

**Exercice. Critères de divisibilité**

Dans cet exercice, on considère  $a \in \mathbb{N}^*$  dont l'écriture décimale est de la forme

$a = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}$  où les  $(a_i)$   $0 \leq i \leq m$  sont les chiffres de sa décomposition décimale.

**1. Critères de divisibilité par 2 ; 5 et 10.**

1. Étudier les congruences modulo 2 des puissances de 10 de la forme  $10^k$  où  $k \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire que  $a \equiv a_0 [2]$ . Quel critère de divisibilité par 2 peut-on énoncer ?
3. Démontrer de la même façon des critères de divisibilité par 5 et par 10.

**2. Critères de divisibilité par 3 et 9.**

1. Étudier les congruences modulo 3 des puissances de 10 de la forme  $10^k$  où  $k \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire que  $a \equiv a_m + a_{m-1} + \dots + a_0 [3]$ .  
Quel critère de divisibilité par 3 peut-on énoncer ?
3. Démontrer de la même façon un critère de divisibilité par 9.
4. Le nombre 12504237 est-il divisible par 3 ? par 9 ?

**3. Critère de divisibilité par 11.**

1. Établir que  $\forall k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv (-1)^k [11]$
2. En déduire que  $a \equiv (a_0 + a_2 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots) [11]$   
Quel critère de divisibilité par 11 peut-on énoncer ?
3. Le nombre 51114239 est-il divisible par 11 ?