Домашняя работа 3 (дедлайн – 17:00 23.10.20)

October 25, 2020

Задача 1 (5 баллов) Пусть $\xi, \eta \sim \mathrm{Exp}(1)$ – независимые случайные величины. Найдите распределение случайной величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ (подсказка: рассмотрите преобразование обратное к преобразованию $(\xi, \eta) \longrightarrow (\zeta, \theta), \zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}, \theta = \xi + \eta$ и выразите $f_{\zeta,\theta}(z, u)$, используя $f_{\zeta,\theta}(x, y)$).

Решение Делаем замену: $\zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}, \theta = \xi + \eta$ и выражаем ξ и η. $\xi = \zeta\theta; \eta = \theta - \theta\zeta$. Находим якобиан этого обратного преобразования: $J = |\theta|$. Получаем $f_{\xi,\eta}(\zeta\theta, \theta - \theta\zeta) * |\theta| = |\theta| * f_{\xi\eta}(\zeta\theta) * f_{\xi\eta}(\theta - \theta\zeta)$.

$$f_{\xi\eta}(\zeta\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(\zeta\theta)} & \zeta\theta >= 0 \\ 0 & \zeta\theta < 0 \end{cases}$$

$$f_{\xi\eta}(\theta - \zeta\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(\theta-\zeta\theta)} & \theta - \zeta\theta >= 0 \\ 0 & \theta - \zeta\theta < 0 \end{cases}$$

$F_{\zeta,\theta}(\zeta\theta, \theta-\theta\zeta) = sign(\theta) \int\limits_{-\infty}^{\zeta\theta} \int\limits_{-\infty}^{\theta-\zeta\theta} f_{\xi\eta}(u_1, u_2)(u_1+u_2)du_1du_2$ В областях, где $\zeta\theta >= 0 and \theta - \theta\zeta >= 0$ функция $f = \lambda^2 e^{-\lambda\theta}$. Тогда $f_{\zeta(\frac{\xi}{\xi+\eta})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\zeta,\theta}(\frac{\xi}{\xi+\eta}, u_2)du_2 =$

$$= \begin{cases} \zeta\lambda^2 e^{-\lambda\theta} & \zeta\theta >= 0 \cap \theta - \theta\zeta >= 0 \\ 0 & \text{на остальной плоскости} \end{cases}$$

Задача 2 (3 балла)
Пусть $\xi \sim \mathrm{Poly}(k, p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Покажите, что $\xi_i \sim \mathrm{Bi}(k, p_i)$

Решение $P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_m = k_m) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ξ - вектор, ξ_i - его компонента. Вообще, исходя из определения полиномиального распределения: $\xi_i = k_i$ в серии из k экспериментов, $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$, где ξ_i - число "успехов" в серии из k экспериментов. Успех у каждой ξ_i свой. Так, количество i-х успехов ($= \xi_i$), это когда $\omega = A_i$. Если перейдем к одномерному случаю, то есть будем рассматривать только определенное событие $A = A_i$, называемое единственным успехом в любом из k экспериментов. Тогда случайная величина ξ_i, показывающая число успехов в серии, имеет биномиальное распределение $Bi(k, p)$, где k - число экспериментов в серии, $p = p_i$ - вероятность $A = A_i$. И это верно для каждой компоненты в "многомерном" случае для ξ. Тем самым получаем требуемое.

Задача 3 (5 баллов) Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$

Решение Площадь треугольника равна 1, значит

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \text{"треугольник"} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{0}^{-|x|+1} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dy$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{0}^{-|x|+1} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dy = \begin{cases} \text{-|x|+1} & x \in [-1;1] \\ 0 & x < -1 \cup x > 1 \end{cases}$$

Задача 4 (3 балла) В каждую i-ую единицу времени живая клетка получает случайную дозу облучения X_i, причем $\{X_i\}_{i=1}^{t}$ имеют одинаковую функцию распределения $F_X(x)$ и независимы в совокупности для любого t. Получив интегральную дозу облучения, равную ν, клетка погибает. Оценить среднее время жизни клетки $\mathrm{E}T$.

Задача 5 (4 балла) Пусть N – случайная величина, принимающая натуральные значения, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоррелированные одинаково распределенные случайные величины с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями, не зависящие от N. Рассмотрим $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i$. Посчитайте $\mathrm{D}S_N$.

Задача 6 (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределённые с.в. с конечным мат.ожиданием, $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \eta_n, \eta_{n+1}, \ldots) = \frac{\eta_n}{n}$$