1

① Comensalismo: Analizar la estabilidad de los equilibrios del modelo de comensalismo para valores en los que el producto de los coeficientes de interacción es mayor o menor a 1.

Recopitulemos lo que hicimos en clase.

En general, para dos especies $x(t)$; $y(t)$ en interacción tenemos ; para competencia entre los mismos:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r_x x\left(1 - \frac{x}{K_x} + b_{xy}\frac{y}{K_x}\right) \\ \dot{y}(t) = r_y y\left(1 - \frac{y}{K_y} + b_{yx}\frac{x}{K_y}\right) \end{cases}$$

ecuación tipo logística entre los dos; con un tercero de interacción restando

Hacíamos en la teoría el cambio de variables:

$$u(\tau) = \frac{x(t)}{K_x} \qquad (\tau) = \frac{y(t)}{K_y} \qquad \tau = r_x t \qquad \rho = \frac{r_y}{r_x}$$

$$a_{uv} = b_{xy}\frac{K_y}{K_1} \qquad a_{vu} = b_{yx}\frac{K_x}{K_y}$$

De donde habíamos llegado a:

$$(*)\begin{cases} \dot{u} = u[1 - u + a_{uv} v] = f(u,v) \\ \dot{v} = \rho v[1 - v + a_{vu} u] = g(u,v) \end{cases}$$

El hecho de que la interacción entre ambas especies sea del tipo comensalismo ó simbiótica está dada porque a_{uv} y a_{vu} tengan el mismo signo.

· Equilibrios

Primero, busquemos los equilibrios del sistema (*)

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - u + a_{uv} v) = 0 & (1) \\ \dot{v} = \rho v(1 - v + a_{vu} u) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $u^*(1 - u^* + a_{uv} v^*) = 0$ $\begin{cases} u^* = 0 \\ 1 - u^* + a_{uv} v^* = 0 \to u^* = 1 + a_{uv} v^* \end{cases}$

Scanned with CamScanner

(2). $\rho v^*(1 - v^* + a_{vu} u^*) = 0 \to v^* = 0$

$\hookrightarrow - a_{vu} u^* + 1 - v^* = 0 \to v^* = 1 - a_{vu} u^*$

Tenemos entonces como equilibrios:

i) $u^* = v^* = 0 \to \boxed{(0,0)}$

ii) $u^* = 1 - a_{uv} v^* = 1$

$v^* = 0$ $\longrightarrow \boxed{(1,0)}$

iii) $u^* = 0$

$v^* = 1 - a_{vu} u^* = 1$ $\longrightarrow \boxed{(0,1)}$

iv) $u^* = 1 + a_{uv} v^* \quad (1)$

$v^* = 1 + a_{vu} u^* \quad (2)$

Necesitamos despejar u^* y v^*; entonces

$\Rightarrow u^* = 1 + a_{uv}(1 + a_{vu} u^*)$ usando (2) en (1)

$u^* = 1 + a_{uv} + a_{uv} a_{vu} u^*$

$u^*(1 - a_{uv} a_{vu}) = 1 + a_{uv}$

$$\boxed{u^* = \frac{1 + a_{uv}}{1 - a_{uv} a_{vu}}} \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Usando (3) en (1); tenemos que:

$$v^* = 1 - a_{vu}\left(\frac{1 + a_{uv}}{1 - a_{uv} a_{vu}}\right)$$

$$v^* = 1 - \frac{a_{vu}(1 + a_{uv})}{1 - a_{uv} a_{vu}}$$

$$v^* = \frac{1 + \cancel{a_{uv} a_{vu}} + a_{vu} + \cancel{a_{uv} a_{vu}}}{1 - a_{uv} a_{vu}}$$

$$\boxed{v^* = \frac{1 + a_{vu}}{1 - a_{uv} a_{vu}}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\left(\frac{1 + a_{uv}}{1 - a_{uv} a_{vu}} ; \frac{1 + a_{vu}}{1 - a_{uv} a_{vu}}\right)}$$

- **Análisis lineal**

Recordemos cuál es nuestro sistema

$$(*)\ \begin{cases} \dot{u} = u(1-u+a_{uv}v) = f(u,v) \\ \dot{v} = v\rho(1-v+a_{vu}u) = g(u,v) \end{cases}$$

Entonces, hagamos las cuentas para armar el jacobiano.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (1-u+a_{uv}v) + u\cdot 1(-1) = 1-2u+a_{uv}v$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = a_{uv}u$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = a_{vu}v\rho$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \rho(1-v+a_{vu}u) + \rho v(-1) = \rho(1-2v+a_{vu}u)$$

Analizamos

i) $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = \rho$$

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana

sus autovalores son $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \rho$

$\rightarrow$ es modo inestable (2 positivos)

ii) $(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = a_{uv}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(1,0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(1,0) = \rho(1+a_{vu})$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & a_{uv} \\ 0 & \rho(1+a_{vu}) \end{pmatrix}$$

$$|J(1,0) - \lambda Id| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & a_{uv} \\ 0 & \rho(1+a_{vu})-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1+\lambda)(-1)(\rho(1+a_{vu})-\lambda) = 0$$

$$(1+\lambda)(\rho(1+a_{vu})-\lambda) = 0$$

sus autovalores son $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = \rho(1+a_{vu})$

$\rightarrow$ saddle (uno positivo, uno negativo)

$\rightarrow$

iii) $(0,1)$

$\frac{\partial f}{\partial u}(0,1) = 1 + a_{uv}$

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = 0$

$\frac{\partial g}{\partial u}(0,1) = \rho\, a_{vu}$

$\frac{\partial g}{\partial v}(0,1) = -\rho$

$$J(0,1) - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 + a_{uv} - \lambda & 0 \\ \rho a_{vu} & -\rho \end{pmatrix}$$

$$|J(0,1) - \lambda Id| = \begin{vmatrix} a_{uv} + 1 - \lambda & 0 \\ \rho a_{vu} & -\lambda - \rho \end{vmatrix}$$

$$(a_{uv} + 1 - \lambda)(\lambda + \rho)(-1) - \rho a_{vu} \cdot 0 = 0$$
$$(a_{uv} + 1 - \lambda)(\lambda + \rho) = 0$$

Sus autovalores son $\lambda_1 = -\rho$; $\lambda_2 = a_{uv} + 1$

$\longrightarrow$ es un saddle (uno positivo, uno negativo)

---

iv) $\left(\frac{1 + a_{uv}}{1 - a_{uv} a_{vu}} ; \frac{1 + a_{vu}}{1 - a_{uv} a_{vu}} \right)$

Como vimos en clase, el análisis según los autovalores del jacobiano $J(u,v)$ evaluado en (u^*, v^*) es muy complejo. En cambio, es mejor realizar un análisis según las nulclinas del problema. Recordamos que:

$$(*) \begin{cases} \dot{u} = u(1 - u + a_{uv} v) = 0 \\ \dot{v} = v\rho(1 - v + a_{vu} u) = 0 \end{cases}$$ evaluando en un equilibrio

Este equilibrio en cuestión corresponde a la intersección de las curvas:

$$\begin{cases} 1 - u + a_{uv} v = 0 \rightarrow v = [1/a_{uv}] \cdot (u - 1) \quad (3) \\ 1 - v + a_{vu} u = 0 \rightarrow v = 1 + a_{vu} u \quad (4) \end{cases}$$

y es $\left(\frac{1 + a_{uv}}{1 - a_{uv} a_{vu}} ; \frac{1 + a_{vu}}{1 - a_{uv} a_{vu}} \right)$ es la intersección

Observamos un par de casos:

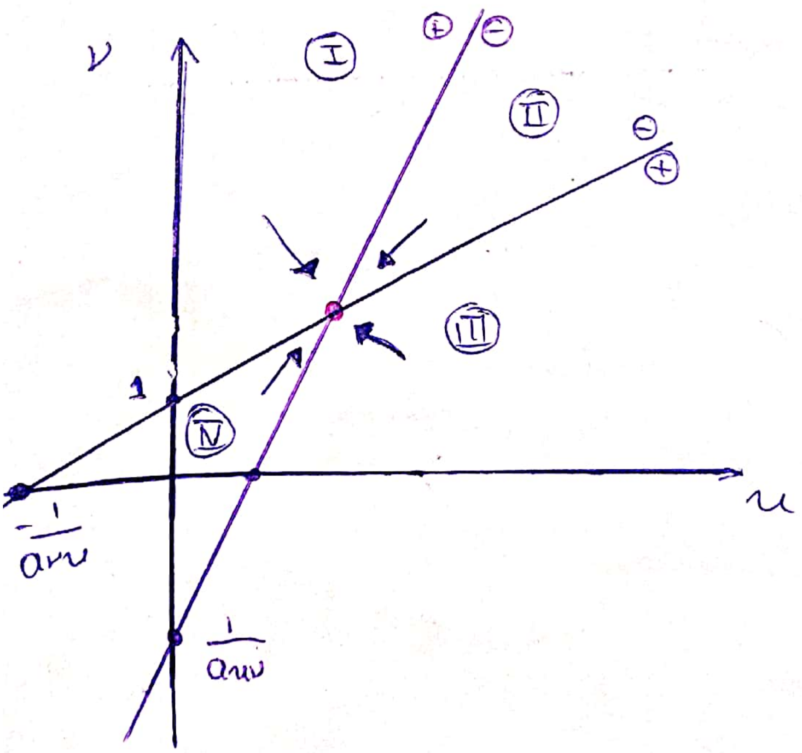
- si $a_{uv} \cdot a_{vu} = 1$; las rectas de las ecuaciones (3) y (4) no se intersecan porque son paralelas. No existe realmente otro equilibrio
- Si $a_{uv} \cdot a_{vu} > 1$; una de las coordenadas o ambos corresponde a un valor negativo. Esto no tiene sentido físico, dado que son poblaciones y no pueden ser negativos.
- Si $a_{uv} \cdot a_{vu} < 1$; entonces los valores para la intersección son positivos, y está bien definido el equilibrio

$$\begin{cases} v = (1/a_{uv}) \cdot (u-1) \\ v = 1 + a_{vu} \cdot u \end{cases} \quad ; \quad a_{uv}\, a_{vu} < 1$$

Recordemos:

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{u} = u\,\underline{(1 - u + a_{uv} \cdot v)} = f(u,v) \\ \dot{v} = v\rho\,\underline{(1 - v + a_{vu} \cdot u)} = g(u,v) \end{cases}$$

Pasamos entonces al análisis gráfico de la situación:



$v = 1 + a_{vu} \cdot u$

$v = \frac{1}{a_{uv}} \cdot (u-1)$

• equilibrio.

regiones:

- (I) $\dot{u} > 0$; $\dot{v} < 0$
- (II) $\dot{u} < 0$; $\dot{v} < 0$
- (III) $\dot{u} < 0$; $\dot{v} > 0$
- (IV) $\dot{u} > 0$; $\dot{v} > 0$

Observamos entonces que en ese caso, es estable el equilibrio