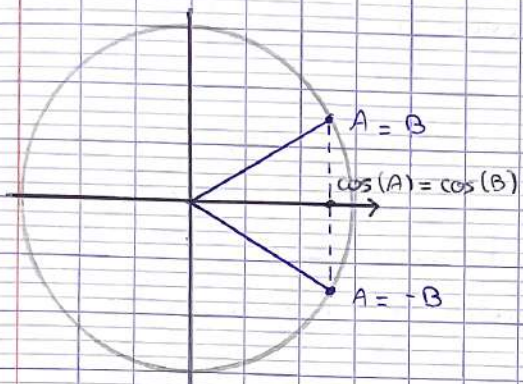
Annexe : Équations trigonométriques

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

I. Équations de type $\cos(A) = \cos(B)$

Soient A et B deux nombres réels. On a :

$\cos(A) = \cos(B) \iff A = B\ [2\pi]$ ou $A = -B\ [2\pi]$



Exemple : Résoudre l'équation $\cos(2x) = \cos(3x)$.

$\cos(2x) = \cos(3x) \iff 2x = 3x\ [2\pi]$ ou $2x = -3x\ [2\pi]$

$\iff x = 0\ [2\pi]$ ou $5x = 0\ [2\pi]$

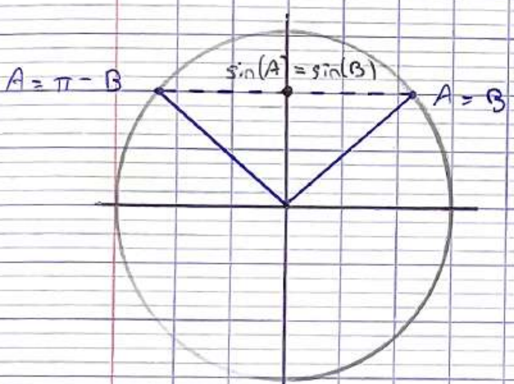
$\iff x = 0\ [2\pi]$ ou $x = 0\ [\frac{2\pi}{5}]$

Les solutions sont donc tous les réels qui sont égaux à 0 modulo 2 ou égaux à 0 modulo $\frac{2\pi}{5}$.

II. Équations du type $\sin(A) = \sin(B)$

Soient A et B deux nombres réels. On a :

$\sin(A) = \sin(B) \iff A = B\ [2\pi]$ ou $A = \pi - B\ [2\pi]$



Exemple : Résoudre l'équation $\sin(2x) = \sin(3x)$

$\sin(2x) = \sin(3x) \iff 2x = 3x\ [2\pi]$ ou $2x = \pi - 3x\ [2\pi]$

$\iff x = 0\ [2\pi]$ ou $5x = \pi\ [2\pi]$

$\iff x = 0\ [2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{5}\ [\frac{2\pi}{5}]$

Les solutions sont donc tous les réels qui sont égaux à 0 modulo 2π ou égaux à $\frac{\pi}{5}$ modulo $\frac{2\pi}{5}$

III Équations du type $\cos(A) = \sin(B)$

Méthode : On se ramène à une équation du type $\sin(A) = \sin(B)$ en utilisant la formule :

$$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),\ \theta \in \mathbb{R}$$

Exemple : Résoudre l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$

Comme $\cos(3x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, résoudre l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$ revient à résoudre l'équation $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2x)$.

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(2x) \iff 3x + \frac{\pi}{2} = 2x \ [2\pi] \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{2} = \pi - 2x \ [2\pi]$$
$$\iff x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \text{ ou } 5x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$
$$\iff x = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \text{ ou } x = \frac{\pi}{10} \left[\frac{2\pi}{5}\right]$$

Les solutions sont tous les réels qui sont égaux à $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π ou égaux à $\frac{\pi}{10}$ modulo $\frac{2\pi}{5}$.

Exercice d'application : Formules d'addition

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

En déduire les solutions de l'équation $\cos(t) + \sin(t) = -1$ dans $\mathbb{R}$

- D'après une formule d'addition, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos(t)\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(t)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$= \cos(t) \times 1 + \sin(t) \times 1$$
$$= \cos(t) + \sin(t)$$

- $\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \iff \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\iff t - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \ [2\pi] \text{ ou } t - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \ [$$
$$\iff t = \pi \ [2\pi] \text{ ou } t = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

Exercice 1

1. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
2. Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 2

Déterminer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Exercice 3

Déterminer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$.

→ Exercice 1

1. On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2. On remarque que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, alors $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

→ Exercice 2

On remarque que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

→ Exercice 3

$$\begin{aligned}\cos(3a) &= \cos(2a + a) = \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a)\\ &= (2\cos^2(a - 1))\cos a - 2\sin(a)\cos(a) \times \sin(a)\\ &= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\sin^2(a)\cos(a)\end{aligned}$$

Or $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$, d'où :

$\cos(3a) = 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a) + 2\cos^3(a)$
$= 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$

On prouve de même que :
$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

Exercice 4 : Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

$\cos(3x) = Re(\cos(3x) + i\sin(3x))$
Par la formule de Moivre :
$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3$
$= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) + 3i^2\cos(x)\sin^2(x) + i^3\sin^3(x)$

Soit : $\cos(3x) + i\sin(3x) = \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)$
$= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))$
On en déduit que : $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$
Or $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, donc :
$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = \cos^3(x) - 3\cos(x) + 3\cos^3(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

Exercice 5 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = -1$

→ Exercice 5 $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin(x)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)\right)$
$= \sqrt{2}\left(\sin(x)\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sin(x) - \cos(x)$

→ Exercice 6 $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = -1 \iff \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = -\frac{1}{2}$
Or $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$\iff \frac{\pi}{3} + x = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\frac{\pi}{3} + x = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$
$\iff x = \pi\ [2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$