Démonstration : Nombre de racines d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ "Un polynôme P de degré n admet au plus n racines"

Initialisation : Si $n = 1$, on pose $P(z) = a_1 z + a_0$ où a_1 et a_0 sont des réels et $a_1 \neq 0$.
Ce polynôme admet une seule racine : $z_0 = -\frac{a_0}{a_1}$. Donc P admet au plus une racine.
Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On distingue 2 cas :
- Si P n'a pas de racine alors la propriété est vraie car le polynôme a au plus $n+1$ racines.
- Si P admet une racine notée a alors on peut le factoriser par $z - a$:

$P(z) = (z-a)Q(z)$ avec Q polynôme de degré n.
D'après l'hypothèse de récurrence, Q admet au plus n racines.
Donc P admet au plus $n+1$ racines (la racine a ainsi que les n racines éventuelles de Q).
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir de $n=1$.
Donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.