Chapitre 8 : Produit scalaire - orthogonalité dans le plan

Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires. Le produit scalaire de deux vecteurs du plan se prolonge tout naturellement à l'espace.

I. Produit scalaire de deux vecteurs

A/ Définition

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace ; A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Soit P un plan contenant A, B et C.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P.
• Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors le produit scalaire est nul.

Remarque : le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est indépendant des représentants choisis.

B/ Différentes expressions du produit scalaire

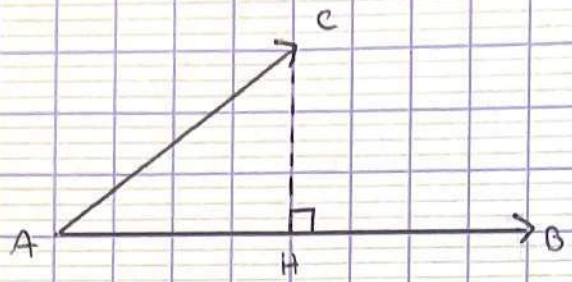
1 - Expression avec le cosinus

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

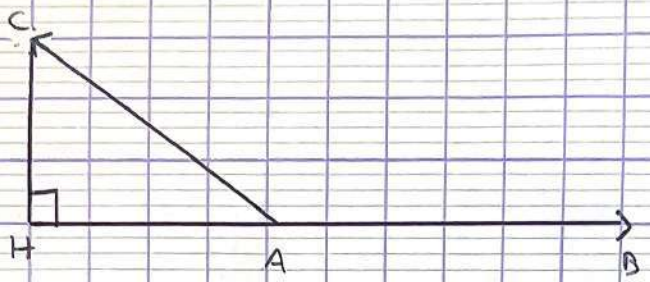
2 - Expression avec le projeté orthogonal

Propriété : On considère trois points de l'espace A, B et C et le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB). On a alors :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés

• $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont le même sens



• $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ n'ont pas le même sens



3- Expressions du produit scalaire avec des carrés de normes

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

4- Expression avec des carrés de distances

Dans un triangle ABC, on a :

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

C/ Propriétés algébriques

- Commutativité : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Bilinéarité :

1. $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

2. $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$ et $\vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}.\vec{v})$

- Carré scalaire : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- Identités remarquables :

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

2. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

D/ Vecteurs orthogonaux

Définition : Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Remarque : le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

II. Produit scalaire dans un repère orthonormé

A/ Base et repère orthonormé

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormée si :
- les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux
- les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|k\| = 1$.

Définition : Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

B/ Expressions analytiques du produit scalaire

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple : Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\5\\7\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 1\times(-4) + 2\times 5 + 3\times 7 = 27$.

Remarques :

- Si $\vec{u} = \vec{v}$ on obtient $\vec{u}.\vec{v} = x^2 + y^2 + z^2$. On retrouve $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$, alors :
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

Propriété : Dans un repère orthonormé, une équation de la sphère de centre $\Omega(a ; b ; c)$ et de rayon R est :
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

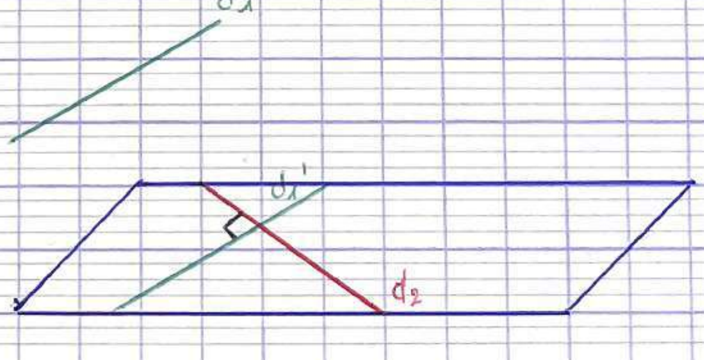
Exemple : La sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 4)$ et de rayon 2 admet pour équation cartésienne :

$(x-1)^2 + (y-(-3))^2 + (z-4)^2 = 2^2$

soit $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 4$ ou bien encore :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 22 = 0$$

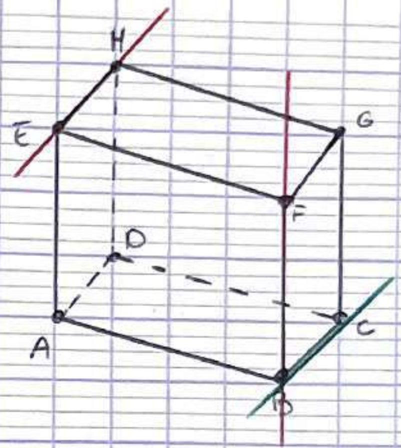
III. Orthogonalité

Définition : Deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si il existe une droite qui est à la fois parallèle à d_1 et perpendiculaire à d_2.



d_1 et d_2 sont orthogonales.

Exemple : Dans ce cube ABCDEFGH, les droites (BF) et (EH) sont orthogonales, car la parallèle (BC) à la droite (EH) est perpendiculaire en B à la droite (BF).



(EH) // (BC) et (BC) ⊥ (BF)

Définitions : Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.
Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan.

Définition : On considère une droite orthogonale à un plan.
Tout vecteur directeur de cette droite est appelé vecteur normal du plan.

Propriété : Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans ce plan.
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à une base de ce plan.

IV. Équations cartésiennes d'un plan

A/ Caractérisation d'un plan

Propriété : A est un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

B/ Équations cartésiennes d'un plan dans un repère orthonormé

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé.
a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls.
Un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme
$ax + by + cz + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.
Cette équation est appelée équation cartésienne du plan.

Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration : • Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient $ax + by + cz + d = 0$.

• P est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont des nombres réels non tous nuls.
On peut supposer, par exemple, a non nul.
Le point $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ est donc un point de P et l'équation équivaut à :
$a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = 0$, soit $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
P est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemples : Dans un repère orthonormé, on donne le point $A(2;-1;0)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Écrire une équation cartésienne du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Le plan P passe par $A(2;-1;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne :

• 1e méthode Soit $M(x;y;z)$ $\qquad \vec{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M \in P \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow -1\times(x-2)+2(y+1)+3z=0$

$\Leftrightarrow -x+2y+3z+4=0$

- 2e méthode : $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P. Une équation cartésienne de P est de la forme :

$-x+2y+3z+d=0 \quad d\in\mathbb{R}$

Or $A(2;-1;0)\in P$ donc :

$-1\times 2+2\times(-1)+3\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=4$

Conclusion : Une équation cartésienne de P est donc :

$-x+2y+3z+4=0$

Suite du III

Vocabulaire : Droite orthogonale à un plan ou droite perpendiculaire à un plan.

Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.

Propriété : $\mathcal{P}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

- Plans perpendiculaires

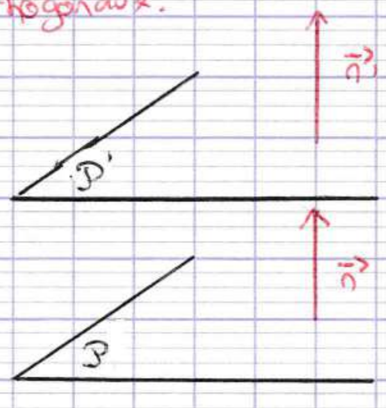
Définition : Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.

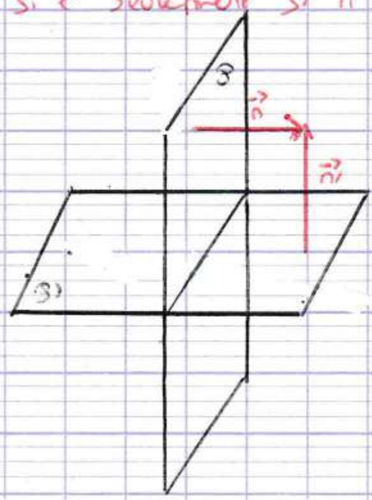
Vocabulaire : Plan orthogonal à un plan ou plan perpendiculaire à un plan

Remarque : Toute droite de l'un n'est pas orthogonale à toute droite de l'autre.

Propriété : Soient $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{P}'$ un plan de vecteur normal $\vec{n'}$

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.





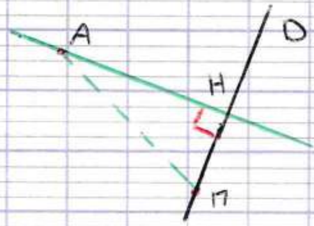
V. Projeté orthogonal

A/ Distance d'un point à une droite

Soient A un point et D une droite de l'espace.

Définition : Le projeté orthogonal du point A sur la droite D est le point d'intersection H de la droite D et du plan P passant par A et orthogonal à D.
La distance du point A à la droite D est la plus petite longueur AM, où $M \in D$.

Propriété : Le projeté orthogonal H du point A sur la droite D est le point de D le plus proche de A. Autrement dit, la distance du point A à la droite D est la longueur AH.

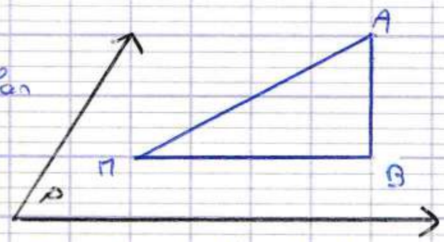


Remarque : Lorsque A appartient à D, le projeté orthogonal de A sur la droite D est le point A.

B/ Distance d'un point à un plan - projeté orthogonal

Soient A un point et P un plan de l'espace.

Définition : La distance du point A au plan P est la plus petite longueur AM, où $M \in P$.
Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point d'intersection H du plan P et de la droite orthogonale à P et passant par A.



Propriété : Le projeté orthogonal B du point A sur le plan P est le point de P le plus proche de A. Autrement dit, la distance du point A au plan B est la longueur AB.

Remarque : Lorsque A appartient à P, le projeté orthogonal de A sur P est le point A.

Démonstration : Soient A un point et P un plan de l'espace. On note H le projeté orthogonal de A sur P.

- Si $A \in P$. Alors H est confondu avec A et $AH = 0$. Donc H est le point de P le plus proche de A. Pour tout point M de P distinct de A, on a $MA \neq 0$, soit $MA > 0$, soit $MA > AH$.

- Si $A \notin P$ et M quelconque de P distinct de H. Comme H est le projeté orthogonal de A sur P, on a $(MH) \perp (AH)$. Donc le triangle MHA est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore :
$MH^2 + AH^2 = AM^2$
Donc $AM^2 > AH^2$ soit $AM > AH$. Donc H est le point de P le plus proche de A.

Exercice d'application : Détermination du projeté orthogonal d'un point sur un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère le plan P d'équation cartésienne $2x - y + z + 3 = 0$ et A le point de coordonnées $(-2; 3; 5)$.
1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à P et passant par A.
2) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan P. Calculer la distance AH.

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et Δ est perpendiculaire à P donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.
Δ est la droite passant par $A(-2; 3; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.
Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\begin{cases} x = x_A + 2t \\ y = y_A + t \\ z = z_A + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2) H est le projeté orthogonal du point A sur le plan P donc H est le point d'intersection de Δ et P.

On a $H(-2+2t\,;\,3-t\,;\,5+t)$, $t \in \mathbb{R}$ car $H \in \Delta$.

$H \in P \iff 2(-2+2t) - (3-t) + (5+t) + 3 = 0$

$\iff 6t + 1 = 0$

$\iff t = -\dfrac{1}{6}$

Pour $t = -\dfrac{1}{6}$, on obtient les coordonnées du point H :
le point H a pour coordonnées $\left(-\dfrac{7}{3}\,;\,\dfrac{19}{6}\,;\,\dfrac{29}{6}\right)$

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{7}{3} + 2\right)^2 + \left(\frac{19}{6} - 3\right)^2 + \left(\frac{29}{6} - 5\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Exercice d'application : Soit $A(2\,;-1\,;2)$ et D la droite dont on donne une représentation paramétrique

$$D\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t - 1 \end{cases}$$

Calculer la distance entre le point A et la droite D.

Un vecteur directeur de la droite D est $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Soit P le plan passant par $A(2\,;-1\,;2)$ et orthogonal à D.
Une équation cartésienne de P est de la forme $2x - y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$.
Or $A \in P$ donc $2 \times 2 - 1 \times (-1) + 2 + d = 0$, soit $d = -7$.
Une équation cartésienne de P est donc : $2x - y + z - 7 = 0$.
Soit $H(x\,;y\,;z)$ le point d'intersection de D et P. On a alors :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \\ 2x - y + z - 7 = 0 \end{cases} \text{, soit } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t - 1 \\ 2(2t+1) - (-t) + (t-1) - 7 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

$2x - y + z - 7 = 0$

$(4) \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Avec $t = 1$ dans les 3 premières équations, on obtient $H(3;-1;0)$.

$AH = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$

On a donc $d(A;D) = AH = \sqrt{5}$