Démonstration : Factorisation par $z - a$ d'un polynôme.

$P(z)$ se factorise par $z - a$ ssi $P(a) = 0$

On pose $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ et a_0 sont des réels et $a_n \neq 0$.

- Si $P(z) = (z - a)\,Q(z)$ alors $P(a) = 0$. Donc a est racine de P.
- Si $P(z) = 0$ alors $P(z) = P(z) - P(a)$

$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - a_0 - a_1 a - a_2 a^2 - \dots - a_n a^n$$

$$= a_1 (z - a) + a_2 (z^2 - a^2) + \dots + a_n (z^n - a^n)$$

Or, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, il existe un polynôme Q_{k-1} de degré $k-1$, tel que :
$z^k - a^k = (z-a)Q_{k-1}(z)$

Donc : $P(z) = a_1(z-a)Q_0(z) + a_2(z-a)Q_1(z) + \dots + a_n(z-a)Q_{n-1}(z)$
$= (z-a)(a_1 Q_0(z) + a_2 Q_1(z) + \dots + a_n Q_{n-1}(z))$
$= (z-a)Q(z)$ avec $Q(z) = a_1 Q_0(z) + a_2 Q_1(z) + \dots + a_n Q_{n-1}(z)$

Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$, tel que :
$P(z) = (z-a)Q(z)$
Donc $P(z)$ se factorise par $(z-a)$.