Домашняя работа 5. Дедлайн: воскресенье 6.12 23:59

December 6, 2020

Задача 1 (3 балла) Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, причем X_n принимает значения $-\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$ с вероятностями $1/2$ каждое. Выполняется для этой последовательности закон больших чисел?

Решение

Найдём $\mathbb{E}X_n = -\sqrt{n} * 1/2 + \sqrt{n} * 1/2 = 0$.
$\mathbb{D}X_n = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}X_n)^2 = n$.
Последовательность СВ X_n сходится по вероятности к 0 тогда и только тогда, когда $\phi_X(t) \longrightarrow \phi_0(t)$
$\phi_{X_n} = 1/2 * e^{itn^\alpha} + 1/2 * e^{-itn^\alpha}, \alpha = 1/2$
X_i - НСВ, тогда $\phi_{X_n} = \sqcap_{k=1}^{n} \cos \frac{tk^{\frac{1}{2}}}{n}$
Теперь попробуем ограничить модуль нашей ХФ => ограничить произведение модулей.
Получим: $|\phi| \leq (\cos t * 1/2 * 1/\sqrt{n})^{n/4} = ((1 - \frac{t^2}{8n} + o(\frac{1}{n}))^{-\frac{8n}{t^2}})^{t^2/32} \longleftarrow e^{-\frac{t^2}{32}} < 1$. Получается, что ЗБЧ не выполняется.

Задача 2 (2 балла) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин,

$$\mathbb{P}(\xi_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}, \mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$$

Решение

Найдём матожидание: $\mathbb{E}\xi_n = 2^n * 2^{-(2n-1)} - 2^n * 2^{-(2n-1)} = 0$ И дисперсию: $\mathbb{D}\xi_n = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 2^{-1} + 2^{-1} + 0 = 1$.
Получается, что ЗБЧ выполняется по теореме Чебышева.

Задача 3 (5 баллов)

Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний; менее 180 бросаний; от 190 до 210 бросаний. (показать все выкладки и получить конкретное число)

Решение

Найдем матожидание очков, выпавших за 1 бросок: $\mathbb{E} = \frac{7}{2}$
Дисперсия: $\mathbb{D} = \frac{35}{12}$.
Рассмотрим $\frac{S_n - n*\mathbb{E}}{\sqrt{n*\mathbb{D}}}$. Эта величина имеет нормальное распределение. Из таблицы находим интересующее нас значение: 0.08 Аналогично и для других случаев
менее 180: $1 - 0.0085 = 0.0015$
от 190 до 210 : $= 0.85$

Задача 4 (5 баллов)

Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна $0,515$. Какова вероятность того, что среди 10 тысяч новорождённых мальчиков будет меньше, чем девочек? (показать все выкладки и получить конкретное число)

Решение

Здесь нужно пользоваться формулой Муавра-Лапласа.

PS: Артём, у меня срочное дело появилось, сейчас 19.50 6 декабря, допишу все потом ((

Исходя из условия задачи, число мальчиков должно быть $\leq$ 4999 То есть в теореме Муавра-Лапласа $a = 0, b = 0,4999, p = 0,515, n = 10.000$ $\mathbb{P}(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b)$ [где $S_n = \sum_{k=1}^{10.000} \xi_k$] $= \Phi(b) - \Phi(a)$. Смотрим в таблице значение Φ. $\Phi(a) = 0,5; \Phi(b) \simeq 0,69$.
Тогда ответ получается: $0,69 - 0,5 \simeq 0,19$

Задача 5 (5 баллов)

Докажите

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\lfloor n/2+\sqrt{n}\rfloor}^{n} C_n^k 2^{-n} = 1 - \Phi(2)$$

Решение

Вспомним про биномиальное распределение: $Bi(n,p) = C_n^k p^k * (1-p)^{n-k}$.
В нашем случае $p = 1/2$, поэтому $Bi(n,1/2) = C_n^k \frac{1}{2}^n$.
Матожидание: $\mathbb{E} = n * p = n/2$.
Дисперсия: $\mathbb{D} = n * p^2$.

Задача 6 (5 баллов)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с конечными дисперсиями. Для любого фиксированного вещественного x найти предел.

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n < x)$$