Bac 2021 – Fonction ln – Fonction exp

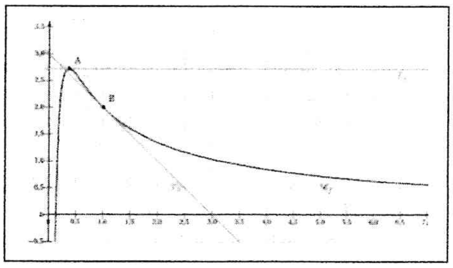
Exercice A bac sujet 0

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$;

— la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\,;\,e\right)$;

— la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.



La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.

On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite $\mathscr{T}_B$.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x\in]0\,;\infty[$,
$$f'(x)=\frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x\in]0\,;+\infty[$
$$f''(x)=\frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice B Métro- mars 2021

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+4-4\ln(x)-\frac{3}{x}$$

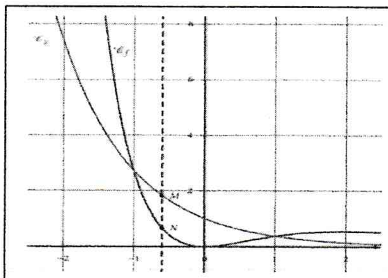
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout nombre réel $x>0$, on a :
$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}.$$
3. a. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

   b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\frac{5}{3}$.
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice A. Métro 2021 – sujet 2

La question 3 est indépendante des questions 1 et 2



Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   b. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ et N de coordonnées $(x\,;\,g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN. On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2e^{-x}$.
   On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ et on note d' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que $d'(x) = e^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.
   b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
   c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance M_0N_0.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
   On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.
   En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exercice B

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.