Exercice 2 : suites (suite auxiliaire)

EXERCICE 1 [redacted] Polynésie 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

(b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

(b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

(d) Déterminer la limite de la suite (u_n).