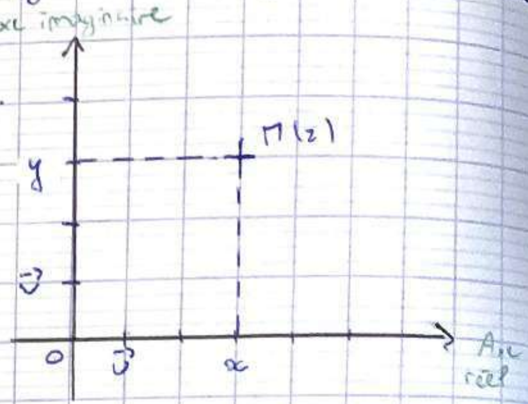
Chapitre 3 : Nombres complexes : point de vue géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

I. Représentation géométrique

Définition : À tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x ; y)$.
On dit que M est l'image de z et on note $M(z)$.
Réciproquement, tout point $M(x ; y)$ est l'image d'un seul nombre complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et on note z_M.



Remarque : L'axe des ordonnées est appelé axe imaginaire. L'axe des abscisses est appelé axe réel. Ce plan sera appelé plan complexe.

• Affixe d'un vecteur

À tout vecteur $\vec{w}(x ; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$ et on note $z_{\vec{w}}$.

Exercice 1 : Soit M un point d'affixe z. Soient M_1, M_2 et M_3 les points symétriques de M respectivement par rapport à l'axe des abscisses, l'origine du repère et l'axe des ordonnées.
Exprimer les affixes des points M_1, M_2 et M_3 en fonction de z.

On pose $z = x + iy$, x et y réels.

$z_M = x + iy = z$

$z_{M_1} = x - iy = \bar{z}$

$z_{M_2} = -x - iy = -z$

$z_{M_3} = -x + iy = -\bar{z}$

Propriétés : • Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ et pour tout réel k,

$\vec{w} = \vec{w'} \iff z_{\vec{w}} = z_{\vec{w'}}$

$z_{\vec{w}+\vec{w'}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w'}}$

$z_{k\vec{w}} = k\, z_{\vec{w}}$

• Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B, on a :

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$

• Si I est le milieu du segment [AB] alors $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Exercice 2 : Dans le plan complexe suivant les points $A(3;-1)$, $B(2;2)$ et $C(-1;1)$.

a) Déterminer les affixes des points A, B et C

b) Déterminer l'affixe du point D, tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer l'affixe du point I, milieu de [AC].

a) $z_A = 3 - i$

$z_B = 2 + 2i$

$z_C = -1 + i$

b) ABCD est un parallélogramme. Soit :

$\vec{AB} = \vec{DC} \iff z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}} \iff z_B - z_A = z_C - z_D$

$\iff 2 + 2i - 3 + i = -1 + i - z_D$

$\iff z_D = -2i$

c) I est le milieu de [AC], donc :

$z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{3 - i - 1 + i}{2} = 1$

II. Module d'un nombre complexe

• Définition et interprétation géométrique

Définition : Soit $z = x + iy$ avec x et y réels un nombre complexe.
Le module de z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par :
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice 3 : Déterminer le module des nombres complexes suivants.

$z_1 = 3 - 4i \quad z_2 = 2i \quad z_3 = -2 \quad z_4 = -7 - i \quad z_5 = -2 + 3i$

$|z_1| = |3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$
$|z_2| = |2i| = \sqrt{2^2} = 2$
$|z_3| = |-2| = \sqrt{(-2)^2} = 2$
$|z_4| = |-7-i| = \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = 5\sqrt{2}$
$|z_5| = |-2+3i| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$

Exercice 4 : Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = -1+i\sqrt{3}$ et $z_C = -1-i\sqrt{3}$.

- Montrer que les points A, B et C appartiennent au même cercle de centre O, dont on déterminera le rayon.

$OA = |z_A| = \sqrt{2^2} = 2$
$OB = |z_B| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$
$OC = |z_C| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$
Donc $OA = OB = OC$
Donc les points A, B et C appartiennent bien au cercle de centre O et de rayon 2.

Remarque : ① Si $z = x$ est un nombre réel alors le module de z est la valeur absolue de x.
② $|z|^2 = x^2 + y^2$
$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$
Donc $|z^2| = z\bar{z}$

Interprétation géométrique : Dans le plan complexe :
- Si M a pour affixe z alors $|z| = OM$
- Si $\vec{w}$ a pour affixe $z_{\vec{w}}$ alors $|z_{\vec{w}}| = \|\vec{w}\|$
- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $|z_B - z_A| = |z_A - z_B| = AB$

Exercice 4 (suite) : Quelle est la nature du triangle ABC ?
$z_A = 2$
$z_B = -1+i\sqrt{3}$
$z_C = -1-i\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |-1-\sqrt{3}-2| = |-3-i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3} - 2| = |-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |-1 - i\sqrt{3} - (-1 + i\sqrt{3})| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AB = AC = BC$ donc le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 5 : Soit A le point d'affixe $z_A = 2 + i$ et B le point d'affixe $z_B = 4 + i$.
Déterminer les ensembles suivants

1) Ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2 - i| = 4$
2) Ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2 - i| = |z - 4 - i|$

- $|z - 2 - i| = |z - (2 + i)| = |z - z_A|$

1) $|z - 2 - i| = 4 \iff |z - z_A| = 4 \iff MA = 4 \iff$ M appartient au cercle de centre A et de rayon 4.

2) $|z - 2 - i| = |z - 4 - i| \iff |z - (2 + 1)| = |z - (4 + i)|$

$\iff |z - z_A| = |z - z_B|$

$\iff MA = MB$

$\iff$ M appartient à la médiatrice du segment [AB].

Propriétés des modules : z et z' sont deux nombres complexes non nuls, n est un entier naturel non nul.

- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Remarque : En général $|z + z'| \neq |z| + |z'|$.

Par exemple, $z = 1 \quad |z| = 1$

$z' = i \quad |z'| = |i| = 1$

$|z + z'| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Exercice 6 : Calculer le module des nombres complexes suivants.

$\dfrac{3}{2 - 5i}$; $\dfrac{3 - 4i}{1 + i}$; $(1 - 2i)^8$

$\left|\dfrac{3}{2 - 5i}\right| = \dfrac{|3|}{|2 - 5i|} = \dfrac{3}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{29}} = \dfrac{3\sqrt{29}}{29}$

$\left|\dfrac{3 - 4i}{1 + i}\right| = \dfrac{|3 - 4i|}{|1 + i|} = \dfrac{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{9 + 16}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$|(1-2i)^8| = |(1-2i)|^8 = \sqrt{1^2+(-2)^2}^{\,8} = \sqrt{5}^{\,8} = (\sqrt{5}^{\,2})^4 = 5^4 = 625$

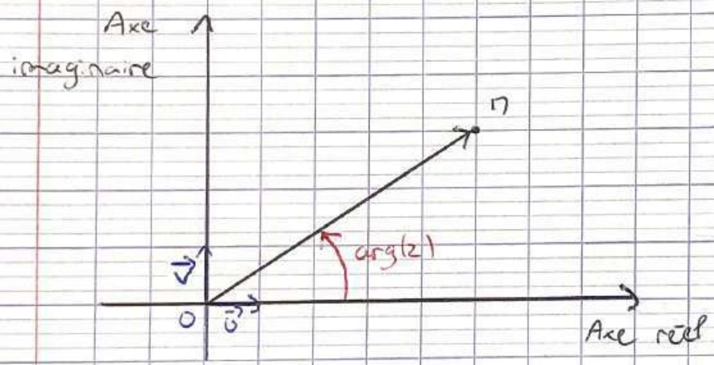
III. Argument et forme trigonométrique

1) Argument d'un nombre complexe non nul

Dans la suite du cours, on se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Définition : Soit z un complexe non nul, de point image M.
On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Remarques : • Si θ est un argument de z alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z. On note $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$ (modulo 2π)
• 0 n'a pas d'argument car l'angle n'est pas défini si M est en O.



Interprétation géométrique : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
- si $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}}$ alors $\arg(z_{\vec{w}}) = (\vec{u};\vec{w})\ [2\pi]$
- si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points distincts alors $\arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)$
$= (\vec{u};\overrightarrow{AB})\ [2\pi]$

Exemples : $\arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ $\qquad \arg(-3) = \pi\ [2\pi]$

$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

<u>Propriété</u> : Pour tout nombre complexe z non nul.

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]$

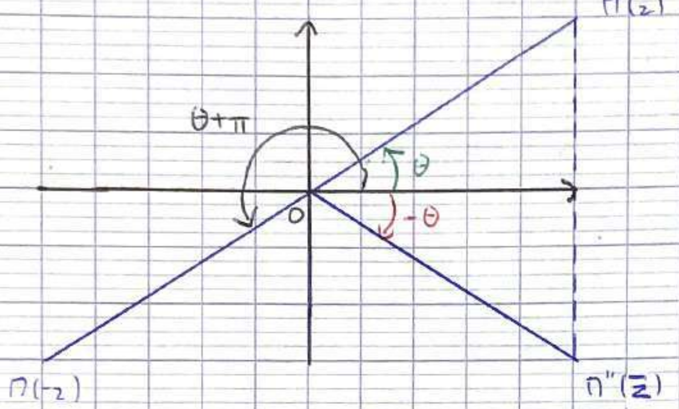
$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]$

- z est un réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 \ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \pi \ [2\pi]$

z est un réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 \ [\pi]$

- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$



2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

<u>Définition</u> : Soit z un complexe non nul.
La forme $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $\theta = \arg(z)$ est appelée <u>forme trigonométrique</u> du complexe z.

<u>Propriété</u> : <u>Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement</u>

Soit z un complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y sont réels). On note $|z| = r$ et $\theta = \arg(z)$.

$$\begin{cases} |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

<u>Exercice 7</u> Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, puis les écrire sous forme trigonométrique.

$z_1 = -1 - i \qquad z_2 = -17 \qquad z_3 = 5i \qquad z_4 = -6\sqrt{3} + 6i$

• $z_1 = |z_1|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$|z_1| = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{-3\pi}{4} [2\pi]$$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$

• $z_2 = |z_2|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$|z_2| = |-17| = 17$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = \dfrac{-17}{17} = -1 \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{0}{17} = 0\end{array}\right\} \theta = \pi [2\pi]$$

$z_2 = -17(\cos(\pi) + \sin(\pi))$

• $z_3 = |z_3|(\cos(\theta) + \sin(\theta))$

$|z_3| = |5i| = \sqrt{5^2} = 5$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = \dfrac{0}{5} = 0 \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{5}{5} = 1\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$z_3 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

• $z_4 = |z_4|(\cos(\theta) + \sin(\theta))$

$|z_4| = |-6\sqrt{3} + 6i| = \sqrt{(-6\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{144} = 12$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = \dfrac{-6\sqrt{3}}{12} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

$z_4 = 12\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

2. Déterminer la forme algébrique du complexe de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$.

3. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z=-4(\cos(\frac{\pi}{5})+\sin(\frac{\pi}{5}$

2. $z=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\sqrt{5}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$

3. $z=-4\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

Propriété : Pour tout réel x, on a :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$

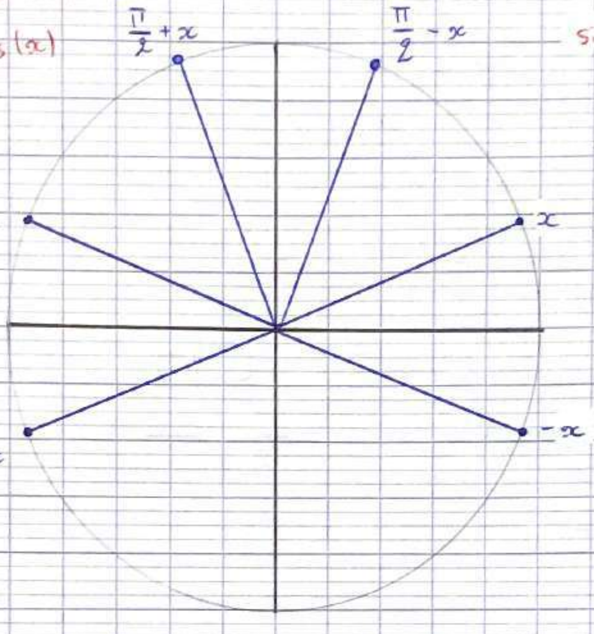
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$

$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$

$\sin(\pi-x)=\sin(x)$



$\cos(-x)=\cos(x)$

$\sin-(x)=-\sin(x)$

$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$

$\cos(\pi+x)=-\sin(x)$

3) Règles de calculs sur les arguments

z et z' sont deux nombres complexes non nuls, n est un entier naturel non nul.

- $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg(z')-\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(z^n)=n.\arg(z)\ [2\pi]$

Exercice 8 : a) Déterminer la forme algébrique de $z=(1-i)(-\sqrt{3}+i)$

b) Déterminer la forme trigonométrique de $1-i$ et de $-\sqrt{3}+i$ et en déduire la forme trigonométrique de z.

c) Déduire des deux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

a) $z=(1-i)(-\sqrt{3}+i)=-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i+1=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$

b) • $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \theta = -\dfrac{\pi}{4} [2\pi]$

donc $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

• $|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta = \dfrac{5\pi}{6} [2\pi]$

donc $-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

• $\arg(z) = \arg(1-i) + \arg(-\sqrt{3}+i) \ [2\pi]$

$\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} \ [2\pi] = -\frac{3\pi}{12} + \frac{10\pi}{12} \ [2\pi] = \frac{7\pi}{12} \ [2\pi]$

$|z| = |1-i||-\sqrt{3}+i| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

3. $1-\sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $1+\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Propriété : A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tel que $z_A \neq z_B$ et $z_A \neq z_C$.
Alors $(\vec{AB}, \vec{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Exercice 9 : A, B et C sont les points d'affixes respectives :
$a = 1-2i$ $\quad b = 5+i$ $\quad c = -2+2i$
Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2+2i-1+2i}{5+i-1+2i} = \frac{-3+4i}{4+3i} = \frac{(-3+4i)(4-3i)}{4^2+3^2} = \frac{-12+9i+16i-12i^2}{25}$$

$$= \frac{25i}{25} = i$$

$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = |i| = 1$ Donc $CA = BA$, donc ABC est isocèle.

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc ABC est rectangle.

Ainsi, le triangle ABC est isocèle rectangle.

IV. Formes exponentielles

1) Exponentielle complexe

Définition : Pour tout réel θ, on définit l'exponentielle complexe de θ par :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ainsi $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ.
En d'autres termes, le cercle trigonométrique de centre l'origine O du repère est l'ensemble des points d'affixes $e^{i\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$.

Exemples :

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Formes exponentielles

Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet une forme trigonométrique $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
On peut donc écrire $z = |z|e^{i\theta}$

Définition : Une forme exponentielle d'un nombre complexe $z \neq 0$ dont un argument est θ, est l'écriture $z = |z| e^{i\theta}$.

Propriétés : Pour tous nombres réels θ et θ', pour tout nombre entier naturel n

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta\ [2\pi]$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre)
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si, $\theta = \theta'\ [2\pi]$

Exemple : Le nombre $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est pas écrit sous forme exponentielle.
Pour l'écrire sous forme exponentielle, on peut utiliser le fait que $e^{i\pi} = -1$.
Alors $z = 2e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Propriétés : Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n :

- Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
- Formule d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstrations :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{cases} |e^{i\theta}| = 1 \\ \arg(e^{i\theta}) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$ alors $\begin{cases} |(e^{i\theta})^n| = |(e^{i\theta})|^n = 1 \\ \arg((e^{i\theta})^n) \equiv n.\arg(e^{i\theta}) \equiv n\theta\ [2\pi] \end{cases}$

On peut écrire $(e^{i\theta})^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. Par suite, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $n' = -n$ alors $n' \in \mathbb{N}$. Comme $e^{in\theta} = e^{-in'\theta} = \dfrac{1}{e^{in'\theta}}$, on a :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1}{e^{in'\theta}}\right| = \dfrac{1}{|e^{in'\theta}|} = 1 \\ \arg\left(\dfrac{1}{e^{in'\theta}}\right) \equiv -\arg(e^{in'\theta}) \equiv -n' \arg(e^{i\theta}) \equiv -n'\theta \equiv n\theta\ [2\pi] \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

- Pour tout réel θ, on a $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{cases}$

Par somme, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2.\cos(\theta)$ soit $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Par différence, $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$ soit $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

- Conséquences

Formules d'addition :

Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Démonstration : Comme $e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$, en passant à la forme algébrique on obtient :
$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$, en développant :
$(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$

Formule de duplication :

Pour tout réel a, on a :

- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

V. L'ensemble des nombres complexes de module 1

1) Propriété et définition

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque : $z \in \mathbb{U}$ signifie que le point $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique.
Autrement dit, $z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$
On a $\theta \notin \mathbb{U}$
L'ensemble $\mathbb{U}$ permet de décrire tous les points du cercle trigonométrique.

Pour tous nombres complexes z et z' dans $\mathbb{U}$. On a $zz' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Démonstration : z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$ donc $|z| = 1$ et $|z'| = 1$.
- On a :

$|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$. Donc $zz' \in \mathbb{U}$.

- On a :

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$. Donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Ces propriétés traduisent la stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse

2) Racines n-ièmes de l'unité

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :
$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} / k \in [\![0;n-1]\!]\}$
Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité.
Si $n \geq 3$, alors les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{U}$, alors $z \neq 0$. On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$z^n = 1 \iff (re^{i\theta})^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1 \iff r^n = 1$ et $n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\iff r = 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$

Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les nombres complexes $e^{\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Or l'équation $z^n = 1$ est polynomiale de degré n. Donc admet au plus n solutions dans $\mathbb{C}$.
On montre que le nombre de racines est égal à n.
Par division euclidienne de k par n, on peut écrire : $k = nq + r$ $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$

$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(nq+r)\pi}{n}} = e^{\frac{2inq\pi}{n} + \frac{2ir\pi}{n}} = e^{\frac{2inq\pi}{n}} \times e^{\frac{2ir\pi}{n}} = (e^{2i\pi})^q \times e^{\frac{2ir\pi}{n}} = 1 \times e^{\frac{2ir\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n}}$

Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0;n-1]\!]$

Montrons que ces solutions sont toutes distinctes, on étudie le cas d'égalité.
Soit $k_1 \in [\![0;n-1]\!]$ et $k_2 \in [\![0;n-1]\!]$ tels que $e^{\frac{2ik_1\pi}{n}} = e^{\frac{2ik_2\pi}{n}}$

$e^{\frac{2ik_1\pi}{n}} = e^{\frac{2ik_2\pi}{n}} \iff \frac{2k_1\pi}{n} = \frac{2k_2\pi}{n} + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$
$\iff k_1 = k_2 + nl,\ l \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow k_1 - k_2 = np \quad , p \in \mathbb{Z}$

Donc $k_1 - k_2$ est un multiple de n.

Or $k_1 \in [[0 ; n-1]]$ et $k_2 \in [[0 ; n-1]]$ donc $|k_1 - k_2| \leq n-1 < n$

$-(n-1) \leq k_1 - k_2 \leq n-1$

Or $|k_1 - k_2|$ est un multiple positif de n donc $k_1 - k_2 = 0$ soit $k_1 = k_2$.

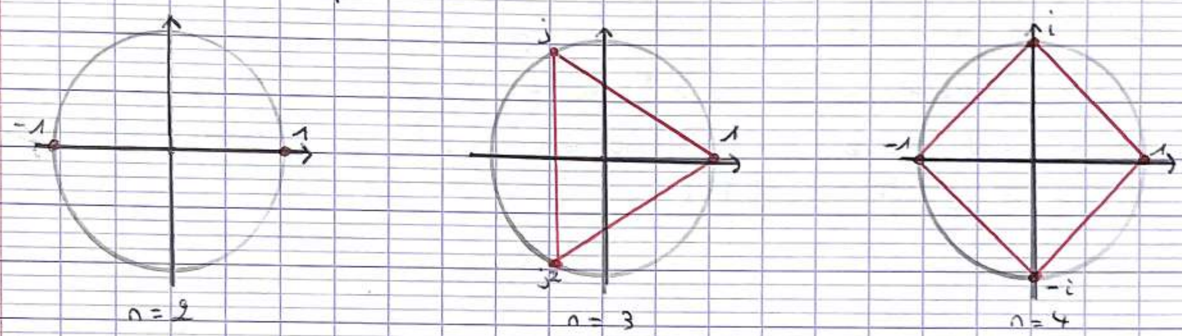
Ainsi $\mathbb{U}_n$ contient exactement n racines.

Exemples : $\mathbb{U}_2 = \{1, e^{i\pi}\} = \{1 ; -1\}$.

$\mathbb{U}_3 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$, on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ d'où $\mathbb{U}_3 = \{1 ; j ; j^2\}$

$\mathbb{U}_4 = \{1 ; e^{i\frac{\pi}{2}} ; e^{i\pi} ; e^{i\frac{3\pi}{2}}\} = \{1 ; i ; -1 ; -i\}$

On obtient les représentations suivantes :



Remarque : Soit w_k une racine n-ième de 1, alors $\frac{1}{w_k}$ est aussi une racine n-ième de 1.

Les racines n-ièmes de 1 sont 2 à 2 conjuguées.

Exercice d'application : Soit n un entier, $n \geq 2$. ① Montrer que :

Si $w_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors les racines n-ièmes de 1 sont $1 ; w_1 ; w_2 ; \dots ; w_{n-1}$

② Montrer que si w est une racine n-ième de l'unité $(w \neq 1)$ alors :

$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$

③ Montrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

① D'après la propriété : $w_k = w_1^k \quad , k \in [[0 ; n-1]]$

② Si w est une racine n-ième de l'unité différente de 1, alors $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $w \neq 1$ et de premier terme 1.

Donc $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0$ car w est une racine n-ième de l'unité $(w^n = 1)$.

③ Découle directement des points 1 et 2 car $w_k = w_1^k$ pour $k \in [[0 ; n-1]]$.
$w_0 + w_1 + w_{n-1} = 1 + w_1 + \dots + w_1^{n-1} = 0$ car w_1 est une racine n-ième de 1.

Exercices d'application

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^3 = 1$

Exercice 2 : Démontrer que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à $10 \sin\frac{\pi}{5}$

Exercice 1

$z-1$ est une racine 3-ième de l'unité.
On a : $z - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec k entier compris entre 0 et 2.
Soit : $z - 1 = 1$ ou $z - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z - 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
Soit : $z = 2$ ou $z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = 1 + e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$S = \{2 ; 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} ; 1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}$