Chapitre 2 : Limites de fonctions

I. Limites de fonctions

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]\alpha ; +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 - Limite infinie à l'infini

Définition : On dit que :

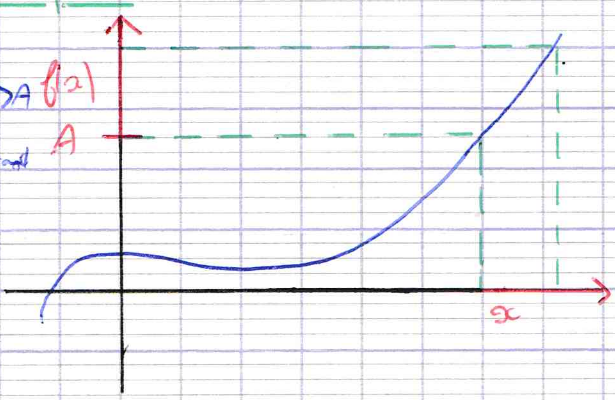
- f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez "grand". On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

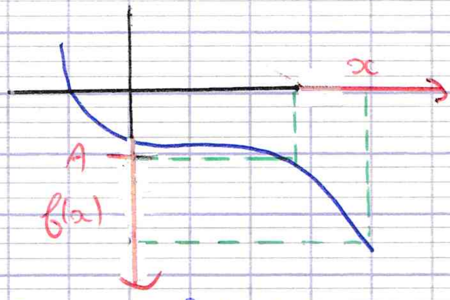
- f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsqu tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty ; A[$, $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez "grand". On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exemple :

Pour tout réel A, $f(x) > A$ dès que x est assez grand

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$





Pour tout réel A, $f(x) < A$ dès que x est suffisamment grand

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Propriété (limites de fonctions usuelles) :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exemples : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$

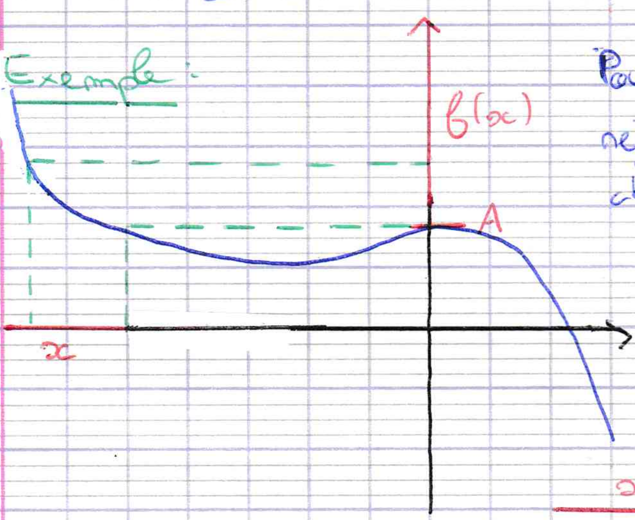
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$

Définition : On dit que

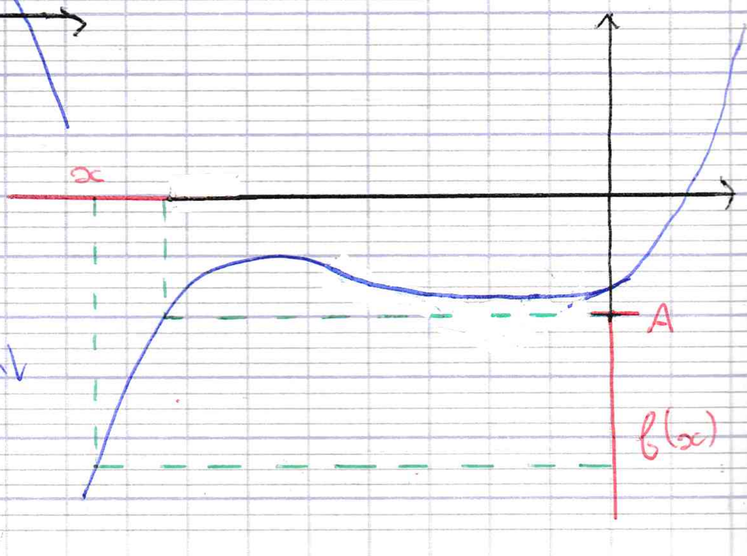
- f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue.
On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty ; A[$, $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue.
On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple :



Pour tout réel A, $f(x) > A$ dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Pour tout réel A, $f(x) < A$ dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2 - Limite finie à l'infini

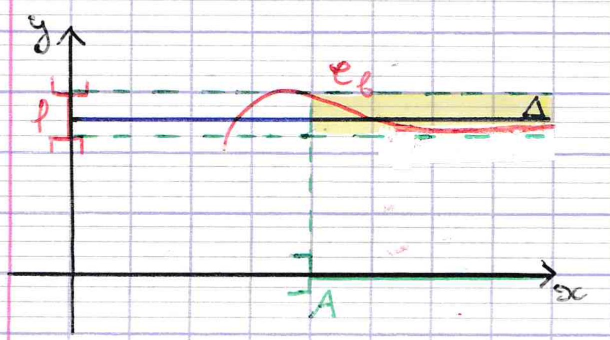
A / Définition

Définition : Soit ℓ un nombre réel.

- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif assez grand en valeur absolue. On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Interprétation graphique :

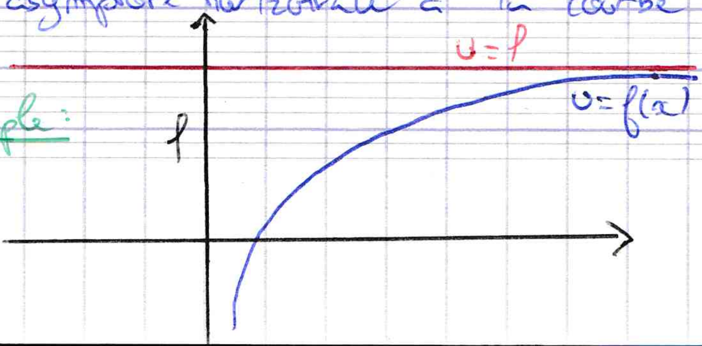


B / Droite asymptote parallèle à l'axe des abscisses (Asymptote horizontale)

⚠ **Définition :** Soit ℓ un nombre réel.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Exemple :



3- Limite en un nombre réel

Soit f une fonction affine sur un ensemble $\mathbb{D}$ et $a \in \mathbb{R}$, un élément de $\mathbb{D}$ ou une extrémité de $\mathbb{D}$.

<u>Définition</u> : On dit que

- f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$, pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

- f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$, $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$, pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

- f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert centré en l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

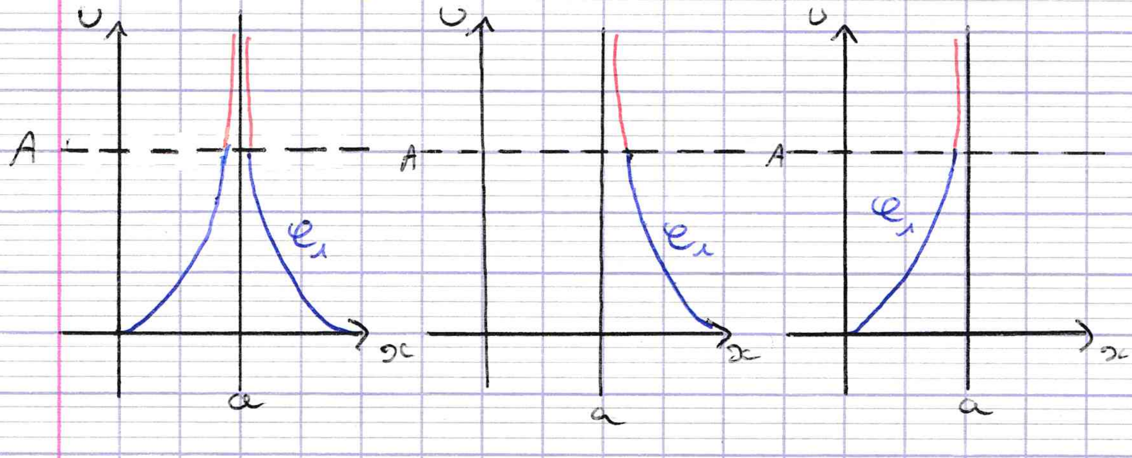
B/ Limite à gauche, limite à droite

<u>Définition</u> : On dit que

- f a pour limite $+\infty$ à droite en a lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez "proche" de a tout en restant supérieur à a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

- f a pour limite $+\infty$ à gauche en a lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez "proche" de a tout en restant inférieur à a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

On définit de façon analogue une limite $-\infty$ en a, à droite en a, ou à gauche en a.



C / Droite asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Définition : Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$) on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Si $x < 0$ et x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

- Si $x > 0$ et x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

II. Limites de fonctions usuelles

Propriété : • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Propriété : • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Propriété : Soit a un réel.
- Si $a \geqslant 0$ alors $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

⚠ • Si P est une fonction polynôme, alors $\lim_{x \to a} f(x) = P(a)$

- Si f est le quotient de 2 polynômes et $a \in D_f$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \to a} e^x = e^a$

$\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$

III. Calcul de limites

1- Opérations sur les limites

On considère deux fonctions f et g, et deux réels l et l'. Les propriétés suivantes donnent la limite en a de la somme, du produit ou du quotient de f et g. a pouvant désigner un réel ou $+\infty$.

A / Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

B / Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to2} x^2 = 4$ $\lim\limits_{x\to2} (x-2)^2 = 0$

C / Limite d'un quotient

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si g a pour limite	$\ell'\neq0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Cas où la limite de la fonction g est nulle

Si f a pour limite	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	0 positif	0 négatif	0 positif	0 négatif	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Formes indéterminées : Soit f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = -x^2$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x))$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$f(x) + g(x) = x$; $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim (f(x) + g(x)) = +\infty$

D/ Composition des limites

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F et g définie sur l'ensemble F.
La fonction $g \circ f$, définie par tout x de E par :
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$, est appelée fonction composée de f par g.

Exemple : Soit f et g les fonctions affines sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 5x - 1$ et $g(x) = x^2$. Alors, pour tout réel x :
$g(f(x)) = g(3x^4 + 5x - 1) = (3x^4 + 5x - 1)^2$

Remarque : Attention à l'ordre des lettres pour la composée : en général $g \circ f \neq f \circ g$

Propriété : a, b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, f et g sont des fonctions.
Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{X \to b} g(X) = c$ alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$

Exemple : $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right) = 5$ et $\lim_{X \to 5} X^2 = 25$ alors, par composition des limites, $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right)^2 = 25$

2- Théorème de comparaison

Théorème : Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]A ; +\infty[$ ou $I = \mathbb{R}$ avec A un réel.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : Les deux propriétés s'étendent au cas des limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité et l'inégalité.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + \sin(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \leqslant 1$

donc $-2x + \sin(x) \leqslant -2x + 1$

donc $f(x) \leqslant -2x + 1$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 1) = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3- Théorème des gendarmes

Théorème : Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]A ; +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$) avec $A \in \mathbb{R}$.

Soit ℓ un nombre réel. Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et où g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Pour tout réel $x > 0$

$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

donc $\dfrac{-1}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4- Polynômes et fonctions rationnelles

Propriété : • Une fonction polynôme a les mêmes limites en $-\infty$ et en $+\infty$ que son terme de plus haut degré.

Fonction rationnelle ↳ quotient de 2 polynômes

• Une fonction rationnelle a les mêmes limites en $-\infty$ et en $+\infty$ que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - 5x + 1) = \lim (2x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{1 - x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -2 = -2$

• Annexe : Asymptote oblique

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha ; +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que la droite d d'équation $y = ax + b$, a et b réels avec $a \neq 0$, c'est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ si
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Remarque : On peut de même définir une asymptote oblique à C_f en $-\infty$ si f est définie sur intervalle de la forme $]-\infty ; \alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.