Chapitre 1 : Nombres complexes

I. Définitions et propriété

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations, l'addition et la multiplication qui suivent les mêmes règles de calculs que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que : $i^2 = -1$;
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels.

Définitions : L'écriture $z = x + iy$, avec x et y réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z.

- Le réel x est la partie réelle de z, on note $x = \mathrm{Re}(z)$.
- Le réel y est la partie imaginaire de z, on note $y = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque : • Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ alors z est un nombre réel.
• Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z = iy$, avec y réel. On dit alors que z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemple : Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

$z_1 = 2 + i \quad z_2 = -i \quad z_3 = \sqrt{2} \quad z_4 = 1 - 3i \quad z_5 = -i + 2$

$\mathrm{Re}(z_1) = 2 \quad \mathrm{Re}(z_2) = 0 \quad \mathrm{Re}(z_3) = \sqrt{2} \quad \mathrm{Re}(z_4) = 1 \quad \mathrm{Re}(z_5) = 2$

$\mathrm{Im}(z_1) = 1 \quad \mathrm{Im}(z_2) = -1 \quad \mathrm{Im}(z_3) = 0 \quad \mathrm{Im}(z_4) = -3 \quad \mathrm{Im}(z_5) = -1$

→ Égalité de deux nombres complexes

Propriété : Soient z et z' sont deux nombres complexes.
$z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$. En particulier $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$

et $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$3z + 1 - 9i = -5 \iff 3z = -5 - 1 + 9i$

$\iff 3z = -6 + 9i$

$\iff z = -2 + 3i$

II Opérations sur les nombres complexes

Pour effectuer des calculs dans $\mathbb{C}$, il suffit d'utiliser les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

A - Somme et produit

Définition : Soient x, y, x' et y' des nombres réels.
On considère les nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

a) La somme $z + z'$ est définie par $z + z' = x + iy + x' + iy' = x + x' + i(y + y')$

b) Le produit zz' est défini par $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$

On en déduit en prenant $z' = -1$ que $-z = -x - iy$ et $z - z' = (x - x') + i(y + y')$.
Le nombre complexe $-z$ est appelé l'opposé de z.

Exemple : $(3 - 2i) + (4 + 7i) = (3 + 4) + (-2 + 7)i = 7 + 5i$

$(4 - 2i) \times (2 + 3i) = 4 \times 2 + 4 \times 3i - 2i \times 2 - 2i \times 3i$

$= 8 + 12i - 4i - 6i^2$

$= 8 + 8i - 6 \times (-1)$

$= 8 + 8i + 6$

$= 14 + 8i$

Exercice d'application :

1. $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$
2. $3 + 2i - (3i - 2) = 3 + 2i - 3i + 2 = 5 - i$

B - Nombres complexes conjugués

Définition : Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$ avec x et y des nombres réels.
On appelle conjugué de z, le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = x - iy$

Exemple : $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$
$\overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$
$\bar{i} = -i$
$\bar{2} = 2$

Propriétés : Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec x et y des réels.
- $\bar{\bar{z}} = z$ • $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ • $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ • $z\bar{z} = x^2 + y^2$
- z est réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, x et y des réels
- $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$
- $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z$ est un réel
- $z = -\bar{z} \Leftrightarrow x + iy = -x + iy \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur

C - Inverse d'un nombre complexe

Propriété : Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.
Ce nombre complexe z' s'appelle l'inverse de z et se note $\frac{1}{z}$.

Exemple : Donner la forme algébrique de l'inverse de $z = 3 - 4i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-4i} = \frac{1}{3-4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Définition : Soient z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$.
Le quotient de z par z' est le nombre complexe noté $\frac{z}{z'}$ tel que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Exemple : Calculer et mettre sous forme algébrique

$$\frac{3+2i}{5+3i} = 3+2i \times \frac{1}{5-3i} = 3+2i \times \frac{1}{5-3i} \times \frac{5-3i}{5-3i} = 3+2i \times \frac{5-3i}{34} = \frac{3+2i \times 5-3i}{34}$$

$$= \frac{15-9i+10i-6i^2}{34}$$

$$= \frac{15+6-9i+10i}{34}$$

$$= \frac{21}{34} + \frac{1}{34}i$$

$$\frac{1+i}{2i-3} = 1+i \times \frac{1}{2i+3} = 1+i \times \frac{1}{2i+3} \times \frac{2i+3}{2i+3} = 1+i \times \frac{2i+3}{2^2+3^2} = \frac{1+i \times 2i+3}{13}$$

$$=$$

D - Conjugué et opérations

Propriété (Démo) : Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier naturel n,

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$
- $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

III. Exercices d'application

- Exercice 1

1. Déterminer deux nombres réels x et y tels que l'on ait :
$x + y + i(x-y) = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz - 2i = (2-i)z + 1$

b) $\frac{1+iz}{z+i} = 1+i$

• Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z}$

• Exercice 3

1. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

• $\overline{(2+i)(5-i)}$

• $\overline{\left(\frac{1+i}{2-3i}\right)}$

• $\overline{(3+2i)^2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz + 2\bar{z} = 2i - 3$

• Exercice 4 (n°1 p.21)

Soit x un réel. On considère les nombres complexes z et z' définis par $z = x^2 - x - 2 + 3ix$ et $z' = -2x + i(x^2 + x + 1)$.

Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que :

1. z soit un imaginaire pur. Calculer z le cas échéant.
2. z' soit un imaginaire pur. Calculer z' le cas échéant.
3. z et z' soient égaux. Calculer z et z' le cas échéant.

→ Exercice 1

1. $x + y + i(x-y) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

2\. a) $iz - 2i = (2-i)z + 1$

$\Leftrightarrow iz - 2i = 2z - iz + 1$

$\Leftrightarrow iz - 2z + iz = 1 + 2i$

$\Leftrightarrow 2z(i-1) = 1 + 2i$

$\Leftrightarrow 2z = \frac{1+2i}{i-1}$

$\Leftrightarrow 2z = \frac{(1+2i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}$

$\Leftrightarrow 2z = \frac{-1+i-2i+2}{2}$

$\Leftrightarrow 2z = \frac{1-3i}{2}$

$\Leftrightarrow z = \frac{1-3i}{4}$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

b) $\frac{1+iz}{z+i} = 1+i$

$\Leftrightarrow 1 + iz = (1+i)(z+i)$

$\Leftrightarrow 1 + iz = z + i + iz + i^2$

$\Leftrightarrow 1 - i + 1 = z + iz - iz$

$\Leftrightarrow 2 - i = z$

→ Exercice 2

$2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z}$

$\Leftrightarrow \bar{z} = 1 - 3i$

$\Leftrightarrow z = 1 + 3i$

→ Exercice 3

1\. • $\overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)}\,\overline{(5-i)} = (2-i)(5+i) = 10 - 3i + 1 = 11 - 3i$

• $\overline{\left(\frac{1+i}{2-3i}\right)} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{2-3i}} = \frac{1-i}{2+3i} = \frac{(1-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-5i-3}{4+9} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

• $\overline{(3+2i)^2} = \overline{(3+2i)}^2 = (3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

2\. $iz + 2\bar{z} = 2i - 3 \Leftrightarrow i(x+iy) + 2(x-iy) = 2i - 3 \Leftrightarrow ix - y + 2x - 2iy = 2i - 3$

$\Leftrightarrow 2x - y + i(x - 2y) = 2i - 3$

Par identification des parties réelles et imaginaires :

$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x - 2(2x+3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 8 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = -\frac{7}{3} \end{cases}$ donc $z = -\frac{8}{3} - \frac{7}{3}i$

→ Exercice 4

1. $z \in i\mathbb{R} \iff Re(z) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$
Si $x = -1$, alors $z = -3i$ & si $x = 2$, alors $z = 6i$.

2. $z' \in i\mathbb{R} \iff Re(z') = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0$
Si $x = 0$, on a $z' = i$.

3. $z = z' \iff Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$
$\iff \begin{cases} x^2 - x - 2 = -2x \\ x^2 + x + 1 = 3x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ donc $x = 1$

En effet, si $x = 1$ alors $z = -2 + 3i = z'$