Chapitre 1 : Limites de suites

I. Limite finie et infinie d'une suite

1- Limite finie

Définition : Soit u une suite et ℓ un réel.
On dit que la suite u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite u converge vers ℓ et que ℓ est la limite de u_n, et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Remarque : Pour montrer qu'une suite u converge vers un réel ℓ, il suffit de montrer que tout intervalle ouvert $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Propriété (Suites convergentes vers 0)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

Démonstration : Pour $n \mapsto \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
Soit ε un réel strictement positif. On cherche le rang de n à partir duquel $\frac{1}{n} \in]-\varepsilon ; \varepsilon[$ soit $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.
Comme $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
Donc en notant n_0 le plus petit entier naturel strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, on a :

si $n \geq n_0$ alors $\frac{1}{n} \in]-\varepsilon ; \varepsilon[$.
Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2 - Limite infinie

Définition : Soit u une suite.
- On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ pour tout réel A, l'intervalle ouvert $]A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si pour tout réel A, l'intervalle ouvert $]-\infty ; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ et on note :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Remarque : Dans le premier cas, on peut prendre $A > 0$. Et donc dans le second cas $A < 0$.

Propriété (Suites divergentes vers $+\infty$)

- $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ • $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ • Si $p \geq 2$ $\lim_{n \to +\infty} n^p = +\infty$

Démonstration : Pour $n \to \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$
Soit A un réel. Il faut montrer qu'il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $\sqrt{n} \in]A ; +\infty[$ soit $\sqrt{n} > A$.
Si $A < 0$, alors $n_0 = 0$ convient car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \geq 0 > A$.
Si $A \geq 0$, alors $\sqrt{n} > A \iff n > A^2$ car la fonction carrée est

strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc en notant n_0 le plus petit entier naturel strictement supérieur à A^2, on a : si $n \geq n_0$ alors $\sqrt{n} > A$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Remarque : Certaines suites n'admettent pas de limites, on dit aussi qu'elles divergent.

II. Opérations sur les limites

Soit u et v deux suites, ℓ et ℓ' deux réels.

1 - Limite d'une somme

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $u+v$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemple d'application : Déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n^2 + \sqrt{n}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Ainsi, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2 - Limite d'un produit

Si u a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$u \times v$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : Déterminer la limite de la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n^2 - 1)(-n+7)$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n+7) = -\infty$

Ainsi, par produit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

3 - Limite d'un quotient avec un dénominateur de limite non-nulle

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si v a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
$\frac{u}{v}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

4 - Limite d'un quotient avec un dénominateur de limite nulle

Si u a pour limite	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si v a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\frac{u}{v}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple d'application : Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{\frac{5}{n}+7}{8+\frac{2}{n}}$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{n}+7\right) = 7$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(8+\frac{2}{n}\right) = 8$

Ainsi, par quotient, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{7}{8}$

Formes indéterminées : Les quatre cases F.I. dans les tableaux précédents représentent des cas de formes indéterminées. En effet, on ne peut pas déterminer la limite de manière générale.

Exemple :

u_n	v_n	u_n+v_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$
$2n+1$	$-n$	$n+1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
n^2+1	$-n^2$	1	$+\infty$	$-\infty$	1

Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0\times\infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

Exemple d'application : Déterminer la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, par $v_n = n - \sqrt{n}$

On a une forme indéterminée.

En factorisant par $n>0$, on a $v_n = n \times \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Ainsi par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice d'application : Déterminer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 3\sqrt{n}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n - 1 = -\infty$ F.I.

Pour $n>0$, $n^2 - 5n + 1 = n^2\left(1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 0$ donc, par somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty$.

b) $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$ F.I.

Pour $n > 0$, $n - 3\sqrt{n} = n\left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)$

On a : $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 1$

Donc par produit $\lim_{n \to +\infty} n\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} (n - 3\sqrt{n}) = +\infty$

c) $\lim_{n \to +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty$ F.I.

Pour $n > 0$, $\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{n^2\left(5 + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4 + \frac{3n}{n^2}\right)} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}}$

On a $\lim_{n \to +\infty} \left(5 + \frac{4}{n^2}\right) = 5$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(4 + \frac{3n}{n^2}\right) = 4$. Donc par quotient, $\lim_{n \to +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{5}{4}$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5}{4}$.

d) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ F.I.

$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$

On a $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$

Donc par quotient $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$.

III. Limites et conjugaison

1 - Théorème de comparaison (Démo 1)

Soit u et v deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un certain entier naturel n_0 :

- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple : • Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par $u_n = n + (-1)^n$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geq -1$.
Donc $n + (-1)^n \geq n - 1$, soit $u_n \geq n - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

• Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin(n)$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(n) \geq 1$, donc $u_n \geq n - 1$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2- Théorème d'encadrement

Théorème : Soit u, v et w trois suites telles que :
- $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang n_0
- Les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l.

Alors la suite (u_n) converge vers l

Exemple : Étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{2 + 3\cos n}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant \cos n \leqslant 1$

Donc $-1 \leqslant 2 + 3\cos n \leqslant 5$

Donc pour $n > 0$:

$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

IV. Limites de suites monotones

• Suite majorée, minorée, bornée

• On dit qu'une suite u est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

• On dit qu'une suite u est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

• On dit qu'une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple : • $u_n = 3 - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \geqslant 0$, donc $u_n \leqslant 3$

Donc la suite u est majorée par 3.

• $u_n = \sin(n)$, $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$

Donc la suite u est bornée.

1- Cas des suites convergentes

• Théorème de convergence monotone - admis

• Toute suite croissante et majorée est convergente.

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple : Etudier la convergence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 + \frac{1}{n+1}$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1) > 0$ et $-1 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \geq 0$ donc $u_n \geq 0$

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

Propriété (non exigible en démo) : Soit u une suite et ℓ un réel. Si u est croissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.
Si u est décroissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geq \ell$.

2 - Cas des suites divergentes

Propriété (Démo 2) :

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

3 - Recherche de seuil

Pour déterminer le seuil à partir duquel une suite de limite $+\infty$ prend des valeurs au-dessus d'une certaine valeur A, on peut suivre le déroulement d'un algorithme ou d'un programme.

Exemple : Soit u la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 2^n - n$.
On admet que u est croissante et non-majorée.
Écrire un programme Python permettant de déterminer le rang à partir duquel $u_n \geq A$, A étant un réel donné.

```
def seuil(A):
    n = 0
    while 2**n - n < A:
        n = n+1
    return n
```

```
def u(n):
    return 2**n - n

def seuil(A):
    n = 0
    while u(n) < A:
        n = n+1
    return n
```

Pour $A = 10$, on obtient $n = 4$.
Pour $A = 50$, on obtient $n = 6$
Pour $A = 10^6$, on obtient $n = 20$.

V. Limite d'une suite géométrique

Propriété (Démo 3) : Soit q un réel non nul.

- si $q > 1$, alors (q^n) diverge et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- si $q = 1$, alors (q^n) converge vers 1
- si $-1 < q < 1$, alors (q^n) converge vers 0
- si $q < -1$, alors (q^n) diverge et n'a pas de limite

Exemple d'application :

1. Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -5\sqrt{3}^n$
2. Déterminer la limite de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3(1-\sqrt{2})^n$

3. Déterminer la limite de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par
$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

4. La suite z définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$ a-t-elle une limite ?

1. $\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -5 = -5$. Donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

2. $1 - \sqrt{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-\sqrt{2})^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -3 = -3$. Donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

3. (w_n) est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. Donc par somme et produit $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{3^{n+1}}{(-2)^n} = 3 \times \dfrac{3^n}{(-2)^n} = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

Or $-\frac{3}{2} < 1$ donc $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ n'a pas de limite donc la suite z non plus.