Chapitre 0 : Évènements par récurrence

Activité 1 p. 14

On considère la suite (u_n) définie $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n.

$u_{n+1} = 2u_n + 1$

① Calculer u_1 ; u_2 ; u_3

$u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$u_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$

$u_3 = 2 \times 7 + 1 = 15$

② Compléter le tableau suivant

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
$2^{n+1}-1$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047

③ Conjecturer une expression de u_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{n+1} - 1$

④ On veut démontrer la conjecture

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété $u_n = 2^{n+1} - 1$.

a) Écrire la propriété $P(0)$ et déterminer si elle est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.

On suppose que la propriété $P(0)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Démontrer que la propriété $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$.

a) * $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, n fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

* On suppose que $P(0)$ est vraie.

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$
$$= 2 \times (2^{n+1} - 1) + 1 \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$
$$= 2^{n+2} - 2 + 1$$
$$= 2^{n+2} - 1$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0. Donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 1$

I. Raisonnement par récurrence

Théorème : Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- On suppose que $P(n_0)$ est vraie.
- Pour tout entier naturel $n \geq n_0$ fixé "$P(n)$ est vraie" implique "$P(n+1)$ est vraie"

Alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

II. Exercices

- Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
Montrer par récurrence pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ "$u_n = 3^n - 2$"

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = -1$ et $3^0 - 2 = 1 - 2 = -1$ donc $u_0 = 3^0 - 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$.
Supposons que $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$u_{n+1} = 3n + 4$$
$$= 3(3^n - 2) + 4$$
$$= 3^{n+1} - 6 + 4 = 3^{n+1} - 2$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

*

• **Exercice 2**

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 3$, $2^n > n + 3$.

• **Exercice 3**

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n
$u_{n+1} \leq u_n$.

• **Exercice 4**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

• $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0. Donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Ex. 2 : Pour tout entier $n \geq 3$, on note $P(n)$: "$2^n > n+3$"

Initialisation : Pour $n = 3$

$2^3 = 8$ et $3+3 = 6$ donc $2^3 > 3+3$ donc $P(3)$ est vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geq 3$, supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $2^n > n+3$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $2^{n+1} > n+1+3$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &> 2(n+3) \\ &= 2n+6 \\ &= n+n+4+2 \\ &= n+1+3+n+2 \\ &> n+1+3 \text{ car } n+2 > 0 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(3)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 3. Donc par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 3$. Donc pour tout entier $n \geq 3$, $2^n \geq n+3$

• **Exercice 5** (Inégalité de Bernoulli)

Soit a un nombre réel positif. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$

• **Exercice 6**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P(n)$ "$4^n - 1$" est un multiple de 3

Montrer par récurrence la propriété $P(n)$.

Ex. 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$P(n)$ " $u_{n+1} \leq u_n$ "

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{3} \times 1 - 2 = -\frac{5}{3}$.
Donc $u_1 < u_0$; donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 0$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \leq u_n$.
Donc $\frac{1}{3} u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$ car $\frac{1}{3} > 0$

Donc $\frac{1}{3} u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{3} u_n - 2$

Donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

Ex. 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P(n)$ la propriété : " $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

Initialisation : vérifions que $P(1)$ est vraie.
$S_1 = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, donc $S_1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$S_{n+1} = 1+2+3+\dots+(n+1)$$
$$= S_n + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 1, donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Ex. 5</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P(n)$ la propriété : " $(1+a)^n \geqslant 1+na$ "

Initialisation : Vérifions que $P(0)$ est vraie.
Pour $n=0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$. Donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$
Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geqslant 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence : $(1+a)^n \geqslant 1+na$
Donc $(1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$ car $1+a \geqslant 0$
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+na^2$
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$ car $na^2 \geqslant 0$
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Ex. 6 :

Initialisation : On vérifie que $P(0)$ est vraie.
Pour $n=0$, $4^0-1=1-1=0=3\times 0$. Donc 4^0-1 est bien multiple de 3. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n\geq 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$4^{n+1}-1=4\times 4^n-1=(3+1)\times 4^n-1=3\times 4^n+(4^n-1)$$

Par hypothèse de récurrence : $4^n-1=3\times p$, où p est un entier.
On en déduit donc que :

$$4^{n+1}-1=3\times 4^n+3\times p=3\times(4^n+p)=3\times p'$$, où p' est un entier.

Donc $4^{n+1}-1$ est un multiple de 3. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à partir du rang 0, donc par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 0$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, 4^n-1 est un multiple de 3.