Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 \,;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
   b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. a. Démontrer que $\ell = \ell'$.
   b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n = 100$.
   c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques). Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.
On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.
Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\overline{S}$ et $\overline{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
2. a. Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.

   b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.

   c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam? On donnera un résultat arrondi au centième.
3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

   On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres?

Sujet 1

Exercice 2, commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
3. a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1-u_P<E$.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while ......................
        u = ......................
        n = n + 1
    return n
```

   b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E=10^{-4}$.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$$

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\frac{v_n}{v_n+1}$.

   c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n=\frac{1}{1+0,25^n}.$$

   Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

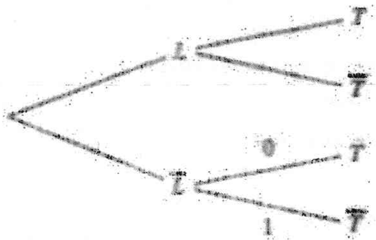
Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la « Chytridiomycose », provoquée par un champignon.
Le chercheur considère que :

- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de 0,74.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.
Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.
Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.
On notera T l'évènement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'évènement « Le lac est infecté par le champignon ».
On notera $\overline{L}$ l'évènement contraire de L et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de 0,185.
3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté?

7

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.

3) Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.
Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question **1)b)**.
Quel commentaire peut-on faire ?