Chapitre 5 : Complément sur la dérivation

I. Dérivée d'une fonction composée

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I, de dérivée
$x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
On a $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ où $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
u est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$
v est dérivable sur $J =]0;+\infty[$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Et pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
Donc f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$

$$= 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice d'application : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1-2x)$

• Cas particuliers

A - Fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

On a $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 1$
u est dérivable, strictement positive sur I et $u'(x) = 2x$
Donc f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

B - Fonction $x \mapsto (u(x))^n$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*$
Alors la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 6x + 8)^3$.
On a $f(x) = (u(x))^3$ avec $u(x) = x^2 + 6x + 8$

u est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $u'(x) = 2x+6$
Donc f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$f'(x) = 3u'(x) \times (u(x))^2 = 3(2x+6)(x^2+6x+8)^2$

C - Fonction $x \mapsto \exp(u(x))$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I, de dérivée
$x \mapsto u'(x) \times \exp(u(x))$.

Exemple : Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}$
par $f(x) = e^{x^2+1}$
On a $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+1$.
u est dérivable sur I et $u'(x) = 2x$ pour tout $x \in I$.
On a alors f dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,
$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2+1}$

II. Convexité

A - Définition - Exemple

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On dit que f est convexe sur I si, pour tous points A et B distincts de $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ entre A et B.
On dit que f est concave sur I si pour tous points A et B distincts de $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est en-dessous de $\mathcal{C}_f$ entre A et B.

B - Convexité et dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est deux fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I et si sa fonction dérivée f' est dérivable sur I.
La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f' en x est la fonction dérivée seconde de f. On la note f''.

Exemple : La fonction f définie ci-dessous est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
$f'(x) = 6x - 3$
$f''(x) = 6$

Propriété : Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

- f est convexe sur I
- f' est croissante sur I
- f'' est positive sur I
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes

De la même manière, il y a équivalence entre :

- f est concave sur I
- f' est décroissante sur I
- f'' est négative sur I
- $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes

<u>Remarque</u> : Si la fonction f est dérivable sur I alors :

- f est convexe sur I si et seulement si, sur I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes
- f est concave sur I si et seulement si, sur I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes

<u>Exemples</u> : Étudier la convexité des fonctions suivantes.

- $f : x \longmapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$
- $f : x \longmapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$
- $f : x \longmapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$

- La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$.
Comme f'' est positive sur $\mathbb{R}$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $f : x \longmapsto e^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$.
Comme $f''(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

• La fonction $f : x \longmapsto x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
$f'' \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, donc f est convexe sur $[0; +\infty[$
$f'' \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$, donc f est concave sur $]-\infty; 0]$

C- Point d'inflexion

__Définition__ : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $a \in I$.
On dit que le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ ssi, en A, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.

__Remarque__ : En l'abscisse a du point d'inflexion, f passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

__Exemple__ : La fonction $f : x \longmapsto x^3$ admet un point d'inflexion en l'origine O du repère. En ce point, sa courbe représentative traverse sa tangente. Elle est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe en $[0; +\infty[$.
En l'abscisse 0 du point d'inflexion, la fonction f passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

__Propriété__ : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $a \in I$.
Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion $A(a; f(a))$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a, c'est-à-dire que f' change de variation en a.

III. Inégalités liées à la convexité

__Propriété__ : Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors, pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0;1]$:

$$f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

Si f est une fonction concave sur un intervalle I et pour tout $t \in [0;1]$

$$f(tx+(1-t)y) \geq t f(x) + (1-t) f(y)$$

Remarque : Si les inégalités précédentes sont strictes, on dira que f est strictement convexe ou strictement concave sur I.

Pour comprendre cette propriété, manuel p.144.

Propriété : f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Démonstration : Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Montrons que si f'' est positive alors la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente.

Soit $a \in I$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Soit g la fonction définie sur I par :

$g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$

Alors g est dérivable sur I comme des fonctions dérivables.

$\forall x \in I,\ g'(x) = f'(x) - f'(a)$

Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :

- Si $x \leq a$, $f'(x) \leq f'(a)$, i.e. $g'(x) \leq 0$
- Si $x \geq a$, $f'(x) \geq f'(a)$, i.e. $g'(x) \geq 0$

$g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. Donc g admet un minimum en a.

Or $g(a) = 0$ donc pour tout $x \in I$, $g(x) \geq 0$

En conclusion, sur I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente.

Exercice 1 : Montrer que pour tous réels a et b,

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

Exercice 2 : Montrer que pour tous réels x et y, on a :

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}$$

Exercice 3 : Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a :

$$(x+y)^3 \leqslant 4(x^3 + y^3)$$

Exercice 4 : Montrer que pour tout réel x

$$e^x \geqslant x + 1$$

Exercice 1 : La fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\forall t \in [0;1]$, on a :
$f(ta + (1-t)b) \leqslant t f(a) + (1-t) f(b)$. Pour $t = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)$$

donc $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$ donc $(a+b)^2 \leqslant \frac{4(a^2+b^2)}{2}$ soit $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$

Exercice 2 : On pose $f(x) = e^x$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.
Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0;1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant t \times f(x) + (1-t) f(y)$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on a :

$$e^{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}} \leqslant \frac{e^x}{2} + \frac{e^y}{2} \iff e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}$$