S1

В конденсаторе с вероятностью 0.01 возможен дефект диэлектрика и, независимо от этого, с вероятностью 0,005 возможен дефект корпуса. Проверена партия в 1000 конденсаторов. В каких границах с вероятностью 0,997 заключается число бракованных конденсаторов? Решить задачу используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Решение:

а) $A = \{$деталь имеет дефект диэлектрика$\}$; $P(A) = 0.01$

$\bar{A} = \{$деталь не имеет дефект диэлектрика$\}$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.99$

$B = \{$деталь имеет дефект корпуса$\}$; $P(B) = 0,005$

$\bar{B} = \{$деталь не имеет дефект корпуса$\}$; $P(\bar{B}) = 0,995$

$C = \{$деталь имеет дефект$\}$; $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 0,01495$

$\bar{C} = \{$деталь не имеет дефект$\}$; $P(\bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.99 \cdot 0.995 = 0.98505$

Пусть $p = P(C)$

б) С использованием первого неравенства Чебышева

Пусть X – случайная величина, принимающая значения равные числу бракованных конденсаторов в партии

$X \sim B(n, p)$ – биномиальная случайная величина

$MX = np = 1000 \cdot 0,01495 = 14,95$

$DX = npq \approx 14,73$

$P\{X \le \varepsilon\} \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon} \geq 0.997.$

$\frac{MX}{\varepsilon} \le 0,003 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{MX} \geq \frac{1}{0.003} \Rightarrow \varepsilon \geq MX \cdot \frac{1}{0.003} = \frac{14.95}{0.003} \approx 4983,3$ (бесполезно)

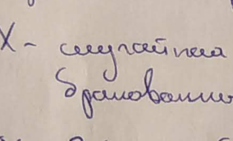
Пусть a и b – левая и правая граница соотв. $a = 0$; $b = 4984$

в) С использованием второго неравенства Чебышева

$$P\{X \le \varepsilon\} = P\{X - MX \le \varepsilon - MX\} \geq P\{|X - MX| \le \varepsilon - MX\} \geq 1 - \frac{DX}{(\varepsilon - MX)^2} \geq 0.997$$

$$\frac{DX}{(\varepsilon - MX)^2} \le 0,003 \Rightarrow (\varepsilon - MX)^2 \geq \frac{1}{0,003} \cdot DX$$

$$\cancel{\varepsilon - MX \geq \sqrt{DX}}$$



$$\begin{cases} \varepsilon \geq 0 \\ \varepsilon \in \left(-\infty; MX - \sqrt{\frac{DX}{0.003}}\right] \cup \left[MX + \sqrt{\frac{DX}{0,003}}; +\infty\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon \geq 0 \\ \varepsilon \in (-\infty; -55,11] \cup [85,01; +\infty) \end{cases}$$

$$\varepsilon \in [85,01; +\infty)$$

$a = 0$; $b = 86$

г) С использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа

$P\{k_1 \le k \le 1000\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) \geq 0.997$

$x_2 = \frac{1000 - 1000 \cdot p}{\sqrt{1000pq}} \approx \cancel{0{,}997}\ 256{,}69;\quad \Phi(x_2) = 0.5$

$\cancel{\Phi_0(x_1) \le 0.997 - \Phi_0(x_2)} =$

$\Phi_0(x_1)\quad \Phi_0(x_2) - 0{,}997 = 0{,}5 - 0.997 = -0{,}497 \Rightarrow x_1 \approx 2{,}76$

$x_1\quad \frac{k_1 - 1000p}{\sqrt{1000pq}} \Rightarrow k_1 - \quad x_1\sqrt{1000pq} + 1000p$

$P\{0 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) = 0.997$

$x_1 = \frac{0 - np}{\sqrt{npq}} = -3.8957 \Rightarrow \Phi_0(x_1) = -0.49995$

$\Phi_0(x_2) = 0.997 + \Phi_0(x_1) = 0.997 - 0{,}49995 = 0{,}49705 \Rightarrow x_2 = 2.75$

$2.75 \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow k_2 \geq 2{,}75\sqrt{npq} + np \approx 25{,}5$

$a = 0;\ b = 26$

Ответ: а) 1е нерав. Чебышева: $[0; 4984)$

б) 2е нерав. Чебышева: $[0; 86)$

в) т. Муавра-Лапласа: $[0; 26)$

52

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

$$f_X(x) = 5\theta x^4 e^{-\theta x^5}, \quad x > 0$$

Решение:

1) $r = 1 \Rightarrow 1$ уравнение

$$m_1(\theta) = \hat{m}_1(\vec{X})$$

$$m_1(\theta) = MX$$

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \overline{X}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x 5\theta x^4 e^{-\theta x^5}\,dx = 5\theta \int_0^{+\infty} x e^{-\theta x^5}\,d\frac{x^5}{5} = \int_0^{+\infty} x e^{-\theta x^5}\,d\theta x^5 =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} z = \theta x^5 \\ x = \sqrt[5]{\frac{z}{\theta}} \end{matrix} \right\} = \int_0^{+\infty} \sqrt[5]{\frac{z}{\theta}}\, e^{-z}\,dz = \frac{1}{\sqrt[5]{\theta}} \int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{5}} e^{-z}\,dz = \frac{1}{\sqrt[5]{\theta}}\,\Gamma\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{0.9182}{\theta^{\frac{1}{5}}}$$

$$\cancel{0.9182} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{\theta^{\frac{1}{5}}} = \overline{X}$$

$$\theta^{\frac{1}{5}} = \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{\overline{X}}$$

$$\theta = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{\overline{X}}\right)^5$$

Ответ: $\hat{\theta}(\vec{X}) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{\overline{X}}\right)^5$

53.

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, \ldots, x_5)$

$$f_X(x) = \frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} e^{-\theta x}, x>0, \quad \vec{x}_5 = (0.8, 1.8, 1.4, 0.8, 0.7)$$

Решение:

1) $L(\vec{X}, \theta) = \}X\text{-непр.}\{ = f(X_1, \theta)\cdot \ldots \cdot f(X_n, \theta) = \left(\frac{\theta^{\frac{7}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\right)^n \left(X_1^{\frac{5}{2}} \cdot \ldots \cdot X_n^{\frac{5}{2}}\right) e^{-\theta(X_1 + \ldots + X_n)}$

$$\ln L(\vec{X}, \theta) = \frac{7n}{2} \ln\theta - n \ln \Gamma\left(\frac{7}{5}\right) - \theta(X_1 + \ldots + X_n) + \ln\left(X_1^{\frac{5}{2}} \cdot \ldots \cdot X_n^{\frac{5}{2}}\right)$$

2) Уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{7n}{2\theta} - 0 - (X_1 + \ldots + X_n) + 0 = 0$$

$$\frac{7n}{2\theta} = n\bar{X}$$

$$\theta = \frac{7n}{2n\bar{X}} = \frac{7}{2\bar{X}}$$

$$\hat{\theta} = \frac{7}{2\cdot 1.1} = \frac{7\cdot 10}{2\cdot 11} = \frac{7\cdot 5}{11} = \frac{35}{11}$$

Ответ: $\theta = \frac{7}{2\bar{X}}$; $\hat{\theta} = \frac{35}{11}$

54

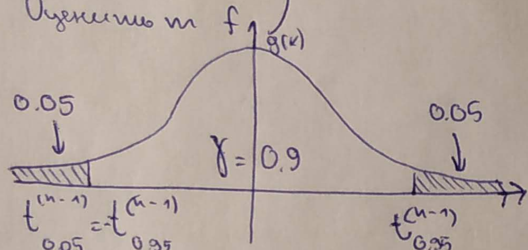
На основании $n=100$ опытов определили, что среднее время производства детали составляет $\bar{x}=5.5$ сек, а $S(\vec{X}_n)=1.7$ сек. Считая что время для производства распределено по нормальному закону, построить 90%-ый доверительный интервал для среднего времени производства детали и его среднеквадратичного отклонения.

Решение:

1) Пусть X – с.в, принимающая значения равные времени производства детали. Тогда $X \sim N(m, \sigma^2)$

2) $X \sim N(m, \sigma^2)$
m – неизв
σ^2 – неизв
Оценить m

$\Rightarrow$ исп. центр. статистику $g(\vec{X}, m) = \dfrac{m - \bar{X}}{S(\vec{X}_n)} \sqrt{n} \sim St(n-1)$



$t_{0.95}^{(n-1)}$ – квантиль уровня 0.95 распределения $St(n-1)$

$$P\left\{ -t_{0.95}^{(n-1)} < \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})} \sqrt{n} < t_{0.95}^{(n-1)} \right\} = 0.9$$

$$P\left\{ \underbrace{\bar{X} - \frac{S(\vec{X}) \cdot t_{0.95}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{X})} < m < \underbrace{\bar{X} + \frac{S(\vec{X})\, t_{0.95}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{X})} \right\} = 0.9$$

Найдем доверительный интервал для a

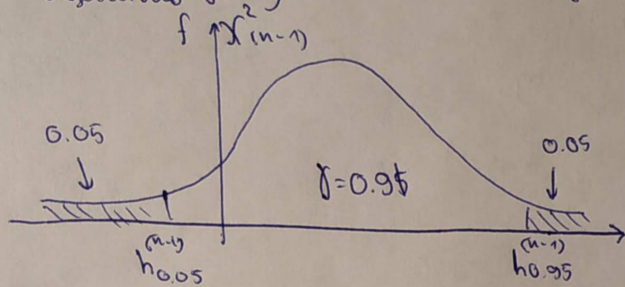
1) $n - 1 = 99$

2) $t_{0.95}^{(99)} = 1.9842$

3) $\underline{m}(\vec{x}) = 5{,}5 - \dfrac{1.7 \cdot 1.9842}{\sqrt{99}} = 5{,}16$

$\overline{m}(\vec{x}) = 5{,}5 + \dfrac{1.7 \cdot 1.9842}{\sqrt{99}} = 5{,}83$

2) $X \sim N(m, \sigma^2)$; σ^2 неизв; оценить σ $\Rightarrow g(\vec{X}, \sigma^2) = \dfrac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$



$$P\left\{ h_{0.05}^{(n-1)} < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} < h_{0.99}^{(n-1)} \right\} = 0.9$$

$$P\left\{ \frac{1}{h_{0.05}^{(n-1)}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2(\vec{X})} > \frac{1}{h_{0.95}^{(n-1)}} \right\} = 0.9$$

$$P\left\{ \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{0.95}^{(n-1)}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{0.05}^{(n-1)}}} \right\} = 0.9$$

Найдем доверительный интервал для σ

а) $n = 100 - 1 = 99$

б) $h_{0.95}^{(n-1)} = h_{0.95}^{(99)} = 124{,}34$

$h_{0.05}^{99} = 77{,}93$

$\overline{\sigma} = \sqrt{\dfrac{99 \cdot 1.7^2}{77.93}} = 1.92$

$\underline{\sigma} = \sqrt{\dfrac{99 \cdot 1.7^2}{124.34}} = 1{,}52$

Ответ: 0.9 доверительный интервал для m $(5{,}16; 5.83)$

0.9 доверительный интервал для σ $(1.52; 1.92)$