Report laboratorio 1

Luca Baruffini, Matteo Casartelli, Denis Suozzi, Giuseppe Tarantino

Aprile 2019

1 Esercizio 1

Vedere il file Exercise1.m nel package con associato il file di definizione della funzione genQR.m

2 Esercizio 2

Per modellare questo problema, vogliamo utilizzare la funzione dei least squares, in modo da minimizzare l'errore dovuto dalle rilevazioni nella formula

$$y = Ax + v \tag{1}$$

dove v è un disturbo piccolo e centrato in 0.
I termini noti per questo scenario sono l'insieme dei vettori di input

$$x(1), ..., x(N) \tag{2}$$

e l'insieme corrispettivo dei vettori di output

$$y(1), ..., y(N) \tag{3}$$

Si vuole minimizzare la funzione

$$J = \sum_{k=1}^{N} ||Ax(k) - y(k)||^2 \tag{4}$$

Notando che il termine non noto del quale produrre una versione least squares è la matrice

$$A \in \mathbb{R}^{mxn} \tag{5}$$

In questo caso, però, il termine è dal lato sbagliato del prodotto matriciale per poter essere minimizzato utilizzando il metodo della matrice pseudoinversa.
Introduciamo quindi le due matrici

$$X = \begin{bmatrix} x(1) & ... & x(N) \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & ... & y(N) \end{bmatrix} \tag{7}$$

In modo da poter riscrivere la funzione J come

$$J = ||AX - Y||_2^2 \tag{8}$$

Ricordiamo che se A è una matrice, la sua LUNGHEZZA sarà

$$||A||_2 = \sqrt{\sum_{i,j} \widetilde{a}_{ij}^2} \Rightarrow ||A||_2^2 = \sum_{i,j} \widetilde{a}_{ij}^2 = ||A^T||_2^2 \tag{9}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$AX = \begin{bmatrix} Ax(1) & ... & Ax(N) \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$AX - Y = \begin{bmatrix} Ax(1) - y(1) & ... & Ax(N) - y(N) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dove Ax(k) - y(k) è la k-esima colonna di AX - Y, riconducendoci alla forma iniziale del problema.
Da qui:

$$J = ||AX - Y||_2^2 = ||(AX - Y)^T||_2^2 = ||X^T A^T - Y^T||_2^2 = \sum_i^m ||X^T \widetilde{a}_i - \widetilde{y}_i||^2 \tag{12}$$

Abbiamo portato la matrice dalla parte giusta del prodotto e notiamo che la somma di diversi minimi indipendenti produrrà sempre una somma minima.
Possiamo scrivere:

$$\widetilde{a}_{ils} = (X^T)^\dagger \widetilde{y}_i \Rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{ls1} & ... & \widetilde{a}_{lsm} \end{pmatrix} = (X^T)^\dagger \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1 & ... & \widetilde{y}_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

E quindi

$$A^T = (X^T)^\dagger Y^T \Rightarrow A = Y((X^T)^\dagger)^T = YX^\dagger \tag{14}$$

Che è la soluzione desiderata.

Si nota che per far si che questo modello funzioni vanno rispettate le seguenti condizioni

X^T deve essere INTO
(Full rank skinny)
.
$N \geq n$
(Devo avere più campioni che numero di variabili in input)
.
Devo avere almeno N $x(i)$ INDIPENDENTI

Vedere il file Exercise2.m per la risoluzione del problema proposto

3 Esercizio 3

3.1 Obiettivo

Trovare le costanti che minimizzano la funzione J:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} log(\frac{\hat{T}_i}{T_i})^2 \tag{15}$$

Considerando che con l e $T \in R^{nx1}$:

$$\hat{T}(l) = Cl^B l^{gl} \tag{16}$$

3.2 Soluzione

Per minimizzare la funzione J modifichiamo la funzione logaritmica al suo interno:

$$log(\frac{\hat{T}_i}{T_i}) = log(\hat{T}_i) - log(T_i) = \tag{17}$$

$$log(Cl_i^B l_i^{gl_i}) - log(T_i) = log(C) + log(l_i^B) + log(l_i^{gl_i}) - log(T_i) = \tag{18}$$

$$log(C) + Blog(l_i) + gl_i log(l_i) - log(T_i) \tag{19}$$

Considero:

$$x = \begin{bmatrix} log(C) \\ B \\ g \end{bmatrix} \in R^{px1} \tag{20}$$

dove p = numero di costanti (in questo caso 3) e

$$b = \begin{bmatrix} log(T_1) \\ \ldots\ldots. \\ log(T_i) \end{bmatrix} \in R^{mx1} \tag{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & log(l_1) & l_1 log(l_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & log(l_i) & l_i log(l_i) \end{bmatrix} \in R^{mxp} \tag{22}$$

Di conseguenza:

$$log(\frac{\hat{T}_i}{T_i}) = Ax - b \tag{23}$$

Abbiamo ricondotto la funzione non lineare ad una funzione affine.

La funzione J può essere riscritta come:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} (Ax_i - b_i)^2 \tag{24}$$

riconducendo il nostro problema ad un problema di least squares.
Per calcolare x utilizziamo la seguente formula (A deve essere INTO):

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y = A^\dagger y \tag{25}$$

dove A è la nostra matrice A,y è la nostra matrice b, $(A^T A)^{-1} A^T$ è la matrice pseudoinversa di A, $A^\dagger$
Ricordando che otterremo:

$$x = \begin{bmatrix} log(C) \\ B \\ g \end{bmatrix} \tag{26}$$

dovremo modificare la soluzione per ottenere il valore di C come

$$C = e^{x_1} \tag{27}$$

Dato che abbiamo ricondotto il nostro problema ad un problema di least squares, possiamo dichiarare che questa soluzione riconduce sempre al minimo valore globale di J. Se avessimo dovuto usare il metodo della linearizzazione, il minimo valore ottenuto di J sarebbe stato locale.
Per poter utilizare la formula:

$$x = A^\dagger y \tag{28}$$

la matrice A deve essere into, ovvero deve essere full rank skinny.
Quindi dato che $A \in R^{mxp}$ deve valere: $rank(A) = min(m, p) \Rightarrow m \geq p \Rightarrow rank(A) = p$

Vedere il file Exercise3.m nel package per la soluzione del problema proposto.

4 Esercizio 4

Vedere il file Exercise4.m nel package per la spiegazione e i risultati del problema