Chapitre 0: Événements par récourence Perivité 1 p. 14 on considère la suite (on) définie vo = 1 et pour -out entier naturel n. --- 2 Un +1 2) Calculer U, i U2: U3 0 = 2 × 1 + 1 = 3 0=2 + 3 + 1=7 0 = 2 × 7 +1 = 15 D'Complèter le tableau svivant, 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 3 7 15 31 63 127 285 511 1023 2047 2 -1 1 3 7 15 3 1 63 127 255 511 1023 2047 3 Conjecture une expression de un en fonction de n 9 On veut démontrer la conjecture rout ne IN, on note P(n) la propriété v= 2<sup>nu</sup>-1. =) Écrire la propriété P(O) et déterminer si ette est vocie. = Soit nEIN, Exe. 00 soppose que la propriété (10) est voire, c'est-àdemontrer que la propriete P(n+1) es vaie, c'est-ai-200=1 et 201-1=2-1=1 donc P(O) est vaie. Soit nEIN, n fixe. On suppose que Pan est voire, et = montra que P(n+1) est vraie » es suppose que P(o) est vraie.

Un = 2 0 +1 = 2 × (2n+1-1) +1 (hypothèse de récovence) = 2n+2-2+1 = 91+2 -1 Donc P(n+1) est vocie Conclision: P(O) est proje et P(n) et hénéditaine à partir du rang O Donc pour récorrence Philest maie pour tout nEIN. Ynew, Un= 21+1-1 I gaisonnement par récurrence Theoreme: Soit P(n) une propriété dépendant d'un estien natural n et no EIN ·On suppose que P(no) est vraie · Pour tout entier naturel n: no fixe "P(n) est vouse implique a P(n+1) est voice Alers, pour root entier naturel 1 > 10 P(n) est unaie. II. Exercices · Exercice 1 On considère la soire (un défine por LUTTE BUATY, NEW Montrer par récevence pour bour entier noturel 1, vn=3°-2 Sait new on rote Pla) "Un = 37 - 2"

Introlisation: Pour n=0, vo=-1 et 3-1=1-1 done vo = 3° -2. Onc P(O) or vraie. eredre Soit un entier n >0 mosone que Pla ) es vraie, mantions que Plant) et vraie. = 3(3?-2)+4
= 30+1-6+4=30+1-2 Donc P(n+1) est vraix. · Exercice 2 Totrer par récurrence que, pour lout entier n > B, 27) n-3 · Exercice 3 considér la surve (un) cetime par par récurrence que pour bout entier naturel n · Exercice 4 on the Shi 1+2+3+...+ n Montre n(n+1) que pour lour n E N\* - PO) est voile et P(n) est héréditaire à partir du Donc par récorrence P(n) es vruie pour bout entire

Ex. 2: Pour tout entier 123, on note Pant= 2) 1+3 Intaksation Pour n= B 23 = 8 ex 3+3 = 6 donc 23 > 3+3 donc P(3) or vie Hérédité: Soit un entir 123, supposers que PC1 est venile : c'est - à dire 27 > n + 3. Montrone qu P(n+1) cè vraie, c'est-à-dire 2 n+1 > n+1+8. 2n+1 = 2 × 21 >2(1+3) = 2 + 6 = 1 + 1 + 2 2 1+4-3 + 0 +2 > n+1+3 car n+2>0 Done Plat 1 est venil Conlision: P(3) et voire et P(n) es héréditaire a partir de rang B Ponc par récurrence P(n) es voir pour tout entier 123. Danc pour tout entier 123, 2 7,0+3 · Exercice 5 (Inégalité a Berrouille) Soit aun nombre red positif. Partre per recurrence que pour vour entre noturel n, (1+a) 2, 1+ na · Exercice 6 Soit AEIV. On note Plat "4"-1" es un multiple de

Mantrer par récurrence la propriété P(n). Ex. 3 Pour hour n EIN, on note P(n) "Un-1 & Un" Initialisation Pour n=0, 00=1 et 0,= \frac{1}{3} \times 1-2=-\frac{5}{3}

Donc U, \( \times 0 \) i donc P(0) est vionie Hérédité: Soit un entier 1 20, supposons que P(1) es Par hypothèse de récurrence, une 50.

Donc 30+1 5 300 cor 300 Danc 30 14 - 2 5 1 0 - 2 Done Un+2 & Un+1. Done P(n+1) est vraie Conclusion: P(1) est vraie et P(n) est hérédraire à partir de range , donc par récurrence, P(n) est vraie pour tout entire naturel n. Donc pour tout entire naturel n 1000 600 Ex. 4: Soit ne N\* . On rote Pan) en propriété: "Sn: n(n+1)" Intradisation Vorifors que P(1) est vraie. Si : 1 et 1(2+2) = 1, donc Si = 1(1+1). Conc P(1) est vraie. Hérédité : Soit un entre n. 7,1. Supposons que P(n) est vraie e montrons que P(n+1) ost vraie.

Son = 1+2+3+...+ (0+1)  $= S_{n} + (n+1)$   $= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ = n(n+1) + 2(n+1)- (n+1)(n+2) Ponc P(n+1) est voile Conclusion: P(1) est vouie et P(n) est héréditaire à partir du Danc pour tour entire DIA, Sn = n(n+1). Ex. S: Soit n EN On note Pln) la propriété: (1+a) > 1+ na Intrafisation: Vérifions que P(U) est vraire. Pauc n=0, (1+a)0 - 1 ev 1+0×a=1. Danc (1+a) >, 1+0×a Done P(0) est voale Hérédité: Soit un entre 120. Supposons que Plat est vocie de mortions que Pla+11 ou vrale Par hypothèse a récorrence: (1+c) ), 1+0a Donc (1+a) (1+a) ) (1+a) (1+a) car 1+a) 0 Dorc (1+a) 11 1+ na + a + na Done (1+a) 1+ (n+1) a + no 2) 1+ (n+1) a cor no 2),0 Doce (1+ a) n+1 7/1+ (n+1)a Done Plat 1) est vra. e. Conclision: P(0) es vraie de P(1) es terétitaire à partir du rango donc par récurrence, Plater vouse pour tout entrer à 20. Danc. Vn EN, (1+a)" ), 1+ na

Ex . 6: Introfsation: On récife que P(0) est vocie.

Pour n=0 /6-1=1-1=0=3+0. Donc +-1 est bien moliple a B. Ans Proles viale Héréclité. Soit un entre 17,0. Suppessons que Par es vroice et montrone que Pla+11 est voule. 40+1-1=4×4°-1-(3+1)×4°-1=3×4°+(4°-1) Par hypothèse de récurrence: 4°-1=3×p, où p et un entier. On en tetrit clane que:

4nt -1 = 3 × 4 + 3 × p = 3 × (4 + p) = 3 × p', où p' est un entier.

Donc 4 -1 est un multiple de 3 Donc P(n+1) est vraie.