② **Control de plagas**: Un método de control de plagas ó pestes consiste en liberar una cantidad de insectos estériles en una población. Si se mantiene una población n de insectos estériles en una población N de fértiles; un modelo simple para la evolución de la población fértil es:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{aN}{N+n} - b\right)N - kN(N+n) \quad (1)$$

donde $a > b > 0$ y $k > 0$ son parámetros constantes.

- **Primero**: Discutir las suposiciones subyacentes. Determinar el número crítico de insectos estériles n_c que erradicaría la la peste; y mostrar que es menos de $1/4$ de la capacidad del sistema.

- Busquemos primero ~~los equilibrios y~~ la capacidad de carga del sistema.

- En ausencia de insectos estériles, tenemos que:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{a\cancel{N}}{\cancel{N}} - b\right)N - kN^2$$
$$= (a-b)N - kN^2$$
$$= (a-b)\left[1 - \frac{kN}{a-b}\right]N =$$

Por lo tanto, $\boxed{K = \frac{(a-b)}{k}}$ es la capacidad de carga del sistema

- Ahora, sigamos buscando los equilibrios y mostrar lo que nos piden. Para encontrar los equilibrios; tenemos que pedir:

$$0 = \frac{dN}{dt} = \left[\frac{aN^*}{N^*+n} - b\right] N^* - k N^*(N^*+n)$$

$$\Leftrightarrow \quad N^*\left[\frac{aN^*}{N^*+n} - b - k(N^*+n)\right] = 0$$

$$\boxed{N_1^* = 0}$$

$$\frac{aN^*}{N^*+n} - b - k(N^*+n) = 0$$

$$\left\{\frac{aN^*}{N^*+n} - k(N^*+n) = b\right\} \cdot (N^*+n)$$

$$aN^* - k(N^*+n)^2 = b(N^*+n)$$

$$aN^* - k(N^{*2} + n^2 + 2nN^*) = bN^* + bn$$

$$k(N^{*2} + n^2 + 2nN^*) + bN^* + bn - aN^* = 0$$

$$N^{*2} \cdot k + N^*(2nk + b - a) + (kn^2 + bn) = 0$$

$$N_{2,3}^* = \frac{-2nk - b + a}{2k} \pm \frac{1}{2k}\sqrt{(2nk+b-a)^2 - 4 \cdot k \cdot (kn^2+bn)}$$

$$\boxed{N_{2,3}^* = -n + \frac{(a-b)}{2k} \pm \frac{1}{2k}\sqrt{(2nk+b-a)^2 - 4k(kn^2+bn)}}$$

- Para erradicar la población; necesitamos que no exista otro equilibrio que $N_1^* = 0$; por lo tanto, tenemos que pedir que estos dos últimos no existan. Para ello; pediremos que el discriminante sea < 0. Matemáticamente:

$$(2nk + b - a)^2 - 4k(kn^2 + bn) < 0$$

$$(2nk + b - a)^2 < 4k(kn^2 + bn)$$

$$\cancel{4n^2k^2} + (b-a)^2 + 4nk(b-a) < \cancel{4k^2n^2} + 4kbn$$

$$(b-a)^2 < 4kn(\cancel{b} - \cancel{b} + a)$$

$$\frac{(b-a)^2}{4ka} < n$$

De donde $\boxed{n_c = \frac{(b-a)^2}{4ka}}$ es el valor crítico.

Para demostrar que es $< 1/4 \cdot K$; simplemente observamos que:

$$h_c = \frac{(b-a)^2}{4ba} = \frac{(a-b)^2}{4ba} = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\frac{(a-b)}{b}}_{K} \cdot \underbrace{\frac{(a-b)}{a}}_{<1} < \frac{1}{4} \cdot K$$

$$\Rightarrow \boxed{h_c < K/4}$$

- Suposiciones subyacentes al modelo

- Las poblaciones son tales que pueden considerarse continuas y evoluciones a tiempo continuo también
- Es posible liberar insectos estériles de manera de mantener la población n constante en el tiempo.
- En ausencia de insectos estériles $(n=0)$, la evolución es logística con una tasa de reproducción y una capacidad de carga constantes.
- Es un modelo de tipo campo medio, así que debe suponerse que la población está homogéneamente mezclada.
- No consideramos demoras; como sí hicimos en el modelo logístico la práctica anterior, por ejemplo.
- Las dos poblaciones consumen los recursos del ambiente de igual manera

• Segundo: Nos piden relajar alguna suposición anterior adicionado que sólamente se liberen animales estériles una sola vez; y tienen la misma tasa de mortalidad que los fértiles.

Nos piden escribir ecuaciones para $N(t)$ y $n(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \left[\dfrac{aN}{N+n} - b\right] N - kN(N+n) & (1) \\[2ex] \dfrac{dn}{dt} = \underbrace{-bn}_{\text{mortalidad}} - \underbrace{kn(N+n)}_{\text{consumición de recursos}} & (2) \end{cases}$$

– Busquemos los equilibrios y evaluemos su estabilidad

(1) $\dfrac{dN}{dt} = 0 = N\left[\dfrac{aN}{N+n} - b - k(N+n)\right]$

$N = 0$ ó $\dfrac{aN}{N+n} - b - k(N+n) = 0$

(2) $\dfrac{dn}{dt} = 0 = \left[-b - k(N+n)\right] n = 0$

$n = 0$ ó $-b - k(N+n) = 0$

• Primer equilibrio $N = 0$ y $n = 0 \rightarrow \boxed{P_1 = (0,0)}$

• Segundo equilibrio $N = 0$ y $-b - k(\cancel{N}^{0} + n) = 0$

$-b - kn = 0$

$n = -b/k$

$\rightarrow P_2 = \left(0, -\dfrac{b}{k}\right)$ no tiene sentido físico pues hay una población negativa

• Tercer equilibrio $n = 0$ y $\dfrac{aN}{N+\cancel{n}} - b - k(N+\cancel{n}) = 0$

$a - b - kN = 0$

$N = \dfrac{a-b}{k} > 0$ pues $a > b$

$\boxed{P_3 = \left(\dfrac{a-b}{k}, 0\right)}$

- Cuarto equilibrio

$$\frac{aN}{N+n} - b - k(N+n) = 0 \quad y \quad -b - k(N+n) = 0$$

$$(N+n) = \frac{-b}{k}$$

y $N+n = -b/k < 0$; así que no va a tener sentido físico.

Para analizar estabilidades, vamos a armar el jacobiano:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \left[\frac{aN}{N+n} - b\right] N - kN(N+n) = f(N,n) \\ \frac{dn}{dt} = -bn - kn(N+n) = g(N,n) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial N}(N,n) = N\left[\frac{a}{N+n} - \frac{aN}{(N+n)^2}\right] + \frac{aN}{N+n} - b - k(N+n) - kN$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}(N,n) = N\left[\frac{-aN}{(N+n)^2} - k\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial N}(N,n) = -kn$$

$$\frac{\partial g}{\partial n}(N,n) = -b - k(N+n) - k \cdot n(1) = -b - k(2n+N)$$

- Para $P_1 = (0,0)$; tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial N}(0,0) = -b \qquad \frac{\partial g}{\partial N}(0,0) = 0 \qquad J(0,0) = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial n}(0,0) = 0$$

$\lambda_1 = -b \quad \lambda_2 = 0$
son los autovalores

$\Rightarrow$ Acumulación equilibrios estables

- Para $P_3 = \left(\frac{a-b}{k}, 0\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial N}(P_3) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial N}(P_3) = b - a$$

$$\frac{\partial g}{\partial n}(P_3) = -b - \cancel{k} \cdot \left(\frac{a-b}{\cancel{k}}\right) = -a \qquad \frac{\partial f}{\partial n}(P_3) = b - 2a$$

con lo cual $J(P_3) = \begin{pmatrix} b-a & b-2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

y los autovalores son $\lambda_1 = -a < 0$
$\lambda_2 = b-a < 0$ pues $b < a$

$\Rightarrow$ el punto P_3 es estable (nodo estable)

Con lo cual, siendo P_1 una acumulación de estables y P_3 un nodo estable, no alcanza con una vez de liberar insectos estériles para erradicar la plaga.

• Tercero: si una fracción γ de los insectos nacen estériles, nos dicen que un modelo posible es:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \left[\dfrac{aN}{N+n} - b\right]N - kN(N+n) & (1) \\ \dfrac{dn}{dt} = \gamma N - bn & (3) \end{cases}$$

Nos piden encontrar una condición sobre γ tal que la plaga es erradicada; y discutir el realismo del resultado.

- Busquemos entonces los equilibrios y evaluemos su estabilidad

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N\left[\dfrac{aN}{N+n} - b - k(N+n)\right] = 0 & (1) \\ \dfrac{dn}{dt} = \gamma N - bn = 0 & (3) \end{cases}$$

De (3) $\Rightarrow$ $\gamma N = bn$ $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma N = bn}$

De (1) $\Rightarrow$ $\boxed{N=0}$ ó $\boxed{\dfrac{aN}{N+n} - b - k(N+n) = 0}$

- Por un lado, hay un equilibrio $\boxed{P_1 = (0,0)}$

- Por otro lado, $\gamma N = bn$ y $\frac{aN}{N+n} - b - k(N+n) = 0$

Así, $\boxed{n = \frac{\gamma}{b} N} \Rightarrow \frac{a\cancel{N}}{\cancel{N}\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)} - b = kN\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)$

$$\frac{a - b\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)}{\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)} = kN\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)$$

$$\boxed{N = \frac{a-b-\gamma}{k\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)^2}}$$

$$\boxed{n = \frac{\gamma}{b} \frac{(a-b-\gamma)}{k\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 = \left(\frac{a-b-\gamma}{k\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)^2} ; \frac{\gamma}{b} \frac{(a-b-\gamma)}{k\left(1+\frac{\gamma}{b}\right)^2}\right)}$$

Para erradicar la plaga sí o sí, tiene que ser que alguno de los valores de equilibrio sea:

$$a - b - \gamma < 0$$

$$\boxed{a - b < \gamma}$$

Como nos dicen que $a > b$; entonces $\gamma > 0$; lo cual tiene sentido, hay un umbral de γ para que valga.