Nível 1

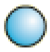
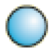
6.º e 7.º anos do Ensino Fundamental

1.ª Fase – 6 de junho de 2017

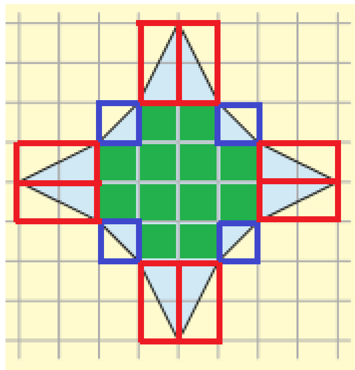
13ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2017
Somando novos talentos para o Brasil

Solução da prova da 1.ª Fase

QUESTÃO 1
ALTERNATIVA A

Observamos na primeira balança que o objeto  tem o mesmo peso que a soma dos pesos de  e . Consequentemente, o peso de  é maior do que o peso de cada um dos outros dois objetos. A segunda balança evidencia que o peso de  é maior do que o peso de . Logo,  é o mais pesado dentre os quatro objetos verificados até este momento. Por outro lado, a terceira indica que  é mais pesado do que . Portanto,  é o mais pesado dentre os cinco objetos avaliados. Evidentemente a expressão “pesos iguais” indica “massas iguais”.

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA B

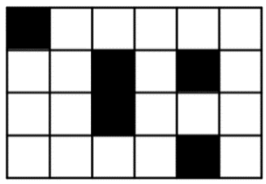


Observe que a figura é formada por quadradinhos inteiros, em verde; por metades de 1 quadradinho, assinalados em azul; e por metades de retângulos formados por dois quadradinhos, assinalados em vermelho. Cada uma dessas áreas vale 1, 1/2 e 1 da área de um quadradinho, respectivamente. Logo, a área total da figura equivale a

$$12 + 4 \times (1/2) + 8 \times 1 = 22$$

quadradinhos.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA C



A figura apresentada tem um total de 24 quadradinhos. Para que o número de quadradinhos pretos seja o dobro do número de quadradinhos brancos, os quadradinhos pretos devem representar 2/3 do total, que correspondem a 16 quadradinhos, e os brancos 1/3 do total, que correspondem a 8 quadradinhos. Como na figura original há 5 quadradinhos pretos, é preciso pintar de preto 16 – 5 = 11 quadradinhos.

<u>Outra solução</u>: Uma forma de pintar os quadradinhos de modo que o número de pretos seja o dobro do de brancos é fazer com que isto ocorra em cada linha, ou seja, de modo que cada linha tenha 4 quadradinhos pretos e 2 brancos. Para tal, é preciso pintar nas sucessivas linhas 3, 2, 3 e 3 quadradinhos (um total de 11 quadradinhos) para que o número de quadradinhos pretos passe a ser o dobro do número de quadradinhos brancos.

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA D

Para obter o maior resultado possível, devemos fazer com que os termos que contribuem positivamente na conta sejam os maiores possíveis e o termo que contribui negativamente seja o menor possível. Como estamos usando o sistema de numeração posicional decimal, na primeira parcela da conta devemos colocar o maior dos algarismos disponíveis na casa das centenas (o algarismo 8):

$$\boxed{8}\,\boxed{}\,\boxed{} + \boxed{}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

A seguir, colocamos o segundo maior algarismo na casa das dezenas (o 7). Há duas possibilidades:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{} + \boxed{}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{}\,\boxed{} + \boxed{7}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

Agora, em cada uma dessas possibilidades, colocamos o algarismo 6, ainda na casa das dezenas:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{} + \boxed{6}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{} + \boxed{7}\,\boxed{} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

Continuando, precisamos colocar os algarismos 4 e 5; na primeira das possibilidades acima, há duas maneiras de fazer isto:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{5} + \boxed{6}\,\boxed{4} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{4} + \boxed{6}\,\boxed{5} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

e, no outro caso, também há duas possibilidades:

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{5} + \boxed{7}\,\boxed{4} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

ou

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{4} + \boxed{7}\,\boxed{5} - \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

Basta agora completar o termo negativo com os algarismos 1, 2 e 3. Em suma, o maior resultado possível pode ser obtido de quatro maneiras diferentes:

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{5} + \boxed{6}\,\boxed{4} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

$$\boxed{8}\,\boxed{7}\,\boxed{4} + \boxed{6}\,\boxed{5} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{5} + \boxed{7}\,\boxed{4} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

$$\boxed{8}\,\boxed{6}\,\boxed{4} + \boxed{7}\,\boxed{5} - \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}$$

e o resultado final da conta é sempre o mesmo: 816.

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA E
No gráfico de barras, temos as seguintes informações:

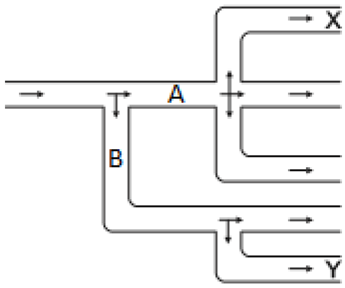
- Quantidade de alunos que dedicam à leitura menos do que 20 minutos: 90.
- Quantidade de alunos que dedicam à leitura de 20 minutos a 40 minutos: 60.
- Quantidade de alunos que dedicam à leitura mais do que 40 minutos: 30.
- TOTAL DE ALUNOS: 90 + 60 + 30 = 180.

Alunos que dedicam à leitura no máximo 40 minutos: 90 + 60 = 150.
Fração dos alunos que dedicam à leitura no máximo 40 minutos em relação ao total de alunos:

$$\frac{150}{180}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}>\frac{3}{4}.$$

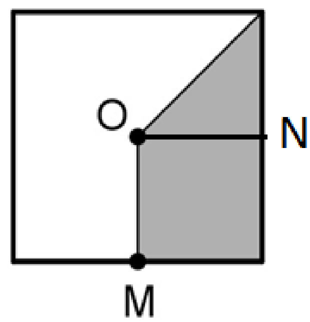
Logo, o setor correspondente é o da letra E.

QUESTÃO 6
ALTERNATIVA C



Como indicado na figura ao lado, vamos chamar de A o cano que se ramifica em três saídas, sendo uma delas a saída X, e de B o cano que se ramifica em duas saídas, sendo uma delas a saída Y. Como a água que passa pelos canos distribui-se igualmente em cada ramificação, pelo cano A passa, por hora, 3 vezes a quantidade de água que passa pela saída X, enquanto pelo cano B passa, por hora, 2 vezes a quantidade de água que passa pela saída Y. Como os canos A e B são as únicas saídas de uma mesma ramificação, a quantidade de água que passa por eles em uma hora é a mesma. Assim, 3 vezes a quantidade de água que passa por hora pela saída X é igual a 2 vezes a quantidade de água por hora que passa pela saída Y. Mas, a quantidade de água que passa por X é 200 mil litros; logo, a quantidade de água que passa pela saída Y por hora é a metade de 600 mil litros, ou seja, 300 mil litros.

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA D



Podemos decompor a figura sombreada em um quadrado e um triângulo, traçando um segmento de O até o ponto médio N do lado do quadrado, conforme indicado na figura. Assim, a área da região sombreada é igual a (1/4) + (1/8) da área do quadrado com centro em O, ou seja, a área sombreada é igual a 5 + 2,5 = 7, 5 cm^2.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA B
Para calcular o perímetro da figura, observamos que o contorno é formado por dois segmentos cujas medidas são 100 cm e 20 cm, um conjunto de segmentos horizontais (que estão acima da base de 100 cm) e um conjunto de segmentos verticais (que estão à esquerda do lado do quadrado maior de 20 cm). A soma dos comprimentos dos segmentos horizontais corresponde à soma dos comprimentos dos lados dos quadrados que foram dispostos lado a lado na parte inferior da figura, e essa soma é 100 cm. Por outro lado, a soma dos comprimentos dos segmentos verticais é igual ao comprimento do lado do quadrado maior, isto é, 20 cm.
O perímetro é, portanto, 100 + 20 + 100 + 20 = 240 cm.

QUESTÃO 9
ALTERNATIVA D

Usando a figura, e lembrando que o sentido da contagem muda aos serem falados os números 7, 14, 21, 28, podemos verificar que os números a serem falados por Ana e Beatriz serão:
Ana: 1, 6, 8, 13, 15, 20, 22, 27, 29, ...
Beatriz: 2, 7, 12, 16, 21, 26, 30, ...
Como a contagem 29, 30, 31, 32 será feita no sentido horário, concluímos que Carolina dirá o número 31 e Diana falará o número 32.

<u>Outra solução</u>: Como o sentido muda em Beatriz ao dizer 7, muda em Elaine ao dizer 14, muda em Beatriz ao dizer 21, muda em Elaine ao dizer 28, voltando ao sentido horário, Ana dirá 29, Beatriz 30, Carolina 31 e Diana 32.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA B

A soma dos números dos cartões de Ana é 7, logo, ela pegou os cartões de números 1, 2 e 4, pois esta é a única possibilidade de decomposição do número 7 como soma de três parcelas diferentes, cada uma delas compreendida de 1 a 9. Como 23 é ímpar, temos as seguintes alternativas para os números dos cartões de Beto:

- Os três números são ímpares. Isso é impossível, pois a maior soma possível, nesse caso, é 5 + 7 + 9 = 21, menor do que 23.
- Um número é ímpar e os outros dois são pares: como Ana está com os cartões de números 2 e 4, a única possibilidade é Beto ter pego os cartões de números 6, 8 e 9.

Então, na mesa ficaram os cartões de números 3, 5 e 7. A diferença entre o maior e o menor deles é 7 – 3 = 4.

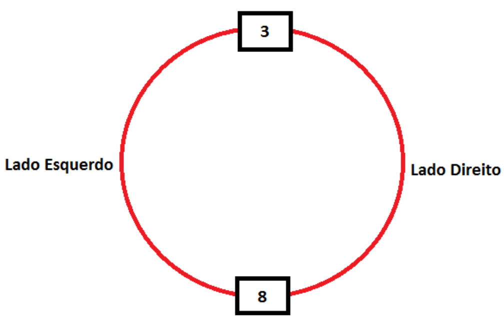
<u>Outra solução</u>: A soma máxima de três cartas é 9 + 8 + 7 = 24. Se a soma de Beto é 23, então, ele tem necessariamente as cartas 9, 8 e 6. A soma mínima de três cartas é 1 + 2 + 3 = 6. Se a soma de Ana é 7, então, ela tem necessariamente 1, 2 e 4. Portanto, na mesa temos as cartas 3, 5 e 7, e a diferença entre a maior e a menor é 7 – 3 = 4.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA E

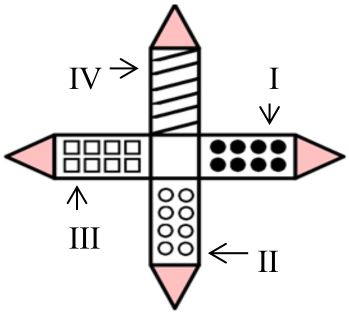
Para obter 30 litros de tinta marrom, precisaremos de 15 litros de cada uma das cores laranja e verde. A primeira condição nos diz que, para obter essa quantidade de tinta laranja, precisaremos da fração $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$ litros de tinta amarela. Da mesma forma, a segunda condição nos diz que, para obter 15 litros de tinta verde, precisaremos da fração $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$ litros de tinta amarela. Portanto, a quantidade total de tinta amarela necessária é $5 + 6 = 11$ litros.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA B

A figura ao lado ilustra a roda-gigante descrita pelo enunciado. Imaginando que os bancos estejam numerados no sentido horário, então os bancos 4, 5, 6 e 7 deverão estar no lado direito da roda-gigante e, como os bancos são igualmente espaçados, deverá haver outros quatro bancos do lado esquerdo.
Logo, o total de bancos é 2 + 4 + 4 = 10 bancos.



QUESTÃO 13
ALTERNATIVA A



Se numerarmos com I, II, III e IV as faces da figura na ordem em que elas serão coladas na montagem, como na figura, podemos verificar se, em cada imagem, as faces visíveis estão representadas adequadamente.
Na Imagem 1, temos coladas corretamente as faces I e IV; na Imagem 2, aparecem coladas as faces II e IV, o que é incorreto, pois elas são opostas; a Imagem 3 nos apresenta corretamente coladas as faces I e II, o que está correto; na Imagem 4, temos coladas as faces I e IV, mas a posição das faces está incorreta (é importante aqui observar a inclinação dos segmentos de reta da face IV); finalmente, na Imagem 5, temos corretamente coladas as faces III e IV. Portanto, somente as imagens 1, 3 e 5 podem representar a torre em miniatura montada por Pedro.

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA D
As quantidades de pessoas nas fileiras à frente e atrás de Mônica são múltiplas da quantidade de cadeiras de cada fileira e, como o casal sentou lado a lado, cada fileira deve ter mais do que uma cadeira. O único divisor comum de 14 e 21 que é maior do que 1 é 7 e, assim, podemos concluir que na frente de Mônica havia 2 fileiras e que atrás dela havia 3 fileiras, cada uma com 7 lugares e totalmente preenchidas. Contando ainda com a fileira em que ela estava, obtemos 14 + 21 + 7 = 42 lugares no auditório.

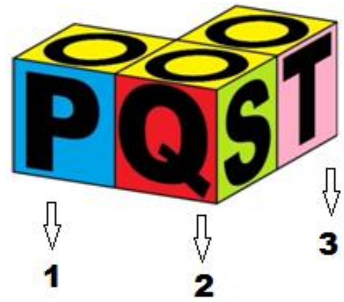
QUESTÃO 15
ALTERNATIVA C
Na conta, temos: 5 x GOTA = AGUA; olhando para as casas das unidades, como A é um algarismo, concluímos que A = 0 ou A = 5.
Como o resultado AGUA começa com A, então A = 5, pois senão G=0; além disso, zeros à esquerda de um número não são escritos.
Olhamos agora para as casas dos milhares. Temos que 5 x G ≤ A. Como A = 5 e G é um algarismo diferente de zero, então G = 1. Deste modo, até agora, a conta tem o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & 2 & \\
 & 1 & \mathbf{O} & \mathbf{T} & 5 \\
 & 1 & \mathbf{O} & \mathbf{T} & 5 \\
 & 1 & \mathbf{O} & \mathbf{T} & 5 \\
 & 1 & \mathbf{O} & \mathbf{T} & 5 \\
+ & 1 & \mathbf{O} & \mathbf{T} & 5 \\
\hline
 & 5 & 1 & \mathbf{U} & 5
\end{array}$$

O algarismo que O representa só pode ser igual a 0. Não pode ser igual a 1 pois letras diferentes representam algarismos diferentes e não pode ser maior do que 1 pois não existe o transporte de valores das centenas para a casa dos milhares (o “vai um”), já que 5 x G = 5 x 1 = 5 = A.
Analisando agora a casa das dezenas, concluímos que 10 ≤ 5 x T + 2 < 20, pois deve haver o transporte de uma unidade da casa das dezenas para a das centenas, já que 5 x O + 1 = 5 x 0 + 1 = 1 = G.
Assim, só há duas possibilidades para T: ou T = 2 ou T = 3.
Se T = 2, então 5 x T + 2 = 12 e U = T = 2, teríamos algarismos iguais para letras diferentes e essa possibilidade não serve.
Se T = 3, então 5 x T + 2 = 17, de onde se conclui que U = 7. Esta é a solução procurada e a conta completa é a seguinte:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & 2 & \\
 & 1 & 0 & 3 & 5 \\
 & 1 & 0 & 3 & 5 \\
 & 1 & 0 & 3 & 5 \\
 & 1 & 0 & 3 & 5 \\
+ & 1 & 0 & 3 & 5 \\
\hline
 & 5 & 1 & 7 & 5
\end{array}$$

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA A



Como as letras **P**, **Q**, **S** e **T** estão visíveis na ilustração, essas são as faces adjacentes à face com a letra **O**, e a face oposta à letra **O** é a face com a letra **R**. As faces em contato entre os dados 1 e 2 não podem ser **P** (visível na ilustração do dado 1), nem **Q** ou **S** (visíveis na ilustração do dado 2). Portanto, tem que ser **T**. Olhando para o dado 2, concluímos que a face com **S** é oposta à face com **T**.

<u>Outra solução</u>: A letra **O** possui quatro faces vizinhas com as letras **P**, **Q**, **S** e **T**. Primeiramente observe que Zequinha juntou o dado 2 com o dado 3 pela face **P**, pois esta mesma face não pode estar na junção do dado 2 com o dado 1, que possui a face **P** visível. Logo, os dados 1 e 2 foram juntados pela face **T**. Assim, **S** e **T** são faces opostas, o que responde à questão. É claro também que **P** é oposta a **Q**, bem como **R**, que não aparece na ilustração, é oposta a **O**.

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA D

Há vários números que Cecília pode ter digitado, como 920179 ou 299017. Devemos enumerar quantos casos possíveis existem. Para isso, podemos usar a seguinte estratégia: dada uma sequência de 6 algarismos, decidir onde os algarismos 9 deveriam estar. Uma vez decidido, os algarismos 2, 0, 1 e 7 preenchem as posições restantes, nessa ordem.
Há 6 posições para colocarmos o primeiro número 9. Feito isto, há cinco posições para colocarmos o segundo número 9, o que dá um total de 6 x 5 = 30 escolhas; entretanto, como esses dois números 9 são indistinguíveis, devemos dividir o resultado por 2. Assim há 30 ÷ 2 = 15 possibilidades para a digitação de Cecília.

<u>Outra solução</u>: Podemos dividir o problema em dois casos: quando os dois 9´s aparecerem juntos ou quando eles ficarem separados. Observe o esquema:

__ 2__0__1__7__

No primeiro caso, podemos colocar dois 9´s juntos em qualquer dos espaços vazios (5 possibilidades). No segundo caso, escolhemos primeiramente um lugar para colocar o primeiro dos números 9 (5 possiblidades) e, a seguir, um lugar para colocar o segundo número 9 (4 possibilidades). Há nesse caso, então, 5 x 4 = 20 possibilidades; porém, como os dois números 9 são indistinguíveis, devemos dividir esse resultado por 2. Conclusão: há 10 possibilidades para o caso dos 9´s aparecerem separados. Logo, no total teremos 5 + 10 = 15 possibilidades.
Note que esse problema também pode ser resolvido por meio de uma listagem organizada:
992017, 929017, 920917, 920197, 920179
299017, 290917, 290197, 290179
209917, 209197, 209179
201997, 201979 e
201799,
fornecendo os 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 possíveis números digitados por Cecília.

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA A

O maior número da primeira coluna é 20, o que mostra que o 6.º A tem pelo menos 20 alunos. Do mesmo modo, vemos que o 6.º B e o 6.º C têm no mínimo 20 e 14 alunos, respectivamente. Segue que o número mínimo possível de alunos do 6.º ano dessa escola é 20 + 20 + 14 = 54. Em outras palavras, concluímos que o número de alunos do 6.º ano é maior do que ou igual a 54.
É interessante mostrar que a tabela acima pode vir de uma turma de 6.º ano com exatamente 54 alunos. Isso acontece quando a turma do 6.º A tem 20 alunos, dos quais todos escolheram banana, 18 escolheram banana e laranja e 12 escolheram as três frutas; a turma do 6.º B tem 20 alunos, dos quais todos escolheram maçã, 15 escolheram banana e maçã e 5 escolheram as três frutas; e a turma do 6.º C tem 14 alunos, dos quais todos escolheram banana, 12 escolheram banana e maçã e 10 escolheram as três frutas.
Observamos agora que o maior número possível de alunos do 6.º A é $20 + 12 + 18 = 50$; analogamente, o 6.º B e o 6.º C têm no máximo $15 + 20 + 5 = 40$ e $14 + 12 + 10 = 36$ alunos, respectivamente. Segue que o número máximo possível de alunos do 6.º ano é $50 + 40 + 36 = 126$.
Essa conclusão diz que o número de alunos do 6.º ano é menor do que ou igual a 126. Uma turma de 6.º ano com exatamente 126 alunos na qual a pesquisa tenha tido o resultado da tabela acontece quando a turma do 6.º A tem 50 alunos, a turma do 6.º B tem 40 e a turma do 6.º C tem 36, sendo que cada aluno escolheu uma única fruta.

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA C

Durante a partida foram formadas várias equipes de 5 atletas, até o tempo acabar. Observamos que:

- a quantidade de tempo que o atleta 1 jogou (T1) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S1),
- a quantidade de tempo que o atleta 2 jogou (T2) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S2),

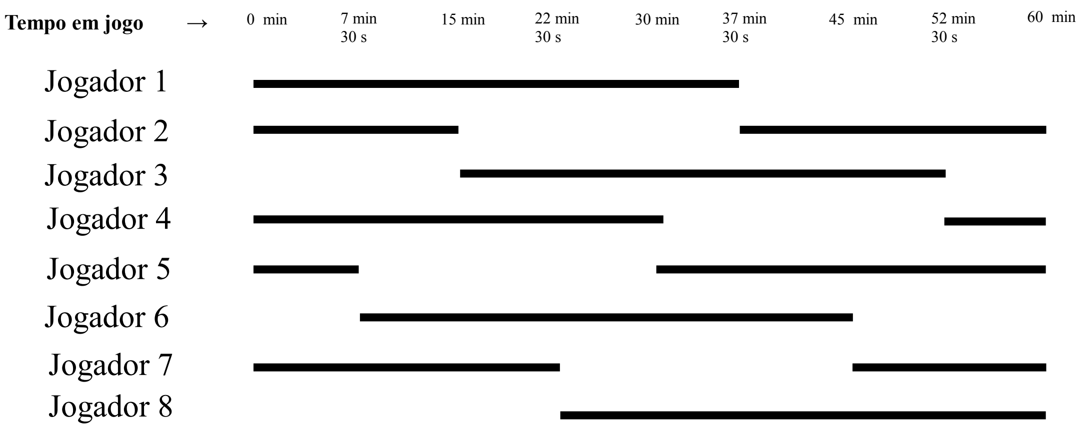
e assim por diante, até o oitavo jogador:

- a quantidade de tempo que o atleta 8 jogou (T8) é igual à soma dos tempos em jogo de cada uma das equipes de 5 de que ele participou (S8).

Cada atleta jogou a mesma quantidade de tempo (T1 = T2 = T3 = T4 = T5 = T6 = T7 = T8); logo, o tempo que cada um jogou é (S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8) ÷ 8.

Agora, notamos que na soma S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8 o tempo de jogo de cada equipe de 5 formada é somado 5 vezes. Por exemplo, se os atletas 1, 2, 3, 4 e 5 formaram uma equipe em campo, o tempo que essa equipe jogou foi considerado nas somas S1, S2, S3, S4 e S5. Assim, S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8 = 5 x 60 = 300, de onde concluímos que o tempo que cada um jogou é 300 ÷ 8 minutos, o que corresponde a 37 minutos e 30 segundos.

Como curiosidade, observe no diagrama abaixo como poderia ter sido realizada uma partida nos moldes do enunciado:



<u>Outra solução</u>: Imagine que pagamos, em dinheiro, cada atleta proporcionalmente ao tempo que ele jogou. Se ele jogou um tempo T recebe k × T. Como, a cada instante, temos 5 atletas em campo, no fim do jogo, teremos que pagar no total k × 5 × 60 = 300 k. Se cada um deles jogou o mesmo tempo, então receberá o mesmo pagamento que os demais. Como são 8 atletas, o soldo de cada um será 300 × k/8. Para saber quanto tempo ele jogou, basta dividir por k, o que nos fornece (300 × k) / (8 × k) = 300/8 minutos.

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA E

Observamos primeiro que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; por exemplo, ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 amarela. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue.

Ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma 1.ª cor. De fato, se isso não acontecesse, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo $23 - 10 = 13$ bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma 2.ª cor e que sobram no mínimo $13 - 10 = 3$ bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelos menos 2 bolas de uma 3.ª cor.

Mostramos, assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma 1.ª cor, 5 de uma 2.ª cor e 2 de uma 3.ª cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da 1.ª cor, 2 da 2.ª e 2 da 3.ª. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Observação geral: O argumento empregado nessa solução pode ser formalizado como segue: se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e sua média aritmética é m, isto é, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = m$, então, ou $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = m$ ou existe pelo menos um índice i tal que $a_i < m$ e pelo menos um índice j tal que $a_j > m$. No nosso caso, fizemos uma escolha de a_1 bolas verdes, a_2 bolas amarelas, a_3 bolas azuis e a_4 bolas vermelhas tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 23$; temos $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{23}{4} > 5$. Segue que existe pelo menos um i tal que $a_i > 5$, e, como a_i é um número inteiro, temos $a_i \geq 6$; em outras palavras, entre as 23 bolas existem pelo menos 6 de uma mesma cor, e analogamente para o restante da solução. A demonstração do fato geral do início desse parágrafo é inteiramente análoga à do caso particular que acabamos de analisar.