Chapitre 6 : Continuité

I. Continuité d'une fonction

A/ Définition

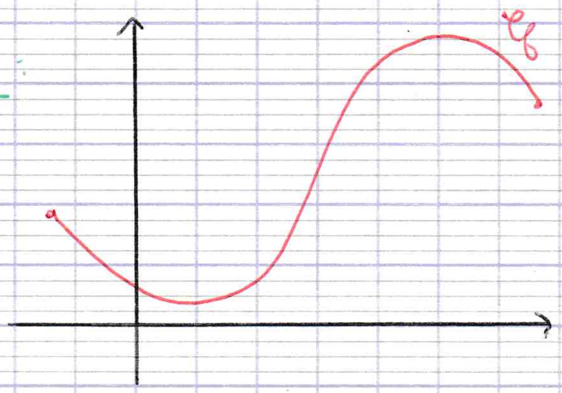
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

- On dit que f est continue en a si et seulement si f a une limite finie en a et telle que :

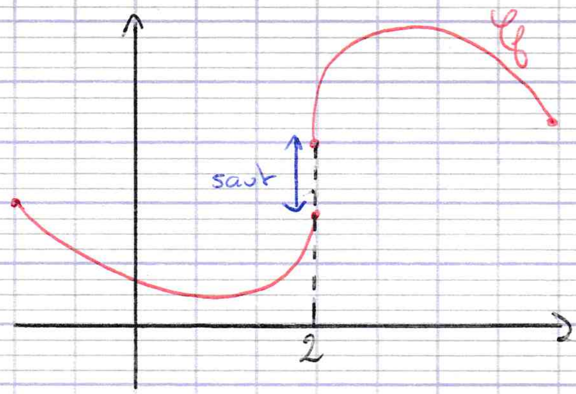
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

- On dit que f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout réel de I.

Exemple :



f est continue sur I



f est discontinue en 2

B/ Continuité des fonctions usuelles

Propriété : • Les fonctions puissance $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur $\mathbb{R}$.
• La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.
• Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
• La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
• La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

C/ Opérations algébriques sur les fonctions continues

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
1) Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$ est continue sur I.
2) Si k est un réel et f est continue sur I, alors kf est continue sur I.
3) Si f et g sont continues sur I, alors $f \times g$ est continue sur I.
4) Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

→ Conséquence : 1) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

D/ Composée de fonctions continues

Propriété : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J et soit g une fonction définie sur J.
Si f est continue sur I et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

E/ Lien fondamental avec la dérivabilité

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration : Soit a un réel de I tel que f est dérivable en a, c'est-à-dire que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Pour tout $x \neq a$ on pose $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On sait que f est dérivable en a donc $\lim_{x \to a} g(x) = f'(a)$. Pour $x \neq a$ on a $f(x)-f(a) = g(x)(x-a)$ et donc $f(x) = f(a) + g(x)(x-a)$. De plus :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to a} g(x) = f'(a) \\ \lim_{x \to a} (x-a) = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x \to a} g(x)(x-a) = 0$$

Donc par somme $\lim_{x \to a} g(x)(x-a) + f(a) = f(a)$.
Ainsi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et f est continue sur a.
Or ceci est valable pour tout réel a de I, donc f est bien continue sur I.

Exemple : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application : • Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
Il reste à étudier la continuité de f en zéro :
Or $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ donc f est continue en 0.
Donc f est continue sur $[0 ; +\infty[$.

• Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ donc f est continue sur ces intervalles.

Il reste à étudier la continuité de f en zéro :

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -x = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$ donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

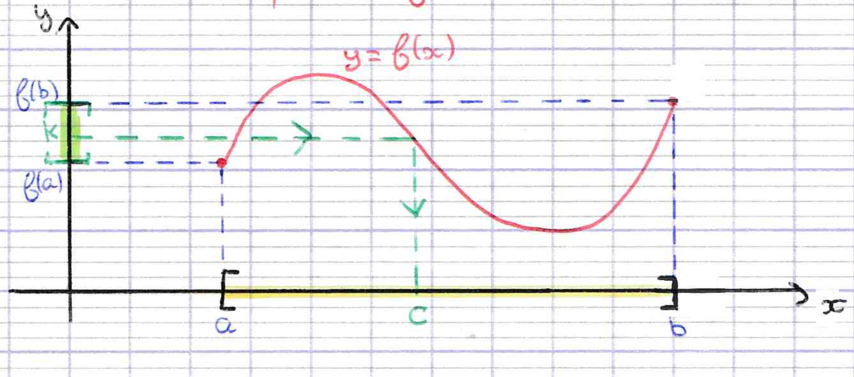
Remarque : La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point. En effet, $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (TVI) : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.



Remarque : Lorsque $k=0$, on pourra montrer que $f(a) \times f(b) < 0$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $I = [0;9]$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution dans I.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur I donc f est continue sur I.
On a $f(0) = 2$ et $f(9) = 5$. Ainsi, $3 \in [f(0) ; f(9)]$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution dans I.

Théorème (Corollaire du TVI) : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c dans $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $I = [0 ; 9]$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans I.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et strictement croissante sur I donc f est continue et strictement croissante sur I.
On a $f(0) = 2$ et $f(9) = 5$. Ainsi, $3 \in [f(0) ; f(9)]$.
Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans I.

- Complément du théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires (et son corollaire) peuvent s'étendre à une fonction continue (et strictement monotone) sur un intervalle ouvert même non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle.

III. Application aux suites

A/ Image d'une suite convergente par une fonction continue

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $\ell \in I$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Remarque : La réciproque est fausse.

B/ Théorème du point fixe

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I dans lui-même et soit (u_n) une suite définie par un réel u_0 de I et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n + 4$.
On admet que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Déterminer alors la valeur de ℓ.

La fonction $f : x \mapsto 0,5x + 4$ est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$.
La suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.
Alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Or $f(x) = x \iff 0,5x + 4 = x \iff 0,5x = 4 \iff x = 8$.
Cette équation admettant une unique solution $x = 8$, alors on a $\ell = 8$.
La suite (u_n) converge donc vers 8.