Chapitre 3 : Loi binomiale

I. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition : Soit n un entier naturel non nul et soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
On pose, pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $p_i = P(X = x_i)$.

- L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

- La variance de X est $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$

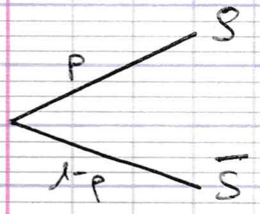
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : On a aussi la formule de König-Huygens
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Propriété : Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire.
$E(aX + b) = aE(X) + b$
$V(aX + b) = a^2 V(X)$
$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

II. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

1- Épreuve de Bernoulli :



Soit p un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.
On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues, appelées généralement

succès S et échec $\overline{S}$, et de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.

Exemple : Lancer une pièce de monnaie équilibrée et savoir si PILE est obtenu est une épreuve de Bernoulli de succès S : "Pile a été obtenu", de probabilité $p = 0,5$. L'échec est donc $\overline{S}$: "Face a été obtenu".

2- Loi de Bernoulli

Définition : Soit p un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$ et X une variable aléatoire.
On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p.
On dit que X est une variable aléatoire de Bernoulli lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0 ; 1\}$, valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
Autrement dit, on a $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Propriété : Soit p un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$, et soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance mathématique de X est $E(X) = p$.
La variance de X est $V(X) = p(1-p)$

Remarque : L'écart-type de X est alors $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Exemple : Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire.

Soit S l'événement "le 6 sort" alors si le dé n'est pas pipé

$P(S) = \frac{1}{6}$ $\quad P(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans le cas contraire suit la loi de Bernouilli.

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

3- Schéma de Bernouilli

Soit n un entier naturel non nul.
Un schéma de Bernouilli d'ordre n est la répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes.

III. Loi binomiale

Définition : Soient n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenu lors de la répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes et dont p est la probabilité du succès.
On dit alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On peut la noter $\mathcal{B}(n ; p)$.

Propriété : Soient n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Alors pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété : Soient n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0;1]$.
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad Var(X) = np(1-p)$$

Démonstration : L'événement $(X=k)$ est associé à l'ensemble des chemins dans l'arbre pour lesquels il y a exactement k succès et donc $n-k$ échecs. Chacun de ces chemins a une probabilité égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent ce chemin, c'est-à-dire $p^k(1-p)^{n-k}$. Or il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type. D'où $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$