⑤ Metapoblaciones de presa y depredador

Para formular un modelo así, tenemos en cuenta:

- No consideraremos fragmentación por ahora.
- y: fracción de patches ocupados por presa
- z: fracción de patches ocupados por presa y depredador (si no hay presa, no va allí el depredador)
- c_a; e_a tasas asociados a los patches de tipo y
- c_b; e_b tasas asociados a los patches de tipo z

Planteamos de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\underbrace{c_a\underbrace{(1-y-z)}_{\text{patchs des ocupados}}\underbrace{y}_{\text{presa}}}_{\text{ocupación nueva de estos patches}} - \underbrace{c_b y z}_{\text{predación (perjudica a y)}} - \underbrace{e_a y}_{\text{extinción}}}_{} \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{c_b y z}_{\text{predación (beneficia al predador)}} - \underbrace{e_b z}_{\text{extinción}} \quad (2)$$

De esta manera, tenemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = c_a(1-y-z)y - c_b y z - e_a y = f(y,z) \\ \dfrac{dz}{dt} = c_b y z - e_b z = g(y,z) \end{cases}$$

Busquemos entonces los equilibrios:

$$(2)\quad g'(y,z) = c_b y z - e_b z = 0 = z(c_b y - e_b)$$

$$\boxed{z=0} \qquad c_b y = e_b \quad \boxed{y = \frac{e_b}{c_b}}$$

• Por un lado, si $z=0$; entonces para que

$$f(y,0)=yC_a(1-y)-e_a y$$
$$=y(C_a(1-y)-e_a)$$

$$\boxed{y=0}$$

$$\boxed{P_1=(0,0)}$$

no hay individuos de ninguna especie

$$C_a - C_a y - e_a = 0$$
$$C_a y = C_a - e_a$$
$$\boxed{y = 1-\frac{e_a}{C_a}}$$

$$\boxed{P_2 = \left(1-\frac{e_a}{C_a},\ 0\right)}$$

solo quedan presas si $1-e_a/C_a > 0$

• Por otro lado, si $y = e_b/C_b$; entonces

$$f\left(\frac{e_b}{C_b}, z\right) = C_a\left(1-\frac{e_b}{C_b}-z\right)\frac{e_b}{C_b} - C_b\frac{e_b}{C_b}z - e_a\frac{e_b}{C_b} = 0$$

$$= \left[\frac{C_a e_b}{C_b}\left(1-\frac{e_b}{C_b}\right) - \frac{e_a e_b}{C_b}\right] + z\left(-\frac{C_a e_b}{C_b} - e_b\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z\left(\frac{e_b(C_a+C_b)}{\cancel{C_b}}\right) = \left[C_a e_b\left(1-\frac{e_b}{C_b}\right) - e_a e_b\right]\frac{1}{\cancel{C_b}}$$

$$\Leftrightarrow z\left(\cancel{e_b}(C_a+C_b)\right) = \cancel{e_b}\left[C_a\left(1-\frac{e_b}{C_b}\right) - e_a\right]$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{(C_a+C_b)}\left[C_a\left(1-\frac{e_b}{C_b}\right) - e_a\right]$$

$$z = \frac{C_a}{C_a+C_b}\left[1 - \frac{e_b}{e_b} - \frac{e_a}{C_a}\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{P_3 = \left(\frac{e_b}{C_b};\ \frac{C_a}{C_a+C_b}\left(1-\frac{e_b}{C_b}-\frac{e_a}{C_a}\right)\right)}$$

Veamos si tiene sentido esto. Por un lado, $e_b/C_b > 0$; pues los todos $e_b, C_b > 0$. Por otro lado, veamos que:

$$\underbrace{\frac{c_a}{c_a+c_b}}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{e_b}{c_b}-\frac{e_a}{c_a}\right)}>0$$

para que P_3 tenga sentido y exista este equilibrio.

$$1-\frac{e_b}{c_b}-\frac{e_a}{c_a}>0$$

$$\boxed{1>\frac{e_b}{c_b}+\frac{e_a}{c_a}}$$

- Si, en cambio, $1-\frac{e_b}{c_b}-\frac{e_a}{c_a}<0 \Rightarrow$ no es posible la coexistencia de las dos especies

---

Si queremos tener en cuenta que existe una fracción de patches no habitables como en el ejercicio anterior:

anterior

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=c_a(1-y-z)y-c_byz-e_ay\\ \frac{dz}{dt}=c_byz-e_bz\end{cases}$$

con daño al hábitat

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dt}=c_axy-c_byz-e_ay\\ \frac{dz}{dt}=c_byz-e_bz\\ \frac{dx}{dt}=c_ay+c_bz-c_axy\end{cases}$$

con $x+y+z=h$

Busquemos los equilibrios, entonces:

- Primero: $\frac{dz}{dt}=z(c_by-e_b)$ de la segunda ecuación

$z=0$; $y=\frac{e_b}{c_b}$

- Por un lado, si $z=0$; entonces

$$\frac{dy}{dt}=0=c_a\cdot xy-e_ay=y(c_ax-e_a)$$

$y=0$, $x=h$ $\rightarrow$ $\boxed{P_1=(h,0,0)}$

$x=e_a/c_a$ $\left(\text{si } h-\frac{e_a}{c_a}>0\right)$

$y=-e_a/c_a+h$

$$\rightarrow \boxed{P_2=\left(\frac{e_a}{c_a},h-\frac{e_a}{c_a},0\right)}$$

• Por otro lado, si $y = \frac{e_b}{c_b}$; entonces:

$$\frac{dy}{dt} = 0 = \frac{c_a}{c_b} e_b \cdot x - \cancel{c_b} \cdot \frac{e_b}{\cancel{c_b}} \cdot z - e_a \frac{e_b}{c_b}$$

y como $x + y + z = h$

$$z = h - x - y = h - x - \frac{e_b}{c_b}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{c_a}{c_b} e_b \cdot x - e_b\left(h - x - \frac{e_b}{c_b}\right) - e_a \frac{e_b}{c_b}$$

$$0 = x\left(\frac{c_a e_b}{c_b} + e_b\right) - e_b\left(h - \frac{e_b}{c_b}\right) - \frac{e_a e_b}{c_b}$$

$$x\left(e_b \frac{c_a + c_b}{c_b}\right) = e_b\left(h - \frac{e_b}{c_b} + \frac{e_a}{c_b}\right)$$

$$x \cdot \frac{\cancel{e_b}}{\cancel{c_b}}(c_a + c_b) = \frac{\cancel{e_b}}{\cancel{c_b}}(h c_b - e_b + e_a)$$

$$x = \frac{c_b}{c_a + c_b}\left(h - \frac{e_b}{c_b} + \frac{e_a}{c_b}\right)$$

$$y = h - \frac{c_b}{(c_a + c_b)}\left(h - \frac{e_b}{c_b} + \frac{e_a}{c_b}\right) - \frac{e_b}{c_b}$$

$$y = h - \left(\frac{c_b}{c_a + c_b} h - \frac{e_b}{c_a + c_b} + \frac{e_a}{(c_a + c_b)}\right) - \frac{e_b}{c_b}$$

$$y = \frac{h(c_a + c_b) - c_b h}{(c_a + c_b)} + \frac{e_b}{c_a + c_b} - \frac{e_a}{c_a + c_b} - \frac{e_b}{c_b}$$

$$y = \frac{c_a h}{(c_a + c_b)} - \frac{e_a}{(c_a + c_b)} - \frac{e_b c_a}{(c_a + c_b)}$$

$$y = \frac{c_a}{(c_a + c_b)}\left(h - \frac{e_a}{c_a} - \frac{e_b}{c_b}\right)$$

con lo cual, tenemos como único equilibrio no trivial:

$$\boxed{P_3 = \frac{c_a}{c_a+c_b}\left(h - \frac{e_a}{c_a} - \frac{e_b}{c_b}\right)}$$

- Lo cual tiene sentido si $h > \frac{e_a}{c_a} + \frac{e_b}{c_b}$
- A diferencia del ej. anterior, en este caso disminuir h, no sucede un cambio en el equilibrio de las presas (mientras puedan existir); mientras que si afecta la proporción de predadores.