Chapitre 8 : Produit scalaire - orthogonalité dans le plan

Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires. Le produit scalaire de deux vecteurs du plan se prolonge tout naturellement à l'espace.

I. Produit scalaire de deux vecteurs

A/ Définition

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace ; A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Soit P un plan contenant A, B et C.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ calculé dans le plan P.
. Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors le produit scalaire est nul.

Remarque : le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est indépendant des représentants choisis.

B/ Différentes expressions du produit scalaire

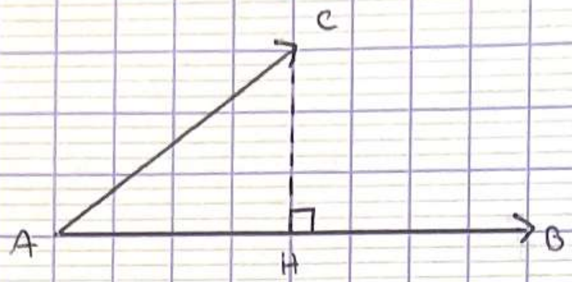
1 - Expression avec le cosinus

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

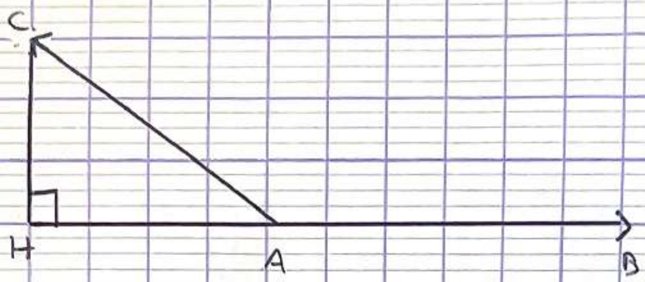
2 - Expression avec le projeté orthogonal

Propriété : On considère trois points de l'espace A, B et C et le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB). On a alors :
$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont dans le même sens
$\vec{AB}.\vec{AC} = -AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de sens opposés

• $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont le même sens



• $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ n'ont pas le même sens



3- Expressions du produit scalaire avec des carrés de normes

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

4- Expression avec des carrés de distances

Dans un triangle ABC, on a :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

C/ Propriétés algébriques

- Commutativité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinéarité :

1. $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

2. $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$ et $\vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}.\vec{v})$

- Carré scalaire : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- Identités remarquables :
  1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
  2. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
  3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

D/ Vecteurs orthogonaux

Définition : Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Remarque : le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

II. Produit scalaire dans un repère orthonormé

A/ Base et repère orthonormé

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormée si :
- les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux
- les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|k\| = 1$.

Définition : Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

B/ Expressions analytiques du produit scalaire

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple : Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\5\\7\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 1\times(-4) + 2\times 5 + 3\times 7 = 27$.

Remarques :

- Si $\vec{u} = \vec{v}$ on obtient $\vec{u}.\vec{v} = x^2 + y^2 + z^2$. On retrouve $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$, alors :
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

Propriété : Dans un repère orthonormé, une équation de la sphère de centre $\Omega(a ; b ; c)$ et de rayon R est :
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

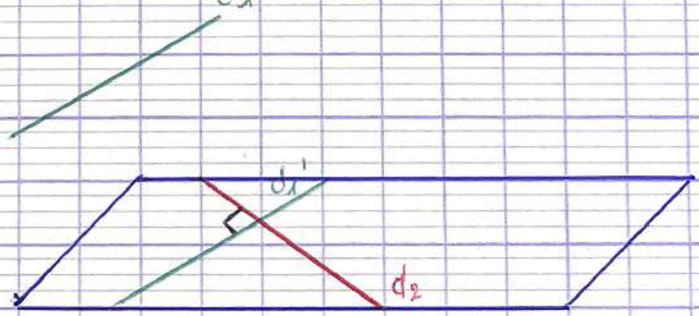
Exemple : La sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 4)$ et de rayon 2 admet pour équation cartésienne :

$(x-1)^2 + (y-(-3))^2 + (z-4)^2 = 2^2$

soit $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 4$ ou bien encore :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 22 = 0$$

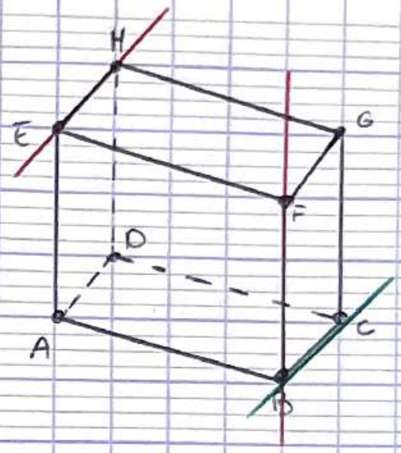
III. Orthogonalité

Définition : Deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si il existe une droite qui est à la fois parallèle à d_1 et perpendiculaire à d_2.



d_1 et d_2 sont orthogonales.

Exemple : Dans ce cube ABCDEFGH, les droites (BF) et (EH) sont orthogonales, car la parallèle (BC) à la droite (EH) est perpendiculaire en B à la droite (BF).



(EH) // (BC) et (BC) $\perp$ (BF)

Définitions : Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.
Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan.

Définition : On considère une droite orthogonale à un plan.
Tout vecteur directeur de cette droite est appelé vecteur normal du plan.

Propriété : Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans ce plan.
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à une base de ce plan.

IV. Équations cartésiennes d'un plan

A/ Caractérisation d'un plan

Propriété : A est un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$ est le plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

B/ Équations cartésiennes d'un plan dans un repère orthonormé

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé.
a, b et c sont trois nombres réels non tous nuls.
Un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une équation de la forme
$ax + by + cz + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$.
Cette équation est appelée équation cartésienne du plan.

Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration : • Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan P passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ si, et seulement si, $\vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$, c'est-à-dire $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.
En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient $ax+by+cz+d=0$.

• P est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont des nombres réels non tous nuls.
On peut supposer, par exemple, a non nul.
Le point $A(-\frac{d}{a};0;0)$ est donc un point de P et l'équation équivaut à :
$a(x+\frac{d}{a}) + by + cz = 0$, soit $\vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.
P est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exemples : Dans un repère orthonormé, on donne le point $A(2;-1;0)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$. Écrire une équation cartésienne du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Le plan P passe par $A(2;-1;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne :

• 1e méthode Soit $M(x;y;z)$ — $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$
$M \in P \iff \vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow -1\times(x-2) + 2(x+1) + 3z = 0$

$\Leftrightarrow -x + 2y + 3z + 4 = 0$

2^e méthode $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P. Une équation cartésienne de P est de la forme :

$-x + 2y + 3z + d = 0 \quad d \in \mathbb{R}$

Or $A(2;-1;0) \in P$ donc :

$-1\times 2 + 2\times(-1) + 3\times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$

Conclusion : Une équation cartésienne de P est donc :

$-x + 2y + 3z + 4 = 0$