Chapitre 4 : Limites de la fonction exponentielle

I. Limite en l'infini

Propriété : • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration : • Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$
$f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$ car la fonction $t \mapsto e^t$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $f'(0) = 0$.
Donc f admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et donc $f(x) > 0$ soit $e^x > x$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

• Pour tout réel x, $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$
Or $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Donc par composition de limites :
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$.

II. Croissances comparées

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration : • $\forall X \in \mathbb{R}$, $e^X > X$

Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{x}{n+1}$. L'inégalité précédente devient :
$e^{\frac{x}{n+1}} > \frac{x}{n+1}$

La fonction $t \mapsto t^{n+1}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
Donc $\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} > \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$. Soit $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$. Soit $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$
car $x > 0$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Remarque : Cette propriété illustre le fait que la fonction exponentielle croît "en $+\infty$" plus vite que toute fonction puissance (exposant $\in \mathbb{N}^*$).

Exercice d'application : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x^3$. Étudier la limite de h en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$. On a une forme indéterminée.

Pour $x \neq 0$, $h(x) = x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right)$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right)$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

III. Limite en un réel

Propriété : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

⚠ **Démonstration** : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0}$

Or la fonction exponentielle est dérivable en 0, donc
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \exp(0) = 1$.

- **Annexe : limites de fonctions - limites de suites**

a et b désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Propriété : Soit f une fonction et (u_n) la suite définie par
$u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$u_n = \sqrt{2 + \dfrac{1}{n^2}}$.
On a $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par
$f(x) = \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$.

Donc par composition de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Exercice d'application : Calculer la limite de chacune des suites suivantes :
$u_n = e^{-3n-1}$ et $u_n = \sqrt{\dfrac{1}{4 + n^2}}$

1. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{-3x-1}$

$\lim_{x \to +\infty} -3x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$. Donc par composition de limites : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donc $\lim_{x \to +\infty} u_n = 0$.

2. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4+x^2}}$.

$\lim_{x \to +\infty} 4 + x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4+x^2} = 0$ et $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. Donc par composition de limites : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donc $\lim_{x \to +\infty} u_n = 0$.