④ Destrucción del hábitat y coexistencia

Analizar el modelo de coexistencia competitiva jerarquizado definido por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -c_a xy + e_a y - c_b xz + e_b z = f(x,y,z) \\ \dfrac{dy}{dt} = c_a xy - e_a y + c_a zy = g(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dt} = c_b xz - e_b z - c_a zy = u(x,y,z) \end{cases}$$

donde x representa la fracción de zonas vacías,
y zonas ocupadas por el competidor superior (A);
z la de zonas ocupadas por el competidor inferior (B).
c_i tasas de colonización; e_i tasas de extinción
h es tal que $x+y+z=h$ (fracción zonas habitables)

Nos piden estudiar los distintos comportamientos en función de h y em particular construir un diagrama de fases con las fracciones A y B en función de h.

Para encontrar ~~los equilibrios, podemos que:~~

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 & (1) \\ g(x,y,z)=0 & (2) \\ u(x,y,z)=0 & (3) \end{cases}$$

Usamos $g(x,y,z) = y(c_a x - e_a + c_a z) = 0$ de (2)

(4) $y=0$

$c_a x - e_a + c_a z = 0$ (5)

$$x = \frac{e_a - c_a z}{c_a} = \frac{e_a}{c_a} - z$$

• Por un lado, si $y=0$ (4):

$$f(x,0,z) = 0 = -c_b xz + e_b z$$
$$f(x,0,z) = 0 = z(-c_b x + e_b)$$

$z=0$

$$x = \frac{e_b}{c_b}$$

• si $z=0 \Rightarrow$
$$f(x,0,0)=0$$
$$g(x,0,0)=0$$
$$u(x,0,0)=0$$

y como $x+y+z=h$

$\Rightarrow x=h$

$\boxed{P_1 = (h,0,0)}$ no animales, solo h sin ocupar

- si $x = \frac{eb}{cb}$; $y = 0$; tenemos $\frac{eb}{cb} + 0 + z = h$

$$z = -\frac{eb}{cb} + h$$

$$\rightarrow \boxed{P_2 = \left(\frac{eb}{cb}, 0, h - \frac{eb}{cb}\right)}$$

una única especie ocupando parte del espacio disponible (si $h - eb/cb > 0$)

- Por otro lado, si $x = \frac{ea}{ca} - z$; y evaluando que

$$x + y + z = h = \frac{ea}{ca} - \cancel{z} + y + \cancel{z} = h$$

$$\boxed{y = h - \frac{ea}{ca}}$$

Para despejar el resto, evaluamos:

$$f\left(\frac{ea}{ca} - z, h - \frac{ea}{ca}, z\right) = 0 \iff$$

$$-ca\left(\frac{ea}{ca} - z\right)\left(h - \frac{ea}{ca}\right) + ea\left(h - \frac{ea}{ca}\right) - cb\left(\frac{ea}{ca} - z\right)z$$

$$+ eb\, z = 0 \qquad \iff \text{(reordenando)}$$

$$z\left(cb\, z + \left(ca\, h - ea + eb - \frac{cb\, ea}{ca}\right)\right) = 0$$

$$z = 0$$

$$\boxed{P_3 = \left(\frac{ea}{ca}, h - \frac{ea}{ca}, 0\right)}$$

Análogo de P_2; pero para la otra especie. Existe una sola, la otra se extingue. $\left(\text{si } h - \frac{ea}{ca} > 0\right)$

$$z = \frac{-ca\, h}{cb} + \frac{ea}{cb} - \frac{eb}{cb} + \frac{ea}{ca}$$

$$\boxed{z = \frac{ea(ca + cb)}{ca\, cb} - \frac{eb}{cb} - \frac{h\, ca}{cb}}$$

$$\boxed{y = h - \frac{ea}{ca}}$$

$$x = \frac{\cancel{ea}}{\cancel{ca}} - \frac{\cancel{ea}}{\cancel{ca}} + \frac{eb}{cb} - \frac{ea}{cb} + \frac{ca\, h}{cb}$$

$$\boxed{x = \frac{eb - ea + ca\, h}{cb}}$$

$$\boxed{P_4 = \left(\frac{eb - ea + ca\, h}{cb}; h - \frac{ea}{ca}; \frac{ea(ca + cb)}{ca\, cb} - \frac{eb}{cb} - \frac{h\, ca}{cb}\right)}$$

que permitiría la existencia de las dos especies para ciertos valores de parámetros del problema.

Analicemos este último; entonces:

$$P_4 = \left(\frac{e_b - e_a + c_a h}{c_b} ; \; h - \frac{e_a}{c_a} ; \; \frac{e_a(c_a + c_b)}{c_a c_b} - \frac{e_b}{e_b} - \frac{h c_a}{c_b} \right)$$

- Vemos que para que la población A (correspondiente a y) no se extinga; tiene que suceder que:

$$h > \frac{e_a}{c_a} \quad \text{para que} \quad h - \frac{e_a}{c_a} > 0$$

- En caso de que esta se extinga; la población B (correspondiente a z) está regida por la ecuación:

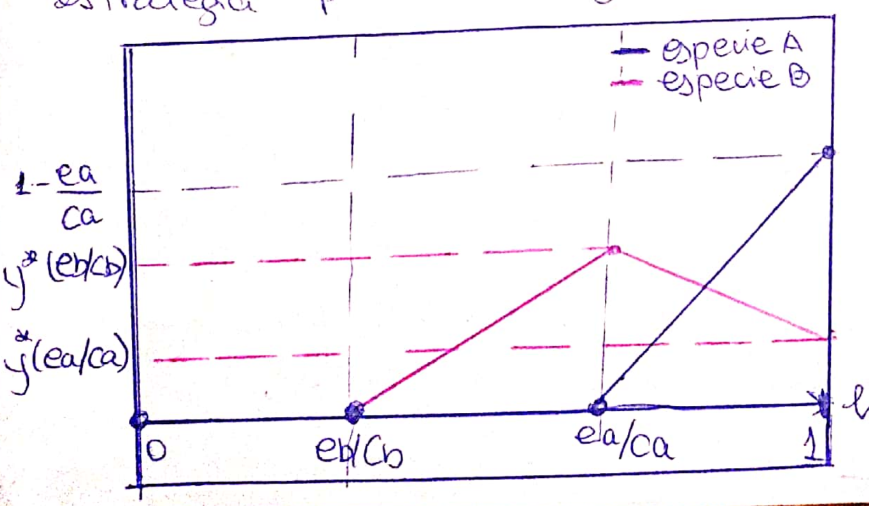
$$\frac{dz}{dt} = c_b(h - z)z - e_b z = 0$$

y recuperamos los equilibrios $P_1 = (h, 0, 0)$
$P_2 = \left(\frac{e_b}{c_b}, 0, h - \frac{e_b}{c_b} \right)$

Para que sobreviva la especie b; entonces $h > \frac{e_b}{c_b}$

y como $h < \frac{e_a}{c_a} \Rightarrow \frac{e_b}{c_b} < \frac{e_a}{c_a} \Leftrightarrow \frac{c_a}{e_a} < \frac{c_b}{e_b}$

- Del valor P_4 estacionario; podemos ver que; al disminuir la fracción h de parches totales disponibles, aumenta la población B y disminuye la población A (que son las poblaciones peor y mejor colonizadoras respectivamente). La ventaja de B sobre A vienen de una mejor estrategia para colonizar ó una menor mortalidad.



Grafiquemos poblaciones de equilibrio en función de h en este último caso no trivial con:

$$\frac{e_b}{c_b} < \frac{e_a}{c_a}$$

y definiendo que:

$$y^* = \frac{e_a(c_a + b)}{c_a c_b} - \frac{e_b}{c_b} - \frac{h c_a}{c_b}$$

Scanned with CamScanner