Домашняя работа 6

December 16, 2020

Задача 1 (5 баллов) Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots$ – норсв $U[0,1]$. Найти плотность распределения

$$\eta_n = \prod_{k=0}^{n} \xi_k$$

Решение

Так как величины независимые, $f(\xi_0, \xi_1 \dots) = f(\xi_0)f(\xi_1) \dots = 1$ (т.к. $f = 1$).
Рассмотрим величину $\eta = \xi_0\xi_1$. (Для $\eta = \xi_0\xi_1 \dots$ аналогично)
Функция распределения величины η (A) будет следующей: $A = \iint\limits_G f(\xi_0, \xi_1)d\xi_0 d\xi_1$, где G - множество, в общем случае n -мерное, в котором лежит величина $\eta = \xi_0\xi_1 \dots \xi_n$.
И тогда $A = \iint\limits_G f(\xi_0, \xi_1)d\xi_0 d\xi_1$, если $\eta \in [0;1]$ и $A = 0$, если $\eta \in [0;1]$

Задача 2 (5 баллов) Пусть функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ удовлетворяют соотношению:

$$f_3(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u)f_2(u)du$$

. Найти $f_1(x)$, если $f_2(x) = e^{-x^2}, f_3(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$

Задача 3 (5 баллов)

Каждая целочисленная точка k на числовой оси покрашена в белый цвет с вероятностью p и черный с вероятнстью $q = 1 - p$ (независимо от остальных). Пусть B – множество всех черных точек, а S – множество всех таких целочисленных точек x, что расстояние от x до B не меньше расстояния от x до начала координат. Найти математическое ожидание числа элементов множества S.

Задача 4 (5 баллов) Докажите, что для любых целых положительных k и n $(k \leq n)$ справедливо неравенство:

$$C_n^k \leq 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

Задача 5 (5 баллов) Пусть ξ и η – независимые случайные величины с распределениями $\mathrm{Beta}(2,1)$ и $\mathrm{Exp}(1)$ соответственно. Найдите $\mathbb{P}(\xi < \eta)$.