Chapitre 7 : Mouvement dans un champ uniforme

I. Notion de champ – Rappels

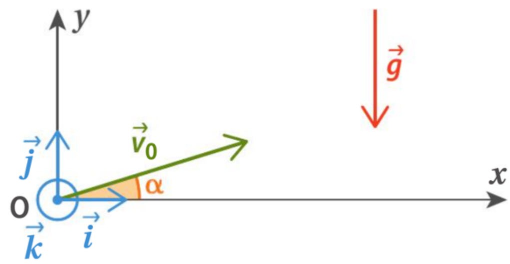
Un champ est associé à une propriété physique qui se manifeste en tout point d'un espace. Cette propriété est définie par une grandeur mesurable qui dépend de la position du point.

Un champ est uniforme lorsque chacune de ses caractéristiques reste constante au cours du temps, autrement dit le vecteur est constant.

II. Mouvement dans un champ uniforme

a) Dans un champ de pesanteur

Problème : Étudions le mouvement d'un objet de masse m situé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme, lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ inclinée de l'angle α par rapport à l'horizontal et dont la position initiale est confondue avec l'origine du repère. On négligera les frottements négligés par l'air.



1- Définir le système, le référentiel puis les conditions initiales

Système : objet de masse m
Référentiel : terrestre supposé galiléen
Conditions initiales (à $t_0 = 0\text{s}$) :

$$\overrightarrow{OM}(t_0)\begin{cases}0\\0\\0\end{cases} \qquad \overrightarrow{v_0}\begin{cases}v_{0x} = v_0 \times \cos(\alpha)\\ v_{0y} = v_0 \times \sin(\alpha)\\ v_{0z} = 0\end{cases}$$

2- Bilan des forces s'exerçant sur le système

Poids $\vec{P}$ orienté verticalement, dirigé vers le bas appliqué au centre de masse G de l'objet et de norme $P = mg$.
Vectoriellement $\vec{P} = m\vec{g}$. Or g est uniforme donc le poids est un vecteur constant.

3- Utilisation de la 2ème loi de Newton pour déterminer le vecteur accélération

D'après la deuxième loi de Newton, la masse de l'objet étant constante :
$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ soit $\vec{P} = m.\vec{a}$
Donc $m.\vec{g} = m.\vec{a}$.
On en déduit $\vec{a} = \vec{g}$, l'accélération est donc uniforme.

4- Déterminer les équations horaires du mouvement (vitesse puis position)

$$\vec{a} = \vec{g} \text{ donc } \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

- **Équation horaire de la vitesse**

Par définition, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\vec{a}\begin{cases} \frac{d}{dt}v_x = 0 \\ \frac{d}{dt}v_y = -g \\ \frac{d}{dt}v_z = 0 \end{cases}$

Par intégration par rapport au temps :

$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g.t + C_2 \\ v_z = C_3 \end{cases}$ C_1, C_2 et C_3 sont appelées constantes d'intégration.

D'après les conditions initiales :

$$\overrightarrow{v_0} = \vec{v}(t=0)\begin{cases} v_x(0) = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y(0) = v_0 \times \sin(\alpha) \\ v_z(0) = 0 \end{cases}$$

D'après l'expression des équations horaires à $t = 0$s :

$$\vec{v}(t=0)\begin{cases} C_1 \\ -g \times 0 + C_2 \\ C_3 \end{cases}$$

Par identification :

$C_1 = v_0 \times \cos(\alpha)$
$C_2 = v_0 \times \sin(\alpha)$
$C_3 = 0$

Finalement :

$$\boxed{\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y(t) = -g.t + v_0 \times \sin(\alpha) \\ v_z(t) = 0 \end{cases}}$$

- **Équation horaire de la position**

Par définition, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$ donc $\vec{v}\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -g.t + v_0 \times \sin(\alpha) \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$

Par intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OA}\begin{cases} x = v_0 \times \cos(\alpha) \times t + C_1{}' \\ y = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_0 \times \sin(\alpha))t + C_2{}' \\ z = C_3{}' \end{cases}$$

D'après les conditions initiales :

$$\overrightarrow{OA}(t=0)\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

D'après l'expression des équations horaires à $t = 0$s :

$$\overrightarrow{OA}(t=0)\begin{cases} (v_0 \times \cos(\alpha)) \times 0 + C_1' = C_1{}' \\ -\dfrac{1}{2}g.0^2 + (v_0 \times \sin(\alpha)) \times 0 + C_2' = C_2{}' \\ C_3{}' \end{cases}$$

Par identification :

$C_1' = 0$

$C_2' = 0$

$C_3' = 0$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{OA}\begin{cases} x(t) = (v_0 \times \cos(\alpha))t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_0 \times \sin(\alpha))t \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

La coordonnée selon O_z est nulle, on en déduit que le mouvement est contenu dans le plan de tir défini par le vecteur vitesse initiale et le vecteur champ de pesanteur.

5- <u>Déterminer l'équation de la trajectoire (équation cartésienne)</u>

On isole t dans l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = (v_0 \times \cos(\alpha))t \iff t = \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$$

et on l'introduit dans l'expression de $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)^2 + (v_0 \times \sin(\alpha)) \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)$$

d'où : $\boxed{y = -\frac{y}{2(v_0 \times \cos(\alpha))^2} \times x^2 + (\tan(\alpha)) \times x}$

6- Caractéristiques de la trajectoire

- **La flèche**

Celle-ci est atteinte lorsque $v_y(s) = 0$.
$v_y(s) = -g.t + v_0 \times \sin(\alpha)$ d'où $-g.t_s - v_0 \times \sin(\alpha) = 0$.
Donc $t_s = \frac{v_0 \times \sin(\alpha)}{g}$

Or $y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0 \times \sin(\alpha))t$
Appliquée à t_s :$y(t_s) = -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{v_0 \times \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + (v_0 \times \sin(\alpha)) \times \left(\frac{v_0 \times \sin(\alpha)}{g}\right)$

$$y(t_s) = -\frac{(v_0 \times \sin(\alpha))^2}{2g} + \frac{(v_0 \times \sin(\alpha))^2}{g} = -\frac{(v_0 \times \sin(\alpha))^2}{2g} + \frac{2(v_0 \times \sin(\alpha))^2}{2g}$$

$$\boxed{y(t_s) = \frac{(v_0 \times \sin(\alpha))^2}{2g}}$$

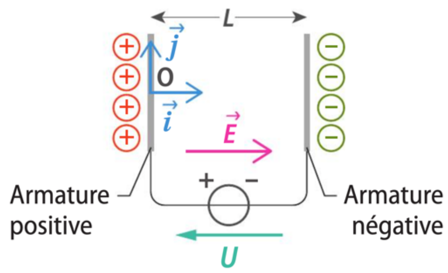
- **La portée**

C'est la distance horizontale maximale parcourue par le système.
Ici $y_p = 0$ donc $0 = -\frac{1}{2}g \times \frac{x_p^2}{(v_0 \times \cos(\alpha))^2} + \tan(\alpha) \times x_p$
d'où $x_p\left(-\frac{1}{2}g \times \frac{x_p}{(v_0 \times \cos(\alpha))^2} + \tan(\alpha)\right) = 0$
d'où $x_p = 0$ et $x_p = \frac{2\tan(\alpha) \times (v_0 \times \cos(\alpha))^2}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \times \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times (\cos(\alpha))^2$
$x_p = \frac{v_0^2}{g} \times (2 \times \sin(\alpha) \times \cos(\alpha))$
Finalement : $\boxed{x_p = \frac{v_0^2}{g} \times \sin(2\alpha)}$

b) Dans un champ électrique

1- Champ électrique dans un condensateur

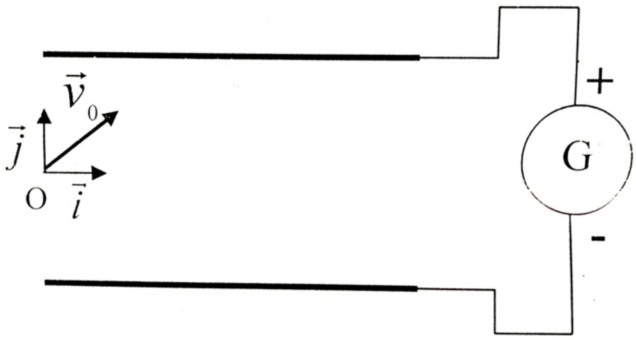
Un condensateur plan est constitué de deux plaques conductrices (nommées armatures) séparées d'une distance L auxquelles on applique une tension U.



On peut alors considérer qu'il existe un champ uniforme entre les deux armatures, perpendiculaire à celles-ci, dirigé de l'armature positive vers la négative et de norme :
$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{L}}$ avec U en Volt (V), L en m et E en V/m

2- Étude dynamique dans un champ électrique uniforme

Problème : Étudions le mouvement d'un objet de charge q et de masse m situé dans un champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme, lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ inclinée de l'angle α par rapport à l'horizontal et dont la position initiale est confondue avec l'origine du repère. On supposera le poids ainsi que les forces de frottements négligeables.



1. Déterminer les coordonnées du champ $\vec{E}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en fonction de sa norme E.
2. Déterminer les équations horaires et cartésienne du mouvement de l'objet.
3. En supposant que l'objet est un électron, déterminer la valeur du poids et de la force électrique. L'hypothèse de l'énoncé sur le poids vous semble-t-elle cohérente ?
$U = 24V$ et $L = 2{,}7cm$.

1. Dans un condensateur, $\vec{E}$ est perpendiculaire à l'armature du + vers le -.
$\vec{E} = -E.\vec{g}$ donc $\vec{E}\begin{cases} 0 \\ -E \end{cases}$

2. On suppose que le poids est négligeable devant la force électrique.
- Système : électron
- Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : $\overrightarrow{Fe}$
$\overrightarrow{Fe} = q.\vec{E} = -e.\vec{E}$ donc $\overrightarrow{Fe}\begin{cases} 0 \\ (-e) \times (-E) = e.E \end{cases}$

D'après la deuxième loi de Newton :
$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ soit ici $\overrightarrow{Fe} = m.\vec{a}$
d'où $m.\vec{a} = -e.\vec{E}$ soit $\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$
Donc $\vec{a}\begin{cases} 0 \\ \frac{e}{m}.E \end{cases}$

Par le même raisonnement que dans un champ de pesanteur :

$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y(t) = \frac{e.E}{m} \times t + v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases}$ $\quad$ $\overrightarrow{OA}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0 \times \cos(\alpha))t \\ y(t) = \frac{e.E}{2m}.t^2 + (v_0 \times \sin(\alpha))t \end{cases}$

$t = \dfrac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$

$\Rightarrow y = \dfrac{e.E}{2m} \times \left(\dfrac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)^2 + (v_0 \times \sin(\alpha)) \times \left(\dfrac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)$

soit $y = \frac{e.E}{2m(v_0 \times \cos(\alpha))^2} \times x^2 + \tan(\alpha) \times x$

3. • $P = m.g = 9{,}11 \times 10^{-31} \times 9{,}81 = 8{,}94 \times 10^{-30} N$

• $Fe = e.E$, or $E = \frac{U}{L}$ donc $Fe = \frac{e.U}{L} = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \times 24}{2{,}7 \times 10^{-2}} = 1{,}4 \times 10^{-16} N$

Rapport des ordres de grandeur :

$\frac{Fe}{P} = \frac{10^{-16}}{10^{-29}} = 10^{13}$ donc P est négligeable.

$$\boxed{m.\vec{a} = q.\vec{E} \text{ d'où } \vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{E}}$$

On en déduit les équations horaires identiques de la vitesse puis celle de la position en remplaçant g par $\frac{q.E}{m}$.

Attention ceci est vrai pour ce choix d'axe et ce champ !

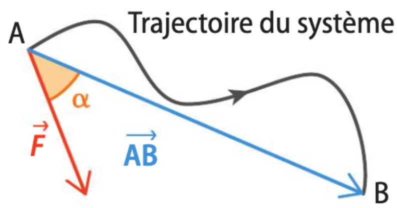
III. Aspects énergétiques

a) Théorème de l'énergie cinétique – Théorème de l'énergie mécanique

- Énergie cinétique – Travail d'une force constante – Théorème de l'énergie cinétique

• L'**énergie cinétique** E_c d'un système de masse m ayant une vitesse de norme v est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

• Le **travail d'une force constante** $\vec{F}$ entre A et B est :



$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\alpha)$$

α est l'angle entre le vecteur $\vec{F}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

• **Théorème de l'énergie cinétique**

La **variation de l'énergie cinétique** d'un système en translation est **égale à la somme des travaux des forces** appliquées au système :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F_i})$$

- Force conservative et théorème de l'énergie mécanique

• Une **force est conservative** si **son travail ne dépend pas du chemin suivi**. La force est associée à une **énergie potentielle** E_p telle que :

$$W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

• Si un système ne subit qu'une force conservative associée à une énergie potentielle E_p, alors son **énergie mécanique**, définie par $E_m = E_c + E_p$, est **constante au cours du mouvement** :

$$E_m(A) = E_m(B)$$

Théorème de l'énergie mécanique :
Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des **forces non-conservatives** $\overrightarrow{F_{nc1}}$, $\overrightarrow{F_{nc2}}$, etc… qu'il subit sur le trajet allant de A à B.

$$\Delta Em(A \to B) = Em(B) - Em(A) = \sum W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc}})$$

b) Dans le champ de pesanteur

La **conservation de l'énergie mécanique** pour un système en chute libre permet d'écrire :
$\Delta Em(O \to M) = W_{OM}(\overrightarrow{F_{nc}})$

Chute libre : $\vec{P}$ est une force conservative donc $\Delta Em(O \to M) = 0$
donc $Em(M) - Em(O) = 0$ soit $Em(M) = Em(O)$
d'où $Ec(M) + Epp(M) = Ec(O) + Epp(O)$
d'où $\frac{1}{2}m.v_M{}^2 + m.g.y_M = \frac{1}{2}m.v_O{}^2 + m.g.y_O$
donc $\frac{1}{2}m(v_M{}^2 - v_O{}^2) = m.g(y_O - y_M)$

donc $\boxed{v_M{}^2 - v_O{}^2 = 2g(y_O - y_M)}$

On peut donc utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour mettre en relation la vitesse et l'altitude du système.

c) Dans le champ électrique uniforme

Le **théorème de l'énergie cinétique** permet d'écrire la relation pour une particule plongée dans un champ électrique uniforme.

$$Ec(M) - Ec(O) = W_{OM}(\vec{F})$$

Avec la seule force prise en compte dans ce cas : la force électrique, on peut en déduire :

$$\frac{1}{2}m.v^2 - \frac{1}{2}m.v_0{}^2 = q.U_{OM}$$

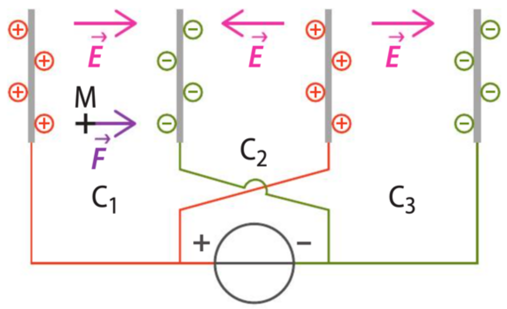
La vitesse de la particule peut donc être mise en relation avec la tension.

d) Accélération linéaire

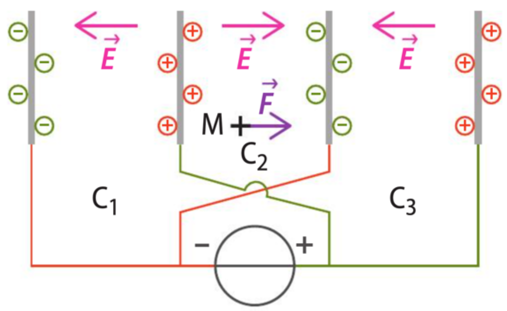
- On vient de voir que la vitesse acquise par une particule de masse m et de charge électrique q accélérée par une tension U est $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$.

Pour accélérer fortement une particule chargée électriquement avec un condensateur plan, il faut lui imposer une grande tension U.
En pratique, on fait passer la particule dans une succession de condensateurs plans : c'est le principe d'un **accélérateur linéaire de particules chargées**.

- Dans un tel **accélérateur**, chaque fois que la particule « change de condensateur », les charges électriques portées par les armatures changent, les tensions sont ainsi inversées (doc. 17a et 17b).
Ainsi, en utilisant des tensions pouvant être relativement faibles, on peut accélérer fortement une particule chargée électriquement.



Doc. 17a Lorsque la particule chargée positivement est dans le condensateur C_1, elle est accélérée.



Doc. 17b Lorsque la particule se retrouve dans C_2, on inverse la polarité du générateur (et donc des armatures des condensateurs) pour qu'elle soit de nouveau accélérée.