③ Competencia cíclica: Analizar el sistema que representa un caso de competencia cíclica. Encontrar los estados estacionarios y estudiar su estabilidad.

El sistema en cuestión es:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = n_1(1-n_1-\alpha n_2-\beta n_3) & (1) \\ \dfrac{dn_2}{dt} = n_2(1-\beta n_1-n_2-\alpha n_3) & (2) \\ \dfrac{dn_3}{dt} = n_3(1-\alpha n_1-\beta n_2-n_3) & (3) \end{cases}$$

con $0<\beta<1<\alpha$ y $\alpha+\beta<2$.

• Equilibrios $\begin{cases} dn_1/dt = 0 & (1) \\ dn_2/dt = 0 & (2) \\ dn_3/dt = 0 & (3) \end{cases}$

(1) se anula si $n_1^*=0$ ó $1-n_1^*-\alpha n_2^*-\beta n_3^*=0$

(2) se anula si $n_2^*=0$ ó $1-\beta n_1^*-n_2^*-\alpha n_3^*=0$

(3) se anula si $n_3^*=0$ ó $1-\alpha n_1^*-\beta n_2^*-n_3^*=0$

Por lo tanto, tenemos 8 puntos de equilibrio en principio:

i) $\boxed{P_1=(0,0,0)}$ si $n_1^*=n_2^*=n_3^*=0$

ii) $P_2=?$ tal que $n_1^*=n_2^*=0$ y $1-\alpha\cdot 0-\beta\cdot 0-n_3^*=0$

$n_1^*=n_2^*=0$ y $n_3^*=1$

$\boxed{P_2=(0,0,1)}$

iii) $P_3=?$ tal que $n_1^*=n_3^*=0$ y $1-\beta\cdot 0-n_2^*-\alpha\cdot 0=0$

$n_1^*=n_3^*=0$ y $n_2^*=1$

$\boxed{P_3=(0,1,0)}$

iv) $P_4=?$ tal que $n_2^*=n_3^*=0$ y $n_1^*=1$

$\boxed{P_4=(1,0,0)}$

→

v) $P_5 = ?$ $n_1^* = 0$; $1 - \beta n_1^* - n_2^* - \alpha n_3^* = 0$; $1 - \alpha n_1^* - \beta n_2^* - n_3^* = 0$

$n_1^* = 0$; $1 - n_2^* - \alpha n_3^* = 0$; $1 - \beta n_2^* - n_3^* = 0$

Resolvemos para n_2, n_3

- $1 - n_2^* - \alpha n_3^* = 0 \Rightarrow n_2^* = 1 - \alpha n_3^*$
- $1 - \beta(1 - \alpha n_3^*) - n_3^* = 0$

$$1 - \beta + \beta\alpha n_3^* - n_3^* = 0$$

$$(\alpha\beta - 1)\, n_3^* = \beta - 1$$

$\boxed{n_1 = 0}$ $\boxed{n_3^* = \dfrac{\beta - 1}{(\alpha\beta - 1)}}$ $\boxed{n_2^* = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1}}$

con lo cual alguna población tiene valor negativo; lo cual no tiene sentido físico

---

vi) $P_6 = ?$ $n_2^* = 0$; $1 - n_1^* - \alpha n_2^* - \beta n_3^* = 0$; $1 - \alpha n_1^* - \beta n_2^* - n_3^* = 0$

$n_2^* = 0$; $1 - n_1^* - \beta n_3^* = 0$; $1 - \alpha n_1^* - n_3^* = 0$

Resolvemos

- $1 - \beta n_3^* = n_1^*$
- $1 - \alpha(1 - \beta n_3^*) - n_3^* = 0$

$$1 - \alpha + \alpha\beta n_3^* - n_3^* = 0$$

$$1 - \alpha = (1 - \alpha\beta)\, n_3^*$$

$$\boxed{n_3^* = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}}$$

y $\boxed{n_1^*} = 1 - \beta\dfrac{(1 - \alpha)}{(1 - \alpha\beta)} = \dfrac{1 - \cancel{\alpha\beta} - \beta + \cancel{\beta\alpha}}{1 - \alpha\beta} = \boxed{\dfrac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta}}$

idem el caso anterior; no tiene sentido físico.

vii) $P_7 = ?$ Algo similar va a suceder por simetria n_1, n_2, n_3 12

Igual hacemos las cuentas

$$n_3^* = 0 \;;\; 1 - n_1^* - \alpha n_2^* - \beta n_3^* = 0 \;;\; 1 - \beta n_1^* - n_2^* - \alpha n_3^* = 0$$

$$n_3^* = 0 \;;\; 1 - n_1^* - \alpha n_2^* = 0 \;;\; 1 - \beta n_1^* - n_2^* = 0$$

Resolviendo

- $1 - n_1^* - \alpha n_2^* = 0 \Rightarrow n_1^* = 1 - \alpha n_2^*$
- $1 - \beta(1 - \alpha n_2^*) - n_2^* = 0 \Rightarrow 1 - \beta + (\beta\alpha - 1) n_2^* = 0$

$$\Rightarrow \boxed{n_2^* = \frac{-1 + \beta}{\beta\alpha - 1}}$$

$$\boxed{n_1^* = \frac{\alpha - 1}{\beta\alpha - 1}} \quad \boxed{n_2^* = \frac{\beta - 1}{\beta\alpha - 1}} \quad \boxed{n_3^* = 0}$$

idem; tampoco tiene sentido porque son poblaciones

---

viii) $P_8 = ?$

Tenemos que cumplir las ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 - n_1^* - \alpha n_2^* - \beta n_3^* = 0 \\ 1 - \beta n_1^* - n_2^* - \alpha n_3^* = 0 \\ 1 - \alpha n_1^* - \beta n_2^* - n_3^* = 0 \end{cases}$$

Se me complicó para despejar; propongo que $n_1^* = n_2^* = n_3^* = a$; vemos que todas las ecuaciones son iguales a:

$$1 - a - \alpha a - \beta a = 0$$

$$1 + a(-1 - \alpha - \beta) = 0$$

$$1 = + a(1 + \alpha + \beta)$$

$$a = \frac{1}{1 + \alpha + \beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1^* = n_2^* = n_3^* = \frac{1}{1 + \alpha + \beta}}$$ encontramos la solución

$$\boxed{P_8 = \left(\frac{1}{1 + \alpha + \beta} ; \frac{1}{1 + \alpha + \beta} ; \frac{1}{1 + \alpha + \beta} \right)}$$

Tenemos entonces equilibrios:

$$\boxed{\begin{aligned} P_1 &= (0,0,0) \\ P_2 &= (0,0,1) \\ P_3 &= (0,1,0) \\ P_4 &= (1,0,0) \\ P_8 &= \left(\frac{1}{1+\alpha+\beta};\ \frac{1}{1+\alpha+\beta};\ \frac{1}{1+\alpha+\beta}\right) \end{aligned}}$$

- Análisis de estabilidad.

Recordemos que nuestro sistema es:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1}{dt} = n_1(1-n_1-\alpha n_2-\beta n_3) = f(n_1,n_2,n_3) \\ \dfrac{dn_2}{dt} = n_2(1-\beta n_1-n_2-\alpha n_3) = g(n_1,n_2,n_3) \\ \dfrac{dn_3}{dt} = n_3(1-\alpha n_1-\beta n_2-n_3) = h(n_1,n_2,n_3) \end{cases}$$

Busquemos las derivadas para el jacobiano: $J(n_1,n_2,n_3)$

$$\frac{df}{dn_1} = 1-2n_1-\alpha n_2-\beta n_3 \qquad \frac{dg}{dn_1} = -\beta n_2 \qquad \frac{dh}{dn_1} = -\alpha n_3$$

$$\frac{df}{dn_2} = -\alpha n_1 \qquad \frac{dg}{dn_2} = 1-2n_2-\beta n_1-\alpha n_3 \qquad \frac{dh}{dn_2} = -\beta n_3$$

$$\frac{df}{dn_3} = -\beta n_1 \qquad \frac{dg}{dn_3} = -\alpha n_2 \qquad \frac{dh}{dn_3} = 1-\alpha n_1-\beta n_2-2n_3$$

Evaluando en cada equilibrio:

- $P_1 = (0,0,0)$

$$\frac{df}{dn_1}(0,0,0) = 1 \qquad \frac{dg}{dn_1}(0,0,0) = 0 \qquad \frac{dh}{dn_1}(0,0,0) = 0$$

$$\frac{df}{dn_2}(0,0,0) = 0 \qquad \frac{dg}{dn_2}(0,0,0) = 1 \qquad \frac{dh}{dn_2}(0,0,0) = 0$$

$$\frac{df}{dn_3}(0,0,0) = 0 \qquad \frac{dg}{dn_3}(0,0,0) = 0 \qquad \frac{dh}{dn_3}(0,0,0) = 1$$

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\lambda_1 = 1} \text{ (triple multiplicidad)}$$

$\Rightarrow$ modo inestable $\Rightarrow$ inestable

• $P_2 = (0,0,1)$ (y $P_3 = (0,1,0)$ y $P_4 = (1,0,0)$)

$$\frac{df}{dn_1}(0,0,1) = 1-\beta \qquad \frac{dg}{dn_1}(0,0,1) = 0 \qquad \frac{dh}{dn_1}(0,0,1) = -\alpha$$

$$\frac{df}{dn_2}(0,0,1) = 0 \qquad \frac{dg}{dn_2}(0,0,1) = 1-\alpha \qquad \frac{dh}{dn_2}(0,0,1) = -\beta$$

$$\frac{df}{dn_3}(0,0,1) = 0 \qquad \frac{dg}{dn_3}(0,0,1) = 0 \qquad \frac{dh}{dn_3}(0,0,1) = 1-2 = -1$$

$$J(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{pmatrix}$$

Buscamos los autovalores:

$$|J(0,0,1) - \lambda \, id| = \begin{vmatrix} 1-\beta-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\lambda & 0 \\ -\alpha & -\beta & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(1-\beta-\lambda)\cdot(1-\alpha-\lambda)\cdot(-1-\lambda) = 0 \iff \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1-\alpha \\ \lambda_3 = 1-\beta \end{array}}$$

$\lambda_1 = -1 < 0$; $\lambda_2 = 1-\alpha < 0$; $\lambda_3 = 1-\beta > 0$

$\Rightarrow$ es un punto tipo saddle

Lo mismo va a pasar por simetría con $P_3 = (0,1,0)$ y $P_4 = (1,0,0)$; van a ser de tipo saddle

• $P_8 = (1,1,1)\cdot\frac{1}{1+\alpha+\beta}$ es el último punto que nos queda.

$$\frac{df}{dn_1}(P_8) = \frac{-1}{1+\alpha+\beta} \qquad \frac{dg}{dn_1}(P_8) = \frac{-\beta}{1+\alpha+\beta} \qquad \frac{dh}{dn_1}(P_8) = \frac{-\alpha}{1+\alpha+\beta}$$

$$\frac{df}{dn_2}(P_8) = \frac{-\alpha}{1+\alpha+\beta} \qquad \frac{dg}{dn_2}(P_8) = \frac{-1}{1+\alpha+\beta} \qquad \frac{dh}{dn_2}(P_8) = \frac{-\beta}{1+\alpha+\beta}$$

$$\frac{df}{dn_3}(P_8) = \frac{-\beta}{1+\alpha+\beta} \qquad \frac{dg}{dn_3}(P_8) = \frac{-\alpha}{1+\alpha+\beta} \qquad \frac{dh}{dn_3}(P_8) = \frac{-1}{\alpha+\beta+1}$$

$\rightarrow$

Con lo cual, tenemos que el jacobiano evaluado en este punto de equilibrio:

$$J(P_8) = \frac{-1}{1+\alpha+\beta}\begin{pmatrix} +1 & +\alpha & +\beta \\ +\beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que esta es una matriz circulante (en términos simples; porque cada fila sale de desplazar hacia la derecha una vez los elementos ordenados de la fila anterior; y usar una especie de propiedad cíclica para los bordes).

Estas matrices tienen como autovalores combinaciones de las raíces cúbicas de la unidad. Es decir que:

$$\boxed{\lambda_i = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \gamma_j^i} \quad ; \quad \text{con} \quad i = 0, \dots n-1$$

donde
- c_j son los elementos de la matriz
- γ_j son las raíces de la unidad; $\gamma_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$
- n es la dimensión del espacio (acá $n=3$)

En este caso, tenemos que:

$$\lambda_0 = -1 < 0 \; ; \text{ que es negativo}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-1}{1+\alpha+\beta}\left(1 + \alpha e^{\frac{2\pi i}{3}} + \beta e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) \\ \lambda_2 &= \frac{-1}{1+\alpha+\beta}\left(1 + \alpha e^{\frac{-2\pi i}{3}} + \beta e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \overline{\lambda_1} \end{aligned}\right\}$$

Con lo cual, nos queda estudiar el signo de la parte real de λ_1; que será igual que el de λ_2

$$Re(\lambda_1) = \underbrace{\frac{-1}{1+\alpha+B}}_{<0} \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}_{<0 \text{ pues } \alpha+B>2} > 0 \Rightarrow$$

P_8 es un punto de equilibrio inestable