Lista de exercícios Matemática Computacional
Parte B – Prof. Dr. Reinaldo Rosa - 2020

Denis M. A. Eiras

Exercício 5 – Descrição

5.1. A partir do Mapeamento Logístico e do Mapeamento de Henon gere 2 famílias de series Temporais com 30 séries em cada uma. Para a família logística varie o parâmetro ρ na faixa (3.85 a 4.05). Paragerar a família Henon varie os parâmetros a e b nas respectivas faixas: (de 1.350 a 1.420) e (0.210-0.310). Por exemplo: pode fixar o a=1.40 e variar o b. Pode fixar o b=0.300 e variar o a. Ou variar ambos dentro de um critério de passo ou aleatoriamente.
Aplique as respectivas analises estatísticas dos exercícios 4.1 e 4.2. Total do Grupo chaosnoise: 60

5.2 A partir da 2a lei de Newton construa a equação de Navier-Stokes na sua forma mais simples.

Exercício 5.1 – Detalhes da implementação

Foram instalados as funções gerador_de_sinais_logisticos e gerador_de_sinais_henon, que utilizam o Gerador de Mapa Logístico Caótico 1D: Atrator e Série Temporal e o # Gerador de Mapa Logístico Caótico 2D (Henon Map): Atrator e Série Temporal (por R.Rosa, 2020).

A função logísitica recebe o número de sinais, número de valores por sinal, valor mínimo e máximo de rho, que são usados para delimitar os valores máximos de rho, gerados randomicamente para a quantidade de sinais delimitada. Também é possível alterar os valores iniciais de x e y. A opção is_plot_sinais_log pode ser usada para se verificar os plots dos sinais gerados.

Assinatura da função geradora de sinais Logísticos:

```
def gerador_de_sinais_logisticos(num_sinais, num_valores_por_sinal, rho_min=3.81, rho_max=4.00, tau=1.1, x_ini=0.001, y_ini=0.001, is_plot_sinais_log=False):
```

A função geradora de sinas Henon recebe o número de sinais, número de valores por sinal, valor mínimo e máximo de a e b, que são usados para delimitar os valores máximos de a e b, respectivamente, gerados randomicamente para a quantidade de sinais delimitada. Também é possível alterar os valores iniciais de x e y. A opção is_plot_sinais pode ser usada para se verificar os plots dos sinais gerados.

Assinatura da função geradora de sinais Henon:

```
def gerador_de_sinais_henon(num_sinais, num_valores_por_sinal, a_min=1.350, a_max=1.420, b_min=0.210, b_max=0.310, x_ini=0.001, y_ini=0.001, is_plot_sinais=False):
```

Exercício 5.1 – Resultados

Trinta sinais com 8192 valores foram gerados com as funções Logística e Henon, sendo que os outros parâmetros das funções não foram definidos, gerando valores padrão.

O gráfico de Cullen e Frey enquadra o sinal da função logística como um sinal uniforme, como se pode observar na figura 1.

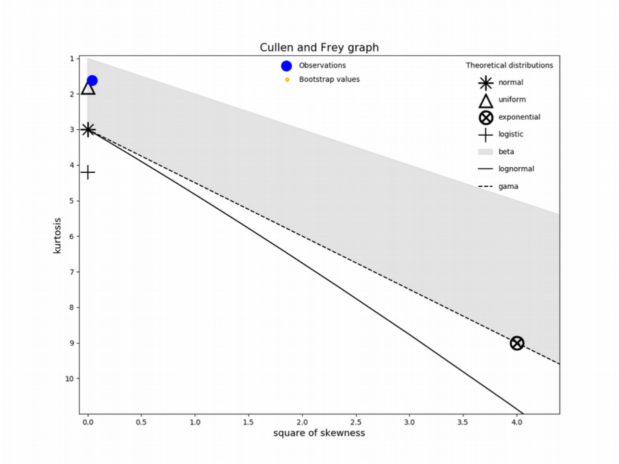

Figura 1. Gráfico de Cullen e Frey sobre o sinal Logístico

Foram utilizados seguintes parâmetros para ajuste da cuva do sinal Logístico. A curva da figura 2 foi gerada com a utilização desses parâmetros sob o histograma.

c = 6
loc = 1.0
scale = 0.5

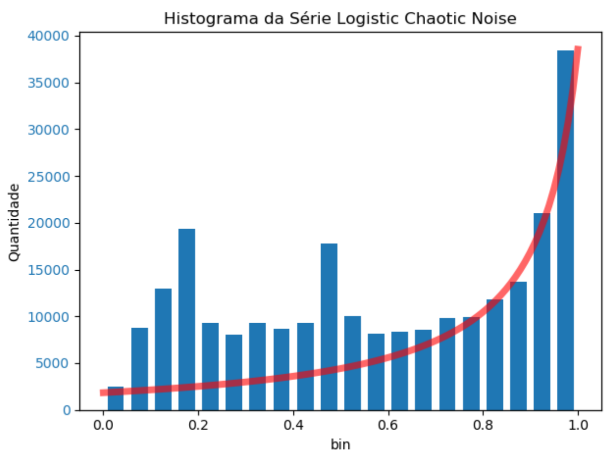

Figura 2. Ajuste da PDF sobre o sinal Logístico

O gráfico de Cullen e Frey enquadra o sinal Henon dentro do espaço Beta, com variância baixa, como se pode observar na figura 3.

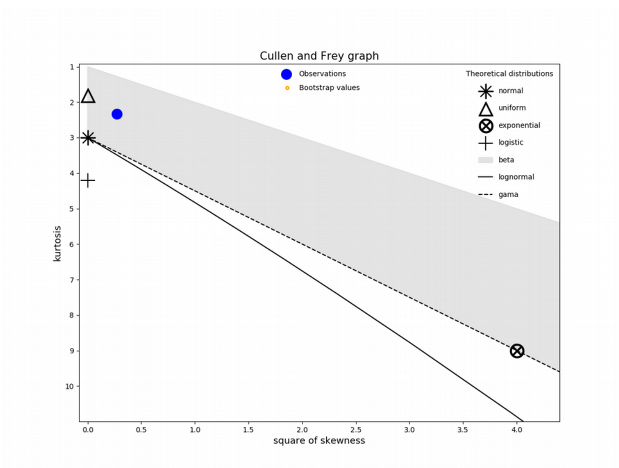

Figura 3. Gráfico de Cullen Frei para o sinal Henon

Foram utilizados seguintes parâmetros para ajuste da cuva do sinal Henon. A curva da figura 4 foi gerada com a utilização desses parâmetros sob o histograma.

c = 0.5
loc = 0.1
scale = 0.15

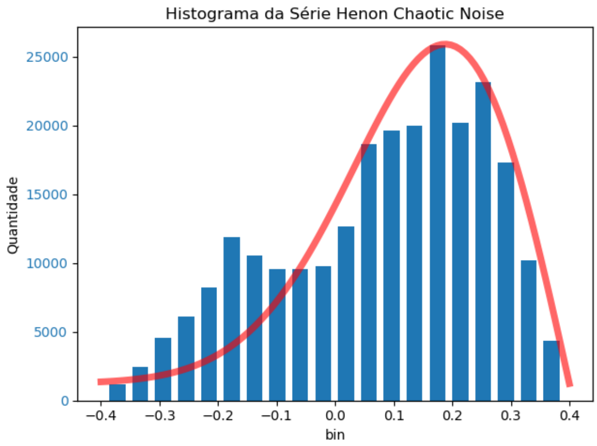

Figura 4. Ajuste da PDF sobre o sinal Henon

Exercício 5.2 - Equação de Navier-Stokes

A partir de uma partícula de massa *m* e velocidade *v.* A quantidade de movimento ou momento linear associada a essa partícula é data pela expressão: *p*=mv, em que *p* é a quantidade de movimento.

A 2º Lei de Newton: $$\overrightarrow{F_r} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Que nos diz que a força resultante atuando sobre essa partícula é dada pela derivada da quantidade de movimento em relação ao tempo.

Substituindo *p* da equação acima ficamos: $$\overrightarrow{F_r} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Supondo que a massa da partícula permanece constante, podemos tirar a massa da derivada e obter essa expressão:

$$\vec{F_r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

A derivada da velocidade em relação ao tempo é a aceleração de partícula. E dessa forma obtemos a expressão:

Força resultante é igual a massa vezes a aceleração. $\vec{F_r} = m\vec{a}$

A 2º Lei de Newton vale para partículas individuais, mas veja que quando trabalhamos com escoamento, nós não trabalhamos com cada partícula de fluido individualmente e sim com todas ao mesmo tempo. Dessa forma temos que adaptar a 2º Lei de Newton.

Equações bidimensionais considerando *x* e *y:*

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \longrightarrow \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

Ela nos dá a taxa de variação da velocidade da partícula a partir de dados sobre o escocamento como um todo. Esse expressão nos da em tão a aceleração de uma partícula fluida se movendo pelo campo de velocidades.

Equações tridimensionais considerando *x*, *y* e *z*. $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$

Dedução:

Vamos considerar uma partícula fluida cúbica tridimensional de tamanho muito, muito pequeno com dimensões Delta x, Delta, y e Delta z e vamos tomar a 2º Lei de Newnton e substituir a aceleração por DV/DT.

$$\vec{F_r} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F_r} = m\frac{D\vec{V}}{Dt} \longrightarrow \vec{F_r} = m\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$$

Conhecendo as dimensões da partícula podemos calcular a sua massa, basta multiplicar o seu volume pela sua densidade.

$$\vec{F_r} = \underbrace{\rho}_{\text{Densidade}}\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$$

Falta determinar a força resultante que atua sobre essa partícula. De *X*, *Y* e *Z*.

Força em X:

Tensões normais: Peso: Tensões cisalhantes: Superior e Inferior

$$F_{rx} = \left(\sigma_{xx}\Big|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}\Big|_{x}\right)\Delta y\Delta z + g_x\rho\Delta x\Delta y\Delta z \quad + \left(\tau_{yx}\Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}\Big|_{y}\right)\Delta x\Delta z$$

Tensões cisalhantes: Laterais

$$+\left(\tau_{zx}\Big|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}\Big|_{z}\right)\Delta x\Delta y$$

Força em Y:

Tensões normais: Peso Tensões cisalhantes: Superior e Inferior

$$F_{ry} = \left(\sigma_{yy}\Big|_{y+\Delta y} - \sigma_{yy}\Big|_{y}\right)\Delta x\Delta z + g_y\rho\Delta x\Delta y\Delta z \quad + \left(\tau_{xy}\Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xy}\Big|_{x}\right)\Delta y\Delta z$$

Tensões cisalhantes: Laterais

$$+\left(\tau_{zy}\Big|_{z+\Delta z} - \tau_{zy}\Big|_{z}\right)\Delta x\Delta y$$

Força em z:

Tensões normais: Peso Tensões cisalhantes: Superior e Inferior

$$F_{rz} = \left(\sigma_{zz}\Big|_{z+\Delta z} - \sigma_{zz}\Big|_{z}\right)\Delta x\Delta y + g_z\rho\Delta x\Delta y\Delta z \quad + \left(\tau_{xz}\Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}\Big|_{x}\right)\Delta y\Delta z$$

Tensões cisalhantes: Laterais

$$+\left(\tau_{yz}\Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yz}\Big|_{y}\right)\Delta x\Delta z$$

Agora podemos substituir a Forma Resultante da primeira equação:

$$\vec{F_r} = \rho\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$$

Temos que considerar cada uma das componentes: X

$$F_{rx} = \rho\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}w + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right) \longrightarrow \rho\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{xx}\Big|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}\Big|_{x}\right)\Delta y\Delta z\\ &+\left(\tau_{yx}\Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}\Big|_{y}\right)\Delta x\Delta z\\ &+\left(\tau_{zx}\Big|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}\Big|_{z}\right)\Delta x\Delta y\\ &+g_x\rho\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned} \quad = \quad \rho\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Podemos dividir os dois lados da equação por $\Delta x\Delta y\Delta z$

$$\left(\sigma_{xx}\Big|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}\Big|_{x}\right)/\Delta x + \left(\tau_{yx}\Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}\Big|_{y}\right)/\Delta y + \left(\tau_{zx}\Big|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}\Big|_{z}\right)/\Delta z + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

agora vamos tomar o limite quando $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Vamos substituir o termo pela derivada de *∂ xx:* $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$

Aplicando os mesmos cálculos para as três forças temos: As equações da quantidade de movimento.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y\rho = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + g_z\rho = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Simetria das Tensões Cisalhantes: $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

Calcular as tensões:

Fluido Newtoniano: significa que a tensão cisalhante é proporcional a taxa de deformação do fluido.

Fórmula para uma dimensão: $\tau = \mu \frac{du}{dx}$

Fórmula para as três dimensões:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Simetria das Tensões Normais:

$$\sigma_{xx} = -\mathrm{p} - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -\mathrm{p} - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -\mathrm{p} - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla.\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Divergência

Substituir as tensão na equação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \mathrm{g_x}\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\mathrm{g_x}\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Compactando em uma linha e aplicando nas outras duas equações chegamos a essa expressão:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \mathrm{g_x}\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \mathrm{g_y}\rho = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right] + \mathrm{g_z}\rho = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Simplificando a equação:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \mathrm{g_x}\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \mathrm{g_x}\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Rearranjar alguns termos:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Fatorando a derivada:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Esse termo dentro dos Colchetes é a divergência do campo de velocidade:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Se o escoamento for incompressível o termo vale [0]

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}[0] + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Equação simplificada de Navier-Stokes:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Aplicando os mesmos cálculos para as outras equações:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x\rho = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + g_y\rho = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + g_z\rho = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$