Chapitre 7 : Géométrie dans l'espace

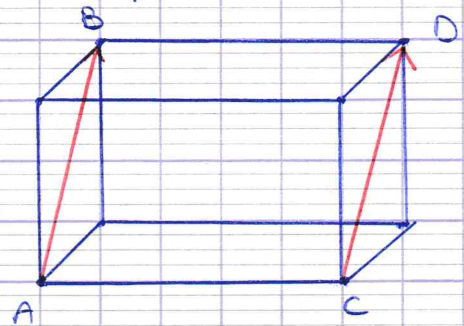
I. Vecteurs de l'espace

A/ Définitions

Définition : À tout couple (A ; B) de points dans l'espace on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Dans un plan qui contient A et B, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B.
Lorsque B = A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, on le note $\vec{0}$.

• Égalité de deux vecteurs

Définition : Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que ABDC est un parallélogramme éventuellement aplati.
Dans ce cas, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



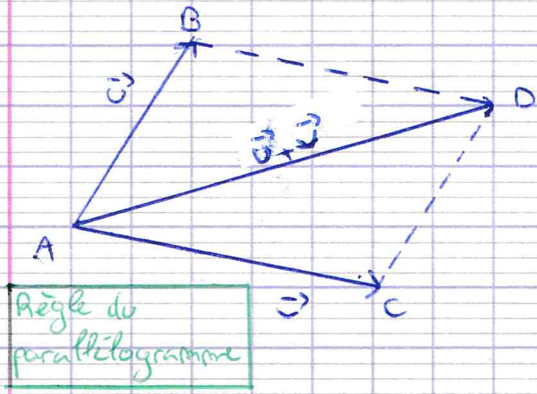
Remarque : Deux vecteurs non nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

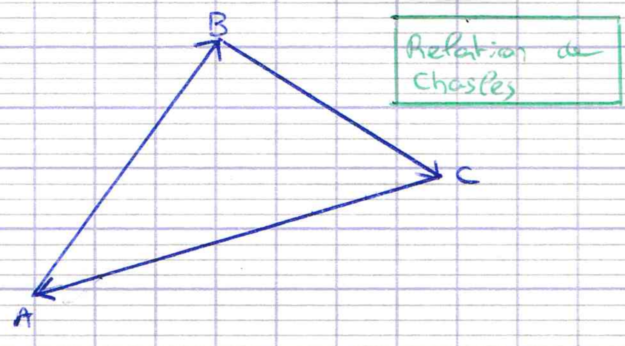
B/ Opérations sur les vecteurs

• Somme de deux vecteurs

Règle du parallélogramme : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que ABDC soit un parallélogramme

<u>Relation de Chasles</u> : Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



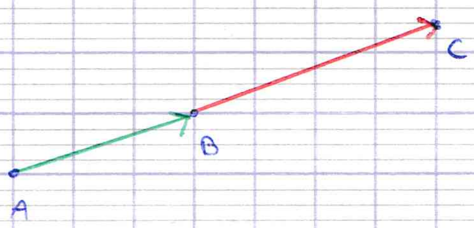


<u>Remarque</u> : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur <u>opposé</u> à $\overrightarrow{AB}$.

- Produit d'un vecteur par un nombre réel

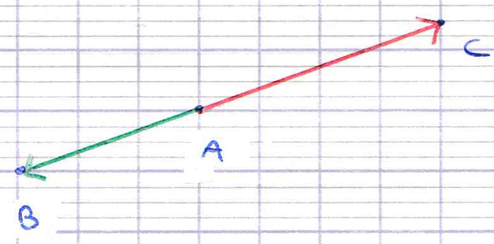
<u>Propriété</u> : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul et k un nombre réel.
le vecteur $k\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ est défini par :

- Si $k > 0$:



$C \in [AB)$
et $AC = kAB$

- Si $k < 0$:



$C \in (AB)$, $C \notin [AB)$
et $AC = -kAB$

C/ <u>Vecteurs colinéaires</u>

<u>Définition</u> : Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires signifie qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

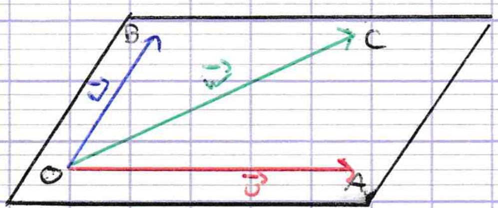
Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété : Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété : A, B, C et D sont quatre points de l'espace.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

D/ Vecteurs coplanaires

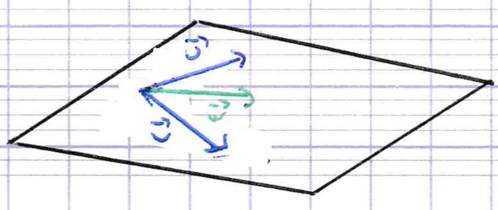
Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires si et seulement si pour tout point O de l'espace et les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.



Propriété : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

On dit alors que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



E/ Base de l'espace

Définition : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non nuls de l'espace et a, b et c trois réels.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants lorsqu'ils ne sont pas coplanaires.
Autrement dit lorsque $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$.

Définition : Trois vecteurs non tous nuls linéairement indépendants forment une base de l'espace.

Propriété : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{E}$, il existe un unique triplet $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de nombres réels tels que

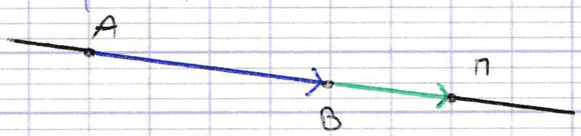
$$\vec{E} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Remarque : Dans la propriété ci-dessus, a est appelé abscisse, b est appelé ordonnée et c est appelé cote.

II. Droites et plans dans l'espace

A/ Droites de l'espace

Définition : A et B sont deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que :
$\vec{AM} = k\,\vec{AB}$ où k est un nombre réel.
On dit que $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

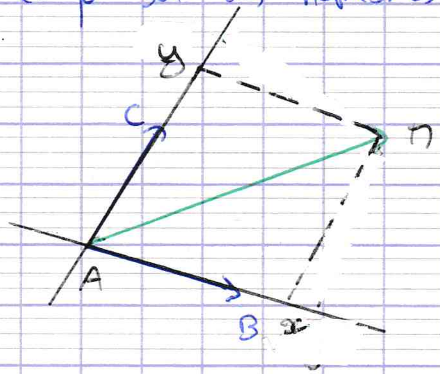


Définition : De façon générale, une droite est définie par un point

et un vecteur non nul $\vec{u}$.
On parle alors de droite $(A; \vec{u})$ ou de la droite de repère $(A; \vec{u})$ et on dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de cette droite.

B/ Plans de l'espace

<u>Définition</u>: Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ où λ et μ sont des nombres réels.



<u>Définition</u>: De façon générale, un plan est défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On parle alors du plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$ ou du plan de repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de ce plan.
On dit que le plan est dirigé par la base $(\vec{u}; \vec{v})$.

III. Repérage dans l'espace

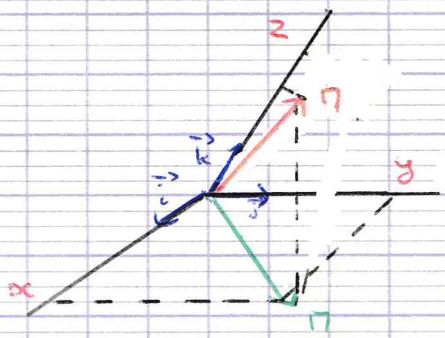
A/ Repère de l'espace et coordonnées

<u>Définition</u>: Un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est formé d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. O est l'origine du repère.

<u>Propriété</u>: $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



__Définitions :__

- $(x;y;z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point M de ce repère.

__Exemple :__ $\vec{AM} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC} + \vec{AD}$

Dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$, on a $M(2;3;1)$.

On a $\vec{AM}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

B/ Calcul sur les coordonnées

__Propriété :__ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ alors :

- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$
- Pour tout nombre réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

__Propriété :__ Si A et B ont pour coordonnées $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$, alors :

- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

• Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

C / Représentation paramétrique d'une droite

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace, d est la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et admettant le vecteur non nul $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Propriété : Dire qu'un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à d équivaut à dire qu'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire tel que : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$

Définition : Le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite d.

t est le paramètre de cette représentation.

Exemple : $\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de la droite d passant par $A(4;-2;1)$ et dirigée par vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Pour $t = -1$, on a $B(9;-4;-2) \in d$.

$\begin{cases} x_B = 4 - 5 \times (-1) \\ y_B = -2 + 2 \times (-1) \\ z_B = 1 + 3 \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_B = 9 \\ y_B = -4 \\ z_B = -2 \end{cases}$

• Soit $C(-6;2;7)$. Justifier que $C \in d$.

$C \in d \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 4 - 5t \\ 2 = -2 + 2t \\ 7 = 1 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 = -5t \\ 4 = 2t \\ 6 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$

Donc $C \in d$.

Remarque : Une droite a une infinité de représentations paramétriques.

D/ Représentation paramétrique d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère, on considère le plan P passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ dirigé par les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Un point M appartient au plan P si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$.

Avec les coordonnées, on a le système :

$$\begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$$

Ce système lorsque t et t' décrivent $\mathbb{R}$, est appelé une représentation paramétrique du plan P.

Exemple : Soit P le plan passant par $A(-1 ; -4 ; 3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors, $\begin{cases} x = -1 + 2t - 4t' \\ y = -4 + 3t \\ z = 3 - 5t + t' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}$

est une représentation paramétrique de P.

Remarque : Un plan possède également une infinité de représentations paramétriques.

Exercices d'application :

• Exercice 1

Soit d une droite dont une représentation paramétrique est :

$$d : \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

① Déterminer les coordonnées du point M quelconque de d.

② Le point $P(-6; -4; -1)$ appartient-il à la droite d ? Justifier.

• Exercice 2

Soit $A(1; -2; 3)$ et $B(0; 0; 1)$.

① Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

② $C(-3; 6; -5)$ et $D(2; -5; 5)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ? Justifier.

→ Exercice 1

① Pour $t = 1$, on a : $\begin{cases} x = 2 \times 1 = 2 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$

Donc $M(2; 0; 3) \in d$

② $P \in d \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} -6 = 2t \\ -4 = t - 1 \\ -1 = t - 2 \end{cases} \iff t = -3$

Donc $P \in d$.

→ Exercice 2

① La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\vec{AB}$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ainsi, (AB) $\begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+2t \\ z = 3-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

② On a $C(-3;6;-5)$

$C \in (AB) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} -3 = 1-t \\ 6 = -2+2t \\ -5 = 3-2t \end{cases} \iff t = 4$ donc $C \in (AB)$.

On a $D(2;-5;5)$. $D \in (AB) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$\begin{cases} 2 = 1-t \\ -5 = -2+2t \\ 3 = 3-2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{3}{2} \\ 5 = 3-2t \end{cases}$. Donc $D \notin (AB)$

IV. Positions relatives de droites et de plans

Règles de base : • Par deux points distincts il passe une unique droite.

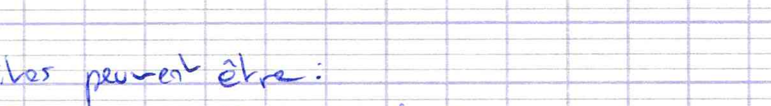
• Un plan peut être défini soit :
- par trois points distincts non alignés
- par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite
- par deux droites sécantes
- par deux droites strictement parallèles

• Si un plan contient deux points distincts A et B, alors il contient tous les points de la droite (AB)

A/ Positions relatives de deux droites

Deux droites peuvent être :
- Coplanaires : elles sont situées dans un même plan (elles sont alors sécantes ou parallèles)
- Non coplanaires : dans ce cas elles n'ont aucun point en commun

Droites



D et D' sont non coplanaires — D et D' sont parallèles — D et D' sont est sécantes en A

D et D' sont coplanaires

Remarques : • Deux droites de l'espace n'ayant aucun point commun ne sont pas forcément parallèles, elles peuvent aussi être non coplanaires.

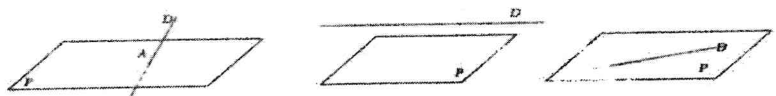
• Deux droites sont strictement parallèles si elles sont coplanaires et n'ont aucun point commun.

B/ Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite peut être :

- Contenue dans un plan si elle passe par deux points du plan
- Sécante au plan si elle n'a qu'un seul point commun avec ce plan
- Parallèle au plan si elle n'a aucun point commun avec ce plan

Droites et plans



D et P sont sécants en A

D et P sont strictement parallèles

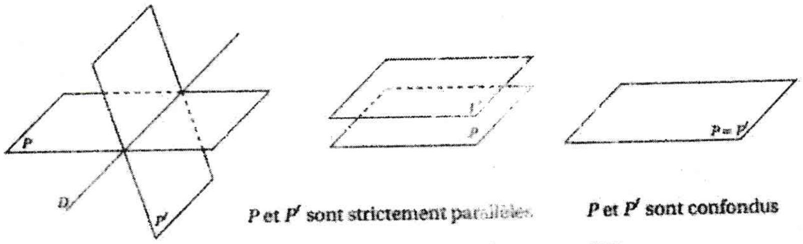
D est incluse dans P

D et P sont parallèles

C/ Positions relatives de deux plans

Deux plans sont soit parallèles, s'ils n'ont aucun point en commun, soit sécants et dans ce cas leur intersection est une droite.

Plans



P et P' sont strictement parallèles

P et P' sont confondus

P et P' sont sécants suivant la droite D

P et P' sont parallèles

V. Parallélisme dans l'espace

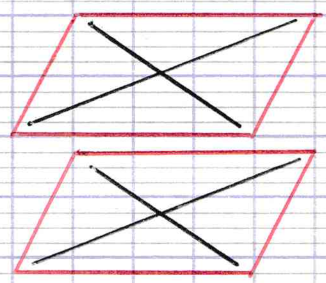
A/ Parallélisme entre droites - Parallélisme entre droites et plans

Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite du plan.

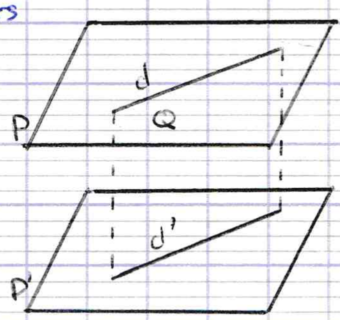
B/ Parallélisme entre deux plans



Si deux plans sont parallèles à un même plan, alors ils sont parallèles entre eux.

Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan P' alors les plans P et P' sont parallèles.

Si deux plans sont strictement parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe aussi l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



Démonstration : Avec les notations de la figure.

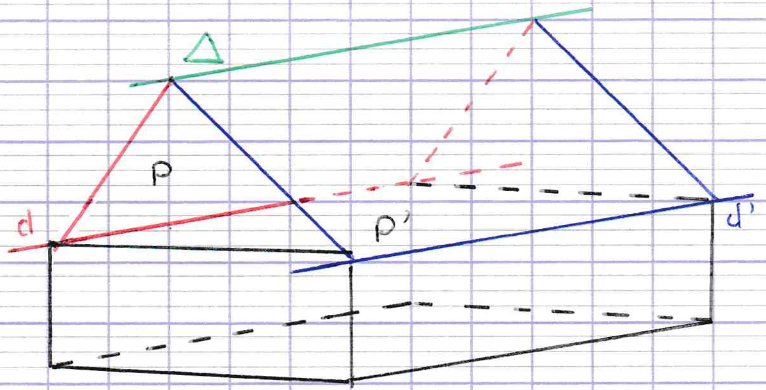
Le plan Q est sécant avec P donc il l'est également avec P' (car s'il était parallèle à P', il aurait été aussi parallèle à P)

Les droites d et d' sont coplanaires dans Q donc elles sont soit sécantes, soit parallèles.

Or, d est incluse dans P et d' est incluse dans P' et ces deux plans sont strictement parallèles donc ils n'ont pas de point commun, donc d et d' non plus.

Donc ces deux droites ne sont pas sécantes, elles sont donc parallèles.

Théorème du toit : Soit d et d' deux droites parallèles, P et P' deux plans distincts tels que d est contenue dans P et d' est contenue dans P'.
Si P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection est parallèle à d et à d'.



Remarque : Dans un plan de l'espace toutes les propriétés de la géométrie plane s'appliquent.