Chapitre 2 : Équations polynomiales

I. Équations du 2nd degré

Théorème : On considère l'équation $z^2 = a$, avec a un nombre réel
- Si $a \geq 0$ alors l'équation admet 2 solutions réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a < 0$ alors l'équation admet 2 solutions complexes (non réelles) : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

Démonstration : • Si $a \geq 0$, $z^2 = a \Leftrightarrow z^2 - a = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-\sqrt{a})(z+\sqrt{a}) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = \sqrt{a} \text{ ou } z = -\sqrt{a}$$

• Si $a < 0$, $z^2 = a \Leftrightarrow z^2 - a = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 - (-1 \times -a) = 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 - (i^2 \times -a) = 0 \text{ avec } -a > 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 - (i\sqrt{-a})^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a}) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = i\sqrt{a} \text{ ou } z = -i\sqrt{a}$$

Exemple : l'inéquation $z^2 = -5$ admet 2 solutions : $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$

Théorème : On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où z désigne un complexe et a, b et c sont tous réels donnés, $a \neq 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle distincte $z_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Dans tous les cas, $az^2 + bz + c$ se factorise toujours sous la forme
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $P(z) = 0$ puis factoriser $P(z)$.
a) $P(z) = z^2 - 2z + 5$
b) $P(z) = z^2 + 4$
c) $P(z) = 2z^2 + 4z + 16$

a) $P(z) = z^2 - 2z + 5$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$
$\Delta < 0$ donc le polynôme admet 2 solutions complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-(-2) - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 - 2i$$
$$z_2 = \frac{-(-2) + i\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 + 2i$$
$P(z) = (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)$

b) $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$
$S = \{2i ; -2i\}$
$P(z) = (z + 2i)(z - 2i)$

Démonstrations : Au programme !
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$
$z' = x' + iy'$; $x', y' \in \mathbb{R}$

Conjugué d'une somme

• Montrons que $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

D'une part :
$z + z' = x + iy + x' + iy'$
$= (x + x') + i(y + y')$
Donc $\overline{z + z'} = (x + x') - i(y + y')$

D'autre part :
$\overline{z} = x - iy$
$\overline{z'} = x' - iy'$
Donc $\overline{z} + \overline{z'} = (x + x') - i(y + y')$

Conclusion : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

Conjugué d'un produit

• Montrons que $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

D'une part :

$z \times z' = (x+iy)(x'+iy')$
$= xx' + ixy' + iyx' - yy'$
$= (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

Donc $\overline{z \times z'} = (xx' - yy') - i(xy' + yx')$

D'autre part :

$\bar{z} \times \bar{z'} = (x-iy)(x'-iy')$
$= xx' - ixy' - iyx' - yy'$
$= (xx' - yy') - i(xy' + yx')$

Conclusion : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

Conjugué d'un inverse

Soit $z \in \mathbb{C}^*$: $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$ $(x,y) \neq (0,0)$

• Montrons que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

D'une part :

$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

Donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$

D'autre part :

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$

Conclusion : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Conjugué d'un quotient

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$
$z' = x' + iy'$; $x', y' \in \mathbb{R}$ et $(x', y') \neq (0,0)$

• Montrons que $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

D'une part :

$\frac{\bar{z}}{\bar{z'}} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z'}} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$

D'autre part :

$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

Donc $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \bar{z} \times \overline{\frac{1}{z'}}$

Conclusion : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

Conjugué d'une puissance

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{z}^n = \overline{z^n}$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: " $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ "

Initialisation : Pour $n = 0$, $\overline{z^0} = \bar{1} = 1$ et $\bar{z}^0 = 1$.
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$:
On suppose que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\
&= \overline{z^n} \times \bar{z} \quad \text{(conjugué d'un produit)} \\
&= \bar{z}^n \times \bar{z} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \bar{z}^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir de $n = 0$, donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Démonstration : Conjugué d'un inverse (autre méthode)

$\forall z \in \mathbb{C}^*$
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$\bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{\left(\frac{z}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = 1$ Donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ est un inverse de $\bar{z}$ et par

unicité de l'inverse, on a : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

II. Factorisation d'un polynôme

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Un polynôme P de degré n (à coefficients dans $\mathbb{R}$) s'écrit sous la forme :
$P(z) = a_n \times z^n + a_{n-1} \times z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$
$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ sont des réels tels que $a_n \neq 0$.

$a \in \mathbb{C}$ est racine de P dans $\mathbb{C}$ si $P(a) = 0$

le polynôme P de degré n est factorisable par $z - a$ s'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que :

$P(z) = (z-a)\,Q(z)$

Exemples : • $P(z) = 2z^3 + 3z + 5$ est un polynôme de degré 3.

• -1 est racine de $P(z)$ car $P(-1) = 0$:

$2 \times (-1)^3 + 3 \times (-1) + 5 = -2 - 3 + 5 = 0$

• $z^2 - 4$ est factorisable par $z - 2$ car $z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$

Exercice d'application : Soit P le polynôme tel que $P(z) = z^3 + 2z^2 - 1$

1- Montrer que -1 est une racine de $P(z)$

2- En déduire une factorisation de $P(z)$

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

1- $P(1) = (-1)^3 + 2 \times (-1) - 1 = 0$ donc -1 est racine de P.

2- Pour $z \in \mathbb{C}$, on écrit :

$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$; a, b, c des réels et tels que $a \neq 0$

On développe le 2nd membre :

$(z+1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$

$= az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 2 \\ c + b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - 1 \\ c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc $P(z) = (z+1)(z^2 + z - 1)$

3- $P(z) = 0 \iff (z+1)(z^2 + z - 1) = 0$

$\iff z + 1 = 0$ ou $z^2 + z - 1 = 0$

$\iff z = 1$ ou $z^2 + z - 1 = 0$

Soit l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$

L'équation admet 2 solutions réelles :

$z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{ -1 \, ; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \, ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Le polynôme $z^n - a^n$ se factorise par $z - a$

2) Un polynôme P de degré n se factorise par $z-a$ si et seulement si $P(z) = 0$

3) Un polynôme de degré n admet au plus n racines

Propriété : Soient a et z deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

Alors le polynôme $z^n - a^n$ se factorise par $z-a$ et on a :

$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-2} z + a^{n-1} z)$

Exemple : Pour $n = 1$, on obtient : $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$

Pour $n = 3$ et $a = 1$, on obtient $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

Exercice d'application : Factoriser le polynôme $z^5 + i$

Comme $(-i)^5 = -i$, on a : $z^5 + 1 = z^5 - (-i)^5$

Et donc $z^5 + i = (z - (-i))(z^4 + (-i)z^3 + (-i)^2 z^2 + (-i)^3 z + (-i)^4)$

Soit $z^5 + i = (z+i)(z^4 - iz^3 - z^2 + iz + 1)$

III. Formule du binôme de Newton

A/ Factorielle d'un entier naturel

Définition : Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle n l'entier naturel non nul noté $n!$ défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Par convention, on admet que $0! = 1$

Exemple : $(n+1)! = n! \times (n+1)$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 120}{120} = 42$

B/ Coefficient binomial

Définition : Pour tout $k \in \{0;1;\dots;n\}$, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ "k parmi n" par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Propriété : • Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

• Soit n un entier naturel. Alors :

$$\binom{n}{0} = 1$$

• Soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1$$

• Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n-1$. Alors la réduction de Pascal est :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k+1}$$

C/ Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet d'obtenir rapidement les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour les premières valeurs de k et de n :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...									

Propriété : Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n,
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Exemple 1 Pour $n \in \{0;1;2;3;4;5\}$ on obtient en utilisant le triangle de Pascal :
- La ligne 0 est : 1 soit le coefficient de $(a+b)^0 = 1$
- La ligne 1 est : 1 - 1 soit les coefficients de $(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b$

Tout commence vraiment à la ligne 2 (la 3e en fait).
- La ligne 2 est : 1 - 2 - 1

soit les coefficients de $(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times a \times b + 1 \times b^2$
- La ligne 3 est : 1 - 3 - 3 - 1

soit les coefficients de $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^2$
- La ligne 4 est : 1 - 4 - 6 - 4 - 1

soit les coefficients de $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
- La ligne 5 est : 1 - 5 - 10 - 10 - 5 - 1

soit les coefficients de $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Exemple 2 : Pour $a = 1$ et $b = x$, on obtient :
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
Donc $\binom{n}{k}$ est coefficient du monôme x^k.

Exemple 3 : Pour $a = 1$ et $b = 1$, on obtient :
$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Exemple 4 : Pour $a = 1$ et $b = -1$, on obtient :
$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

Exercice d'application : Écrire l'exemple 1 avec les coefficients binomiaux.
$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$
$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$
$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$= a^4 + 3a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemple : Calculer en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$(2+i)^3 = \binom{3}{0}\times 2^3 + \binom{3}{1}\times 2^2 \times i + \binom{3}{2}\times 2 \times i^2 + \binom{3}{3}\times i^3$$
$$= 1\times 8 + 3\times 4i + 3\times(-2) + 1\times(-i)$$
$$= 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

$$(1-i)^5 = (1+(-i))^5 = \binom{5}{0}\times 1^5 + \binom{5}{1}\times 1^4\times(-i) + \binom{5}{2}\times 1^3\times(-i)^2 + \binom{5}{3}\times 1^2\times(-i)^3 + \binom{5}{4}\times 1\times(-i)^4 + \binom{5}{5}\times(-i)^5$$
$$= 1\times 1 + 5\times(-i) + 10\times(-1) + 10\times i + 5\times 1 + 1\times(-i)$$
$$= 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i = -4 + 4i$$

$$(3+2i)^4 = \binom{4}{0}\times 3^4 + \binom{4}{1}\times 3^3\times 2i + \binom{4}{2}\times 3^2\times(2i)^2 + \binom{4}{3}\times 3\times(2i)^3 + \binom{4}{4}\times(2i)^4$$
$$= 1\times 81 + 4\times 27\times 2i + 6\times 9\times(-4) + 4\times 3\times(-8i) + 1\times 16$$
$$= 81 + 216i - 216 - 96i + 16 = -119 + 120i$$

$$(1+i)^4 = \binom{4}{0}\times 1^4 + \binom{4}{1}\times 1^3\times i + \binom{4}{2}\times 1^2\times i^2 + \binom{4}{3}\times 1\times i^3 + \binom{4}{4}\times i^4$$
$$= 1\times 1 + 4\times i + 6\times(-1) + 4\times(-i) + 1\times 1$$
$$= 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$$

(on peut négliger les 1 dans le développement)

Démonstration : • n et k entiers naturels $0 \leq k \leq n$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

• $n \in \mathbb{N}$ $\binom{n}{0} = 1$

• $n \in \mathbb{N}^*$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$

Relation de Pascal : $0 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Exercice d'application : Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a le nombre complexe $(a+i)^3$ est-il imaginaire pur ?

$$(a+i)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} i^k = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 \times i + \binom{3}{2} a \times i^2 + \binom{3}{3} i^3$$

$$= a^3 + 3a^2 \times i - 3a - i$$

$$= a^3 - 3a + i(3a^2 - 1)$$

$(a+i)^3$ est un imaginaire pur si et seulement si :

$a^3 - 3a = 0 \iff a(a^2 - 3) = 0$

$\iff a = 0$ ou $a^2 - 3 = 0$

$\iff a = 0$ ou $a = \sqrt{3}$ ou $a = -\sqrt{3}$