

⑤ Metapoblaciones de presa y depredador

Para formular un modelo así, tenemos en cuenta:

- No consideraremos fragmentación por ahora.
- y : fracción de parches ocupados por presa
- z : fracción de parches ocupados por presa y depredador (si no hay presa, no va allí el depredador)
- c_a ; e_a tasas asociadas a los parches de tipo y
- c_b ; e_b tasas asociadas a los parches de tipo z

Planteamos de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{c_a(1-y-z)y}_{\substack{\text{parches} \\ \text{desocupados} \\ \times \text{presa} \\ \text{ocupación nueva} \\ \text{de estos parches}}} - \underbrace{c_b y z}_{\substack{\text{predación} \\ \text{(perjuicio)} \\ a y}} - \underbrace{e_a y}_{\text{extinción}} \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{c_b y z}_{\substack{\text{predación} \\ \text{(beneficio al} \\ \text{predador)}}} - \underbrace{e_b z}_{\text{extinción}} \quad (2)$$

De esta manera, tenemos que:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = c_a(1-y-z)y - c_b y z - e_a y = f(y, z) \\ \frac{dz}{dt} = c_b y z - e_b z = g(y, z) \end{cases}$$

Busquemos entonces los equilibrios:

$$(2) \quad g(y, z) = c_b y z - e_b z = 0 = z(c_b y - e_b)$$

$$\boxed{z=0}$$

$$\boxed{y = \frac{e_b}{c_b}}$$

• Por un lado, si $z=0$; entonces para que

$$f(y, 0) = y c_a (1 - y) - e_a y$$

$$= y (c_a (1 - y) - e_a)$$

$$\boxed{y=0}$$



$$\boxed{P_1 = (0, 0)}$$

no hay individuos de
ninguna especie

$$c_a - c_a y - e_a = 0$$

$$c_a y = c_a - e_a$$

$$\boxed{y = 1 - \frac{e_a}{c_a}}$$



$$\boxed{P_2 = \left(1 - \frac{e_a}{c_a}, 0\right)}$$

solo quedan
presos si
 $1 - e_a/c_a > 0$

• Por otro lado, si $y = e_b/c_b$; entonces

$$f\left(\frac{e_b}{c_b}, z\right) = c_a \left(1 - \frac{e_b}{c_b} - z\right) \frac{e_b}{c_b} - c_b \frac{e_b}{c_b} z - e_a \frac{e_b}{c_b} = 0$$

$$= \left[\frac{c_a e_b}{c_b} \left(1 - \frac{e_b}{c_b}\right) - \frac{e_a e_b}{c_b} \right] + z \left(-\frac{c_a e_b}{c_b} - e_b \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \left(\frac{e_b (c_a + c_b)}{c_b} \right) = \left[c_a e_b \left(1 - \frac{e_b}{c_b}\right) - e_a e_b \right] \frac{1}{c_b}$$

$$\Leftrightarrow z (e_b (c_a + c_b)) = c_b \left[c_a \left(1 - \frac{e_b}{c_b}\right) - e_a \right]$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{(c_a + c_b)} \left[c_a \left(1 - \frac{e_b}{c_b}\right) - e_a \right]$$

$$z = \frac{c_a}{c_a + c_b} \left[1 - \frac{e_b}{c_b} - \frac{e_a}{c_a} \right]$$

$$\rightarrow \boxed{P_3 = \left(\frac{e_b}{c_b}, \frac{c_a}{c_a + c_b} \left(1 - \frac{e_b}{c_b} - \frac{e_a}{c_a} \right) \right)}$$

Veamos si tiene sentido esto. Por un lado, $e_b/c_b > 0$; pues los toses $e_b, c_b > 0$. Por otro lado, vemos que:

$$\underbrace{\frac{ca}{ca+cb}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{eb}{cb} - \frac{ea}{ca}\right)}_{>0} > 0$$

para que P_3 tenga sentido y exista este equilibrio

$$1 - \frac{eb}{cb} - \frac{ea}{ca} > 0$$

$$\boxed{1 > \frac{eb}{cb} + \frac{ea}{ca}}$$

- Si, en cambio, $1 - \frac{eb}{cb} - \frac{ea}{ca} < 0 \Rightarrow$ no es posible la coexistencia de las dos especies

Si queremos tener en cuenta que existe una fracción de patches no habitables como en el ejercicio anterior:

anterior

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ca(1-y-z)y - cb yz - ea y \\ \frac{dz}{dt} = cb yz - eb z \end{cases} \Rightarrow$$

con daño al habitat

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = cax y - cb yz - ea y \\ \frac{dz}{dt} = cb yz - eb z \\ \frac{dx}{dt} = cay + cbz - cax y \end{cases}$$

$$\text{con } x + y + z = h$$

Busquemos los equilibrios; entonces:

- Primero: $\frac{dz}{dt} = z(cb y - eb)$ de la segunda ecuación

$$\begin{matrix} \swarrow \\ z=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \searrow \\ y = \frac{eb}{cb} \end{matrix}$$

- Por un lado, si $z=0$; entonces

$$\frac{dy}{dt} = 0 = ca \cdot xy - ea y = y(ca x - ea)$$

$$\boxed{P_1 = (h, 0, 0)}$$

$$\begin{matrix} \swarrow \\ y=0 \\ \searrow \\ x=h \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \swarrow \\ x = ea/ca \text{ (si } h - \frac{ea}{ca} > 0) \\ \searrow \\ y = \frac{ea}{ca + h} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \boxed{P_2 = \left(\frac{ea}{ca}, h - \frac{ea}{ca}, 0 \right)}$$

• Por otro lado, si $y = \frac{eb}{cb}$, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = 0 = \frac{ca}{cb} eb \cdot x - \cancel{eb} \cdot \frac{eb}{\cancel{eb}} \cdot z - ea \frac{eb}{cb}$$

$$\text{y como } x + y + z = h \\ z = h - x - y = h - x - \frac{eb}{cb}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{ca}{cb} eb \cdot x - eb \left(h - x - \frac{eb}{cb} \right) - ea \frac{eb}{cb}$$

$$0 = x \left(\frac{ca eb}{cb} + eb \right) - eb \left(h - \frac{eb}{cb} \right) - \frac{ea eb}{cb}$$

$$x \left(eb \frac{ca + cb}{cb} \right) = eb \left(h - \frac{eb}{cb} + \frac{eb}{cb} \right)$$

$$x \cdot \frac{\cancel{eb}}{\cancel{eb}} (ca + cb) = \frac{\cancel{eb}}{\cancel{eb}} \left(h cb - eb + ea \right)$$

$$x = \frac{cb}{ca + cb} \left(h - \frac{eb}{cb} + \frac{ea}{cb} \right)$$

$$y = h - \frac{cb}{(ca + cb)} \left(h - \frac{eb}{cb} + \frac{ea}{cb} \right) - \frac{eb}{cb}$$

$$y = h - \left(\frac{cb}{ca + cb} h - \frac{eb}{ca + cb} + \frac{ea}{(ca + cb)} \right) - \frac{eb}{cb}$$

$$y = \frac{h \cdot (ca + cb) - cbh}{(ca + cb)} + \frac{eb}{ca + cb} + \frac{ea}{ca + cb} - \frac{eb}{cb}$$

$$y = \frac{ca h}{(ca + cb)} - \frac{ea}{(ca + cb)} - \frac{eb ca}{(ca + cb)}$$

$$y = \frac{ca}{(ca + cb)} \left(h - \frac{ea}{ca} - \frac{eb}{cb} \right)$$

con lo cual, tenemos como único equilibrio no trivial:

(3)

$$P_3 = \left(\frac{c_b}{c_a + c_b} \left(h - \frac{e_b}{c_b} + \frac{e_a}{c_b} \right); \frac{e_b}{c_b} + \frac{c_a}{c_a + c_b} \left(h - \frac{e_a}{c_a} - \frac{e_b}{c_b} \right) \right)$$

- Lo cual tiene sentido si $h > \frac{e_a}{c_a} + \frac{e_b}{c_b}$ para $z^* = \frac{c_a}{c_a + c_b} \left(h - \frac{e_a}{c_a} - \frac{e_b}{c_b} \right)$
- A diferencia del ej. anterior, en este caso disminuir h , no sucede un cambio en el equilibrio de los presas (mientras puedan existir); mientras que si afecta la proporción de predaciones.
- La proporción de patches libres también tiene que ser > 0 .
- Grafiquemos entonces como lucirían en el ejercicio anterior:

