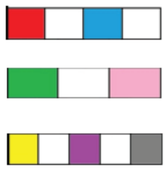
QUESTÃO 1
ALTERNATIVA B

Cada faixa da bandeira tem área igual a 300 cm². As partes brancas da faixa superior têm, portanto, área igual a 150 cm². A parte branca da faixa do meio tem área igual a 100 cm² e as partes brancas da faixa inferior têm área 120 cm². Logo, a soma das áreas dos retângulos brancos é 150 + 100 + 120 = 370 cm².

Em outras palavras, se A_1, A_2 e A_3 são as áreas dos retângulos brancos, respectivamente, em cada uma das três faixas, então, a área total de todos os retângulos brancos é $A_1 + A_2 + A_3 = 150 + 100 + 120 = 370$ cm².



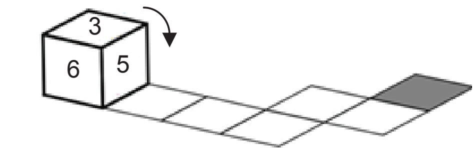
$$A_1 = \frac{2}{4} \times 300 = 150 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \times 300 = 100 \text{ cm}^2$$

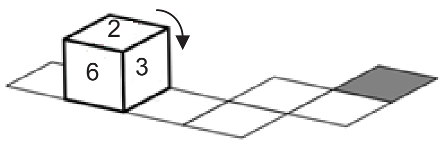
$$A_3 = \frac{2}{5} \times 300 = 120 \text{ cm}^2$$

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA B

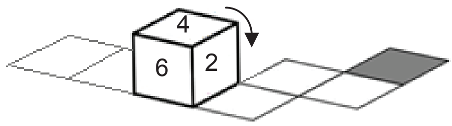
O enunciado da questão mostra o dado em suas duas primeiras posições. Continuando os sucessivos giros, observamos que as faces do dado se comportam da seguinte maneira:



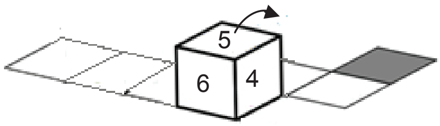
Após o 1º. giro:



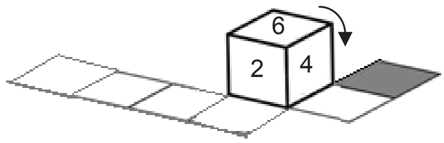
Após o 2º. giro:



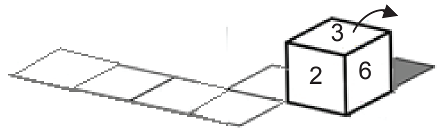
Após o 3º. giro:



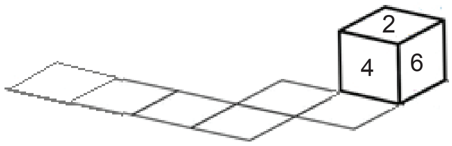
Após o 4º. giro:



Após o 5º. giro:



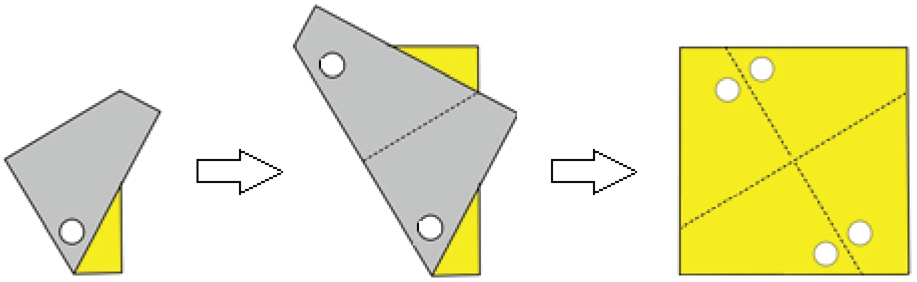
Após o 6º. giro:



Assim, o número que aparece no topo do dado quando este estiver sobre a casa cinza é 2.

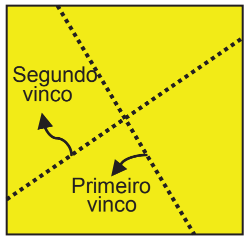
QUESTÃO 3
ALTERNATIVA A

Iniciamos observando que Joãozinho fez 4 furos na folha desdobrada, uma vez que, após as duas dobras, o local escolhido para furar tem 4 camadas de papel. A figura abaixo mostra a posição dos furos após cada desdobra. Observamos ainda que, após uma desdobra, para cada furo, obtemos dois: um na mesma posição e outro em posição simétrica à linha de desdobra.

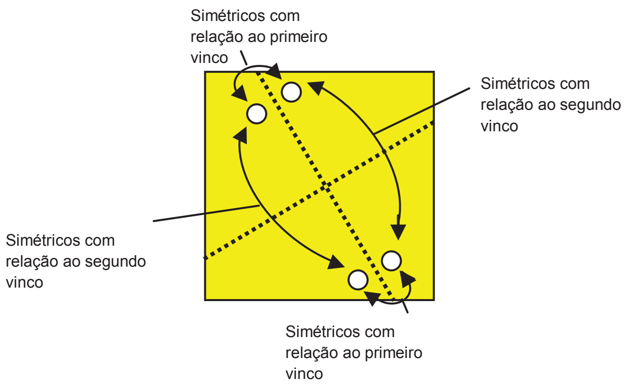


Dentre as figuras das alternativas, apenas a primeira respeita essas simetrias.

Vejamos com mais detalhes: na folha desdobrada, notamos que os vincos deixados pelas duas dobras feitas têm o seguinte aspecto:



Há dois furos inferiores simétricos com relação ao primeiro vinco e mais dois furos superiores que aparecem quando desdobramos a última dobra; esses furos superiores são simétricos aos inferiores com relação ao segundo vinco.



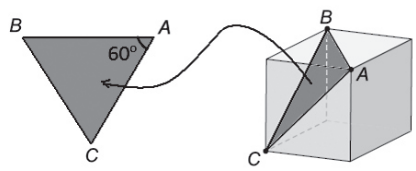
QUESTÃO 4
ALTERNATIVA D

Como quatro alunos correspondem a 10% dos alunos da escolinha de futebol, concluímos que esta tem 4 x 10 = 4 ÷ (10/100) = 4 ÷ (1/10) = 40 alunos. Logo, 40 – 4 = 36 alunos participam somente da escolinha de futebol. Os mesmos quatro alunos correspondem a 25% dos alunos da escolinha de basquete, que tem, portanto, 4 x 4 = 4 ÷ (25/100) = 4 ÷ (1/4) = 16 alunos. Assim, 16 – 4 = 12 alunos participam somente dessa escolinha.

Conclusão: o número de atletas que participam somente de uma escolinha é 36 + 12 = 48.

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA B

Observe que *AB*, *AC* e *BC* são diagonais das faces do cubo e, portanto, possuem a mesma medida. Logo, os segmentos *AB* e *AC* são lados do triângulo equilátero *ABC*. O ângulo *BÂC* é, então, um ângulo interno de um triângulo equilátero, que mede 60º.



QUESTÃO 6
ALTERNATIVA C

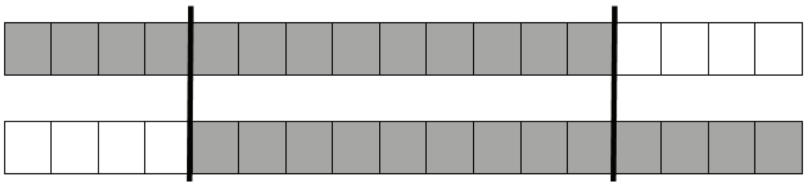
Vamos colocar todas as respostas, identificando suas respectivas autoras, em uma mesma tabela.

	1	2	3	4	5
A	*Ana, Beatriz e Cecília*	*Ana*	*Cecília*	*Beatriz e Cecília*	
B		*Beatriz e Cecília*			*Ana e Cecília*
C			*Beatriz*		
D				*Ana*	
E			*Ana*		*Beatriz*

A prova tem cinco questões. Como Ana acertou quatro questões e Cecília três, concluímos que elas devem ter acertado pelo menos duas questões em comum, e a tabela nos mostra que elas acertaram as questões 1 e 5. Mas Beatriz também acertou a questão 1; logo, errou todas as outras. Concluímos que Cecília não acertou as questões 2 e 4, e, logo, ela acertou também a questão 3. Segue que Ana errou a questão 3.

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA A

Se Jurema pintar a sequência de 13 quadradinhos iniciando com o quadradinho da extremidade esquerda e depois pintar outra sequência terminando no quadradinho da extremidade direita, nesses dois casos, ela obrigatoriamente deverá pintar nove quadradinhos, a saber, os quadradinhos que vão de 5 a 13, incluindo os extremos. Esses mesmos quadradinhos serão também pintados se ela começar a pintar a partir do segundo quadradinho; o mesmo também ocorrerá se ela iniciar a pintar a partir do terceiro ou do quarto quadradinho. Logo, os nove quadradinhos, do 5 ao 13, incluindo-os, serão obrigatoriamente pintados, qualquer que seja a escolha de Jurema.



QUESTÃO 8
ALTERNATIVA D

A tabela abaixo indica o que João e Maria dizem a respeito do dia da brincadeira (hoje, no diálogo) em cada pergunta:

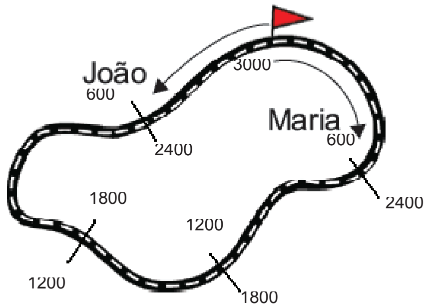
Pergunta	João	Maria
Primeira	quinta	sexta
Segunda	domingo	sábado
Terceira	quarta	quinta

Como, pelo enunciado, João e Maria deram a resposta correta exatamente uma vez, concluímos que a brincadeira aconteceu em uma quinta-feira.

Outra solução: Observamos que a resposta correta de João foi para a primeira pergunta “Que dia da semana é hoje?”. As outras duas respostas de João não podem ser verdadeiras, pois implicariam que todas as respostas de Maria estariam erradas. De fato, se a resposta correta de João fosse para a pergunta “Que dia da semana será amanhã?”, ou seja, se o dia seguinte fosse uma segunda-feira, a conversa teria ocorrido em um domingo e o dia anterior seria um sábado, confirmando que as três respostas de Maria estariam erradas. Conclusão análoga é encontrada se a resposta correta de João fosse para a pergunta “Que dia da semana foi ontem?”. Portanto, a conversa ocorreu em uma quinta-feira.

QUESTÃO 9
ALTERNATIVA D

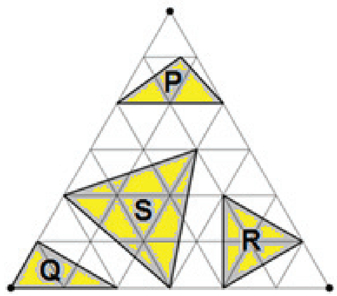
Como João e Maria partem do mesmo ponto da pista e em sentidos contrários, mantendo constantes suas respectivas velocidades, no momento em que João tiver corrido 1200 metros da pista, Maria terá corrido 3000 – 1200 = 1800 metros da mesma (quando ambos se encontram pela primeira vez). Assim, enquanto João corre 1200 metros, Maria corre 1800. Portanto, quando João correr 3000 metros nessa pista, Maria terá corrido (3000 x 1800) ÷ 1200 = 4500 metros.



Uma maneira simples de visualizar a solução consiste em dividir a pista em cinco trechos de 600 metros cada e acompanhar os movimentos de João e Maria. Enquanto João corre dois desses trechos, Maria corre três.

Outra solução: a velocidade de Maria é 3/2 = 1,5 vezes a de João, já que ele corre 1200 metros no mesmo tempo que ela corre 1800 metros. Logo, enquanto este corre 3000 metros, ela corre 1,5 x 3000 = 4500 metros.

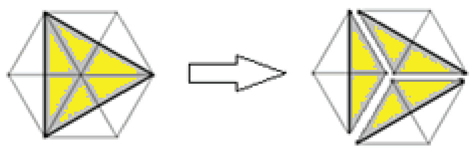
QUESTÃO 10
ALTERNATIVA B



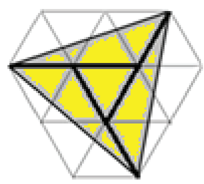
Para facilitar a notação, vamos escrever (R) para representar a área da região R. Vamos nomear as quatro regiões amarelas pelas letras P, Q, R e S, conforme indicado na figura ao lado.

Observemos que (P) = (Q). De fato, as duas regiões são triângulos com as mesmas medidas de base e altura. Temos: (Q) = (1/2) x 4 = 2, pois Q é a metade de um paralelogramo formado por quatro triângulos menores.

Por outro lado, a região R é a parte central de um hexágono formado por 6 triângulos menores, obtida tomando sempre a metade de cada um desses triângulos, conforme indicado na figura ao lado. Logo, (R) = 6 x (1/2) = 3.



Finalmente, obtemos que (S) = 7. De fato, decompondo a região S em 4 regiões, temos um triângulo menor no centro de S e três triângulos iguais em seu entorno, como indicado na figura ao lado. O triângulo central tem área 1 e os outros três têm área 2, pois são a metade de um paralelogramo formado por 4 triângulos menores. Assim, (S) = 1 + 3 x 2 = 7.



Consequentemente, a área total destacada em amarelo é igual a
2 x (Q) + (R) + (S) = (2 x 2) + 3 + 7 = 14.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA E

Depois de 9 pulos, Luciana retornará à posição marcada com o número 1, conforme indicado na sequência seguinte:

$$1 \to 5 \to 9 \to 4 \to 8 \to 3 \to 7 \to 2 \to 6 \to 1$$

Como 999 = 111 x 9, concluímos que depois de 999 pulos Luciana estará na posição marcada com o número 1; consequentemente, depois de pular 1000 vezes, ela estará na posição seguinte, a qual está marcada com o número 5.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA E

Seja α, β e γ letras quaisquer de A até Z. O número de códigos do tipo AAα é 26. O número de códigos do tipo Aαβ é 26 x 26 = 676 e o número de códigos do tipo αβγ é 26 x 26 x 26 = 17576. Se o último livro codificado na ordem AAA, AAB,..., ABA,... é DAB, então ele foi registrado depois de codificados todos livros dos códigos Aαβ, Bαβ, Cαβ e mais o livro de código DAA. Logo, sua ordem numérica na classificação é 676 + 676 + 676 + 2 = 2030.

Solução mais detalhada: O livro recebeu o código DAB depois de todos os demais livros, que receberam os códigos que:

i) iniciam com a letra A, a saber:

AAA, AAB, até AAZ, num total de 26 livros;

ABA, ABB, até ABZ, 26 livros;

...

AZA, AZB,...,AZZ, 26 livros.

Até este ponto foram codificados 26 x 26 = 676 livros.

ii) iniciam com a letra B, isto é, BAA, BAB,..., BAZ, BBA,..., BBZ,..,BZA, BZB,... BZZ, num total de 26 x 26 = 676 livros.

iii) iniciam com a letra C, de forma análoga, num total de 676 livros.

iv) iniciam finalmente com a letra D, totalizando somente dois livros: DAA e DAB (o último).

Portanto, o número de livros da biblioteca é 3 x 676 + 2 = 2030.

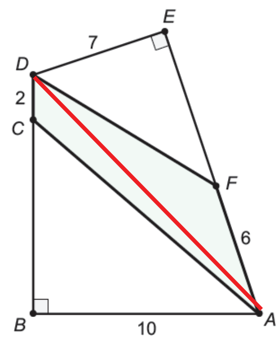
QUESTÃO 13
ALTERNATIVA A

Sejam *M* e *N* os dois números, sendo *M* o número que ao se retirar o último algarismo (o qual indicaremos por *b*) resulta no número *N*. Do enunciado, podemos concluir que $M + N = 1357$ e $M = 10N + b$. Portanto,

$$10N + b + N = 1357, \text{ ou seja, } 11N + b = 1357$$

Como 1357 deixa resto 4 na divisão por 11, temos que $11N + b = 11 \times 123 + 4$. Logo, $b - 4 = 11 \times 123 - 11N$. Portanto, $b - 4$ é múltiplo de 11. Como *b* é um algarismo, *b* só pode ser igual a 4.

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA C



A área do quadrilátero *ACDF* é a soma das áreas dos triângulos *ACD* e *ADF*. O triângulo *ACD* tem base *CD* = 2 e altura *AB* = 10 relativa à base *CD*, enquanto o triângulo *ADF* tem base *FA* = 6 e altura *DE* = 7 relativa à base *FA*. Logo, a área do triângulo *ACD* é (2 x 10) ÷ 2 = 10 e a área do triângulo *ADF* é (6 x 7) ÷ 2 = 21. Somando essas áreas, obtemos que o quadrilátero *ACDF* tem área 31.

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA D

Como o número total de bolas em cinco caixas consecutivas é sempre o mesmo, a quantidade de bolas da primeira até a quinta caixa deve ser igual à quantidade de bolas da segunda até a sexta caixa:

(nº de bolas na Caixa 1) + 5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) =

5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6)

Logo, (nº de bolas na Caixa 1) = (nº de bolas na Caixa 6).

Pelo mesmo motivo, começando da segunda caixa e depois na terceira caixa,

5 + 9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6) =

9 + 1 + (nº de bolas na Caixa 5) + (nº de bolas na Caixa 6) + (nº de bolas na Caixa 7).

Logo, o número de bolas na Caixa 7 é 5.

De modo análogo, vemos que o número de bolas da Caixa 8 é 9, o número de bolas na Caixa 9 é 1, que a Caixa 10 possui o mesmo número de bolas que o da Caixa 5 e a Caixa 11, o mesmo número de bolas que o da Caixa 6, o qual é igual ao número de bolas na Caixa 1, como vimos acima. As quantidades de bolas repetem-se a cada cinco caixas.

Na ilustração há a informação de que as caixas contendo 3 e 7 bolas são vizinhas; para que isto ocorra, a Caixa 1 deve conter 7 bolas e as caixas 5 e 6 devem conter, respectivamente, 3 e 7 bolas. Assim, os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3 ....

De fato, não pode ocorrer que a primeira caixa contenha 3 bolas, pois isto geraria a sequência 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7, ... e a ordem entre 3 e 7 seria incompatível com o que aparece na ilustração no enunciado.

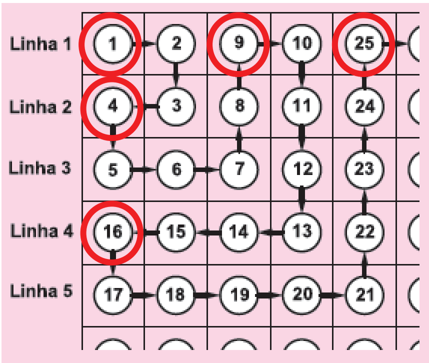
Para descobrir o conteúdo da Caixa 2016, fazemos a divisão de 2016 por 5; o resto é 1 e isto nos diz que o conteúdo da Caixa 2016 é o mesmo que o da Caixa 1, ou seja, que a Caixa 2016 contém 7 bolas.

Solução 2: (utilizando Álgebra)

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 os números de bolas distribuídas em seis caixas consecutivas, respectivamente. Como o número total de bolas em cincos caixas consecutivas é sempre o mesmo, segue que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ e, consequentemente, $x_1 = x_6$. Assim, caixas cujos números diferem por cinco unidades contêm o mesmo número de bolas. Como em duas caixas consecutivas aparecem 3 e 7 bolas, concluímos que os conteúdos das caixas formam a sequência 7, 5, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 3 ..., pois a outra possibilidade, 3, 5, 9, 1, 7, 3, 5, 9, 1, 7 ..., é incompatível com a informação da ilustração. Assim, a caixa de número 2016 contém a mesma quantidade de bolas que a Caixa 1, a saber, 7 bolas.

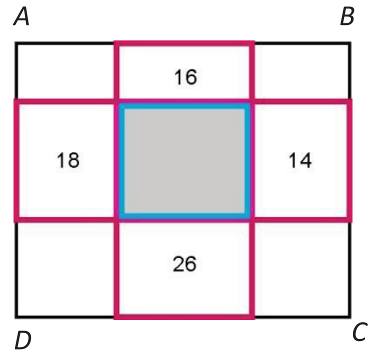
QUESTÃO 16
ALTERNATIVA B

Consideremos n um número inteiro positivo e, seguindo o padrão indicado pelas flechas, vamos acompanhar o preenchimento das n primeiras casas da tabela. Observemos que n será um quadrado perfeito somente no caso em que a tabela formada pelas casas preenchidas for quadrada. Isso ocorre apenas quando a última casa preenchida estiver na primeira coluna (quando n for par) ou na primeira linha (quando n for ímpar). Como $2016 = 2025 - 9 = 45^2 - 9$, observamos que 2016 aparecerá na 45ª coluna e 10ª linha, uma vez que $2025 = 45^2$ estará na 1ª linha e 2016 estará nove linhas abaixo.

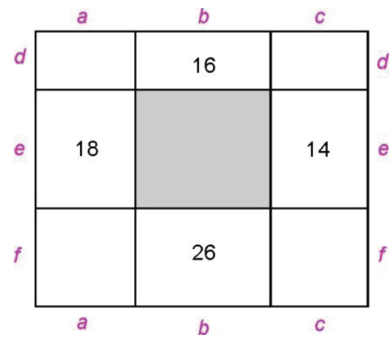


QUESTÃO 17

ALTERNATIVA C



1ª solução: O perímetro do retângulo maior *ABCD* é igual ao perímetro da figura em forma de cruz formada pelos cinco retângulos (os que possuem números marcados em seu interior e o retângulo cinza), como na ilustração ao lado. O perímetro dessa figura é igual à soma das medidas de todos os lados dos quatro retângulos externos, menos as de cada um de seus lados que coincidem com os lados do retângulo cinza. A soma das medidas de todos os lados desses quatro retângulos externos é 16 + 18 + 26 + 14 = 74 e o perímetro da figura em forma de cruz é 54, pois ele é igual ao perímetro do retângulo *ABCD.* Logo, o perímetro do retângulo cinza é 74 – 54 = 20 cm.



2ª solução (exige alguns conhecimentos de Álgebra):

As letras de *a* até *f* na figura são as medidas dos lados dos retângulos menores. Calculando o perímetro de cada um dos retângulos menores, temos:

$$2b+2d=16$$
$$2a+2e=18$$
$$2c+2e=14$$
$$2b+2f=26$$
$$2b+2e=?$$

O perímetro do retângulo maior *ABCD* é $2(a+b+c)+2(d+e+f)=2a+2b+2c+2d+2e+2f=54.$

Somando os perímetros dos quatro retângulos ao redor do retângulo central cujas medidas são dadas, temos:

$$2b+2d+2a+2e+2c+2e+2b+2f=\underbrace{2a+2b+2c+2d+2e+2f}_{\text{perímetro do retângulo maior}}+2b+2e$$

Assim, $16+18+14+26=54+2b+2e \Leftrightarrow 2b+2e=74-54=20$.

Portanto, o perímetro do retângulo cinza é 20 cm.

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA E

Solução 1: Uma sequência com três números é obtida após a aplicação de dois procedimentos a partir do primeiro número, finalizando no terceiro número igual a 1. Vamos fazer a contagem das sequências a partir da quantidade de algarismos do número inicial.

- **número inicial com 3 algarismos**: nesse caso o único procedimento usado foi o de apagar o algarismo das unidades (duas vezes, consecutivamente). Nesta situação, o número inicial é ímpar (5 possibilidades para o algarismo das unidades), com o algarismos das dezenas também ímpar (também 5 possibilidades para o algarismo das dezenas), e com o algarismo das centenas igual a 1 (acima de 199, não obtemos o 1 como terceiro número aplicando apenas 2 procedimentos). Assim, existem 5 x 5 x 1 = 25 números de três algarismos que geram uma sequência formada por três números.
- **número inicial com 2 algarismos**: necessariamente usamos dois procedimentos diferentes para formá-la: apagamos os algarismos das unidades (se iniciar por um ímpar) ou dividimos por 2 (se iniciar por um par), nessa ordem ou vice-versa.
  - Se o primeiro número for ímpar, o algarismo das dezenas é 2 (pois deve ser o resultado obtido após apagar o seu algarismo das unidades). Nesse caso, temos 5 possibilidades.

- Se o primeiro número for par, o segundo é a sua metade. Nesse caso, o segundo termo deve ser ímpar (para usarmos, em continuação, o procedimento de apagar o algarismo das unidades). Como, após apagar as unidades, devemos obter 1, o número obtido no estágio intermediário é ímpar entre 10 e 20. Nesse caso, também temos 5 possibilidades.

Assim, existem 5 + 5 = 10 números de dois algarismos que geram uma sequência formada por três números.

- **número inicial com 1 algarismo**: temos duas sequências, uma com o número inicial igual a 4 e outra iniciando por 3.

Logo, o número de sequências formadas por três números é 25 + 10 + 2 = 37.

A tabela abaixo mostra as possíveis sequências formadas por três números. Para isso, usamos as letras u e d, para representar, respectivamente, o algarismo das unidades e das dezenas do número inicial.

Número inicial	Observação	1º procedimento	Número intermediário	2º procedimento	Quantidade de sequências
1du	d e u ímpares	apaga unidade	1d	apaga unidade	5 x 5 = 25
2u	u ímpar	apaga unidade	2	divide por 2	5
du	u par	divide por 2	ímpar entre 10 e 20	apaga unidade	5
u=4		divide por 2	2	divide por 2	1
u=3		soma 1 e divide por 2	2	divide por 2	1
total de sequências					37

Solução 2: As sequências descritas no enunciado que começam com números de apenas um algarismo são:

2→1, 3→2→1, 4→2→1, 5→3→2→1, 6→3→2→1, 7→4→2→1 e 8→4→2→1 e 9→5→3→2→1.

Destas, somente duas têm três termos: a que começa com 3 e a que começa com 4.

Há apenas as seguintes sequências com dois termos: 2→1, 11→1, 13→1, 15→1, 17→1 e 19→1. Utilizando-as, há dois procedimentos para se obter sequências com três termos:

1) Colocando-se como primeiro termo da sequência o dobro dos números iniciais das sequências com dois termos exibidas acima:

4→2→1, 22→11→1, 26→13→1, 30→15→1, 34→17→1 e 38→19→1.

Observe que 4→2→1 já havia sido contada antes e, portanto, no total, até agora, temos sete sequências de três termos.

2) Colocando-se como primeiro termo da sequência números iniciados com 2 (ou seja, com 2 na casa das dezenas) ou 11, 13, 15, 17 ou 19 (ou seja, com 1 na casa das centenas e um algarismo ímpar na casa das dezenas) e terminados com um número ímpar na casa das unidades:

21→2→1, 23→2→1, 25→2→1, 27→2→1, 29→2→1

111→11→1, 113→11→1, 115→11→1, 117→11→1, 119→11→1

131→13→1, 133→13→1, 135→13→1, 137→13→1, 139→13→1

151→15→1, 153→15→1, 155→15→1, 157→15→1, 159→15→1

171→17→1, 173→17→1, 175→17→1, 177→17→1, 179→17→1

191→19→1, 193→19→1, 195→19→1, 197→19→1, 199→19→1

Assim, ao todo temos 7 + 30 = 37 sequências de três termos.

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA D

O problema pede que encontremos dois números consecutivos cujas somas de seus algarismos seja um múltiplo de 5. Isto implica que a diferença entre as somas dos algarismos dos números consecutivos deve ser um múltiplo de 5.

Se a unidade de um número for diferente de 9, temos que a diferença entre as somas de seus algarismos com a soma dos algarismos de seu sucessor é sempre 1; por exemplo, somando os algarismos de 24 obtemos $2 + 4 = 6$ e, somando os algarismos de 25, obtemos $2 + 5 = 7$. Isto ocorre, pois a unidade é acrescida de 1 quando tomamos o sucessor e os outros algarismos não se alteram. Isto restringe nosso trabalho em encontrar números consecutivos que terminem, respectivamente, em 9 e 0 e atendam as exigências do enunciado.

Se a unidade de um número for 9, mas sua dezena for diferente de 9, a diferença entre as somas dos algarismos dos números consecutivos será 8, pois, ao considerarmos a alteração que ocorre quando passamos de um número terminado em 9 para o seu consecutivo, vemos que a unidade 9 se transforma em 0 e ocorre o aumento de 1 na dezena; por exemplo, 29 tem 11 como soma de seus algarismos e seu sucessor, 30, tem 3 como soma de seus algarismos. Neste caso, a diferença entre as somas dos algarismos dos números consecutivos é igual a 8 e, portanto, esses números não atendem o enunciado.

Se a unidade e a dezena de um número forem iguais a 9, mas a centena for diferente de 9, com o mesmo raciocínio, a diferença entre as somas dos algarismos dos consecutivos será de 17, pois, ao considerarmos a alteração que ocorre, passamos de um número deste tipo, terminado em 99 com centena diferente de 9, para o seu consecutivo, vemos que os dois algarismos 9 finais viram 0 e que a centena é acrescida de 1; por exemplo, 399 tem soma de seus dígitos igual a 21 e 400 tem soma de seus algarismos igual a 4. Neste caso, também, a diferença entre as somas dos algarismos dos números consecutivos não é múltiplo de 5 e esses números não servem.

Do mesmo modo, para um número com três noves no final, mas com algarismo da casa de milhar diferente de 9, teremos uma diferença entre as somas dos algarismos dos números consecutivos igual a $3 \times 9 - 1 = 26$ (também não servem), mas, com quatro noves no final e dezena de milhar diferente de 9, essa diferença é $4 \times 9 - 1 = 35$, a qual, felizmente, é múltiplo de 5.

Só nos resta encontrar o menor número desse tipo que atenda as exigências do enunciado. Este número deve terminar com 9999 e a soma de seus dígitos deve ser múltiplo de 5. Como $4 \times 9 = 36$, devemos procurar o menor número que, somado a 36, resulte em um múltiplo de 5. Este número é 4 e, portanto, o menor número com as propriedades especificadas no enunciado é 49999. Assim, 49999 e 50000 são o penúltimo e o último números da lista de Juliana.

Portanto, a soma dos algarismos do penúltimo número da lista de Juliana é $4 \times 9 + 4 = 40$.

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA C

Vamos primeiro contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas, incluindo o pacote sem nenhuma figurinha. Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo princípio multiplicativo, isso pode ser feito de 6 x 7 x 5 = 210 maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número que figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote.

Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo (na segunda coluna, usamos letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia, respectivamente):

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		1 + 3 + 6 = 10

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é 210 – 10 = 200.

Outra solução: Um pacote com pelo menos três figurinhas poderá conter figurinhas com as três bandeiras diferentes, ou figurinhas com somente duas das bandeiras ou ainda figurinhas com apenas uma das bandeiras. Vamos fazer a contagem do número de pacotes distintos que podem ser feitos em cada um desses casos, com atenção para que sempre os pacotes contenham, no mínimo, três figurinhas.

1. Pacotes de figurinhas com as três bandeiras diferentes

Bruno tem 5 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira da Alemanha que poderá colocar em um pacote: A, AA, AAA, AAAA, AAAAA. Da mesma forma, terá 6 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira do Brasil e 4 para figurinhas com a bandeira da Colômbia.

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas com as três bandeiras diferentes será 5 x 6 x 4 = 120.

2. Pacotes de figurinhas com todas as figurinhas com a mesma bandeira

O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas e todas as figurinhas no pacote com a mesma bandeira é 3 + 4 + 2 = 9 (AAA, AAAA, AAAAA, BBB, BBBB, BBBBB, BBBBBB, CCC e CCCC).

3. Pacotes de figurinhas com bandeiras de exatamente dois países

Se os países forem, por exemplo, Alemanha e Brasil, teremos 5 x 6 – 1 possibilidades, já que os pacotes devem conter pelo menos três figurinhas, e precisamos desconsiderar o pacote que tem apenas uma figurinha com a bandeira da Alemanha e uma do Brasil. A mesma contagem para as outras duplas (Alemanha-Colômbia e Brasil-Colômbia) nos dará, neste caso, o número de pacotes procurado:

(5 x 6 – 1) + (5 x 4 – 1) + (6 x 4 - 1) = 29 + 19 + 23 = 71.

Somando os valores obtidos nas três contagens parciais, teremos 120 + 9 + 71 = 200 pacotes distintos.