolher qualquer uma das casas para deixar vazia; na segunda, há apenas três escolhas, na terceira linha, duas escolhas e, finalmente, na última linha, apenas uma escolha. Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, há 4 x 3 x 2 x 1 = 24 maneiras de escolher as casas vazias com exatamente uma delas em cada linha e em cada coluna. Escolhidas as casas vazias, é só pintar as demais. Conclusão: há 24 maneiras de pintar as casas de modo que em cada linha e em cada coluna apareçam exatamente três casas pintadas de preto.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA B



Primeiro decompomos o hexágono menor em seis triângulos equiláteros e vemos que a região de sobreposição tem área igual a duas metades de um desses triângulos equiláteros, ou seja, um triângulo equilátero inteiro, com área medindo, portanto, 10/6. Veja a figura ao lado.
A seguir, dividimos o hexágono maior também em seis triângulos equiláteros e cada um desses triângulos em outros três menores, todos congruentes ao triângulo de sobreposição. O hexágono maior fica decomposto em 18 triângulos congruentes ao triângulo de sobreposição e, portanto, sua área é 18 x (10/6) = 30 cm^2.



Outra solução: Vamos representar as medidas dos lados dos hexágonos, em centímetros, por a e b, conforme a figura ao lado, obtida a partir da figura do enunciado. Observemos o triângulo retângulo com lados medindo a, $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$ centímetros. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos que b^2 = 3a^2.
Por outro lado, sabemos que os dois hexágonos são semelhantes, pois ambos são regulares. Consequentemente, a razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão entre os respectivos lados. Denotemos a área do hexágono maior, medida em centímetros quadrados, por S. Assim,

$$\frac{S}{10} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{3a^2}{a^2} = 3 \text{ . Consequentemente, S = 30 cm}^2.$$

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA B

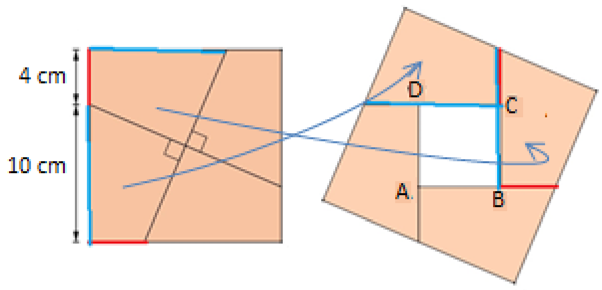
Denote por L e l os lados dos quadrados grande e pequeno, respectivamente. Do enunciado, temos que

$$4L + 4l = L^2 - l^2 \Rightarrow 4(L+l) = (L+l)(L-l)$$

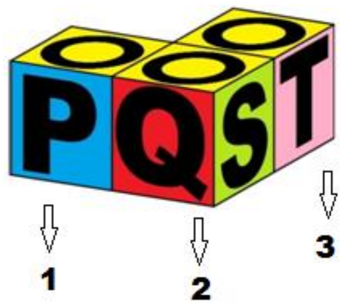
Como $L + l \neq 0$, $L - l = 4$.

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA C

Ao rearranjarmos os quadriláteros, observamos que os lados com comprimentos conhecidos ficam encostados, com uma das extremidades em comum, como indicado na figura (o segmento menor, em vermelho, torna-se parte do segmento maior, em azul). O comprimento dos lados do quadrado *ABCD* é a diferença entre os comprimentos desses lados: 10 – 4 = 6 cm. Portanto, a área desse quadrado é 36 cm^2.



QUESTÃO 15
ALTERNATIVA A



Como as letras **P**, **Q**, **S** e **T** estão visíveis na ilustração, essas são as faces adjacentes à face com a letra **O**, e a face oposta à letra **O** é a face com a letra **R**. As faces em contato entre os dados 1 e 2 não podem ser **P** (visível na ilustração do dado 1), nem **Q** ou **S** (visíveis na ilustração do dado 2). Portanto, tem que ser **T**. Olhando para o dado 2, concluímos que a face com **S** é oposta à face com **T**.

Outra solução: A letra **O** possui quatro faces vizinhas com as letras **P**, **Q**, **S** e **T**. Primeiramente observe que Zequinha juntou o dado 2 com o dado 3 pela face **P**, pois esta mesma face não pode estar na junção do dado 2 com o dado 1, que possui a face **P** visível. Logo, os dados 1 e 2 foram juntados pela face **T**. Assim, **S** e **T** são faces opostas, o que responde à questão. É claro também que **P** é oposta a **Q**, bem como **R**, que não aparece na ilustração, é oposta a **O**.

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA D
Como apenas $1\% = \frac{1}{100}$ do total das pessoas da festa é do sexo feminino, podemos concluir que existem $3 \cdot 100 = 300$ pessoas ao todo. Após a saída dos homens, queremos que as 3 mulheres correspondam a $2\% = \frac{1}{50}$ do total de pessoas da festa, ou seja, queremos passar a ter $3 \cdot 50 = 150$ pessoas. Portanto, devem sair $300 - 150 = 150$ homens.

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA A
Pondo $S = -1 \times 2 + 2 \times 3 - 3 \times 4 + 4 \times 5 - 5 \times 6 + \cdots - 49 \times 50 + 50 \times 51$, agrupando e reordenando convenientemente, obtemos

$$S = 2 \times (3-1) + 4 \times (5-3) + 6 \times (7-5) \cdots + 50 \times (51-49).$$

Portanto,

$$S = 2 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + \cdots + 50 \times 2 = 2\big(2 + 4 + 6 + \cdots + 50\big) = 4(1 + 2 + 3 + \cdots + 25).$$

Finalmente, concluímos que

$$\frac{S}{1 + 2 + 3 + \cdots + 25} = \frac{4(1 + 2 + 3 + \cdots + 25)}{1 + 2 + 3 + \cdots + 25} = 4.$$

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA C
Durante a partida foram formadas várias equipes de 5 atletas, até o tempo acabar. Observamos que:

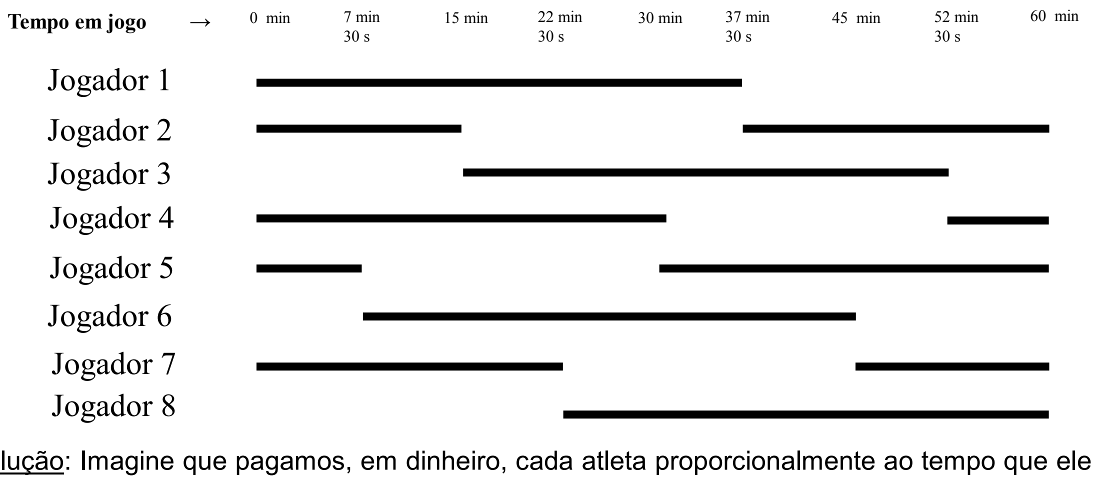
- a quantidade de tempo que o atleta 1 jogou (T1) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S1),
- a quantidade de tempo que o atleta 2 jogou (T2) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S2) ,

e assim por diante, até o oitavo jogador:

- a quantidade de tempo que o atleta 8 jogou (T8) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S8).

Cada atleta jogou a mesma quantidade de tempo (T1 = T2 = T3 = T4 = T5 = T6 = T7 = T8); logo, o tempo que cada um jogou é (S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8) ÷ 8.
Agora, notamos que na soma S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8 o tempo de jogo de cada equipe de 5 formada é somado 5 vezes. Por exemplo, se os atletas 1, 2, 3, 4 e 5 formaram uma equipe em campo, o tempo que essa equipe jogou foi considerado nas somas S1, S2, S3, S4 e S5. Assim, S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8 = 5 x 60 = 300, de onde concluímos que o tempo que cada um jogou é 300 ÷ 8 minutos, o que corresponde a 37 minutos e 30 segundos.

Como curiosidade, observe no diagrama abaixo como poderia ter sido realizada uma partida nos moldes do enunciado:



<u>Outra solução</u>: Imagine que pagamos, em dinheiro, cada atleta proporcionalmente ao tempo que ele jogou. Se ele jogou um tempo T recebe k × T. Como, a cada instante, temos 5 atletas em campo, no fim do jogo, teremos que pagar no total k × 5 × 60 = 300 k. Se cada um deles jogou o mesmo tempo, então receberá o mesmo pagamento que os demais. Como são 8 atletas, o soldo de cada um será 300 × k/8. Para saber quanto tempo ele jogou, basta dividir por k, o que nos fornece (300 × k) / (8 × k) = 300/8 minutos.

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA E

Observamos primeiro que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; por exemplo, ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 amarela. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue.

Ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma 1.ª cor. De fato, se isso não acontecesse, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo $5+5+5+5=20$ bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo $23-10=13$ bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma 2.ª cor e que sobram no mínimo $13-10=3$ bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelos menos 2 bolas de uma 3.ª cor.

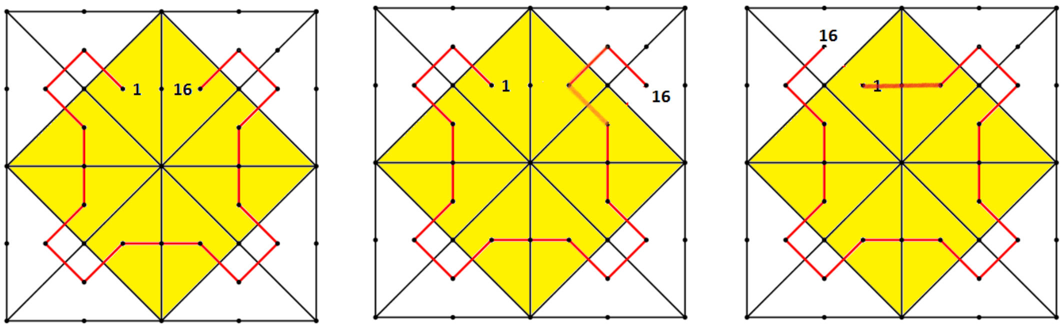
Mostramos, assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma 1.ª cor, 5 de uma 2.ª cor e 2 de uma 3.ª cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da 1.ª cor, 2 da 2.ª e 2 da 3.ª. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Observação geral: O argumento empregado nessa solução pode ser formalizado como segue: se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e sua média aritmética é m, isto é, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=m$, então, ou $a_1=a_2=\cdots=a_n=m$ ou existe pelo menos um índice i tal que $a_i<m$ e pelo menos um índice j tal que $a_j>m$. No nosso caso, fizemos uma escolha de a_1 bolas verdes, a_2 bolas amarelas, a_3 bolas azuis e a_4 bolas vermelhas tal que $a_1+a_2+a_3+a_4=23$; temos $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{23}{4}>5$. Segue que existe pelo menos um i tal que $a_i>5$, e, como a_i é um número inteiro, temos $a_i \geq 6$; em outras palavras, entre as 23 bolas existem pelo menos 6 de uma mesma cor, e analogamente para o restante da solução. A demonstração do fato geral do início desse parágrafo é inteiramente análoga à do caso particular que acabamos de analisar.

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA D

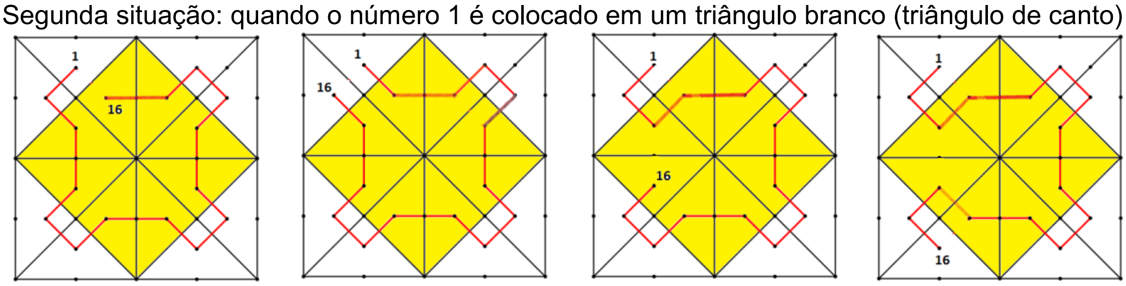
Vamos dividir o problema em duas situações.

Primeira situação: quando o número 1 é colocado em um dos 8 triângulos indicados na figura abaixo pela cor amarela (triângulos centrais).



Escolhido qualquer um dos 8 triângulos amarelos para colocar o número 1, haverá 3 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8 x 3 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo.

Segunda situação: quando o número 1 é colocado em um triângulo branco (triângulo de canto).



Escolhido qualquer um dos 8 triângulos brancos para colocar o número 1, haverá 4 caminhos para se preencherem os números de 1 a 16 atendendo as condições do problema. Portanto, há 8 x 4 maneiras de fazer o preenchimento começando em um triângulo amarelo.

Somando-se as quantidades obtidas nas duas hipóteses, obtemos que o número de maneiras é 8 x 3 + 8 x 4 = 24 + 32 = 56.