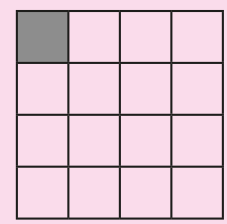
19ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP-IMPA 2024
Somando novos talentos para o Brasil

Nível 2
8º e 9º anos do Ensino Fundamental
1ª Fase - 04 de junho de 2024

Solução da prova da 1ª Fase

QUESTÃO 1 – ALTERNATIVA A

Solução: No total são 16 quadrados de lado 1, 9 quadrados de lado 2, 4 quadrados de lado 3 e 1 quadrado de lado 4. Desse total, 4 quadrados contêm o quadradinho cinza: um de lado 4, um de lado 3, um de lado 2 e o próprio quadradinho.

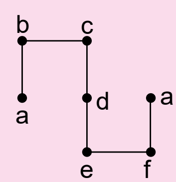


Temos, então, que a quantidade total procurada é:

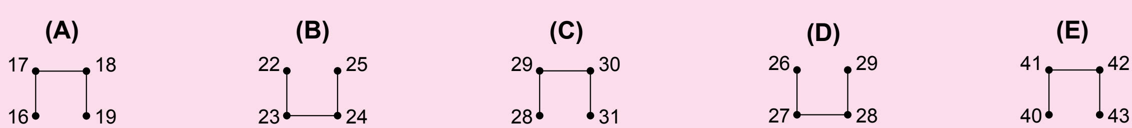
(16 + 9 + 4 + 1) – (1 + 1 + 1 + 1) = 30 – 4 = 26.

QUESTÃO 2 – ALTERNATIVA B

Solução: O padrão da linha zigue-zague é:



Observe que nas posições marcadas com **a** deve aparecer um múltiplo de 6 mais 1 e, nas posições **f**, um múltiplo de 6.



Analisando as opções, a única correta é a que tem o 24 na posição **f** e o 25 na posição **a**. De fato, as alternativas (A), (C) e (E) são imediatamente descartadas, pois 16, 28 e 40 não são múltiplos de 6 mais 1. A alternativa (D) também deve ser descartada pois 28 não é múltiplo de 6.

QUESTÃO 3 – ALTERNATIVA A

Solução: Como o algarismo das unidades de 2331 é 1, segue que $A + B + C + D$ tem 1 como seu algarismo das unidades. Por outro lado, o algarismo dos milhares de 2331 é 2, o que mostra que “vai 2” quando se efetua a soma $A + B + C + D$ na casa das centenas. Logo $A + B + C + D = 21$.

Outra solução: Seja $x = A + B + C + D$. A resultado da conta armada pode ser escrito como $100x + 10x + x = 2331$, ou seja, $111x = 2331$. Logo $x = \frac{2331}{111} = 21$.

QUESTÃO 4 – ALTERNATIVA E

Solução: A região triangular cinza pode ser decomposta em dois triângulos menores, usando o segmento vermelho, como mostrado na Figura 1.

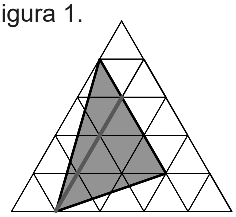


Figura 1

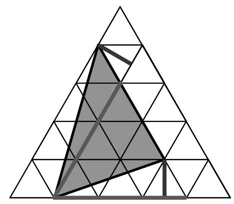


Figura 2

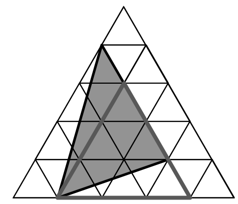
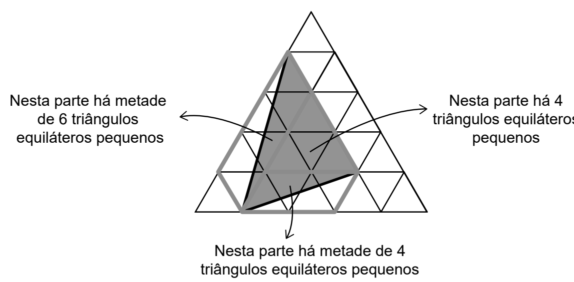


Figura 3

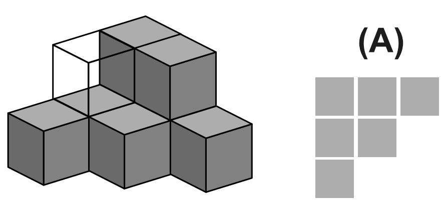
O menor desses triângulos possui a mesma área do triângulo destacado na parte inferior da Figura 2, pois ambos têm a medida da base igual à de três lados de triângulos equiláteros pequenos da malha e alturas, destacadas em azul, de medida igual à altura de um triangulo equilátero pequeno da malha. Portanto, a região cinza tem a mesma área do triângulo equilátero destacado na Figura 3, formado por 9 triângulos equiláteros pequenos da malha, cada um com área igual a 1 cm². Logo, a área da região cinza é igual a 9 cm².

Outra solução:

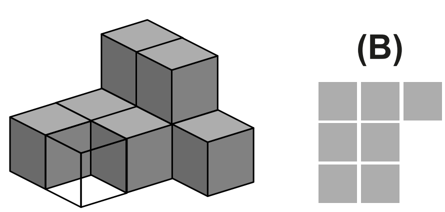


QUESTÃO 5 – ALTERNATIVA D

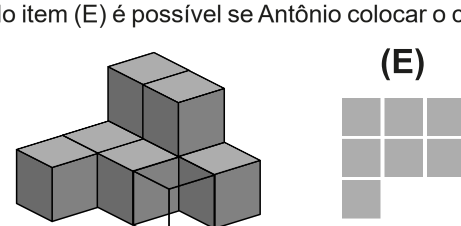
Solução: A visualização do item (A) é possível se Antônio colocar o cubinho em cima de qualquer cubinho da figura. Por exemplo,



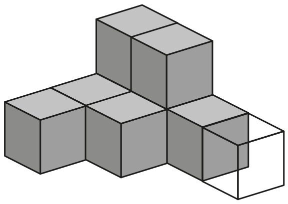
A visualização do item (B) é possível se Antônio colocar o cubinho no chão, ao lado de dois cubinhos.

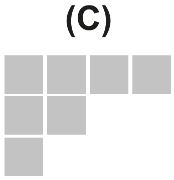


Analogamente, a visualização do item (E) é possível se Antônio colocar o cubinho no chão, ao lado de dois cubinhos.



A visualização do item (C) é possível se Antônio colocar o cubinho no chão, na fileira com três cubinhos que tem dois cubinhos em cima dos dois primeiros, e colocando o cubinho novo ao lado do cubinho desta fileira que não tem cubinhos em cima dele.

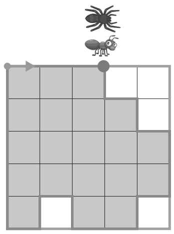




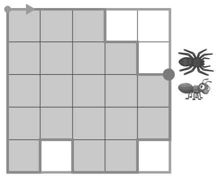
A visualização do item (D) não é possível pois Antônio precisaria colocar dois cubinhos no chão, e ele coloca somente um cubinho.

QUESTÃO 6 – ALTERNATIVA D

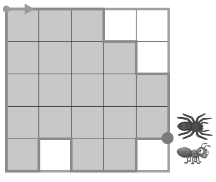
Solução: A formiga e a aranha começam a caminhar juntas e permanecem desta forma até chegarem ao quarto quadradinho da malha, destacado na imagem a seguir.



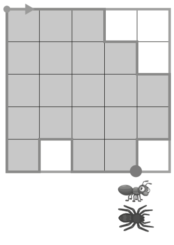
A partir desse ponto, elas andam separadas quatro lados de quadradinho da malha cada uma e se reencontram no ponto destacado a seguir.



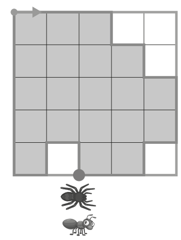
Em seguida, elas caminham juntas mais dois lados de quadradinho da malha e se separam no ponto destacado a seguir.



A partir desse ponto, elas andam separadas mais dois lados de quadradinho da malha cada uma e se reencontram no ponto destacado a seguir.



Depois, elas percorrem juntas mais dois quadradinhos da malha, chegando no ponto destacado a seguir.

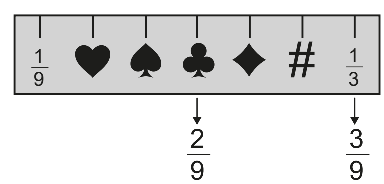


A partir desse ponto, elas não andam mais juntas: enquanto a formiga vai direto para o próximo ponto na borda do quadriculado, a aranha percorre três lados de quadradinho antes de chegar a esse ponto.

Portanto, são 7 lados de quadradinho que elas percorrem juntas, num total de 7 minutos.

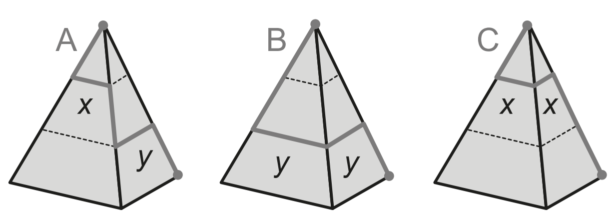
QUESTÃO 7 – ALTERNATIVA C

Solução: Como $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, o ponto correspondente a $\frac{2}{9}$ é o ponto médio do segmento cujos extremos são os pontos correspondentes a $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{3}$, ou seja, é o ponto identificado por ♣ .



QUESTÃO 8 – ALTERNATIVA E

Solução: Nos três caminhos, os segmentos ao longo das arestas laterais da pirâmide têm, no total, comprimento igual ao de uma aresta lateral. Representando por x o comprimento dos segmentos paralelos à base mais próximos aos vértices e por y o comprimento dos mais distantes, temos:



$a = x + y$ + aresta lateral da pirâmide

$b = 2y$ + aresta lateral da pirâmide

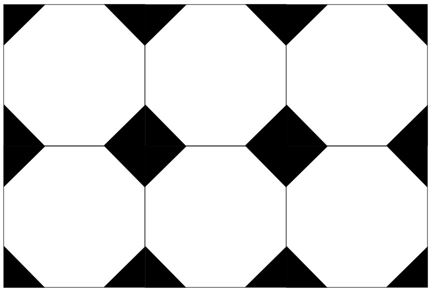
$c = 2x$ + aresta lateral da pirâmide

Como $x < y$, temos $2x < x + y < 2y$ e, portanto, $c < a < b$.

QUESTÃO 9 – ALTERNATIVA A

Solução: Como o ladrilho é quadrado de lado 1 m, precisamos de 20 x 30 = 600 ladrilhos para cobrir o piso.

Observe inicialmente a situação mais simples com apenas 6 ladrilhos:



Temos 2 quadrados pretos, ou seja, só os encontros de quatro vértices formam os quadrados pretos que são (2 – 1) x (3 – 1) = 2. Situação análoga vale para qualquer número de linhas e colunas.

Para o nosso problema com 20 x 30 ladrilhos, temos
(20 – 1) x (30 – 1) = 551 quadrados pretos.

Outra solução: Podemos pensar que 20 x 30 ladrilhos determinam um quadriculado com 21 x 31 = 651 pontos. Devemos descontar todos os pontos do bordo desse quadriculado, pois eles não são vértices de 4 ladrilhos necessários para formar quadrados pretos. Os pontos do bordo totalizam 2 x 21 + 2 x 29 = 100 pontos. Logo, são formados 651 – 100 = 551 quadrados pretos.

QUESTÃO 10 – ALTERNATIVA A

Solução: Um preenchimento válido usa cada um dos números 1, 2, 3, 4, 5 quatro vezes (uma vez em cada linha). Para determinar que valores a soma dos números nas duas colunas extremas pode tomar, vamos encontrar os valores mínimo e máximo dessa soma. Para o valor mínimo, é natural tentar preencher as duas colunas usando apenas os números de 1 a 4, sem repetir números nas linhas, o que levaria a uma soma igual a 20. Isto é possível, como na figura abaixo.

1				2
2				1
3				4
4				3

No entanto, ao preencher o resto do tabuleiro, o 5, que não foi usado nas duas colunas, teria que ser usado 4 vezes e há apenas 3 colunas disponíveis, o que levaria a repeti-lo em alguma coluna. Logo, não é possível nem ter soma igual a 20, nem ter soma igual a 28 (que corresponde a usar apenas os números de 2 a 5 nas duas colunas extremas). Para obter um preenchimento válido, é preciso utilizar todos os números de 1 a 5 nas colunas extremas (três deles em ambas as colunas e os outros dois em apenas uma delas). Quando isto acontece, é sempre possível completar o tabuleiro de modo válido, como mostrado abaixo, onde *a*, *b* e *c* representam os números usados em ambas as colunas e *d* e *e* os números usados em apenas uma delas.

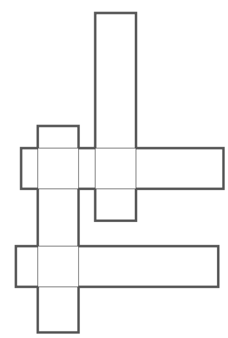
a	*c*	*d*	*e*	*b*
b	*d*	*e*	*c*	*a*
c	*b*	*a*	*d*	*e*
d	*e*	*b*	*a*	*c*

Escolhendo adequadamente os valores de *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, conseguimos obter para as duas colunas extremas todas as somas entre 21 e 27, como mostra o quadro abaixo.

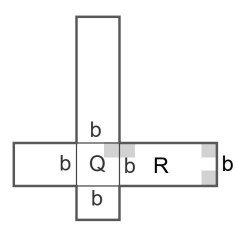
a	*b*	*c*	*d*	*e*	Soma das colunas extremas
1	2	3	4	5	21
1	2	4	3	5	22
1	3	4	2	5	23
2	3	4	1	5	24
2	3	5	1	4	25
2	4	5	1	3	26
3	4	5	1	2	27

Portanto, de todas as alternativas, a única que mostra uma soma que não pode ser obtida é a alternativa A.

QUESTÃO 11 – ALTERNATIVA A

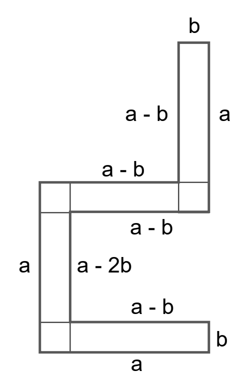


Solução: O quadrado formado pela interseção de dois retângulos tem lados que medem *b* cm. Como os lados desse quadrado são internos aos retângulos, ele diminui o perímetro de cada retângulo em 2*b* cm; logo cada quadrado contribui (negativamente) com – 4*b* cm para o perímetro da figura. Como a figura é composta por 4 retângulos e 3 quadrados, segue que seu perímetro é 4 × (2*a* + 2*b*) – 3 × 4*b* = 4 (2*a* – *b*) cm.



Outra solução:

Podemos deslizar os retângulos sem alterar o perímetro e obter a figura ao lado. Seu perímetro é 8*a* – 4*b* = 4 (2*a* – *b*) cm.



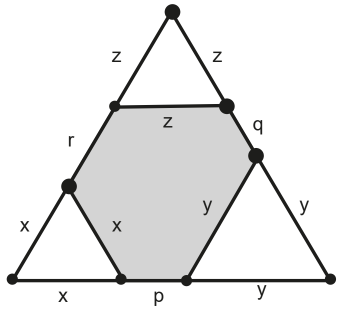
QUESTÃO 12 – ALTERNATIVA A

Solução: Como o trem gasta 1 minuto para passar pela entrada do túnel, então a cada minuto ele percorre 30 metros. Após este 1 minuto, o trem ainda gasta 10 minutos para chegar começar a sair do túnel. Desde o momento em que ele começa a entrar, até o momento em que ele começa a sair, o trem gasta 1 + 10 = 11 minutos para atravessar o túnel todo.

Logo, o túnel tem 11 × 30 = 330 metros de comprimento.

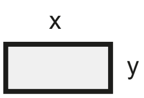
QUESTÃO 13 – ALTERNATIVA D

Solução: Com as notações da figura, escrevemos $S = x + y + z$ e $P = p + q + r$ por simplicidade. O perímetro do hexágono cinza é $S + P = 56$ e o perímetro do triângulo maior é $2S + P = 3 \times 28 = 84$. Subtraindo essas duas igualdades obtemos $S = 28$. Logo, a soma dos perímetros dos três triângulos menores é $3 \times S = 84$.



QUESTÃO 14 – ALTERNATIVA B

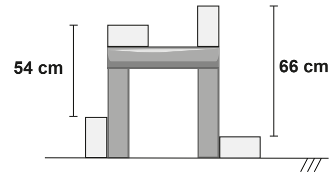
Solução: Suponhamos que o bloco retangular tenha as seguintes medidas:



Então, (altura da mesa) = (x + 54 – y) = (y + 66 – x)

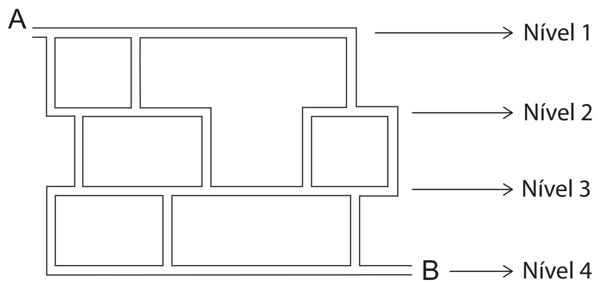
Então, 2 × (altura da mesa) = x + 54 – y + y + 66 – x = 54 + 66 = 120 cm.

Logo, (altura da mesa) = 120 ÷ 2 = 60 cm.



QUESTÃO 15 – ALTERNATIVA A

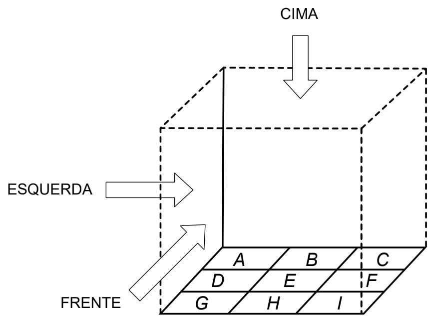
Solução: Denotemos o nível horizontal inicial, onde a formiguinha se encontra por "nível 1", e assim por diante, até "nível 4", onde está o ponto B, como ilustrado a seguir.



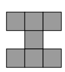
Para ir do nível 1 para o nível 2 há três possibilidades. Qualquer que seja o túnel vertical que a formiguinha tenha escolhido para ir para o nível 2, ela terá duas possibilidades para passar para o nível 3. Finalmente, para passar do nível 3 para o nível 4, qualquer que seja o túnel que a formiguinha escolheu, ela terá três possibilidades. Assim, o número de caminhos que a formiguinha pode fazer é, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, 3 x 2 x 3 = 18.

QUESTÃO 16 – ALTERNATIVA C

Solução: Iremos reconstruir ao sólido a partir das vistas.. Para isso, vamos imaginar que o sólido está montado sobre um tabuleiro e registraremos quantos cubinhos estamos empilhando em cada quadrado dele, como indicam as figuras abaixo.

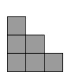


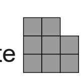
A	*B*	*C*
D	*E*	*F*
G	*H*	*I*

Pela vista de cima  , podemos inferir que ele tem a distribuição:

A	*B*	*C*
0	*E*	0
G	*H*	*I*

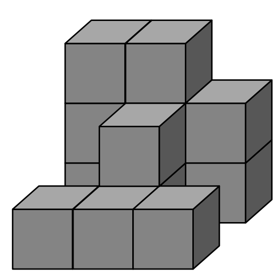
pois não há cubos nas posições *D* e *F*.

Pela vista da esquerda  , apenas a primeira linha pode ter 3 cubinhos empilhados, mas não sabemos ainda se estão em *A*, em *B* ou em *C*.

Isso é decidido olhando a vista da frente  . Concluímos que temos $A = B = 3$.

Pela vista de cima, para todos os quadradinhos da última linha, temos que ter pelo menos 1 cubinho em cada posição e, pela vista da esquerda, não podemos ter mais que 1. Portanto, $G = H = I = 1$. Analisando a vista da esquerda, no meio dela vemos apenas 2 cubinhos, e isso só pode ocorrer se $E = 2$. Finalmente, pela vista de frente, como $I = 1$, devemos ter $C = 2$. Logo, a distribuição completa é

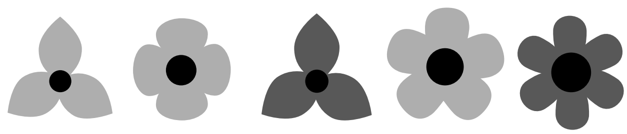
3	3	2
0	2	0
1	1	1



Assim, o total de cubinhos é $3 + 3 + 2 + 0 + 2 + 0 + 1 + 1 + 1 = 13$.

QUESTÃO 17 – ALTERNATIVA A

Solução: Temos cinco flores, que podem ter três, quatro, cinco ou seis pétalas, que podem ser da cor laranja (as quais chamaremos de flores laranjas) ou roxo (as quais chamaremos de flores roxas).



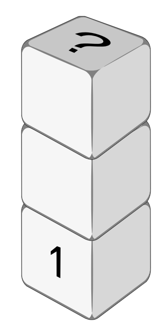
Bia diz que ela e Carla sabem as cores das flores que ganharão, mas não sabem quantas pétalas elas têm. Em princípio as duas flores podem ser: duas flores laranjas, duas flores roxas, uma flor laranja e uma flor roxa.

Ana responde que sabe quantas pétalas tem sua flor, mas não sabe a cor. Isso indica que a flor de Ana tem três pétalas, pois se tivesse quatro, cinco ou seis pétalas ela saberia exatamente que flor iria ganhar.

A partir dessa conversa Carla descobre que flor vai ganhar. Note que se as cores das flores de Bia e Carla fossem laranjas seria impossível determinar qual flor Ana iria ganhar. Por exemplo, elas poderiam ter recebido as flores de quatro e cinco pétalas. O mesmo acontece se as flores fossem uma laranja e uma roxa. Por exemplo, elas poderiam ter recebido uma flor de cinco pétalas (laranja) e uma de seis pétalas (roxa). Como Carla foi capaz de deduzir a cor da flor que Ana irá ganhar, concluímos que Bia e Carla irão ganhar duas flores roxas, o que inclui uma flor de três pétalas, necessariamente. A conclusão é que Ana ganhará uma flor laranja de três pétalas.

QUESTÃO 18 – ALTERNATIVA A

Solução: A soma de faces opostas é sempre 7. Assim, se somarmos a face inferior da pilha (em contato com o chão) com sua oposta, as duas faces opostas (inferior e superior) do dado intermediário e a face superior da pilha ecom sua face oposta temos 7 + 7 + 7 = 21. Mas a soma de cada par de faces em contato é 5, assim, a soma dessas quatro faces em contato entre si é 5 + 5 = 10, fazendo com que a soma da face inferior da pilha com a face superior da pilha seja 11. As únicas possibilidades são: face inferior 5 e face superior 6 ou face inferior 6 e face superior 5. Mas como estamos vendo o 1 no dado mais baixo, do lado oposto está o 6 e concluímos que na face inferior só pode estar o 5. Finalmente, a face superior é o número 6.



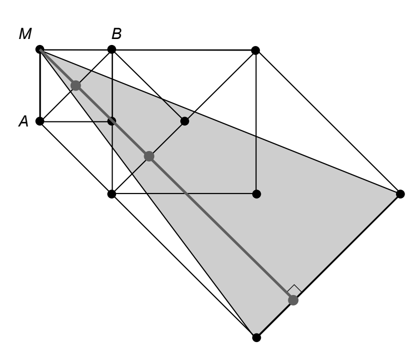
QUESTÃO 19 – ALTERNATIVA A

Solução: Inicialmente, traçamos a altura do triângulo sombreado, indicada em vermelho na figura ao lado. Essa altura está dividida em três partes, observe os pontos vermelhos sobre ela. Logo, a altura do triângulo sombreado é igual a

(medida de *AB*/2) + (medida de *AB*) + 2 (medida de *AB*) =

(7/2) (medida de *AB*) = (7/2).

Portanto, a área do triângulo sombreado é [(7/2) x 2] / 2 = (7/2) cm^2.



QUESTÃO 20 – ALTERNATIVA E

Solução: Para os primeiros dois problemas, temos $3 \times 3 = 9$ escolhas possíveis de notas sem repetir um par de pontuações neles. Daí, se tivermos mais do que 9 alunos, pelo menos 2 deles terão as mesmas notas nos dois primeiros problemas. Para mostrar que 9 é realmente o máximo, basta exibirmos uma tabela com as pontuações de 9 alunos sem que haja repetições de pares de notas nos mesmos problemas:

Aluno 1	0	0	0
Aluno 2	0	1	1
Aluno 3	0	2	2
Aluno 4	1	0	1
Aluno 5	1	1	2
Aluno 6	1	2	0
Aluno 7	2	0	2
Aluno 8	2	1	0
Aluno 9	2	2	1