Lab 1 - Report esercizio 2

martedì 2 aprile 2019 10:03

Per modellare questo problema, vogliamo utilizzare la funzione dei least squares, in modo da minimizzare l'errore dovuto dalle rilevazioni nella formula y = Ax + v, dove v è un disturbo piccolo e centrato in 0.

I termini noti per questo scenario sono l'insieme dei vettori di input

$$x(1), \ldots, x(N) \in \mathbb{R}^n$$

e l'insieme corrispettivo dei vettori di output

$$y(1), \ldots, y(N) \in \mathbb{R}^m$$

Si vuole minimizzare la funzione

$$J = \sum_{k=1}^{N} \| Ax(k) - y(k) \|^2$$

Notando che il termine non noto del quale produrre una versione least squares è la matrice

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

In questo caso, però il termine è dal lato sbagliato del prodotto matriciale per poter essere minimizzato utilizzando il metodo della matrice pseudoinversa.

Introduciamo quindi le due matrici

$$X \in \mathbb{R}^{n \times N} = [x(1) \ \ldots \ x(N)]$$

$$Y \in \mathbb{R}^{m \times N} = [y(1) \ \ldots \ y(N)]$$

In modo da poter riscrivere la funzione J come

$$J = \| AX - Y \|_2^2$$

Ricordiamo che se A è una matrice, la sua LUNGHEZZA sarà

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum a_{ij}^2} \Rightarrow \|A\|_2^2 = \sum a_{ij}^2 = \|A^T\|_2^2$$

Possiamo quindi scrivere

$$AX = [Ax(1) \ \ldots \ Ax(N)]$$

$$AX - Y = [Ax(1) - y(1) \ \ldots \ Ax(N) - y(N)]$$

Dove Ax(k) - y(k) è la k-esima colonna di AX - Y, riconducendoci alla forma iniziale del problema.
Da qui:

$$J = \|AX - Y\|_2^2 = \|(AX - Y)^T\|_2^2 = \|\underline{X^T A^T} - Y^T\|_2^2 = \sum_i^m \|X^T \tilde{a}_i - \tilde{y}_i\|^2$$

Portando la matrice dalla parte giusta del prodotto e notando che la somma di diversi minimi indipendenti produrrà sempre una somma minima
Possiamo scrivere

$$\tilde{a}_{i,ls} = (X^T)^{-1} \tilde{y}_i \Rightarrow (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) = (X^T)^{-1} (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$$

E quindi

$$A^T = (X^T)^{-1} Y^T \Rightarrow A = Y((X^T)^{-1})^T = YX^{-1}$$

Si nota che per far si che questo modello funzioni vanno rispettate le seguenti condizioni

X^T INTO → FULL RANK SKINNY → $N \geq n$ → DEVO AVERE N $x(i)$ INDIPENDENTI