Démonstration : $z^n - a^n$ se factorise par $(z-a)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P(n)$: « $z^n - a^n = (z-a)Q(z)$ » où $Q(z)$ est un polynôme de degré $n-1$.

Initialisation : Pour $n=1$

$z - a = (z-a)Q(z)$ avec $Q(z) = 1$ et Q est bien un polynôme de degré 0.

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$
\begin{aligned}
z^{n+1} - a^{n+1} = z \times z^n - a^{n+1} &= z \times (a^n + (z-a) \times Q(z)) - a^{n+1} \quad \text{d'après HR} \\
&= z \times a^n + z \times (z-a) \times Q(z) - a^{n+1} \\
&= z \times a^n - a^{n+1} + z \times (z-a) \times Q(z) \\
&= a^n \times (z-a) + z \times (z-a) \times Q(z) \\
&= (z-a)(a^n + z \times Q(z)) \\
&= (z-a) \times R(z) \text{ avec } R(z) = a^n + z \times Q(z) \text{ et } R
\end{aligned}
$$

de degré n car Q de degré $n-1$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang $n=1$.

Donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.