Chapitre 9 : Fonction logarithme népérien

• Lien avec la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $e^x = k$, $k \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

I. Définitions et premières propriétés

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel $x > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y.
On note $y = \ln x$ (ou $y = \ln(x)$).

Conséquences :

- Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y, $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$
- $\ln(1) = 0$ (car $e^0 = 1$), $\ln(e) = 1$ (car $e^1 = e$)

Vocabulaire : On dit que les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.

Exemples : $e^{\ln 5} = 5$

$$e^{-\ln 0,1} = \frac{1}{e^{\ln 0,1}} = \frac{1}{0,1} = 10$$

$\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

II. Sens de variation

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Démonstration : Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$. Ainsi $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\ln a < \ln b$.

Conséquences : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,

- $\ln a = \ln b \iff a = b$
- $\ln a > 0 \iff a > 0$ et $\ln a < 0 \iff 0 < a < 1$.

- Signe de la fonction $\ln$

La fonction $\ln$ est strictement négative sur $]0 ; 1[$, nulle en 1, et strictement positive sur $]1 ; +\infty[$.

Démonstration : La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et $\ln 1 = 0$.

III. Propriétés algébriques

Propriété : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Démonstration : Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs.
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$; $b = e^{\ln b}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$.
D'autre part : $a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$
d'où : $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$
Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Exemple : $\ln(42) = \ln(6 \times 7) = \ln(6) + \ln(7)$

Remarque : Cette propriété se généralise à un produit de plusieurs facteurs.

Propriété : Pour tous réels a et b strictement positifs

- $\ln \frac{1}{a} = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Démonstration :

1. Soit $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$. Or $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc :
$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) \iff \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \iff \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

2. Soient $a > 0$ et $b > 0$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif.
$e^{\ln(a^n)} = a^n$ et $e^{n \ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^n = a^n$
Donc $e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln(a)}$ et par conséquent $\ln(a^n) = n \ln(a)$

4. Soit $a > 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = a$ donc :

$\ln(a) = \ln(\sqrt{a})^2 = 2\ln(\sqrt{a})$

Exemple : Pour tout nombre réel $a>0$, $\ln(a^2) = 2\ln(a)$.

$\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{3}\ln(4) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(2^2) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(2) = -\frac{1}{6}\ln(2)$

IV. Étude de la fonction logarithme népérien

A/ Dérivabilité et continuité

Propriété : La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Démonstration : On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur $I =]0;+\infty[$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.

Or pour tout réel $x>0$, $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$

Alors pour tout réel $x>0$, $\ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété : La fonction $\ln$ est continue sur $]0;+\infty[$.

B/ Étude de la convexité

Propriété : La fonction $\ln$ est concave sur $]0;+\infty[$.

Démonstration : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$

Pour tout $x>0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = \frac{1}{x^2}$

Donc pour tout $x>0$, $f''(x) < 0$.

Donc f est concave sur $]0;+\infty[$.

C/ Limites de la fonction $\ln$

Propriété : • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Démonstration : $f : x \mapsto \ln x$

Pour tout réel $A > 0$, il existe un réel m, tel que, pour tout $x > m$, on a $f(x) > A$.

Soit A un réel strictement positif.

• Pour $x > 0$, $\ln x > A \iff e^{\ln x} > e^{A}$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff x > e^{A}$

En posant $m = e^{A}$, on a :

Si $x > m$ alors $\ln x > A$, $\forall A > 0$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$

• Pour $x > 0$, $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calcul de $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

Donc par composition : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty}$

Conséquence : La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction $\ln$.

V. Compléments sur la fonction ln

Propriété : Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Exercice d'application : Calculer
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} \ln x$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} - 1 = -1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - x = -\infty$.

- $\forall x > 0$

$$\frac{x}{x^2+1} \ln x = \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{\ln x}{x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ donc par quotient

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$.

Par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} \times \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} \ln x = 0$

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

- Dérivée de $x \longrightarrow \ln(u(x))$

Notation : u désigne une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \longrightarrow \ln(u(x))$ définie sur I est notée $\ln u$.

Propriété : u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Remarque : Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I. $(\ln u)'$ a le même signe que u' car $u>0$.

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$.
$f = \ln u$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+1$.
Or, u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1}$