Chapitre 9 : Mécanique céleste et mouvement des satellites

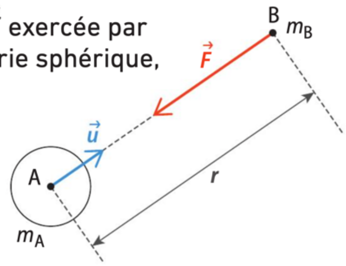
I. Mouvement des planètes et des satellites

a) Loi de la gravitation

- La **force gravitationnelle** $\vec{F}$ exercée par un objet ponctuel ou à symétrie sphérique, de centre A et de masse m_A, sur un objet ponctuel ou à symétrie sphérique de centre B et de masse m_B, tel que $r = AB$, est :

$$\vec{F} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire orienté de A vers B et G est la constante gravitationnelle ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²).



- Cette force peut aussi s'écrire : $\vec{F} = m_B\vec{g}$
où $\vec{g}$ est le **champ gravitationnel** créé par A en B.

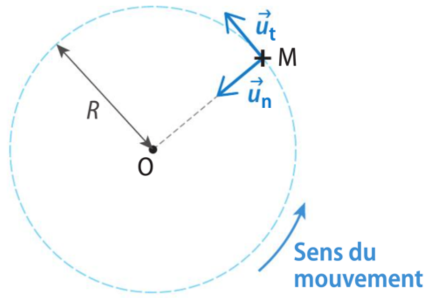
b) Étude dynamique

1- Référentiel d'étude

Référentiel astrocentrique : il s'agit de l'astre attracteur privé de tout mouvement de rotation

2- Nature du mouvement

Le mouvement des planètes orbitant autour du Soleil est elliptique. Mais dans la majorité des cas l'excentricité étant tellement faible que l'on peut les considérer comme circulaire.



Afin de faciliter l'étude, on utilise le repère de Frenet pour les mouvements circulaires.
L'accélération a pour expression dans ce repère :

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{r}\vec{u_n}$$

Utilisation de la 2ème loi de Newton pour en déduire le vecteur accélération avec M_A la masse de l'astre et m la masse du satellite ou de la planète et r le rayon de l'orbite. Le satellite est en mouvement uniforme.

- Bilan des forces : $\overrightarrow{F_{S/T}} = G \times \frac{M \times m}{d^2} \times \overrightarrow{u_n} = G \times \frac{M \times m}{r^2} \times \overrightarrow{u_n}$

- Loi de Newton d'où l'on tire l'accélération : $\vec{a}(\frac{dv}{dt} = 0; \frac{v^2}{r} = \frac{G \times M_A}{r^2})$

D'après la 2ème loi de Newton : $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_{S/T}} = m.\vec{a}$

$$\Leftrightarrow G \times \frac{M_A \times m}{r^2} = m.\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G \times M_A}{r^2} = \vec{a}$$

L'accélération est centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre de la trajectoire.

3- Valeur de la vitesse

$\frac{dv}{dt} = 0$ implique que la valeur de la vitesse est constante : le mouvement est donc uniforme.

$\frac{v^2}{r} = G\frac{M_A}{r^2}$ implique que la valeur de cette vitesse vaut : $v = \sqrt{\frac{G \times M_A}{r}}$

La valeur de la vitesse du satellite ou de la planète en orbite autour de l'astre est donc indépendante de sa masse mais dépend du rayon de sa trajectoire. Plus il est éloigné de l'astre, plus sa vitesse est faible.

4- Valeur de la révolution

La durée T pour effectuer une révolution, c'est-à-dire un tour complet de l'orbite, est calculée au moyen de la formule de la vitesse moyenne.

$v = \frac{d}{T} = \frac{2\pi r}{T}$ d'où $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \times M_A}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \times M_A}}$

La période de révolution du satellite ou de la planète en orbite autour de l'astre est donc indépendante de sa masse mais dépend du rayon de sa trajectoire. Plus il est éloigné de l'astre, plus sa période de révolution est grande.

II. Lois de Kepler

a) Première loi de Kepler

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de gravité d'une planète est une ellipse dont le centre de gravité du Soleil est un foyer. La distance la plus courte entre ces deux points d'appelle périhélie et la plus grande l'aphélie.

b) Deuxième loi de Kepler

Le segment reliant les centres de gravité du Soleil et de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

c) Troisième loi de Kepler

Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi-grand axe est égal à une même constante :

$$\frac{T^2}{a^3} = cte = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

d) Généralisation

Les trois lois de Kepler énoncées dans le cas de planètes en orbite autour du Soleil peuvent être généralisées à tout corps en orbite autour d'un astre massique.

III. Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel fixe dans le référentiel terrestre. Son orbite se situe dans le plan de l'Équateur et est parfaitement circulaire.

Application : Déterminer l'altitude de ce type de satellite sachant que le jour sidéral a une durée de $T_{sid} = 23\ h\ 56\ mn$.

D'après la 3ème loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

Soit $\frac{T^2}{(R_T+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

Soit $(R_T + h)^3 = \frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}$

Soit $R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}}$

Donc $h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{(23\times60\times60+56\times60)^2\times6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}{4\pi^2}} - 6378\times10^3$

$= 3{,}58\times10^7$ m