Démonstration : Formule du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: " $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ "

Initialisation : Pour $n=0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$
$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{d'après H.R.}$$
$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

On remplace k par $k+1$ dans la première somme (décalage d'indice)

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

On isole le dernier terme $(k=n+1)$ de la $1^{ère}$ somme et le premier terme $(k=0)$ de la $2^{ème}$ somme, puis on réunit les deux sommes pour $1 \leq k \leq n$.

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-1}$$
$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$$

En regroupant les termes sous une même somme, on obtient :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$